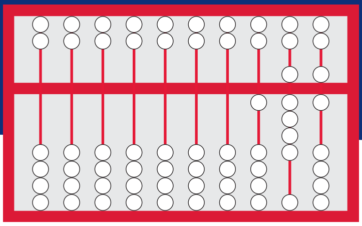
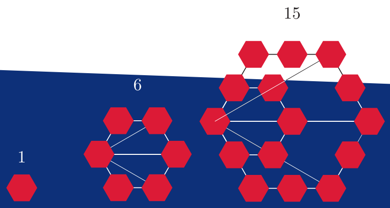


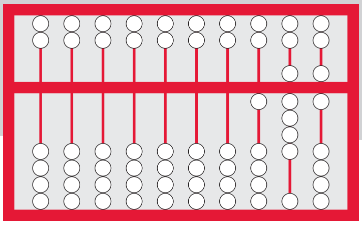


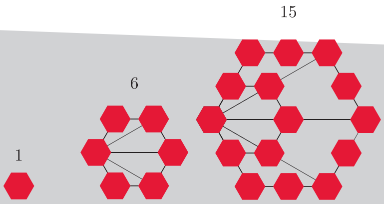
$$1 \times 1 = 1$$
$$11 \times 11 = 121$$
$$111 \times 111 = 12321$$
$$1111 \times 1111 =$$
$$11111 \times 11111 =$$

NÚMEROS e OPERAÇÕES

Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico

Luís Sequeira
Pedro Jorge Freitas
Suzana Nápoles





$1 \times 1 = 1$

$11 \times 11 = 121$

$111 \times 111 = 12321$

$1111 \times 1111 =$

$11111 \times 11111 =$

Números e Operações

Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico

Ministério da Educação

dgidc
Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular

Luís Sequeira
Pedro Jorge Freitas
Suzana Nápoles

Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular
Lisboa/2009

Biblioteca Nacional de Portugal– Catalogação na Publicação

SEQUEIRA, Luís, 1962- , e outros

Números e operações: programa de formação contínua em matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico/ /Luís Sequeira, Pedro Jorge Freitas, Suzana Nápoles

ISBN 978-972-742-310-1

I – FREITAS, Pedro Jorge, 1970-
II – NÁPOLES, Suzana Metelo de, 1949-

CDU 51
371
373

Ficha Técnica

Números e Operações
Guião Didáctico no Âmbito do Programa
para o Ensino da Matemática no 1.º Ciclo

Editor
Ministério da Educação
Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular

Autores
Luís Sequeira
Pedro Jorge Freitas
Suzana Nápoles

Design
Manuela Lourenço

Execução Gráfica
Editorial do Ministério da Educação

Tiragem
6000 Exemplares

Depósito Legal
293 493/09

ISBN
978-972-742-310-1

Índice

Nota de Apresentação

No âmbito do Programa de Formação Contínua em Matemática, foi identificada a importância de ter documentos científicos que incidissem sobre temáticas relevantes e que pudessem apoiar os professores na preparação da sua prática lectiva.

A Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular, no seguimento da proposta da Comissão de Acompanhamento do Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico, apresenta mais um volume da colecção de materiais de apoio destinados aos professores.

Da autoria de Luís Sequeira, Pedro Freitas e Suzana Nápoles, a brochura *Números e Operações* constitui-se como um importante recurso para apoiar o professor no desenvolvimento do seu conhecimento matemático numa temática central desde os primeiros anos de escolaridade.

A Directora-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular

Joana Brocardo

(Joana Brocardo)

Nota Prévia

As ideias fundamentais sobre números e operações fazem parte dos temas a leccionar em todos os níveis de ensino, desde o primeiro ciclo ao ensino secundário. Mas é sobretudo no 1º ciclo, que se lançam as primeiras pedras para a construção do pensamento matemático, que uma boa preparação nestes temas se revela determinante. Só a compreensão global dos números e operações pode evitar que os professores se refugiem na transmissão de um conjunto de técnicas rotineiras assentes nos algoritmos formais para as operações, porque é nelas que se sentem seguros.

A presente brochura pretende recordar alguns aspectos relativos ao conhecimento dos números e das operações nos vários conjuntos de números, com especial destaque para o estudo dos algoritmos operatórios no conjunto dos números naturais e dos números racionais. As operações com fracções serão fundamentadas de uma forma elementar, tirando partido de representações visuais. Também serão recordadas técnicas de cálculo mental e salientados os aspectos em que este pode conduzir a uma melhor compreensão dos números e das suas propriedades. Destaca-se ainda o aproveitamento dos números e operações na resolução de desafios matemáticos, que tanto podem revestir aspectos essencialmente recreativos, como decorrerem da constante necessidade de ir mais além na procura de respostas para o mundo que nos rodeia.

Este texto destina-se preferencialmente aos docentes que leccionam no 1º ciclo, mas pode constituir um elemento de consulta, tanto na formação inicial de professores para os 1º e 2º ciclos, como para os docentes do Ensino Básico. Não apresenta actividades directamente construídas para a sala de aula. Limita-se a sugerir algumas situações que podem ser aproveitadas para esse efeito.

Os autores

1 Um pouco de história dos números

Um pouco de história dos números

A Matemática nasceu quando o homem primitivo sentiu a necessidade de contar e de associar uma expressão escrita a essa contagem. A descoberta em meados do século XX, na região de Ishango (no Congo, perto dos grandes lagos), de um pequeno osso contendo marcas gravadas, parece atestar que, há cerca de 20000 anos, as populações locais já eram capazes de efectuar algumas somas e multiplicações rudimentares, pelo que a origem da Matemática poderá remontar ao período paleolítico.

A palavra Cálculo deriva do latim *calculus*, que significa *pedrinha*. Estas eram usadas para efectuar registos relativos a permutas comerciais, como pode ser testemunhado por achados arqueológicos em ruínas de origem suméria.

Com a transição para o período neolítico, começou a desenvolver-se alguma actividade comercial entre diversas povoações. Esta actividade promoveu a formação de linguagens, cujas palavras exprimiam coisas muito concretas mas onde já havia lugar para alguns termos numéricos simples. Estes termos numéricos destinavam-se apenas a estabelecer a distinção entre um, dois e muitos.

A noção de número desenvolveu-se entre os povos da Antiguidade, estimulada pelas trocas comerciais. Os registos relativos às transacções eram frequentemente conservados através de entalhes num pau ou marcas em placas de argila, constituindo um primeiro esboço de escrita matemática, em que os números eram concebidos exclusivamente para efectuar contagens. Estes números vieram a ser designados por *naturais*.

O hábito da repartição dos alimentos ou das propriedades em fracções fez com que surgissem de uma forma quase instintiva as razões de números naturais (as fracções) e, consequentemente os **números racionais positivos**. Na Antiguidade, os Egípcios faziam contas utilizando, para além dos naturais, apenas os números da forma $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}...$ (as fracções unitárias) e a fracção $\frac{2}{3}$, que se revelavam suficientes para o tipo de cálculos que executavam.

Têm particular interesse as fracções cujo denominador é uma potência de 10 (tal como 10, 100, 1000, etc). Essas fracções denominam-se **fracções decimais**. Como exemplos, podemos referir $\frac{1}{100}$ ou $\frac{34}{10^8}$, fracções estas que representam números racionais que se podem igualmente escrever na **forma decimal** ou na forma de **dízima**, $0,01$ e $0,00000034$, respectivamente. As dízimas representativas destes números são **finitas** porque têm apenas um número finito de algarismos diferentes de zero.

Observe-se que existem infinitas razões de números naturais representando cada número racional. Por exemplo, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$
Estas fracções são equivalentes, pois

$1 \times 4 = 2 \times 2,\ 2 \times 6 = 4 \times 3$, etc

Designam-se habitualmente por **números decimais** os números que se podem escrever como soma de um número inteiro com uma fracção decimal — por exemplo, $21,423$ (que é igual a $21 + \frac{423}{1000}$) ou $0,25$ (que é igual a $0 + \frac{25}{100}$).

Tendo em conta que as fracções decimais são imediatamente convertíveis em dízimas, procura-se frequentemente reduzir uma fracção à forma decimal. Por exemplo, a fracção $\frac{1}{4}$ é equivalente à fracção $\frac{25}{100}$ e assim $\frac{1}{4} = 0,25$, que é uma dízima finita. Esta forma decimal pode ser obtida dividindo 1 por 4.

1,00 | 4
20   0,25
0

1,00000 | 6
40   0,16666
40
40
40
4

Mas o problema nem sempre tem solução. Por exemplo, a fracção $\frac{1}{6}$ não é redutível a uma dízima finita. A divisão de 1 por 6 não tem fim. Observe-se que o número 6 se repete sempre. Dizemos então que a fracção $\frac{1}{6}$ é representada pela dízima infinita **periódica** 0,1666666... Colocando entre parênteses o padrão que se repete (e que neste caso se reduz a 6), escrevemos $\frac{1}{6} = 0,1(6)$.

Reciprocamente, toda a dízima infinita periódica representa um quociente de números inteiros, isto é, uma fracção.

Por exemplo, a dízima infinita periódica 1,(73) representa a fracção $\frac{172}{99}$.

Pondo $x = 1,737373\ldots$, tem-se $100x = 173,7373\ldots$ Então, fazendo a diferença $100x - x$, obtemos

$$\begin{array}{rr} & 173{,}737373\ldots \\ - & 1{,}737373\ldots \\ \hline & 172{,}000000\ldots \end{array}$$

Então $99x = 172$, e $x = \frac{172}{99}$

Foram os Gregos quem mais importância atribuiu aos números racionais. Sendo essencialmente geómetras, eles não estudavam os números racionais como entes abstractos mas devido ao facto de permitirem, por exemplo, relacionar os comprimentos dos lados de várias figuras geométricas e estabelecer entre elas relações de grandeza.

Cerca do ano 572 a.C. nasceu o filósofo Pitágoras, um dos mais famosos e influentes pensadores de todos os tempos e fundador da escola Pitagórica (em Crotona, no sul de Itália). Os pitagóricos rendiam verdadeiro culto místico ao conceito de *número*, considerando-o como essência das coisas. Acreditavam que tudo no universo estava relacionado com números naturais ou razões de números naturais. Sabiam que as harmonias musicais se podiam exprimir através de razões de números: premindo uma corda esticada obtém-se um som uma oitava abaixo do som obtido premindo com a mesma intensidade a corda dividida ao meio. Acreditavam também que os corpos celestes emitiam sons que dependiam do seu tamanho, distância, densidade e movimento e que, se conseguissem desvendar os segredos relacionados com as razões de números naturais, todo o universo se uniria numa harmonia musical.

Para desvendar esses segredos classificaram os números naturais de diferentes formas:

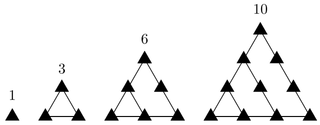
- Os números pares, isto é, os que são divisíveis por dois (2, 4, 6, 8, ...)
- Os números ímpares, isto é, os que não são pares (1, 3, 5, 7, ...)
- Os números primos, isto é, os números que admitem apenas

dois divisores, o número 1 e eles próprios (2, 3, 5, 7, 11 ,13, 17, ...)

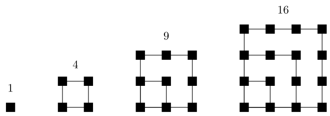
- Os números compostos, isto é, os que são maiores do que 1 e não são primos (4, 6, 8, 9, 10, 12, ...)

Foram os pitagóricos que inventaram os números figurativos, construídos contando os vértices dos polígonos regulares:

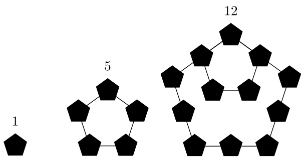
- Os números triangulares $(1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \dots)$



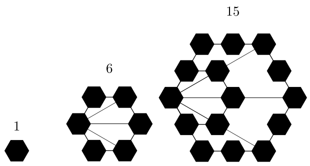
- Os números quadrados $(1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots)$



- Os números pentagonais $(1, 5, 12, 22, 35, \dots)$



- Os números hexagonais $(1, 6, 15, 28, 45, \dots)$



Os pitagóricos também acreditavam que os comprimentos dos segmentos de recta estavam sempre relacionados com a razão de dois números naturais. Para medir segmentos de recta, tomavam como unidade um segmento de recta $[AB]$ e viam quantas vezes $[AB]$ ou fracções de $[AB]$ eram necessárias para perfazer a medida dos segmentos que pretendiam medir.

Esta crença foi profundamente abalada quando, ao pretenderem medir a diagonal de um quadrado com lado igual à unidade, constataram que o processo anterior não era aplicável. A diagonal divide o quadrado em dois triângulos rectângulos isósceles iguais que a têm como hipotenusa. Assim, pelo teorema de Pitágoras, o comprimento da diagonal é igual a $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, número que não é susceptível de ser expresso como razão de números naturais.

Ao descobrirem que a diagonal de um quadrado de lado 1 não era uma razão entre dois inteiros (em linguagem actual, que a raiz quadrada de 2 é um **número irracional**) os pitagóricos consideraram quebrada a harmonia do universo, já que não podiam aceitar a raiz quadrada de dois como um número, mas não podiam negar que esta raiz era a medida da diagonal de um quadrado unitário. Convencidos de que os deuses os castigariam caso divulgassem aquilo que lhes parecia uma imperfeição divina, tentaram ocultar este facto. Segundo reza a lenda, o primeiro membro da seita pitagórica que o divulgou morreu afogado.

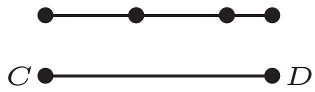
Esta descoberta constitui a génese dos números não racionais ou números **irracionais**. Os elementos do conjunto reunião dos conjuntos dos números racionais e dos números irracionais denominam-se números **reais**. Ao começarem a especular sobre a natureza e propriedades dos números, Pitágoras e os seus discípulos deram origem à Teoria dos Números, um dos ramos mais profundos da Matemática. O nascimento desta teoria remonta assim ao século VI antes de Cristo.

Os números irracionais não se esgotam com as raizes (como, por exemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[5]{8}$). O número Pi ($\pi = 3,141592\ldots$), o número de ouro ($\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\ldots$) e o número de Neper

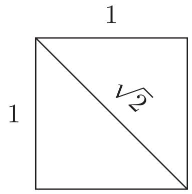
Por exemplo, tomando para unidade o segmento

vejamos quantas vezes esta unidade, ou fracções dela, "cabem" no segmento

Comparando com o segmento AB e com a sua metade



concluimos que a medida de CD é igual a $2+\frac{1}{2}$.

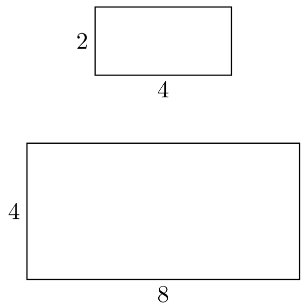


($e = 2,718281\ldots$) são alguns exemplos de números irracionais.

O número π é definido como sendo a razão entre o perímetro e o diâmetro de qualquer circunferência. Apesar de muitas civilizações antigas terem observado, através de medições, que a razão do círculo é a mesma para círculos de tamanhos diferentes, os Gregos foram os primeiros a explicar porquê.

Trata-se de uma propriedade simples das figuras semelhantes: *se uma figura plana sofre uma mudança de escala através de um factor de escala* s (*expansão ou contracção*), *o seu perímetro e área sofrem uma mudança de escala pelos factores* s e s^2, *respectivamente*.

Por exemplo, se expandirmos um rectângulo cujos lados medem 2 cm e 4 cm por um factor de escala 2, obtemos um novo rectângulo cujos lados medem 4 cm e 8 cm, sendo o factor de escala $s = 2$.



Este facto alerta para os cuidados a ter quando se pretende fazer uma ampliação. Para duplicar uma folha de papel, por exemplo, do formato A4 para o formato A3, não se duplica a medida dos lados. Se o fizéssemos, obteríamos uma folha com o formato de duas folhas A3 justapostas. Qual será então o factor de escala a usar para passar do formato A4 para o formato A3 ? Uma vez que a área da folha duplica, o factor de escala será s tal que $s^2 = 2$, logo $s = \sqrt{2}$.

Expandindo ou contraindo uma circunferência de diâmetro d e perímetro P através de um factor de escala s, obtém-se uma circunferência de diâmetro sd e perímetro sP. Como $\frac{sP}{sd} = \frac{P}{d}$, a razão entre o novo perímetro e o novo diâmetro é igual à mesma razão da circunferência original. Essa razão constante é o nosso bem conhecido número π.

Tem-se então que $P = \pi d$. Sendo r o raio da circunferência, uma vez que $d = 2r$, tem-se $P = 2\pi r$.

Arquimedes provou que a razão constante entre a área de um círculo e o quadrado do seu raio é o número π, pelo que a área do círculo de raio r é $A = \pi r^2$. Assim, se expandirmos o círculo unitário ($r = 1$) por um factor de escala, por exemplo, igual a 3, o seu perímetro passa de 2π para 6π e a sua área passa de π para 9π.

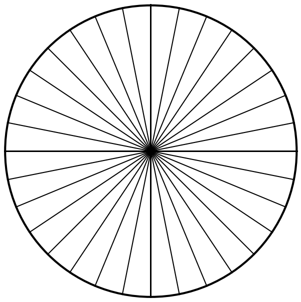
Os antigos Gregos foram provavelmente também os primeiros a aperceberem-se de que π, tal como $\sqrt{2}$, é um número bastante diferente de quaisquer outros números inteiros ou números racionais (razões de números inteiros) que usavam na sua matemática. Foram capazes de provar que $\sqrt{2}$ é irracional, mas não existe nenhuma evidência que tenham tentado provar que π também não é um número racional.

Durante muito tempo as pessoas questionaram-se se π era uma fracção exacta. Assim, calcularam-se mais e mais casas decimais para π, procurando padrões que se repetissem vezes e vezes sem conta, mas nenhum foi encontrado. Finalmente no século XVIII, demonstrou-se que nunca se iria encontrar um padrão repetido. Em 1761 o matemático alemão Johann Lambert mostrou definitivamente que π é um número irracional.

Para os gregos os números existiam em função da sua interpretação geométrica (por exemplo, as raizes quadradas associadas a diagonais de quadrados, o número π como a razão constante entre o perímetro e o raio de qualquer circunferência, etc).

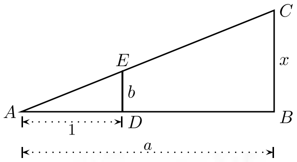
Demonstração de Arquimedes

Decomponhamos o círculo de raio 1 em 32 sectores iguais.



Designemos por P o perímetro da circunferência que limita o círculo. Cada sector confunde-se com um triângulo  em que a base é aproximadamente igual a $\frac{P}{32}$. A área de cada sector é, pois, aproximadamente igual a $\frac{1}{2} \times \frac{P}{32}$, e a área do círculo é aproximadamente igual a $32 \times \frac{1}{2} \times \frac{P}{32}$, ou seja, a $\frac{P}{2}$. À medida que se aumenta o número de "fatias", cada sector se aproxima mais de um triângulo, e podemos dizer que $A = \frac{P}{2}$, isto é, $A = \pi$.

Para multiplicar a por b, com $a > 1$, construa-se o segmento $[AB]$ representativo de a. Marque-se o ponto D sobre $[AB]$ de forma a que o comprimento de $[AD]$ seja igual a 1. Construa-se o segmento $[DE]$, representativo de b e perpendicular a $[AB]$. Traçando a partir de B uma recta paralela a $[DE]$ e intersectando-a com a recta que passa por A e por E, obtém-se o ponto C. Os triângulos rectângulos ABC e ADE são semelhantes (porque têm, de um para outro, os ângulos iguais). Como, em triângulos semelhantes, a ângulos iguais se opõem lados proporcionais, tem-se que $\frac{x}{b} = \frac{a}{1}$, pelo que $x = ab$, isto é, a medida de $[BC]$ é igual ao produto ab.



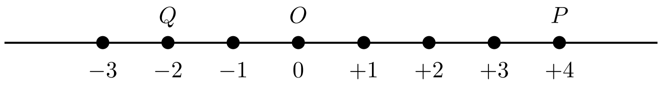
Georg Cantor
(1845-1918)

Para realizarem cálculos usavam a associação dos números a comprimentos de segmentos. Reduziam assim a adição e a subtracção de números à adição e subtracção dos segmentos que os representavam. Para a multiplicação e divisão recorriam ainda à semelhança de triângulos.

Os avanços da Matemática levaram a acrescentar o zero e os números negativos aos números naturais, formando assim o conjunto dos números inteiros. Mas, contrariamente ao que uma análise simplista pode levar a crer, o aparecimento do zero e dos números negativos surge muito tempo depois da constatação de que existiam números irracionais e a sua invenção revestiu-se de grandes dificuldades. Embora a partir do século XVI os matemáticos manipulassem os números reais em cálculos algébricos, só nos finais do século XIX, principalmente por obra dos matemáticos alemães Dedekind e Cantor, foram conferidas bases sólidas à teoria dos números reais.

O conceito de grandeza evoluiu paralelamente ao conceito de número. As grandezas positivas surgiram associadas aos comprimentos, mas foi necessário para o raciocínio a introdução de grandezas nulas e de grandezas negativas, por exemplo, quando se tratavam problemas de lucro, perda (lucro negativo) e ausência de lucro (lucro nulo). As grandezas assim ampliadas dizem-se relativas e permitem concretizar todos os números.

As grandezas mais utilizadas são os comprimentos, podendo os números ser representados por pontos sobre uma recta orientada onde se definiu uma origem O, associada ao número zero, um lado positivo e um lado negativo.



Chama-se **módulo** ou **valor absoluto** de um número à distância à origem do ponto que o representa. Assim, como o ponto P dista 4 unidades da origem o módulo de $+4$ é igual a 4 e escreve-se $|+4| = 4$. Analogamente, como o ponto Q dista 2 unidades da origem, o módulo de -2 é igual a 2 e escreve-se $|-2| = 2$. Cada ponto fica caracterizado pela sua abcissa, que é numericamente igual à sua distância à origem, afectada do sinal $+$ ou $-$ consoante ele se situa à direita ou à esquerda de O. Por exemplo, o ponto P está associado ao número 4, tendo portanto abcissa igual a 4, e Q tem abcissa igual a -2.

A noção de valor absoluto de um número é fundamental para o tratamento da medição de grandezas. Por exemplo, como $|-7| = 7$, se a unidade de lucro for um Euro, diz-se que se tem uma perda de 7 Euros se o lucro for -7, isto é, a perda é o valor absoluto do lucro negativo.

Genericamente,

- se x é um número positivo, o módulo de x coincide com x;
- se x é igual a zero, o seu módulo também é igual a zero;
- se x é um número negativo, o módulo de x é igual ao simétrico de x.

Resumidamente,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

2 Sistemas de numeração e bases de numeração

Sistemas de numeração e bases de numeração

Introdução

Um dos grandes avanços da aritmética sucedeu quando alguns povos passaram a associar símbolos a valores superiores a 1 e criaram regras que lhes permitiam escrever qualquer número natural. Chamamos **sistema de numeração** à associação de uma simbologia com um conjunto de regras para escrever os números.

A introdução de sistemas de numeração permitiu simplificar a escrita dos números naturais e, consequentemente, a sua utilização.

Podemos dividir os sistemas de numeração em dois grupos, os sistemas **não posicionais** e os sistemas **posicionais**. Enquanto na numeração não posicional a posição dos símbolos no número não é fundamental para a sua interpretação, na numeração posicional a posição dos símbolos é essencial para essa interpretação.

Numeração não posicional

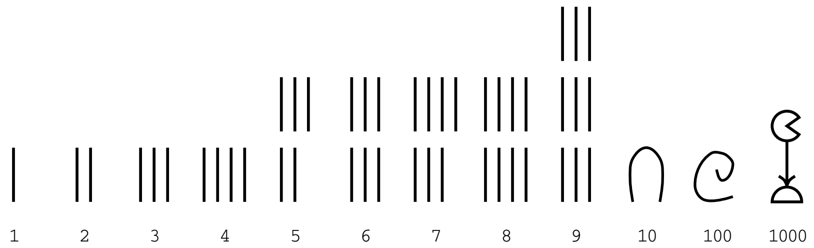
Como exemplos de sistemas de numeração não posicional temos os sistemas Egípcio, Grego e Romano.

No sistema Egípcio

∩ ∩ ∩ ∩ | |

representava a soma dos valores nele representados, isto é,

$$10 + 10 + 10 + 10 + 2 = 42$$



Numeração egípcia

A simbologia romana, que ainda se vê frequentemente nos dias de hoje, por exemplo na numeração das horas em mostradores de relógios, na numeração dos capítulos de livros e para a indicação dos séculos, é também uma numeração não posicional.

Esta notação que, no início, era simplesmente aditiva, evoluiu para aditiva e subtractiva de forma a não repetir os símbolos mais do que três vezes, opção adoptada na Europa muito depois da queda do Império Romano.

Por exemplo, 196 escrevia-se CLXXXXVI, uma vez que

$$\begin{aligned} 196 = & 100 + 50 \\ & +10 + 10 + 10 + 10 \\ & +5 + 1 \end{aligned}$$

Esta forma evoluiu para CXCVI, uma vez que

$$196 = 100 + (100 - 10) + 5 + 1$$

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
X	XX	XXX	XL	L	LX	LXX	LXXX	XC	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	
C	CC	CCC	CD	D	DC	DCC	DCCC	CM	M
100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000

Numeração romana

Os Gregos também criaram um sistema não posicional utilizando as letras do seu alfabeto. Embora na antiguidade este povo se tenha destacado no estudo da geometria, fizeram poucos progressos na Aritmética, já que tinham um sistema de numeração não posicional.

α	β	γ	δ	ϵ	$\sigma\tau$	ζ	η	θ	τ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Numeração grega

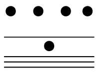
Por exemplo, $\tau\epsilon = 15$.

Este sistema e, principalmente, o romano, foram seguidos na Europa até à introdução da numeração indo-árabe.

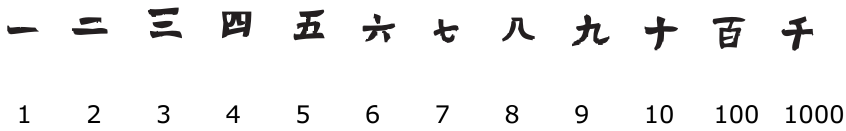
A representação dos números deve torná-los facilmente manuseáveis e a numeração não posicional é pouco adequada para efectuar cálculos. Veja-se, por exemplo, o que se passa com a numeração Romana, em que uma simples adição é difícil de efectuar.

A introdução da numeração posicional facilitou a realização dos cálculos, diminuindo consideravelmente o risco de errar.

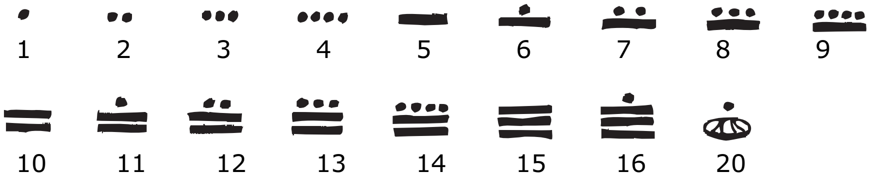
Numeração posicional

Na numeração Maia, o mesmo símbolo em posições diferentes tem significados diferentes. Por exemplo, • • significa 2 e : significa 21.
O posicionamento na horizontal significa $1+1$ e na vertical significa $1\times 20+1$;
A disposição dos símbolos em duas linhas faz toda a diferença: • • na linha de cima significa 2×20 e • • na linha de baixo significa 2.
Analogamente, • • • / • • representa 62; • • / • • • representa 43 e  representa 196 $(9\times 20+16)$

A numeração Maia e a numeração Chinesa constituem exemplos de numeração posicional.



Numeração chinesa



Numeração maia

O mesmo acontece com a numeração indo-árabe, usada actualmente na generalidade dos países civilizados. Este sistema foi introduzido pelos Hindus. Fontes históricas indicam que este povo já o usava no século VIII.

Os Árabes, que cultivavam relações comerciais com os Hindus, adoptaram o sistema decimal Hindu, que foi utilizado por Alkhowarism na sua obra Álgebra, e assim introduzido na Europa. A própria designação *algarismo* deriva de Alkhowarism. Os símbolos hindus, que assumiram o aspecto actual no século XVI, são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Analisemos o carácter posicional do sistema de numeração indo-árabe comparando, por exemplo, os números 196 e 961.

O número 196 é constituído por uma centena, nove dezenas e seis unidades, isto é,

$$196 = 100 + 9 \times 10 + 6$$

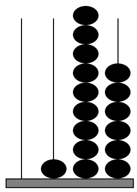
O número 961, resultante de uma alteração da posição dos mesmos símbolos, é constituído por nove centenas, seis dezenas e uma unidade, isto é,

$$961 = 9 \times 100 + 6 \times 10 + 1$$

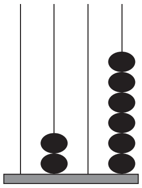
A criação da numeração indo-árabe está associada à numeração figurativa expressa em contadores de diversos tipos, nomeadamente em ábacos. Os ábacos, ainda usados correntemente no Japão e na China para efectuar cálculos, terão sido inventados, segundo se crê, no terceiro milénio antes de Cristo. Evoluiram de formatos primitivos com contas a deslizar em varetas correspondentes aos diferentes agrupamentos (unidades, dezenas, centenas, etc.), até aos modelos actuais, como o ilustrado esquematicamente na página seguinte.

Ao longo dos tempos, os ábacos foram usados por vários povos com designações diferentes: *suan-pan* na China (séc XIII), *soroban* no Japão, *nepohualtzitzin* na civilização Azteca (séc.X dC), *schoty* na Rússia (inventado no século XVII, com varetas horizontais, e ainda hoje utilizado). Julga-se terem entrado no Ocidente pela mão dos primeiros Cristãos, tendo caído em desuso na Europa durante a época do Renascimento.

Analisemos a representação do número 196. Pretendemos expressar que o número é a soma de seis unidades, nove dezenas e uma centena. Num ábaco primitivo teremos seis contas, representando seis unidades na primeira vareta (a contar da direita), nove contas, representando nove grupos de dez unidades na segunda vareta e uma conta na terceira vareta, representando um grupo de cem unidades.

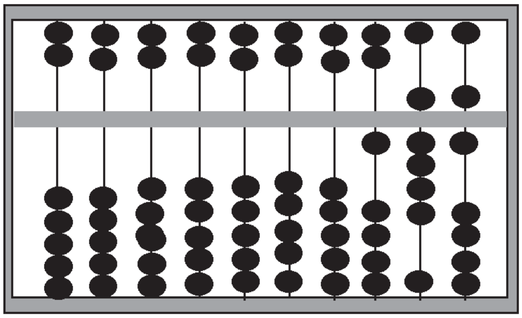


A associação dos símbolos à numeração figurativa foi determinante para a introdução do zero. Por exemplo, na representação de 206 a segunda vareta fica vazia.



Um suan-pan é constituído por uma esquadria em madeira separada em duas secções, que suporta um conjunto de varetas verticais onde deslizam livremente contas também em madeira. Na secção superior deslizam duas contas representando cada uma o valor 5 e na secção inferior deslizam cinco contas representando cada uma o valor 1. Da direita para a esquerda as colunas correspondem sucessivamente às unidades, dezenas, centenas, etc.

Apresenta-se em seguida o esquema de um suan-pan onde se representa o número 196.



Bases de numeração

Uma característica comum a todos os sistemas de numeração, posicional ou não, é a existência de um número finito de símbolos. Sendo o conjunto dos números naturais infinito, foi necessário recorrer a agrupamentos de números (de primeira ordem), que por sua vez, deram origem a novos agrupamentos (de segunda ordem), e assim sucessivamente.

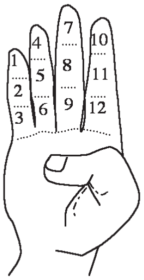
Analisemos o sistema de numeração indo-árabe. O primeiro agrupamento é o das unidades, o segundo agrupamento o das dezenas, o terceiro o das centenas, e assim sucessivamente. Assim, uma dezena representa dez agrupamentos de 1, uma centena representa dez agrupamentos de 10, um milhar representa dez agrupamentos de 100 e assim sucessivamente.

Num sistema de numeração, o número (constante) de objectos de ordem inferior que constitui um agrupamento de ordem superior chama-se **base** do sistema de numeração. No caso do sistema de numeração indo-árabe o número anteriormente referido é 10, isto é, trata-se de um sistema de base 10, também denominado **sistema decimal**.

Usando a base dez, todos os agrupamentos correspondem a *potências* de dez:
$1 = 10^0$, $10 = 10^1$,
$100 = 10 \times 10 = 10^2$,
$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$, e assim por diante.

É de salientar que a adopção de bases de numeração remonta aos mais antigos sistemas de numeração. A maioria dos povos optou por sistemas de contagem baseados na base 5, que rapidamente evoluíram para 10 e 20, muito provavelmente devido ao facto de termos dez dedos nas mãos, e ser usual contar por eles (ou vinte, se incluirmos os dos pés). O sistema vigesimal ou de base 20 também foi adoptado pelos Aztecas e Celtas. Na língua francesa existem vestígios dessa numeração como a designação quatre-vingts (quatro vintes) para o número oitenta.

Também o sistema de base 12 foi bastante difundido. Julga-se que este sistema estaria ligado à contagem das 12 falanges dos dedos da mão, excluindo o polegar que serviria para a contagem.



A utilização das bases 5 e 20 na numeração Maia origina algumas confusões. Com efeito, o símbolo $\underline{\quad\bullet\quad}$ tanto representa 6 $(6 = 5 + 1)$ como 25 $(25 = 1 \times 20 + 5)$; analogamente, $\underline{\quad\bullet\,\bullet\quad}$ tanto representa 7 $(7 = 5 + 2)$ como 45 $(45 = 2 \times 20 + 5)$.

Associado a este sistema tem-se, por exemplo, ainda nos dias de hoje, a contagem em dúzias, as medidas inglesas em que o pé tem doze polegadas e a libra doze onças, o ano com doze meses e o mostrador do relógio mecânico dividido em doze horas.

Os Sumérios e os Babilónios usaram a base 60. Essa escolha terá a ver com a vocação destes povos para a astronomia e com o facto de um ano ter, aproximadamente, 360 dias. Isso tê-los-á levado a dividir o círculo em 360 partes iguais, cada uma das quais é um grau, e a atribuir importância a 1/6 do círculo, que são 60 graus.

Já no que diz respeito ao sistema de numeração Maia, embora seja um sistema de base 20, ele usa 5 como agrupamento auxiliar.

Retomemos o número 196, que já escrevemos em vários sistemas de numeração.

Como vimos,

$$196 = 100 + 9 \times 10 + 6 = 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$

À expressão

$$1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$

chamamos **decomposição polinomial** de 196 em **base 10**.

A expressão de 196 à custa de potências de 10 evidencia o papel da base 10 na escrita do número: os algarismos com que o número se escreve não são mais do que os coeficientes da expressão. Cada um dos algarismos, da direita para a esquerda, é multiplicado por uma sucessiva potência de 10 (o algarismo das unidades é multiplicado por $10^0 = 1$).

Por analogia com o que se passa na decomposição polinomial de 196 na base 10, pensemos na representação deste número à custa de potências de 2 usando apenas 0 e 1 como coeficientes:

$$196 = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$

Exprimimos este facto dizendo que a sequência 11000100, constituída pelos coeficientes da decomposição anterior, representa 196 em base 2, ou *base binária*.

A base binária é utilizada pelos computadores uma vez que estes se limitam a distinguir se um determinado circuito está aberto (1) ou fechado (0). Tem a desvantagem de precisar de uma grande quantidade de algarismos 0 e 1 para representar qualquer número.

À expressão

$$1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5$$
$$+ 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3$$
$$+ 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$

chamamos **decomposição polinomial** de 196 em **base 2**.

Tendo em conta que, por exemplo,

$$196 = 1 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 4 \times 5 + 1$$

dizemos que a sequência 1241, constituída pelos coeficientes da decomposição anterior, representa 196 em base 5.

Observemos que, sendo 5 a base escolhida, os algarismos possíveis para a sequência são 0, 1, 2, 3, 4.

Será explicado mais adiante como efectuar mudanças de base e como operar com os números nas diferentes bases.

3 As quatro operações elementares

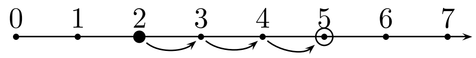
As quatro operações elementares

Definição e propriedades

Para estudar informalmente as quatro operações elementares — adição, multiplicação, subtracção e divisão — e as suas propriedades, podemos partir de três conceitos base:

- os números naturais, que aparecem naturalmente como números associados à contagem de objectos, aos quais juntamos o número zero,
- a ordem dentro desses números naturais, que permite compará-los, e
- a operação de **adição**: como estamos a encarar os números naturais como associados à contagem de objectos, adicionar dois números corresponde a contar o número de objectos da união de dois conjuntos disjuntos. Para interpretar a adição, podemos recorrer à representação dos números naturais sobre uma recta:para determinar a soma de 2 com 3, basta, a partir do 2, deslocar 3 posições para a direita.

Dois conjuntos dizem-se *disjuntos* quando não têm elementos comuns. A *união* de conjuntos é o conjunto que tem todos os elementos de um e de outro: por exemplo, os conjuntos $\{1, 2\}$ e $\{3, 4, 5\}$ são disjuntos e a sua união é o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.



Adição e Multiplicação

A adição goza das propriedades associativa e comutativa. É fácil de ilustrar, com exemplos, que qualquer destas propriedades surge de forma natural.

Para a associativa, se tivermos uma caixa onde estamos a guardar maçãs, que estão agrupadas em colecções de 3, 6 e 13, tanto faz juntar os dois primeiros conjuntos, formando um de 9, guardando as 9 e depois as 13, como agrupar os dois últimos conjuntos, formando um de 19, guardando depois primeiro o conjunto de 3 e depois o de 19. Em qualquer dos casos ficamos com 22 maçãs na caixa. Para a comutativa, basta ver que tanto faz pôr 7 maçãs na caixa, e depois 11, como pôr primeiro as 11 e depois as 7, que o resultado é o mesmo: 18 maçãs.

$$(3+6)+13 = 3+(6+13)$$

$$7+11 = 11+7$$

Formalizando, temos:

- A adição é comutativa: para quaisquer números naturais m e n,
$$m+n=n+m.$$
- A adição é associativa: para quaisquer números naturais m, n e p,
$$(m+n)+p=m+(n+p).$$

Os números que se adicionam chamam-se *parcelas*, não importando a ordem em que são colocados, por causa da comutatividade. Designa-se por *soma* o resultado da adição.

Quem queira ver uma fundamentação mais abstracta destes conceitos, pode encontrá-la por exemplo na axiomática de Peano.

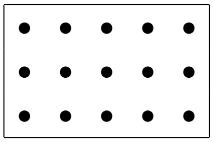
Pode encontrar-se uma descrição muito sumária da axiomática de Peano, por exemplo, na *Wikipedia*. Uma outra fundamentação dos números inteiros pode encontrar-se em [5].

Vamos agora definir a multiplicação a partir da adição. Como se espera, definimos a multiplicação de naturais como a soma repetida do mesmo número: escrevemos 3×5 para significar a adição de 5 consigo próprio três vezes:

$$3 \times 5 = 5 + 5 + 5 = 15.$$

A definição que demos da multiplicação é então a de uma adição repetida, que é conveniente para ilustrar problemas como: "Tenho sete carteiras de fósforos, cada uma com vinte fósforos. Quantos fósforos tenho?"

Podemos também interpretar a multiplicação como o número de quadrados de um arranjo rectangular, que é a interpretação conveniente quando contamos, por exemplo, o número de quadrados de chocolate numa tablete, ou o número de bombons numa caixa.



$3 \times 5 = 15$

Esta é também a interpretação que mais se aproxima da definição que se dá em teoria de conjuntos. Quando temos dois conjuntos, A, com n elementos, e B, com m elementos, o produto cartesiano $A \times B$, formado pelos pares (a, b), com $a \in A$ e $b \in B$ tem exactamente nm elementos. Por exemplo, de $A = \{x, y, z\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, então $A \times B$ tem os seguintes elementos:

	1	2	3	4	5
x	$(x,1)$	$(x,2)$	$(x,3)$	$(x,4)$	$(x,5)$
y	$(y,1)$	$(y,2)$	$(y,3)$	$(y,4)$	$(y,5)$
z	$(z,1)$	$(z,2)$	$(z,3)$	$(z,4)$	$(z,5)$

Notamos que, aqui, os conjuntos A e B *não têm de ser disjuntos*, ao contrário do que acontece quando estudamos a adição. Se $A = \{1, 2, 3\}$, por exemplo, teríamos à mesma 15 elementos em $A \times B$: $(1, 1), (1, 2), (1, 3)$, etc.

Esta operação é também associativa e comutativa. Para ilus-

É importante notar que, embora 5×3 também seja igual a 15, representa uma adição repetida diferente:

$$5 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$$

Para distinguir claramente o significado de 3×5 e de 5×3, podemos ler pausadamente, por exemplo:

5×3: *Cinco vezes* [o número] 3

As provas internacionais de atletismo incluem geralmente provas de estafeta 4×400m. *Imagine-se* o que seria uma prova de estafeta 400×4m!!!

trar a associatividade, e considerando mais uma vez um exemplo, é simples de pensar que, se tivermos pilhas de 4 caixas de 12 ovos, e houver 5 destas pilhas — o que representa $5 \times (4 \times 12)$ —, isto é o mesmo que ter $5 \times 4 = 20$ caixas de 12 ovos assentes sobre a mesa — o que representa $(5 \times 4) \times 12$ e, neste caso, é também mais seguro...

A partir de agora, como temos duas operações, para reduzir o uso de parênteses, convencionamos o seguinte: quando houver adições e multiplicações numa expressão, *fazem-se primeiro as multiplicações e depois as adições*. Por exemplo, quando escrevemos $2 + 5 \times 4$, isto quer dizer

$$2 + (5 \times 4) = 2 + 20 = 22,$$

e **não** $(2 + 5) \times 4 = 7 \times 4 = 28$.

Não é tão imediato que a multiplicação seja comutativa: de facto, por que é que contando 6 quatro vezes, se obtém o mesmo que se contarmos 4 seis vezes? No entanto, a propriedade é simples de verificar; no nosso caso, basta agrupar os quatro grupos de 6 em colunas:

$$\begin{array}{cccc}
\square & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square
\end{array}$$

Aparecem assim naturalmente os seis grupos de 4, se olharmos para as linhas. É claro que o que se fez com os números 4 e 6 pode ser feito para quaisquer dois números que se multipliquem.

Também é verdade que a multiplicação é distributiva em relação à adição. Ilustrando com um exemplo: tomarmos três vezes um conjunto com 11 elementos é o mesmo que tomarmos três vezes dois conjuntos com 4 e com 7 elementos — isto é, $3 \times 11 = 3 \times (4+7) = 3 \times 4 + 3 \times 7$. Graficamente,

$$\begin{array}{cccc|ccccccc}
\square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square
\end{array}$$

Formalizando, temos:

- A multiplicação é comutativa: para quaisquer números naturais m e n,

$$m \times n = n \times m.$$

- A multiplicação é associativa: para quaisquer números naturais m, n e p,

$$(m \times n) \times p = m \times (n \times p).$$

- A multiplicação é distributiva em relação à adição: para quaisquer números naturais m, n e p,

$$m \times (n + p) = m \times n + m \times p.$$

Os números que se multiplicam são chamados *factores*, não importando a ordem, mais uma vez por causa da comutatividade. No entanto, como o significado do primeiro é diferente do do segundo — o primeiro conta as vezes que se adiciona o segundo — chamamos ao primeiro *multiplicador* e ao segundo *multiplicando*. Designamos por *produto* o resultado da multiplicação.

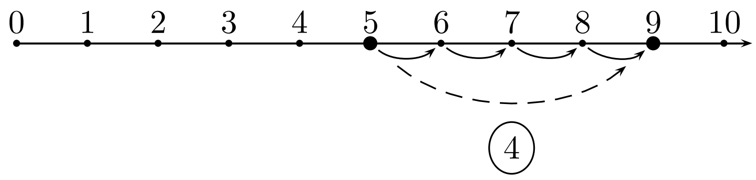
Subtracção e Divisão

Agora que conhecemos a adição, a multiplicação e as suas propriedades, podemos pensar em definir as suas operações inversas: a subtracção e a divisão. Ao escrever, por exemplo, $5-3$, estamos à procura do número que adicionado a 3 dê 5, que é 2. Ao escrever $12/4$, estamos à procura do número que multiplicado por 4 dê 12, que é 3.

A definição de subtracção corresponde à interpretação da "parcela em falta", que é a maneira natural de representar certos problemas, como por exemplo:

> "Tinha cinco canetas, agora tenho nove, quantas me deram?"

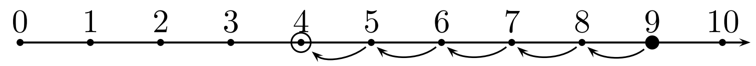
A resolução deste problema pode ser facilmente ilustrada localizando os números naturais sobre uma recta: a partir de 5, contamos quantas posições temos de nos deslocar para a direita para chegar a 9.



Também se pode interpretar a subtracção, talvez mais naturalmente, como um retirar de elementos a um conjunto:

> "Tinha nove canetas, tirei cinco, quantas ficaram?"

Mais uma vez, podemos recorrer à representação dos números naturais sobre uma recta: a partir de 9, deslocamo-nos 5 posições para a esquerda e vemos em que número ficamos.



A definição de divisão, como factor em falta, pode ter duas interpretações.

Podemos dividir um certo número de objectos num número fixo de grupos e procurar quantos elementos terá cada grupo, como por exemplo:

> "Os 20 alunos de uma turma vão ser divididos em quatro equipas, com o mesmo número de elementos. Quantos elementos terá cada equipa?"

Podemos dividir um conjunto de objectos em grupos, especificando quantos objectos terá cada grupo, por exemplo:

> "Os 20 alunos de uma turma vão ser divididos em equipas de 4 alunos. Quantas equipas teremos?"

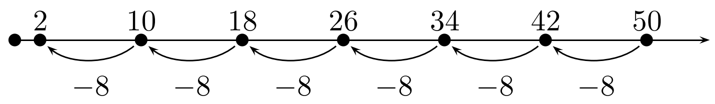
Em ambos os casos estamos a efectuar a divisão de 20 por 4.

Ao contrário das anteriores, estas operações nem sempre são possíveis: só se podem subtrair dois números se o primeiro for maior ou igual ao segundo, e só se podem dividir dois números se o primeiro for múltiplo do segundo. Como, no segundo caso, isto limita muito a operação, define-se outra divisão, a que vamos chamar *divisão inteira* ou *divisão com resto*. Por exemplo, para dividir 14 por 4, vamos à procura do maior múltiplo de 4 que seja menor ou igual a 14, e verificamos quanto falta para 14 (*resto*). No caso, esse múltiplo é $12 = 3\times 4$, e o resto é 2, pois $3\times 4+2 = 14$. Escrevemos

$$14 : 4 = 3, \text{ com resto } 2$$

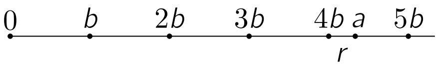
A divisão com resto pode ser também interpretada como subtracção repetida, tal como a multiplicação pode ser interpretada como uma adição repetida. Por exemplo, no problema seguinte, é conveniente interpretar a operação como uma subtracção repetida:

> "Tenho 50 canetas, e quero agrupá-las em conjuntos de 8 canetas cada. Quantos grupos consigo fazer?"



Como se vê na figura, podemos subtrair seis vezes o número 8 de 50, sobrando 2 no fim. Assim a divisão de 50 por 8 tem quociente 6 e resto 2.

Se identificarmos dois números naturais a e b como medidas de segmentos, podemos interpretar a divisão com resto de a por b como a contagem do número de vezes que um segmento de comprimento b cabe num segmento de comprimento a:



Neste caso, o quociente é 4, pois $4 \times b < a$, e $5 \times b > a$, e o resto r é a medida do segmento $a - 4 \times b$, como indicado.

Formalizamos agora as definições das operações de subtracção e divisão.

Dizer que $n - m = d$ é equivalente a dizer que $m + d = n$.

A divisão é exacta se $r = 0$. Tem-se $n : m = q$ com resto 0 exactamente quando n é múltiplo de m, e neste caso $n = qm$ e $q = n/m$; também temos então que n é múltiplo de q e $n/q = m$.

Dizer que $n : m = q$ com resto r equivale a dizer que $n = m \times q + r$.

Na primeira operação, n é o *aditivo*, m é o *subtractivo*, d é a *diferença* (ou *resto*, ou *excesso*). Na segunda, n é o *dividendo*, m é o *divisor*, q é o *quociente* e r é o *resto*.

Estas operações *não são nem comutativas nem associativas*. No caso da subtracção, nem faz sentido inverter a ordem dos números que são operados: por exemplo, podemos calcular $5 - 2$, mas não podemos calcular $2 - 5$. Na divisão com resto, a falta de comutatividade é bastante evidente: por exemplo

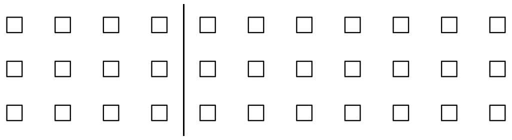
$$5 : 2 = 2 \text{ com resto } 1, \text{ e } 2 : 5 = 0 \text{ com resto } 2.$$

Estas operações não são associativas: por exemplo,

$$(5 - 2) - 1 = 3 - 1 = 2, \quad 5 - (2 - 1) = 5 - 1 = 4;$$

$$(12 : 6) : 2 = 2 : 2 = 1, \quad 12 : (6 : 2) = 12 : 3 = 4.$$

Não é difícil de verificar que a multiplicação é também distributiva em relação à subtracção. Para ilustrar, se olharmos de novo para a figura que já apresentámos,

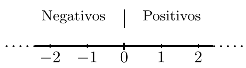


é simples ver que $3 \times 7 = 3 \times (11 - 4) = 3 \times 11 - 3 \times 4$.

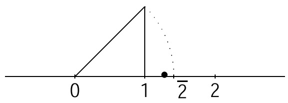
Operações noutros conjuntos de números

As operações definidas podem estender-se naturalmente a outros conjuntos de números: os números inteiros (positivos, negativos ou zero), os números racionais (que são os que se escrevem como dízimas finitas ou infinitas periódicas) e os reais (que são representados por qualquer dízima), mantendo todas as propriedades que são válidas no conjunto dos números naturais.

No Capítulo 1, referimos como os Gregos executavam as quatro operações associando os números a comprimentos de segmentos. Deste modo, as operações surgem de uma forma natural no conjunto dos números reais positivos.

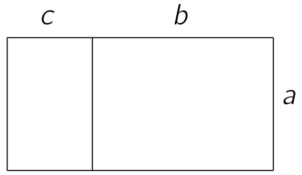


Os inteiros negativos podem ser pensados aritmeticamente como dívidas, ou geometricamente como andando para a esquerda na recta graduada dos inteiros.



Os racionais positivos aparecem também como partes iguais dos inteiros (fatias de pão, gomos de laranja), e os reais positivos como medidas de segmentos de recta (como a diagonal de um quadrado de lado 1, que mede $\sqrt{2}$). Os negativos podem sempre aparecer como posições numa recta graduada com uma origem.

A multiplicação pode ser usada para calcular áreas de rectângulos que não tenham lados com medidas inteiras, o que permite ilustrar, no conjunto dos números reais positivos, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição — $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$:



Analisamos em seguida os algoritmos que se usam para calcular os resultados das várias operações. Esses algoritmos usam a escrita posicional, sobre a qual já falámos noutra secção.

Operações em Escrita Posicional

O uso das quatro operações precedeu provavelmente a sua formalização escrita e terá tido origem em transacções comerciais entre os povos primitivos. Também o uso de algoritmos para realizar essas operações terá precedido o aparecimento da escrita.

Um algoritmo resume-se a um conjunto de instruções que podem ser desenvolvidas de uma forma essencialmente mecânica para atingir um determinado objectivo. Esta definição de algoritmo é bastante abrangente, não se confinando à Matemática. Por exemplo, estamos a usar inconscientemente um algoritmo quando seguimos as instruções de um livro de culinária para preparar uma receita.

Os algoritmos usuais para as quatro operações estão ligados ao sistema de numeração que utilizamos e, em particular, à sua natureza posicional. *

* Chamamos porém a atenção para o seguinte: *as operações em si não dependem da escrita posicional*. De facto, podemos definir adição, subtracção, multiplicação e divisão para números naturais, sem que isso dependa da maneira que usamos para os escrever. Também os romanos somavam, também os gregos multiplicavam, e não tinham escrita posicional como a temos hoje. Esta maneira de escrever os números apenas torna as operações mais fáceis de fazer.

Recordamos em seguida os algoritmos usuais para as quatro operações e fazemos referência a alguns algoritmos que foram usados ao longo dos tempos.

Adição

Para adicionarmos, por exemplo, 132 com 55, podemos pensar que o primeiro número é constituído por uma centena, três dezenas e duas unidades, e o segundo por cinco dezenas e cinco unidades. Podemos então adicionar separadamente as centenas, dezenas e unidades de cada um dos números:

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & 3 & 2 & \\ + & 5 & 5 & \\ \hline & & 7 & \text{soma das unidades} \\ & 8 & & \text{soma das dezenas} \\ 1 & & & \text{soma das centenas} \\ \hline 1 & 8 & 7 & \end{array}$$

Note-se que também poderíamos ter escrito 80 na soma das dezenas, e 100 na soma das centenas, para exprimir ambas as somas em unidades.

A soma tem então uma centena, oito dezenas e sete unidades — isto é, ao somar os dígitos que estão na mesma posição, em cada parcela, obtemos os dígitos da soma, o que só é possível por estarmos a usar a escrita posicional.

Simplificando agora o algoritmo, podem colocar-se os dois números um por cima do outro e somar os dígitos — tendo em conta que cada dígito significa o número de unidades, dezenas e centenas presentes:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ + & 5 & 5 \\ \hline 1 & 8 & 7 \end{array}$$

Este algoritmo decorre da utilização da escrita posicional, em conjunto com as propriedades da adição:

$$132 + 55 = (100 + 30 + 2) + (50 + 5) = 100 + 80 + 7 = 187,$$

isto é,

$$132 = 1 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 2 \times 10^0, \quad 55 = 5 \times 10^1 + 5 \times 10^0,$$

e portanto, usando as várias propriedades mencionadas,

$$
\begin{aligned}
132+55 &= (1\times 10^2+3\times 10^1+2\times 10^0)+(5\times 10^1+5\times 10^0)\\
&= 1\times 10^2+(3\times 10^1+5\times 10^1)+(2\times 10^0+5\times 10^0)\\
&= 1\times 10^2+(3+5)\times 10^1+(2+5)\times 10^0\\
&= 1\times 10^2+8\times 10^1+7\times 10^0\\
&= 187.
\end{aligned}
$$

Neste algoritmo pode surgir um problema: acontecer que, por exemplo, ao adicionar os algarismos das parcelas, se obtenha um número maior que dez. Por exemplo, quando calculamos $568+394$, ao somar 8 com 4, obtemos 12 unidades. Vamos, num passo intermédio, somar separadamente as unidades, as dezenas e as centenas, adicionando tudo no fim:

$$
\begin{array}{rccc l}
 & 5 & 6 & 8 & \\
+ & 3 & 9 & 4 & \\
\hline
 & & 1 & 2 & \text{soma das unidades}\\
 & 1 & 5 & & \text{soma das dezenas}\\
 & 8 & & & \text{soma das centenas}\\
\hline
 & 9 & 6 & 2 &
\end{array}
$$

Assim o que está a acontecer é o seguinte: quando a soma de dois dígitos é maior que dez, consideramos que há um acrescento no dígito seguinte, tal como aconteceu no exemplo anterior.

Por exemplo, ao somar as unidades, obtemos "oito e quatro, doze", e decompomos o doze em 1 dezena e 2 unidades. Registamos então as duas unidades e acrescentamos a dezena à coluna das dezenas, dizendo "e vai um". Pode ou não escrever-se esse um por cima dessa coluna. No nosso caso, o mesmo se passa com a soma das dezenas. O algoritmo simplificado fica então:

$$
\begin{array}{rccc}
 & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\
 & 5 & 6 & 8\\
+ & 3 & 9 & 4\\
\hline
 & 9 & 6 & 2
\end{array}
$$

A "conta" pode descrever-se oralmente da seguinte maneira: "Oito e quatro, doze, e vai um. Um e seis, sete, e nove dezasseis, e vai um. Um e cinco, seis, e três nove."

Este algoritmo permite adicionar qualquer número de parcelas, e não apenas duas, ao contrário do que acontece com os algoritmos da subtracção, da multiplicação e da divisão.

Ao longo da História, usaram-se outros algoritmos. Aquele que apresentamos em seguida para calcular $568 + 394$ tem um funcionamento parecido com o do algoritmo que habitualmente usamos.

5	6	8
3	9	4
0 / 8	1 / 5	1 / 2
9	6	2

Em cada quadrado escreve-se a soma dos dois dígitos que estão por cima, e depois somam-se as diagonais. Note-se que o número que está no triângulo de cima, das unidades, por exemplo, corresponde ao que "vai" no algoritmo habitual, e vai ser somado com o das dezenas, como se espera.

Antes de passar adiante, notamos que este algoritmo funciona em qualquer base, bastando ter cuidado sobre o que quer dizer "vai um" noutras bases. Por exemplo, vamos calcular de novo $132 + 55$, desta vez em base 3. Temos que

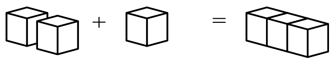
Veremos adiante como se faz a conversão de base 10 para outras bases.

$$132_{\text{dez}} = 1 \times 3^4 + 1 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 0 \times 3^0 = 11220_{\text{três}}$$

$$55_{\text{dez}} = 2 \times 3^3 + 0 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 1 \times 3^0 = 2001_{\text{três}}.$$

Somando, temos:

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & & & & \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ + & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}$$



Neste caso, um mais dois é igual a três, que se representa por 10, o que significa um acrescento de um no dígito seguinte — isto é, "um mais dois dá zero e vai um". Isto pode ilustrar-se muito facilmente com blocos MAB: ao juntar um cubinho com mais dois, obtemos uma barra de três. Assim, obtemos como soma

$$20221_{\text{três}} = 2 \times 3^4 + 0 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 1 \times 3^0 = 187_{\text{dez}},$$

como se esperava.

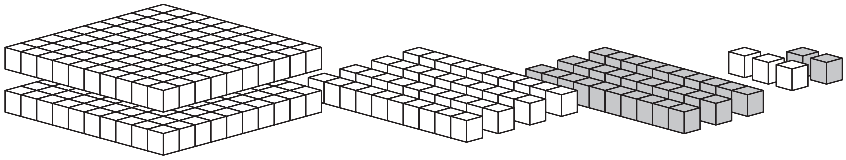
Subtracção

A ideia por detrás do algoritmo habitual é a mesma do algoritmo da adição: considerar que cada dígito representa um certo número de unidades, dezenas, centenas, etc. Por exemplo, ao fazer $275 - 32$, fazemos

$$\begin{array}{rrr} 2 & 7 & 5 \\ - & 3 & 2 \\ \hline 2 & 4 & 3 \end{array}$$

O primeiro número é a soma de 2 centenas, 7 dezenas e 5 unidades. Se a essas tirarmos 3 dezenas e 2 unidades, ficamos com as mesmas 2 centenas, 4 dezenas e 3 unidades. Como se vê, mais uma vez, podemos fazer as diferenças dígito por dígito.

Também aqui é possível ilustrar este processo com blocos MAB: retira-se 2 cubinhos e três barras ao 275, e restam 243.



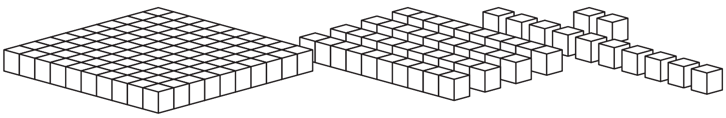
$275-32$ em blocos MAB: os blocos a escuro representam o subtractivo, 32. A branco o resto, 243.

Surge um problema quando no aditivo, um dígito é menor que o correspondente dígito no subtractivo. Isto acontece, por exemplo, ao fazer $152-35$. Há duas formas de resolver este problema: ou usando *empréstimos*, ou adicionando a mesma quantidade ao aditivo e ao subtractivo (o habitual "e vai um"), a que chamamos o algoritmo com *compensação*.

Com empréstimo: Ao tentar retirar 5 unidades às 2 unidades do aditivo, vemos que isso é impossível. Então, retiramos uma dezena às 5 dezenas do aditivo, passando então a contar com 12 unidades, e ficando com um 4 como novo algarismo das dezenas — diz-se que se "pediu emprestada" uma dezena; assim, $12-5=7$.

$$\begin{array}{rrr} & {\scriptstyle 4} & {\scriptstyle 12} \\ 1 & 5 & 2 \\ - & 3 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 7 \end{array}$$

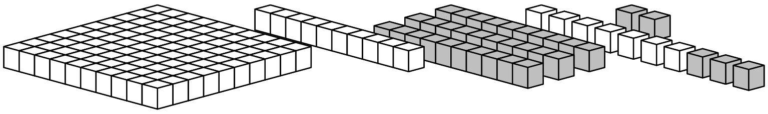
Este processo é também simples de ilustrar com blocos MAB. No exemplo anterior, é preciso transformar uma barra em 10 cubinhos e juntá-los aos 2 das unidades,



O número 152 em blocos MAB, com uma dezena convertida em 10 unidades.

para depois se poder tirar 5.

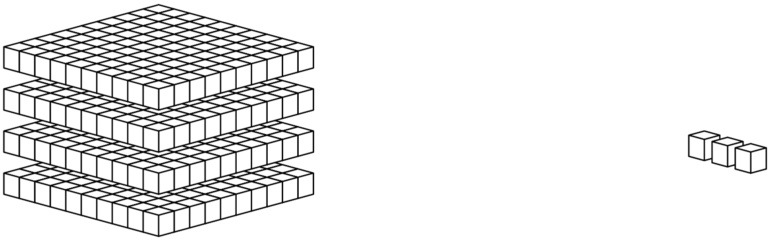
Os blocos MAB a branco representam a diferença $152 - 35$.



Este método torna-se mais complicado quando aparecem zeros no aditivo.

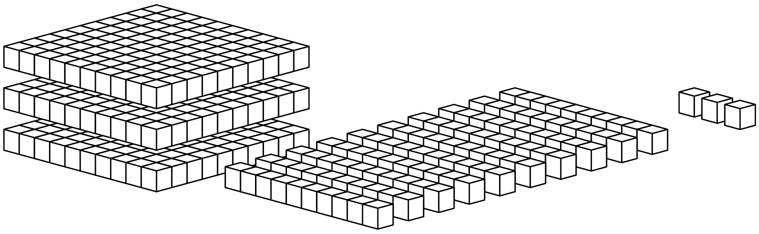
Por exemplo, suponhamos que queremos calcular $403 - 187$.

O número 403 representado em blocos MAB



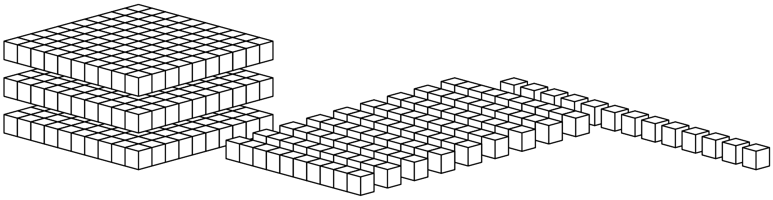
Como não se pode fazer $3 - 7$, nas unidades, tem que se pedir emprestada uma dezena. Como o algarismo das dezenas é zero, tem de se pedir agora emprestada uma centena. Esta converte-se em 10 dezenas,

O número 403, em blocos MAB, com uma centena convertida em 10 dezenas



das quais se toma agora uma para termos dez unidades, a somar às três que já lá estavam.

Ainda o número 403, em blocos MAB. Uma das dezenas foi convertida em 10 unidades.



$$
\begin{array}{rccc}
 & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 9} & {\scriptstyle 13} \\
 & 4 & 0 & 3 \\
- & 1 & 8 & 7 \\
\hline
 & 2 & 1 & 6
\end{array}
$$

Com compensação: Neste algoritmo, quando queremos calcular $152 - 35$, o que fazemos para contornar a dificuldade de fazer $2 - 5$, nas unidades, é *acrescentar uma dezena tanto ao aditivo como ao subtractivo*. Isto é possível pelo chamado *princípio de invariância do resto*, que enunciamos a seguir.

Princípio de invariância do resto. Adicionando ao aditivo e ao subtractivo o mesmo número, a diferença permanece igual.

Ilustramos com um exemplo, passando depois à formalização. Suponhamos que queremos tirar 7 bolas de um saco que tenha 12, obtendo assim um resto de 5 bolas. Formalmente, queremos calcular $12 - 7$.

Se ao princípio pusermos no saco mais 6 bolas, concordando em retirar também mais 6 no fim — isto é, retiramos 13 às 18 que entretanto lá ficaram — o resto permanece o mesmo, 5 bolas. Formalizando, $(12 + 6) - (7 + 6) = 12 - 7 = 5$.

Voltando agora a $152 - 35$, vamos usar este princípio da seguinte forma: juntamos dez tanto ao aditivo como ao subtractivo, mas no aditivo juntamos 10 *unidades* e no subtractivo juntamos 1 *dezena*:

$$
\begin{array}{ccc}
1 & 5 & {}^{1}2 \\
- & 3^{1} & 5 \\
\hline
1 & 1 & 7
\end{array}
$$

A descrição oral desta conta é: "Cinco para doze, sete, e vai um. Um e três, quatro, para cinco, um. Zero para um, um."

Note-se porém que esta descrição de dizer "e vai um" é apenas uma mnemónica, ao contrário do que acontece na adição, pois não há aqui nenhum transporte de um dígito para outro, mas sim uma compensação.

O que fizemos foi adicionar 10 unidades ao aditivo (uma dezena) e adicionar também uma dezena ao subtractivo. Com blocos MAB, isto corresponderia a juntar uma barra ao 35 e 10 cubinhos ao 152.

Passando agora à outra subtracção que mencionámos, fica:

$$\begin{array}{cccc} & 4 & {}^{1}0 & {}^{1}3 \\ - & 1^{1} & 8^{1} & 7 \\ \hline & 2 & 1 & 6 \end{array}$$

Note-se que, ao contrário do que acontece com a adição, *aqui, nunca pode "ir" mais do que um*! Isto porque nunca temos que adicionar mais do que um ao algarismo do aditivo para ficar com um número maior do que o correspondente algarismo do subtractivo. Isto acontece mesmo que no subtractivo, um nove se transforme em dez, por causa de algum "vai um": com $412 - 199$,

$$\begin{array}{cccc} & 4 & {}^{1}1 & {}^{1}2 \\ - & 1^{1} & 9^{1} & 9 \\ \hline & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

Diz-se então: "Nove para doze, três, e vai um. Nove e um, dez, para onze, um, e vai um. Um e um, dois, para quatro, dois."

Note-se que neste processo os dígitos que vamos obtendo no resultado são provisórios. Podemos confirmar o algarismo das centenas quando passamos a trabalhar com as dezenas e o algarismo das dezenas quando passamos a trabalhar com as unidades. Este processo pode complicar-se, por exemplo, ao tentar calcular $305 - 109$.

Quando se subtrai usando técnicas de cálculo mental, os cálculos desenvolvem-se frequentemente da esquerda para a direita (cf. página 86).

É perfeitamente legítimo adaptar este procedimento a um algoritmo de "conta em pé". Por exemplo, para calcular $325 - 178$, podemos começar pelas centenas e compensar as dezenas e as unidades:

> Começamos por subtrair as centenas e obtemos duas; para continuar a conta "trocamos" uma centena em dez dezenas e, seguidamente, trocamos uma dezena em dez unidades.

Estes algoritmos para adição e subtracção funcionam igualmente para números decimais. Isto porque os algarismos depois da vírgula dizem respeito ao número de décimas, centésimas, milésimas, etc; e tal como com os algarismos da parte inteira, dez milésimas formam uma centésima, dez centésimas uma décima e dez décimas uma unidade.

Assim, se quisermos por exemplo somar $1,4+2,7$, obtemos $4+7=11$ décimas e $1+2=3$ unidades. Tal como no algoritmo para a adição de inteiros, temos o transporte de 1 das décimas para as unidades (dez décimas=uma unidade). Portanto basta que *a vírgula das várias parcelas estejam alinhadas*, que o algoritmo habitual funciona, uma vez que assim os algarismos das décimas, centésimas, milésimas, etc, ficarão alinhados. Outro exemplo:

$$\begin{array}{cccc} 4 & 2, & 4 & \\ + & 1, & 7 & 3 \\ \hline 4 & 4, & 1 & 3 \end{array}$$

Para a subtracção, pela mesma lógica, o algoritmo que explicámos para a adição inteira funciona também. Por exemplo,

$$\begin{array}{cccc} 4 & 2, & 4 & \\ - & 1, & 7 & 3 \\ \hline 4 & 0, & 6 & 7 \end{array}$$

Multiplicação

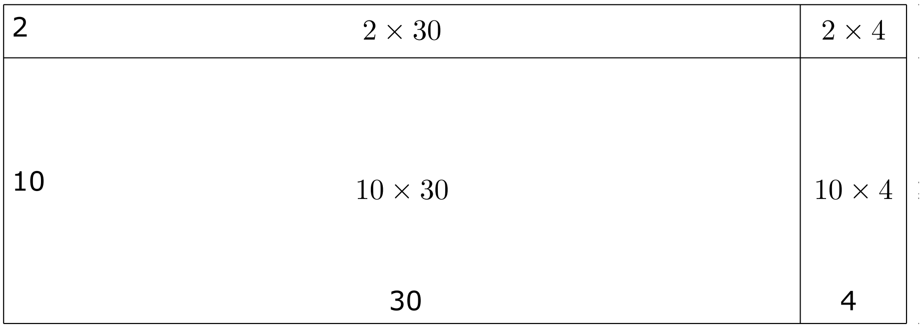
O algoritmo da multiplicação decorre da utilização da escrita posicional em conjunto com propriedades da adição e da multiplicação (como a comutatividade e a associatividade). Como exemplo, calculemos 12×34.

$$\begin{aligned}
12 \times 34 &= (1 \times 10 + 2 \times 1) \times 34 \\
&= (1 \times 10 + 2 \times 1) \times (3 \times 10 + 4 \times 1) \\
&= (1 \times 3) \times 10^2 + (1 \times 4 + 2 \times 3) \times 10 + (2 \times 4) \times 1 \\
&= 300 + 100 + 8 \\
&= 408.
\end{aligned}$$

O algoritmo habitual consiste em representar esta sequência de operações de outra forma:

$$\begin{array}{cccccc}
 & 3 & 4 & & \\
\times & 1 & 2 & & \\
\hline
 & & 8 & & 2 \times 4 \\
 & 6 & 0 & & 2 \times 30 \\
 & 4 & 0 & & 10 \times 4 \\
3 & 0 & 0 & & 10 \times 30 \\
\hline
4 & 0 & 8 & &
\end{array}$$

Este algoritmo pode ser ilustrado pensando na multiplicação de 12 por 34 como a medida da área do rectângulo que tem essas medidas de lados. Separando o rectângulo em quatro outros rectângulos mais pequenos, vemos que a área total, que é 12×34 é dada como a soma desses quatro outros, que correspondem às parcelas que encontrámos.



Usualmente, abrevia-se a notação, pondo na primeira linha o resultado de 2×34 e na segunda o de 10×34, pois, pela propriedade distributiva,

$$12 \times 34 = (10 + 2) \times 34 = 10 \times 34 + 2 \times 34.$$

$$\begin{array}{cccc} & & 3 & 4 \\ & \times & 1 & 2 \\ \hline & & 6 & 8 \\ & 3 & 4 & 0 \\ \hline & 4 & 0 & 8 \end{array}$$

Tal como na adição, pode acontecer que o produto de dois números de um dígito não seja um número de um dígito. Por exemplo, ao fazer 37×165, usando a propriedade distributiva, decompomo-lo em

$$37 \times 165 = (30 + 7) \times 165 = 30 \times 165 + 7 \times 165.$$

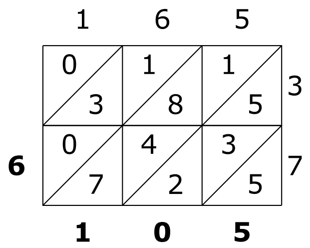
Temos que $7 \times 5 = 35$, logo guardamos o algarismo 5 para as unidades, e juntamos 3 às dezenas, dizendo "e vão três". Estas vêm a ser então $3+6\times7 = 45$. Novamente, vão 4 para as centenas, que ficam $4 + 1 \times 7 = 11$. Aparece então na primeira linha do produto o número 1155. A segunda linha corresponde a 30×165, e é calculado da mesma maneira. Somando ambos, obtemos o produto, pois como anteriormente,

$$37 \times 165 = 7 \times 165 + 30 \times 165.$$

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 6 & 5 \\ & & \times 3 & 7 \\ \hline 1 & 1 & 5 & 5 \\ 4 & 9 & 5 & \\ \hline 6 & 1 & 0 & 5 \end{array}$$

Há também um algoritmo que se deixou de usar, chamado da *gelosia*, que usa as mesmas propriedades (distributiva, comutativa, associativa). Neste método, não importa a ordem em que se fazem as contas, pois escrevem-se todos os algarismos — mesmo os que "vão" no método anterior.

Em cada quadrado escreve-se então o produto dos elementos que se encontram à direita e em cima — o das dezenas em cima, e o das unidades em baixo; depois somam-se as diagonais. Repetindo então a conta anterior, temos o seguinte esquema.



Finalmente, uma palavra sobre a multiplicação de números decimais. Como calcular, por exemplo, $1,65 \times 3,7$, agora que já sabemos calcular 165×37? Bem, podemos escrever

$$165 = 1,65 \times 100, \qquad 37 = 3,7 \times 10$$

e usar mais uma vez as propriedades comutativa e associativa:

$$6105 = 165 \times 37 = 1,65 \times 3,7 \times 100 \times 10 = (1,65 \times 3,7) \times 1000.$$

Portanto

$$1,65 \times 3,7 = \frac{165 \times 37}{1000}$$

e é preciso deslocar a vírgula três posições para a esquerda no número 6105 — obtemos $1,65 \times 3,7 = 6,105$.

Vemos então que *o número de casas decimais do produto é a soma do número de casas decimais dos factores*, como fica exemplificado neste caso: as 3 casas decimais de $6,105$ obtiveram-se de $2+1$, o número de casas decimais dos factores $1,65$ e $3,7$.

Em resumo, podemos fazer a multiplicação de números decimais usando o mesmo algoritmo e ajustando o número de casas decimais no fim.

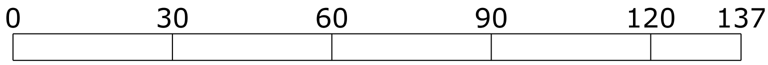
Divisão

Como os anteriores, o algoritmo da divisão assenta nas propriedades das operações e na escrita posicional.

Suponhamos que queremos encontrar o quociente e o resto da divisão de 137 por 3. Quer isto dizer que estamos à procura do maior múltiplo de 3 que seja inferior a 137.

A tabuada dos 3 dá-nos os primeiros múltiplos de 3. Como é fácil multiplicar por 10, 100, 1000, ..., esta tabuada também nos permite obter produtos como, por exemplo, $20 \times 3 = 60$, ou que $700 \times 3 = 2100$; isto é, pode funcionar também para dezenas, centenas, milhares, etc. De facto, para calcular 700×3 basta saber quanto é 7×3 e acrescentar dois zeros.

Ora, queremos então um múltiplo de 3 que não exceda 137. Pensando em termos de dezenas, verificamos que $40 \times 3 = 120$, o que não excede 137, mas $50 \times 3 = 150$ já excede. Ilustrando,



A figura sugere agora tentar encontrar o maior múltiplo de 3 que possa caber na diferença entre 137 e 120, isto é, tentar encontrar o maior múltiplo de 3 que não exceda a diferença

$$137 - 3 \times 40 = 137 - 120 = 17.$$

Isto é simples, olhando para a tabuada: ele é $5 \times 3 = 15$, uma vez que $6 \times 3 = 18$ já é maior que 17.

Passando agora à escrita, temos

$$\begin{aligned} 137 &= 3 \times 40 + 17 \\ &= 3 \times 40 + 3 \times 5 + 2 \\ &= 3 \times (40 + 5) + 2 \\ &= 3 \times 45 + 2. \end{aligned}$$

Como 2 é menor que 3, encontrámos o quociente e o resto pretendidos: o quociente é 45 e o resto é 2.

Para caminharmos para a compreensão do algoritmo da divisão, procuremos o quociente, algarismo por algarismo, adaptando o que acabámos de explorar. Começamos por notar que esse quociente não pode ter o algarismo das centenas: mesmo que esse algarismo fosse 1, ao multiplicá-lo por 3 obteríamos mais do que $3 \times 100 = 300$, que é maior que 134. Portanto o algarismo das centenas do quociente tem de ser zero.

Vamos então à procura do algarismo das dezenas. Este algarismo a tem de ser tal que $(a \times 10) \times 3$ seja ainda menor que o dividendo — pela definição de divisão. Temos de o encontrar por *tentativas*. Verificando os vários algarismos possíveis, vemos que $40 \times 3 = 120 < 134$, mas $50 \times 3 = 150 > 134$. Portanto o algarismo das dezenas do quociente é 4.

Notamos que, neste caso, o algarismo das unidades do dividendo, que é 7, não teve nenhum papel. O que fizemos foi ver qual o quociente e o resto da divisão de 13 por 3 — o quociente é 4 e o resto é 1.

Retiramos então 40×3 ao dividendo, obtendo 17.

$$
\begin{array}{rrrr|ll}
 & 1 & 3 & 7 & 3 & \\ \cline{5-6}
- & 1 & 2 & 0 & 4 & ? \\ \cline{1-4}
 & & 1 & 7 & &
\end{array}
$$

Isto quer dizer que

$$137 = (3 \times 40) + 17.$$

A divisão ainda não está terminada, pois $17 > 3$. Temos agora de dividir 17 por 3. Como $5 \times 3 = 15 < 17$, mas $6 \times 3 = 18 > 17$, o quociente pretendido é 5, e temos de retirar então ao dividendo $5 \times 3 = 15$. Continuando então o algoritmo anterior,

$$
\begin{array}{rrrr|ll}
 & 1 & 3 & 7 & 3 & \\ \cline{5-6}
- & 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ \cline{1-4}
 & & 1 & 7 & & \\
 & - & 1 & 5 & & \\ \cline{2-4}
 & & & 2 & &
\end{array}
$$

Isto significa que

$$137 = (40 \times 3) + 17 = 40 \times 3 + 5 \times 3 + 2 = 45 \times 3 + 2.$$

Visto que $2 < 3$, encontrámos o quociente e o resto da divisão: o quociente é 45 e o resto é 2, como já sabíamos.

O nosso algoritmo habitual consiste em abreviar esta versão — em geral, fazem-se as subtracções sucessivas sem escrever os subtractivos (no nosso caso, o 120 e o 15). Vamos escrever o resultado, e depois explicaremos os vários passos.

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3' & 7 & 3 & \\ \cline{4-5} & 1 & 7 & 4 & 5 \\ & & 2 & & \end{array}$$

O algoritmo descreve-se tradicionalmente da seguinte maneira: "Em 13, quantas vezes há 3? Há 4; 4 vezes 3, 12, para 13, 1. Baixa-se o 7. Em 17, quantas vezes há 3? Há 5; 5 vezes 3, 15, para 17, 2."

Partimos então da esquerda de 137 para a direita, até atingir um número maior que 3 — no nosso caso é 13. Podemos (ou não) marcar esse número, como aqui, com uma plica. Dividimos então 13 por 3, obtendo 4 como quociente e 1 como resto: $4 \times 3 + 1 = 13$. Na verdade, há 13 *dezenas* em 137, de modo que o que estamos a fazer é dividir 130 por 3, e estamos a obter $130 = 40 \times 3 + 10$, o que corresponde apenas a multiplicar a igualdade anterior por 10. Então, ao "baixar o 7", estamos na realidade a somar 7 a ambos os membros da igualdade que tínhamos, para obter $137 = 40 \times 3 + 17$. Agora, fazemos o mesmo processo para o 17, obtendo 5 como quociente e 2 como resto: $17 = 5 \times 3 + 2$. Substituindo então na igualdade anterior, obtemos

$$137 = 40 \times 3 + (5 \times 3 + 2) = (40 \times 3 + 5 \times 3) + 2 = 45 \times 3 + 2,$$

obtendo portanto o quociente 45, dígito por dígito, e o resto 2.

Note-se que, então, na obtenção de cada dígito do quociente, estamos à procura do maior dígito possível tal que o produto desse dígito pelo divisor não exceda o dividendo que estamos, na ocasião, a considerar. Esse dividendo "na ocasião" pode significar um número de dezenas, ou centenas — como acima, 13 significava o número de dezenas que havia em 137. O dígito obtido no quociente, 4, representa exactamente essa ordem de grandeza — no caso, o algarismo das dezenas.

É importante notar que, em cada passo do algoritmo, os números que se obtêm como restos parciais *são de facto restos*, e portanto têm de ser menores que o divisor. Por exemplo, se na conta anterior tivessemos obtido 4 ou 5 como resto parcial (antes de baixar o dígito seguinte), teríamos certamente cometido um erro.

Usámos aqui um divisor com um dígito apenas, mas o processo funciona para qualquer divisor — pode é ser mais difícil de encontrar o dígito que aparece no quociente. Calculemos o quociente e o resto de $4238 : 56$.

$$
\begin{array}{rrrrrr|rr}
 & & 4 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 \\ \cline{7-8}
70 \times 56 \rightarrow & - & 3 & 9 & 2 & & 7 & 5 \\ \cline{2-5}
 & & & 3 & 1 & 8 & & \\
5 \times 56 \rightarrow & & - & 2 & 8 & 0 & & \\ \cline{3-6}
 & & & & 3 & 8 & &
\end{array}
$$

Deixamos a cargo do leitor escrever as várias igualdades correspondentes às divisões parciais, tal como fizemos acima. Obtemos, no fim, $4238 = 75 \times 56 + 38$.

Aqui optámos por indicar explicitamente as duas subtracções sucessivas. No primeiro produto, 70×56, o último zero está subentendido, o produto devia ser 3920.

Notamos que os restos que obtivemos foram 31 e 38, ambos menores que 56, como seria de esperar.

Quando aplicamos este algoritmo, pode acontecer que, mesmo depois de baixado o algarismo seguinte, o resto continue a ser menor que o divisor. Nesse caso, aparece um zero no quociente, como no exemplo seguinte.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ \cline{5-5}
- & 4 & 0 & 0 & 1\ 0\ 2 \\ \cline{1-4}
 & & 1 & 1 & \\
 & & - & 8 & \\ \cline{3-4}
 & & & 3 &
\end{array}
$$

Após termos obtido o algarismo 1 nas centenas, obtemos 11 como diferença $411 - 400$:

$$411 - 4 \times 100 = 11 = 10 + 1.$$

Ao fazermos agora a divisão de 11 por 4, obtemos 2 como quociente e 3 como resto, $11 = 2 \times 4 + 3$. Portanto

$$411 = 100 \times 4 + 11 = 100 \times 4 + 2 \times 4 + 3 = 102 \times 4 + 3,$$

e o algarismo das dezenas é zero. O quociente é então 102 e o resto é 3.

A versão final do algoritmo é então:

$$
\begin{array}{rrr|l}
4 & 1 & 1 & 4 \\ \cline{4-4}
0 & 1 & 1 & 1\ 0\ 2 \\
 & & 3 &
\end{array}
$$

Diz-se: "Em 4, quantas vezes há 4? Há 1. 1 vezes 4, 4, para 4, nada. Baixa-se o 1. Em 1, quantas vezes há quatro? Não pode haver — *e escreve-se zero no quociente*. Baixa-se o 1. Em 11, quantas vezes há 4? Há 2. 4 vezes 2, 8, para 11, 3."

Finalmente, podemos constatar que este algoritmo funciona também para números decimais.

Retomemos a divisão de há pouco: $4238 : 56 = 75$ com resto 38. Como encontrar agora, por exemplo, o quociente e o resto de $4,238 : 5,6$?

Para determinar valores aproximados de um quociente, continua-se a divisão acrescentando casas decimais ao dividendo; por exemplo,

$$
\begin{array}{l|l}
411{,}00 & 4 \\ \cline{2-2}
011 & 102{,}75 \\
\quad 3\ 0 & \\
\qquad 20 & \\
\qquad\ 0 &
\end{array}
$$

Estamos, neste caso, a dividir números decimais, tendo em conta que todo o número inteiro se pode escrever como número decimal com a parte decimal nula.

Mais uma vez, basta destacarmos as milésimas, no dividendo, e as décimas, no divisor. Temos que $4,238 = 4238 \times 0,001$, e $5,6 = 56 \times 0,1$. Fazendo as contas, temos:

$$\begin{aligned} 4,238 &= 4238 \times 0,001 \\ &= (56 \times 75 + 38) \times 0,001 \\ &= 56 \times 75 \times 0,001 + 38 \times 0,001 \\ &= (56 \times 0,1) \times (75 \times 0,01) + 38 \times 0,001 \\ &= 5,6 \times 0,75 + 0,038 \end{aligned}$$

Assim, *há tantas casas decimais no resto como no dividendo* (neste caso, três), e *as casas decimais do quociente são as do dividendo menos as do divisor* (no nosso caso, $3 - 1 = 2$). No resto, de facto, pode alinhar-se a vírgula pela do dividendo.

Se, no início da divisão, houver menos casas decimais no dividendo do que no divisor, torna-se necessário então acrescentar zeros depois da vírgula no dividendo, para haver pelo menos tantos de um lado como de outro.

Mudança de Base

No capítulo 2, definimos o que se entende por base de um sistema de numeração e exemplificámos como escrever o mesmo número em várias bases. Vamos agora descrever processos para passar da escrita em qualquer base para a base dez e reciprocamente.

Para significar que um número está escrito numa base diferente de dez, usa-se habitualmente figurar a base (por extenso) em índice, por exemplo 134_{seis} ou $1201_{\text{três}}$.

Notemos, para começar, que para mudar de uma base qualquer, diferente de dez, para a base dez, basta escrever o número tendo em conta o significado dos vários algarismos, de acordo com a sua posição no número. Assim por exemplo,

$$134_{\text{seis}} = 1 \times 6^2 + 3 \times 6^1 + 4 \times 6^0 = 58,$$

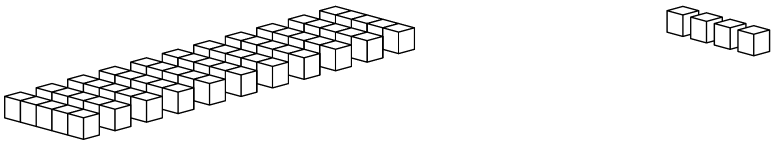
$$1201_{\text{três}} = 1 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 1 \times 3^0 = 46.$$

Vamos agora apresentar dois processos de fazer a conversão ao contrário: passar de base dez para outra base.

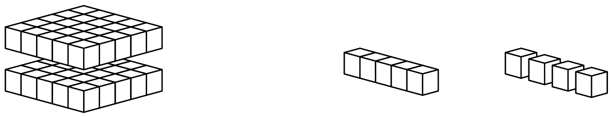
Processo dos Restos

Vamos descrever este processo, escrevendo 59 em base 5. Começamos por motivar o processo ilustrando-o com blocos MAB.

Temos então 59 cubinhos. Começamos por agrupá-los em linhas de 5, obtendo 11 barras e restando 4 cubinhos.



Agora, agrupamos essas 11 barras em grupos de 5, formando assim placas. Obtemos 2 placas e resta 1 linha. Assim, obtemos a representação em base cinco de 59: 214_{cinco}.



O número 59 representado em blocos MAB, na base cinco: 214_{cinco}

Formalizamos agora este processo. Começamos por dividir 59 por 5, $59 : 5 = 11$, com resto 4. Temos então $59 = 11 \times 5 + 4$.

Continuamos agora o processo com o quociente 11, dividindo-o por 5, $11 : 5 = 2$, com resto 1. Assim, $11 = 2 \times 5 + 1$, e substituindo 11 na igualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned} 59 &= 11 \times 5 + 4 \\ &= (2 \times 5 + 1) \times 5 + 4 \\ &= 2 \times 5^2 + 1 \times 5 + 4 \\ &= 214_{\text{cinco}} \end{aligned}$$

que é a representação de 59 em base 5. Os vários dígitos foram obtidos como *os restos sucessivos*.

Se quisermos obter o último dígito, 2, como resto, fazemos $2 : 5 = 0$, com resto 2.

Esquematizando,

$$
\begin{array}{r|l}
59 & 5 \\ \cline{2-2}
\mathbf{4} & 11 \;\; \begin{array}{|l} 5 \\ \hline \end{array} \\
 & \mathbf{1} \quad 2 \;\; \begin{array}{|l} 5 \\ \hline \end{array} \\
 & \qquad \mathbf{2} \quad 0
\end{array}
$$

Em conclusão:

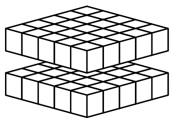
> o processo consiste em fazer divisões sucessivas pela base, dos quocientes obtidos no passo anterior, e os dígitos são fornecidos pelos *restos sucessivos*, em que o primeiro resto aparece como o dígito mais à direita.

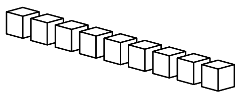
Processo dos Quocientes

Podemos também obter estes dígitos através de outro processo, fazendo também divisões sucessivas, desta vez obtendo primeiro os algarismos de maior valor, isto é, os dígitos da esquerda para a direita.

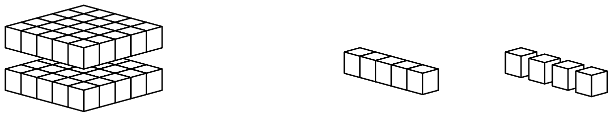
Como exemplo, vamos de novo escrever 59 em base cinco, ilustrando primeiro o processo com blocos MAB.

Em base 5, haverá blocos de 1, 5, 25, 125, etc. Ora, para escrever 54 não é preciso blocos de 125, começa-se com os de 25. Com 59 só se conseguem formar duas placas de 25 cubinhos, sobrando 9 cubinhos.





Com esses 9 podemos formar uma barra de 5 cubinhos, sobrando 4. Estes são então os correspondentes ao último algarismo, e obtemos novamente $59 = 214_{\text{cinco}}$.



Vamos agora formalizar este processo. Começamos por encontrar a primeira potência de 5 que excede 59. Ora, $5^1 = 5$, $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, logo o primeiro algarismo a aparecer é o correspondente a $5^2 = 25$. Temos $59 : 25 = 2$, com resto 9. Então, o quociente, 2, virá a ser o primeiro algarismo. Para já temos $59 = 2 \times 25 + 9 = 2 \times 5^2 + 9$.

Tomamos agora o resto 9, e dividimo-lo por $5^1 = 5$. Obtemos $9 : 5 = 1$, resto 4. Substituindo na igualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned} 59 &= 2 \times 5^2 + 9 \\ &= 2 \times 5^2 + 1 \times 5 + 4 \\ &= 214_{\text{cinco}} \end{aligned}$$

Assim, o quociente 1 vem a ser o segundo dígito, e o resto 4 o último dígito. Se quiséssemos obter 4 como último quociente, podíamos fazer $4 : 1 = 4$, com resto 0.

Esquematizando: $5^3 = 125$ é a primeira potência de 5 que excede 59; assim, começaremos por dividir 59 por $5^2 = 25$.

$$\begin{array}{r|l} 59 & 25 \\ \cline{2-2} 9 & \mathbf{2} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 5 \\ \cline{2-2} 4 & \mathbf{1} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & \mathbf{4} \end{array}$$

Portanto

$$59_{\text{dez}} = 2 \times 5^2 + 1 \times 5^1 + 4 \times 5^0 = 214_{\text{cinco}}.$$

Em conclusão: o processo consiste em fazer divisões sucessivas pelas potências da base, começando com a maior, obtendo os dígitos como *quocientes sucessivos*, em que o primeiro quociente aparece como o dígito mais à esquerda.

Operações com fracções

Operações com fracções

O que é uma fracção?

Fracção é uma palavra que deriva do latim *fractus* e que significa uma parte de um todo. Conforme referimos no capítulo 1, já na Antiguidade os Egípcios utilizavam nos seus cálculos as fracções unitárias ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,...) e a fracção $\frac{2}{3}$.

As fracções fazem parte da linguagem de todos os dias. É frequente usar a expressão "uma fracção de segundo" para designar um intervalo de tempo muito pequeno e, por exemplo, a designação "um terço" como sinónimo de a terça parte, isto é, o resultado de dividir uma unidade em 3 partes. Também quando nos referimos a 20% de uma quantidade estamos a falar na fracção $\frac{20}{100}$ dessa quantidade; por exemplo, quando se diz que a taxa de abstenção numa votação foi de 20%, queremos dizer que em cada 100 eleitores 20 não votaram, o que corresponde a dividir a unidade em cem partes iguais e tomar vinte.

Pretendemos neste parágrafo fundamentar, de uma forma elementar, as operações com fracções. A escolha de representações visuais das fracções facilita uma compreensão do seu significado e constitui uma mais valia para o estudo das operações. Recorde-se que a extensão das operações ao conjunto dos números racionais deve ser feita de forma a conservar as propriedades das operações com números inteiros.

O termo *razão* usa-se para designar o quociente entre dois entes matemáticos, sejam eles expressões numéricas, medidas, números, etc.
Por exemplo, o número π é a razão entre as medidas do perímetro e do diâmetro de qualquer circunferência.

Uma igualdade entre duas fracções, como

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$$

também pode ser entendida como uma *proporção*: "1 está para 4 assim como 2 está para 8". Nesta proporção, os números 1 e 8 são os *extremos* e 2 e 4 são os *meios*. Em qualquer proporção, "o produto dos extremos é igual ao produto dos meios". Neste caso, $1 \times 8 = 4 \times 2$.

$\dfrac{a}{b} = 1$ quando $a = b$.

Matematicamente, o que é uma fracção? Uma fracção é uma razão de números naturais.

Estas razões podem ser encaradas de diferentes formas, consoante o que se pretende significar — por exemplo:

- como quociente;
- como expressão de uma ou mais partes da unidade dividida em partes iguais;
- como meio de comparação de duas grandezas.

Por exemplo, a fracção $\frac{1}{4}$:

- pode ser encarada como representativa do número decimal $0,25$. Este número pode igualmente ser representado por muitas outras fracções: $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{16}$, etc.
- pode ser usada para referir *a quarta parte* de um todo (e. g. a quarta parte dos alunos de uma turma)
- no exemplo acima referido de uma eleição em que 20% dos eleitores não votaram, $\frac{1}{4}$ representa a razão entre o número de eleitores que se abstiveram e o número de eleitores que votaram.

Numa fracção $\frac{a}{b}$, o número a (acima do traço de fracção) designa-se por **numerador** e o número b (abaixo do traço de fracção) designa-se por **denominador**.

Uma fracção $\frac{a}{b}$ diz-se *própria* se $a < b$ e diz-se *imprópria* se $a \geq b$.

No caso das fracções impróprias é habitual evidenciar na sua escrita a parte inteira. Por exemplo, usa-se a notação $2\frac{1}{3}$ para a fracção $\frac{7}{3}$.

Observemos que estas notações podem ser usadas para significar um mesmo número em contextos diferentes. Por exemplo, consideremos uma barra dividida em 10 partes, 7 das quais com sombreado escuro e 3 com sombreado claro.

A fracção $\frac{7}{3}$ traduz a relação entre a parte escura e a parte clara da figura. Se tomarmos como unidade a parte clara da figura, a parte escura corresponderá a duas unidades e um terço: $2\frac{1}{3}$. Se tomarmos como unidade a parte escura, a parte clara corresponderá a $\frac{3}{7}$.

As fracções constituem representações de números racionais, sendo cada número racional representado por uma infinidade de fracções. Em particular, qualquer número natural se pode escrever como uma fracção cujo denominador é igual a 1.

Por exemplo,

$$0,5 = \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{315}{630} = \ldots$$

Consideremos as fracções $\frac{1}{3}$ e $\frac{7}{2}$. Enquanto $\frac{7}{2}$ se pode escrever como a fracção decimal $\frac{35}{10}$, que representa o número decimal $3,5$, a fracção $\frac{1}{3}$ não se pode escrever como fracção decimal: representa o número $0,3333\ldots$, uma dízima periódica de período 3.

Para representar um número racional, é comum usar uma fracção irredutível, i. e., em que o numerador e o denominador não têm factores comuns. Por exemplo, a fracção irredutível que representa o número $0,175$ é $\frac{7}{40}$, que pode ser obtida de $\frac{175}{1000}$ dividindo o numerador e o denominador por 25 (que é o *máximo divisor comum* entre 175 e 1000).

Operações com fracções

Pretendemos neste parágrafo fundamentar, de uma forma elementar, as operações com fracções. A escolha de representações visuais das fracções facilita uma compreensão do seu significado e constitui uma mais-valia para o estudo das operações.

Como se realizam operações com fracções?

A extensão das operações ao conjunto dos números racionais positivos deve ser feita de forma a conservar as propriedades das operações com números naturais. Assim, as operações de adição e multiplicação devem gozar das propriedades comutativa e associativa, a multiplicação deve ser distributiva relativamente à adição e, para qualquer número racional a, devemos ter $0 + a = a$, $1 \times a = a$ e $0 \times a = 0$.

Anteriormente já analisámos os algoritmos operatórios no conjunto dos números decimais, isto é, os que podem ser representados por fracções decimais. Então, para operar com fracções, e desde que elas se possam escrever como fracções decimais, é suficiente operar com os números decimais que elas representam.

Por exemplo, para calcular $\frac{1}{2} + \frac{3}{5}$, basta atender a que $\frac{1}{2}$ é igual à fracção decimal $\frac{5}{10}$ e $\frac{3}{5}$ é igual à fracção decimal $\frac{6}{10}$ e assim $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}$ representa o número decimal $0,5+0,6=1,1$ e podemos escrever $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}=\frac{11}{10}$.

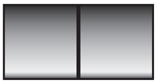
Analogamente, $\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}$ representa o número decimal $0,3$ que é o produto de $0,5$ por $0,6$.

Mas este procedimento nem sempre é possível. Por exemplo, $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}=0,5$, mas $\frac{1}{3}$ não é redutível a fracção decimal: trata-se de uma dízima infinita periódica com período 3: $\frac{1}{3}=0,333\ldots$. Então $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ representa uma dízima infinita periódica com período 3: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=0,833\ldots$.

Qual a fracção que representa essa dízima, isto é, que fracção representa a soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$?

Suponhamos uma barra com seis quadrados, como a representada na figura. Cada quadrado representa $\frac{1}{6}$ da barra e exprimimos a unidade (i. e., a totalidade da barra) como $\frac{6}{6}$.

Qual a porção da barra representada por $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$?

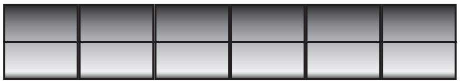
Como  representa metade (i. e., $\frac{1}{2}$) da barra original e $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$;  representa a terça parte (i. e., $\frac{1}{3}$) da barra original e $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$; e cada quadrado representa $\frac{1}{6}$ da barra original, temos que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

Assim, para calcular a **soma** $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, exprimimos ambas as fracções à custa da fracção $\frac{1}{6}$, isto é, reduzimos as fracções ao mesmo denominador.

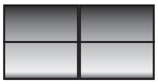
Também poderíamos ter considerado os quadrados da barra inicial divididos ao meio, cada metade representando um doze-avos da barra. Neste caso, exprimiríamos a unidade como doze doze-avos: $1=\frac{12}{12}$.

Quando reduzimos as duas fracções a um mesmo denominador, o denominador que procuramos é o *mínimo múltiplo comum* dos denominadores das fracções. Neste exemplo, é 6, porque é o menor número que é múltiplo de 2 e de 3.



Então

 representaria $\frac{1}{2}$ da barra original, ou $\frac{6}{12}$;

 representaria $\frac{1}{3}$ da barra original, ou $\frac{4}{12}$;

e obteríamos

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} = \frac{10}{12}$$

Neste caso, estaríamos a reduzir ambas as fracções ao denominador 12, o que não tem qualquer vantagem relativamente à utilização do denominador 6.

Vejamos mais um exemplo: para calcular $\frac{1}{4} + \frac{5}{6}$, precisamos de determinar um múltiplo comum de 4 e 6. Podemos considerar o produto 4×6, obtendo

$$\frac{1}{4} + \frac{5}{6} = \frac{6}{24} + \frac{20}{24} = \frac{26}{24} = \frac{13}{12}$$

Note-se que *menor* múltiplo comum de 4 e 6 é igual a 12, mas podemos usar qualquer múltiplo comum.

Para somar um número inteiro (natural) com uma fracção o processo é o mesmo. Por exemplo, para calcular $2 + \frac{1}{3}$, basta atender a que $2 = \frac{6}{3}$ e, assim,

$$2 + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Resumindo,

Para somar fracções, começamos por reduzi-las ao mesmo denominador; então, a soma é a fracção com o mesmo denominador e cujo numerador é a soma dos numeradores das parcelas:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Para **subtrair** fracções, o processo é análogo.

Retomemos a barra com seus quadrados e interpretemos $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$:

 representa $\frac{1}{2}$ da barra original e $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$

 representa $\frac{1}{3}$ da barra original e $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ e, assim,

 representa $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$. Então,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

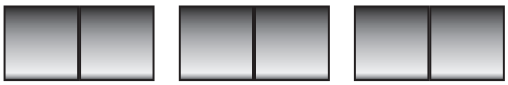
Para subtrair fracções, começamos por reduzi-las ao mesmo denominador; então, a diferença é a fracção com o mesmo denominador e cujo numerador é a diferença dos numeradores:

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Vejamos agora o **produto** de fracções. Comecemos por analisar o produto de um número inteiro (natural) por uma fracção.

É natural interpretar $3 \times \frac{1}{2}$ como $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Para que a propriedade comutativa se mantenha, devemos ter também $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$.

Para interpretar o significado deste produto podemos considerar 3 barras com 2 quadrados



cada uma delas representativa de uma unidade, pelo que as três barras representam o número 3.

Podemos representar $\frac{3}{2}$ à custa da divisão de cada barra ao meio, isto é,

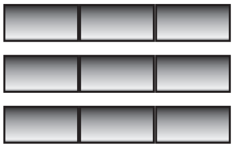
representa $\frac{3}{2}$.

Então, $\frac{1}{2} \times 3$ representa $\frac{1}{2}$ de 3.

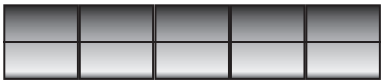
Analogamente, interpretamos $\frac{3}{2} \times \frac{3}{5}$ como $\frac{3}{2}$ de $\frac{3}{5}$. Como $\frac{3}{2}$ é $3 \times \frac{1}{2}$, pretendemos interpretar três vezes um meio de $\frac{3}{5}$. Como calcular $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{5}$?

Se considerarmos uma barra com 5 quadrados

representando a unidade, então 3 quadrados da barra

representam $\frac{3}{5}$; metade desta barra  representa um meio de $\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{2}$ de $\frac{3}{5}$ é representado por 3 barras iguais a esta última. 

Mas se a barra inicial for dividida ao meio



cada rectângulo representa $\frac{1}{10}$ da barra unitária e 6 rectângulos representam a fracção $\frac{3}{5}$, isto é, $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$. 

Metade desta barra  corresponde a 3 rectângulos, isto é, a $\frac{3}{10}$. Finalmente, as três barras representativas de $\frac{3}{2} \times \frac{3}{5}$ correspondem a 9 rectângulos, isto é, a $\frac{9}{10}$. Observamos, assim, que

$$\frac{3}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{2 \times 5}$$

O que observámos neste exemplo é válido em geral:

O produto de duas fracções é igual a uma fracção cujo numerador é o produto dos numeradores dos factores e cujo denominador é o produto dos denominadores dos factores:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Finalmente, vejamos como **dividir** fracções.

Comecemos por interpretar em que consiste dividir uma unidade por uma fracção unitária, por exemplo, em que consiste dividir 1 por $\frac{1}{3}$. Relembremos a divisão de números inteiros (naturais): dividir 8 por 4 consiste em determinar o número que multiplicado por 4 é igual a 8 (neste caso, 2). Uma vez que pretendemos estender a operação às fracções, dividir 1 por $\frac{1}{3}$ consiste em determinar o número que multiplicado por $\frac{1}{3}$ é igual a 1. Voltemos a uma barra representando uma unidade, dividida em 3 quadrados:

Cada quadrado representa $\frac{1}{3}$ e cada quadrado cabe três vezes na barra, pelo que 1 a dividir por $\frac{1}{3}$ é igual a 3:

$$1 : \frac{1}{3} = 3$$

Para dividir 1 por $\frac{2}{3}$, há que ter em conta que $\frac{2}{3}$ cabe em 1 *metade* das vezes que $\frac{1}{3}$ cabe em 1, pelo 1 a dividir por $\frac{2}{3}$ é igual a $\frac{3}{2}$:

$$1 : \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$$

Uma vez que pretendemos que a divisão de fracções mantenha as propriedades da divisão no conjunto dos números naturais, e como $1 : \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$, também $1 : \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$; e, genericamente, $1 : \frac{a}{b} = \frac{b}{a}$.

Vejamos, agora, por exemplo, como dividir $\frac{7}{3}$ por $\frac{6}{5}$.

Uma vez que $\frac{7}{3} = \frac{7}{3} \times 1$ e $1 : \frac{6}{5} = \frac{5}{6}$, concluímos que

$$\frac{7}{3} : \frac{6}{5} = \frac{7}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{35}{18}$$

Para dividir a fracção $\frac{a}{b}$ pela fracção $\frac{c}{d}$, multiplica-se a fracção $\frac{a}{b}$ pela fracção $\frac{d}{c}$:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Os números racionais na recta graduada

No capítulo anterior, fizemos referência à posição dos números numa recta graduada com uma origem. Analisemos agora, mais em detalhe, a marcação dos números racionais positivos.

Como ordenar números racionais expressos como fracções?

Basta referir essas fracções a uma mesma unidade, isto é, reduzi-las ao mesmo denominador. Por exemplo, comparemos $\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{6}$. Notando que 30 é múltiplo comum dos denominadores (neste caso é o menor múltiplo comum), e que podemos escrever $\frac{3}{5} = \frac{18}{30}$, $\frac{5}{6} = \frac{25}{30}$ concluímos que $\frac{3}{5} < \frac{5}{6}$.

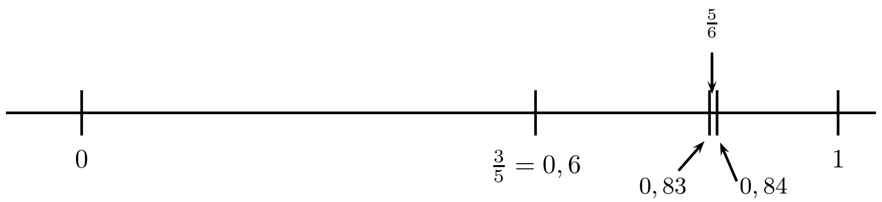
Se duas fracções têm o mesmo numerador, é maior a que tiver menor denominador porque, ao dividir a unidade num número menor de partes, cada parte é maior.

Para marcar aproximadamente $\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{6}$ na recta graduada, e tendo em conta que, na maioria dos casos, recorremos ao centímetro (ou a múltiplos do centímetro) como unidade de medida, poderá ter vantagem recorrer à sua representação decimal.

Temos que $\frac{3}{5} = 0,6$ e $\frac{5}{6} = 0,833333... = 0,8(3)$.

Quanto a $\frac{3}{5}$, trata-se de uma dízima finita, mas $\frac{5}{6}$ representa uma dízima infinita periódica. Se pretendermos uma aproximação com uma casa decimal (até às décimas), temos que $\frac{5}{6}$ está entre $0,8$ e $0,9$. Caso se pretenda uma aproximação com duas casas decimais (até às centésimas) temos que $\frac{5}{6}$ está entre $0,83$ e $0,84$.

Se tomarmos 10 centímetros para unidade de medida obtemos a representação seguinte:



$$0 < \frac{5}{6} < 1$$
$$0,8 < \frac{5}{6} < 0,9$$
$$0,83 < \frac{5}{6} < 0,84$$
$$0,833 < \frac{5}{6} < 0,834$$
$$0,8333 < \frac{5}{6} < 0,8334$$
$$\ldots$$

5

Estratégias de cálculo mental

Estratégias de cálculo mental

Apesar de toda a gente precisar e usar o cálculo mental na sua vida diária, a verdade é que este conceito pode ser pouco claro. Será que o cálculo mental só pode ser feito de cabeça? Não se pode usar papel e lápis? Quando se usa de cabeça um algoritmo, isto é cálculo mental?

O que é o cálculo mental?

Algumas características do cálculo mental — tal como indicadas, por exemplo, em Heuvel-Panhuizen (2001) — parecem-nos bastante esclarecedoras:

- trabalha-se com números e não com dígitos;
- usam-se propriedades elementares e relações tais como:
  - a propriedade comutativa (e. g. $15 + 24 = 24 + 15$; $29 \times 3 = 3 \times 29$)
  - a propriedade distributiva (e.g. $24 \times 7 = 20 \times 7 + 4 \times 7$)
  - relações inversas ($53 - 49 = 4$ porque $49 + 4 = 53$; $420 : 7 = 60$ porque $7 \times 60 = 420$)
  - relações que resultam de combinações das várias relações e propriedades

- apoia-se no uso de intuições e conhecimentos sólidos sobre factos numéricos;

- é possível anotar passos intermédios mas desenvolve-se sobretudo mentalmente.

Embora seja importante que os alunos dominem os algoritmos das operações — por outras palavras, sejam capazes de fazer a vulgarmente chamada "conta em pé" — e os apliquem com correcção, convém que eles utilizem desde cedo o cálculo mental.

O cálculo mental é gerador de familiaridade com os números e potencia a capacidade para reconhecer e comparar grandezas, formular estimativas e criticar resultados.

O uso do cálculo mental faz realçar o papel das propriedades das operações (distributividade, associatividade e comutatividade), que de facto justificam os algoritmos.

É fundamental que o cálculo mental tenha um lugar proeminente e precoce na Matemática que os alunos praticam, desde o primeiro ano. O seu uso deve preceder claramente a introdução dos algoritmos.

Formas básicas de cálculo mental

Para desenvolver o cálculo mental é fundamental ter um conhecimento profundo dos números e das operações. Para atingir este estádio, é importante realizar um trabalho de progressiva prática com relações e propriedades numéricas, de desenvolvimento do sentido das operações, de análise de contextos variados, etc.

Numa primeira análise, o facto de os números terem uma ordem natural faz com que eles possam ser sugestivamente representados numa linha, a *recta numérica*. Também a representação decimal dos números sugere naturalmente a sua decomposição em unidades, dezenas, etc. Estas propriedades dos números ou da sua representação que, em geral, são facilmente interiorizadas pelos alunos, permitem desenvolver algumas abordagens simples ao cálculo mental.

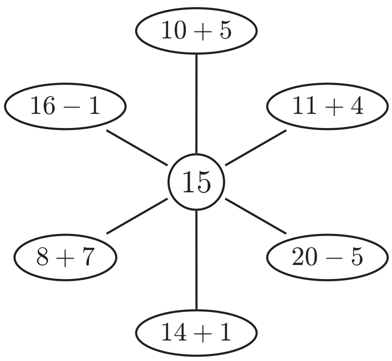
Outro aspecto a ter em conta neste longo caminhar para desenvolver o cálculo mental é o de que não são indiferentes os números com que trabalhamos. Os múltiplos de 10 são números basilares. Mas também o são números como 12, 15, 24, 25, 48 ou 75, devido à facilidade com que os podemos decompor em produtos de vários factores. Os alunos têm toda a vantagem em adquirir familiaridade com estes números, habitualmente designados *números de referência*, e em reconhecer certas relações que ocorrem frequentemente, tais como $25 + 25 = 50$, ou $4 \times 12 = 48$.

Muitas operações ficam facilitadas quando nos reportamos a um número de referência mais próximo, por exemplo, $27 + 28 = 25 + 2 + 25 + 3 = 55$.

Para além de exercícios como a decomposição dos números em ordens e classes, como se ilustra na Figura, é útil que os alunos lhes associem outras decomposições como, por exemplo, $26 = 25 + 1$ e $39 = 40 - 1$, que predispõem os alunos para estruturar os números de forma a facilitar os cálculos a realizar. A construção de aranhas, sobretudo no 1º ano, é um óptimo exercício para desenvolver esta atitude.

21056	vinte e um milhares e cinquenta e seis unidades	duas dezenas de milhar, uma unidade de milhar, cinco dezenas e seis unidades

Decomposição de um número em ordens e em classes



Uma “aranha” do número 15

A prática do cálculo mental não é sujeita a processos rígidos. Decide-se, caso a caso, qual o procedimento mais vantajoso para determinar o resultado. Conforme ilustrado anteriormente, cada operação não é encarada como algo indivisível, devendo ser decomposta em etapas simples de realizar.

Há algumas ideias básicas ou "conceitos-âncora" que, quando presentes no nosso espírito, facilitam grandemente a escolha dessas etapas:

- Ordenação e representação dos números
- Associatividade e comutatividade da adição e multiplicação
- Distributividade da multiplicação em relação à adição
- Dobro/metade, múltiplo/submúltiplo
- Números próximos de múltiplos de 10 (20, 30, 500,...) ou potências de 10 (100, 1000,...)
- Compensações

Os múltiplos de 10 e das suas potências são frequentemente usados para obter estimativas. Por exemplo, quando o euro entrou em vigor, era muito comum a fazer a conversão para a moeda antiga; uma vez que um euro equivalia a $200,482$ escudos, um valor aproximado de 200 escudos permitia uma rápida e adequada estimativa.

Apresentamos em seguida alguns exemplos simples que ilustram a aplicação destes "conceitos-âncora".

Cálculo mental usando estratégias variadas

É importante que os alunos desenvolvam as suas próprias técnicas de cálculo e não fiquem limitados a processos pré-definidos. Essa "liberdade" desenvolve a capacidade para a resolução de problemas, criando nos alunos uma maior autonomia para escolher caminhos conducentes à sua solução. Mas para fazer uma escolha há que ter por onde escolher. A opção por uma estratégia passa pela interiorização dos "conceitos-âncora" que acabámos de enunciar.

Os exemplos seguintes pretendem ilustrar estratégias variadas para a realização das quatro operações com recurso ao cálculo mental.

Uma das estratégias utilizadas é a do cálculo mental "em linha". Imaginamos os números colocados na recta numérica e as operações são interpretadas como movimentos ao longo dela: avançar (+), recuar (-), avançar repetidamente (x). Pressupomos a recta não graduada, não havendo qualquer vantagem em marcar os diversos números numa escala rigorosa, mas é importante o aluno compreender que um número maior surge sempre à direita de um número menor.

Exemplo 1. Para calcular $53 + 27$, marcamos o número 53 na recta numérica. Podemos começar por adicionar 7 a 53, obtendo 60, e em seguida, adicionar 20; ou, em alternativa, começar por adicionar 20, obtendo 73 e, em seguida, adicionar 7.

Exemplo 2. Para calcular $53 + 27$:

$$53 = 50 + 3$$
$$27 = 20 + 7$$
$$50 + 20 = 70$$
$$3 + 7 = 10$$
$$70 + 10 = 80$$

Neste processo, os números são vistos na sua estrutura decimal e as operações são feitas a partir da decomposição decimal e, posteriormente, do agrupamento das várias decomposições.

Exemplo 3. Para calcular somas de números recorre-se frequentemente aos múltiplos de 10 (em particular às potências de 10):

$$27 + 18 = 20 + 10 + 7 + 8 = 30 + 15 = 40 + 5 = 45 \qquad \text{(i)}$$

Neste caso calculou-se em primeiro lugar a soma das dezenas exactas.

$$135 + 72 = 130 + 70 + 5 + 2 = 200 + 7 = 207 \qquad \text{(ii)}$$

Neste caso calculou-se em primeiro lugar a soma que conduz a um número exacto de centenas.

Em ambas as situações se recorreu aos números de referência, e as operações foram realizadas da esquerda para a direita: em (i) observamos que 20 mais 10 é igual a 30 e que 7 mais 8 é igual a 15; em (ii) observamos que 130 mais 70 é igual a 200 e que 5 mais 2 é igual a 7. Esta técnica, presente em muitas situações de cálculo mental, pode ser adaptada à "conta em pé", como se referiu no capítulo anterior.

Exemplo 4. Para calcular $100-49$, podemos fazer intervir a noção de dobro (ou metade), bem como a ideia de um número "próximo da dezena" (49 é muito próximo de 50, mas é *mais fácil* fazer contas com 50 do que com 49):

100 é o *dobro* de 50 (ou 50 é *metade* de 100), logo
$100 - 50$ é 50; $100 - 49$ é 51 (pois $49 + 1$ é 50)

Exemplo 5. Podemos calcular $802-297$, raciocinando do seguinte modo: 297 é muito próximo de 300; sei que $802-300 = 502$; como subtraí três unidades a mais (porque 297 são 3 a menos do que 300), obtenho

$$802 - 297 = 505$$

Observe-se que, nos exemplos 4 e 5, além de se usarem números de referência, fizeram-se compensações: no exemplo 4, o resultado foi compensado somando ao resultado o valor 1 que tinha sido acrescentado ao subtractivo, e no exemplo 5 o resultado foi compensado somando o valor 3 que tinha sido acrescentado ao subtractivo. Este mecanismo de compensação está presente no Exemplo 8, onde se compensam o aditivo e o subtractivo de forma a não alterar o resultado.

As compensações também pode estar presentes no cálculo de somas, como se ilustra em seguida.

Exemplo 6. Para calcular $29+43$, podemos observar que $29+1 = 30$ e $43+2 = 45$, pelo que se compensam ambas as parcelas (com 1 e 2), e ao resultado devemos subtrair 3 e, assim,

$$29 + 43 = 30 + 45 - 3 = 75 - 3 = 72$$

Para uma mesma operação podemos usar estratégias que conduzam a compensar ou descompensar o resultado:

Exemplo 7. Para calcular $60 - 17$ podemos, por exemplo, ter em conta que $17 + 3 = 20$. Se adicionarmos 3 ao subtractivo teremos de compensar o resultado com 3:

$$60 - 17 = (60 - 20) + 3 = 43$$

Também poderíamos ter em conta que $17 = 10 + 7$, e assim

$$60 - 17 = (60 - 10) - 7 = 50 - 7 = 43$$

Com a primeira estratégia há que compensar o resultado, e com a segunda estratégia é necessário "descompensar" o resultado.

Vejamos mais algumas situações que ilustram diferentes tipos de compensações:

No Exemplo 8, estamos a tirar partido do *princípio de invariância do resto*, que enunciámos na página 37.

Exemplo 8. Para calcular $498 - 183$, podemos começar por observar que $498 + 2 = 500$; se adicionarmos 2 ao aditivo temos de adicionar 2 ao subtractivo:

$$498 - 183 = 500 - (183 + 2) = 500 - 185$$

Como $185 + 15 = 200$, obtém-se finalmente

$$498 - 183 = 500 - (183 + 2) = 500 - 185 = (500 - 200) + 15 = 315$$

Exemplo 9. (i) Para calcular $220 - 35$, podemos observar que $35 = 30 + 5$ ou $35 = 40 - 5$, e assim

$$220 - 35 = (220 - 30) - 5 = 190 - 5 = 185$$

ou

$$220 - 35 = (220 - 40) + 5 = 180 + 5 = 185$$

(ii) Para calcular $400–172$, podemos calcular $400–180$ e compensar somando 8: $400–172 = 400–180 + 8 = 220 + 8 = 228$. Em alternativa, podemos ir aproximando 172 de 400: partindo de 172, faltam 28 para chegar a 200 e a 200 faltam 200 para chegar a 400. Assim, partindo de 172, falta $28 + 200$ para chegar a 400, isto é,

$$400–172 = 28 + 200 = 228$$

Este processo consiste em completar o subtractivo até chegar ao aditivo. Podemos também subtrair a 400 diversas quantidades até retirar 172, por exemplo:

$$400–2 = 398$$
$$398–70 = 328$$
$$328–100 = 228$$

Como $2 + 70 + 100 = 172$, temos que $400–172 = 228$.

Em todos os exemplos anteriores, as propriedades comutativa e associativa da adição estiveram presentes. Nos exemplos seguintes é fundamental a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição.

Exemplo 10. Para o cálculo de 3×54 podemos, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, multiplicar 50 por 3 e somar 3×4 ao resultado:

$$3 \times 54 = 3 \times 50 + 3 \times 4 = 150 + 12 = 162$$

Exemplo 11. Para o cálculo de 8×27 podemos, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtracção, multiplicar 27 por 10 e subtrair 2×27 ao resultado:

$$8 \times 27 = 10 \times 27–2 \times 27 = 270–54 = 270–50–4 = 216$$

Quando o cálculo a efectuar envolve a divisão pode ser conveniente recorrer à decomposição decimal do dividendo, mas nem sempre essa estratégia é adequada, como acontece nos dois casos seguintes.

Exemplo 12. (i) Para dividir 396 por 3, e tendo em conta que $396 = 300+90+6$, podemos aplicar a propriedade distributiva da divisão em relação à adição:

$$396 : 3 = 300 : 3 + 90 : 3 + 6 : 3 = 100 + 30 + 2 = 132$$

(ii) A estratégia anterior não é aplicável, por exemplo, quando se pretende dividir 321 por 3. De facto, $321 = 300 + 20 + 1$ e nem 20 nem 1 são divisíveis por 3. Neste caso existe uma estratégia evidente: $321 = 300 + 21$ e assim

$$321 : 3 = 300 : 3 + 21 : 3 = 100 + 7 = 107$$

Também se poderia observar que $321 + 12 = 333$ e $333 : 3 = 111$. Como se está a compensar o dividendo com 12, ao resultado deve ser subtraído $12 : 3 = 4$. Aqui estamos a aplicar a propriedade distributiva da divisão em relação à subtracção:

$$321 : 3 = (333 - 12) : 3 = 333 : 3 - 12 : 3 = 111 - 4 = 107$$

(iii)

Para efectuar uma divisão pode proceder-se a simplificações sucessivas:

Exemplo 13. Para calcular $480 : 96$ podem dividir-se simultaneamente o dividendo e o divisor por factores comuns. Por exemplo,

$$480 : 96 = (480 : 48) : (96 : 48) = 10 : 2 = 5$$

O recurso a números de referência pode constituir uma estratégia útil, como se ilustra em seguida.

Exemplo 14. Para calcular $3600 : 25$, podemos lembrar-nos de que $4 \times 25 = 100$, para dividir 3600 por 100 e multiplicar o resultado

No caso da divisão, a propriedade distributiva só é verdadeira quando se decompõe o dividendo, e não o divisor! Por exemplo,

$$280 : 7 \neq 280 : 5 + 280 : 2$$

por 4:

$$3600 : 25 = (3600 : 100) \times 4 = 36 \times 4$$

Para calcular 36×4, basta recorrer à decomposição decimal:

$$36 \times 4 = (30 + 6) \times 4 = 120 + 24 = 144$$

As várias situações assinaladas mostram como o cálculo mental não é nenhum tratado teórico que exige longos anos de estudo. As suas estratégias são obtidas através da familiaridade adquirida com os números, as operações e as suas propriedades. Aquilo que devemos incutir nos nossos alunos pode resumir-se na seguinte máxima:

Estar sempre à espreita de um cálculo mais simples.

6

Desafios com números

Desafios com números

Vivemos num mundo em que cada vez mais é necessário ter sensibilidade para interpretar o que significam os números usados na descrição de uma dada situação ou conseguir identificar e explorar padrões e regularidades numéricas. Existem inúmeras situações numéricas que constituem óptimas oportunidades para cultivar a curiosidade científica e o prazer de procurar caminhos para responder a uma questão.

Neste capítulo apresentamos exemplos deste tipo de situações a que genericamente chamamos desafios com números. Trata-se de diferentes tipo de propostas cuja exploração faz apelo ao uso de relações numéricas e de processos de cálculo, proporcionando uma análise crítica de raciocínios e processos numéricos.

Alguns destes desafios enquadram-se na chamada Matemática Recreativa, um ramo da matemática se ocupa de fenómenos aritméticos e geométricos que, independentemente da sua utilidade, são divertidos.

Números e regularidades

Um aspecto bastante importante do trabalho dos matemáticos consiste na descoberta de regularidades, procurando a ordem e estrutura no caos e na desordem. É neste sentido que alguns autores definem matemática como sendo a ciência dos padrões. Ilustramos em seguida algumas situações envolvendo padrões e regularidades numéricas.

A tabela dos 100

A exploração da tabela formada pelos primeiros 100 números naturais proporciona uma grande variedade de situações que permitem analisar diferentes padrões e regularidades.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	16	18	19	20
21	22	22	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Calcular a soma de cada uma das três primeiras linhas da tabela. O que se observa? Como se explica que isto aconteça? Sem fazer cálculos, indicar a soma das linhas seguintes.

Observar o que se passa com a soma das linhas da tabela conduz à análise de um conjunto de relações:

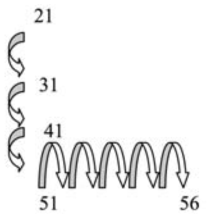
Soma 1ª linha – 55
Soma 2ª linha – 155
Soma 3ª linha – 255

Cada linha tem mais 100 que a anterior pois cada número tem mais 10 do que o que lhe está imediatamente a cima na tabela (11 tem mais 10 que 1; 12 tem mais 10 que 2; ...). Sendo assim, a soma das linhas a partir da terceira será 355, 455, 555, 655, 755, 855, 955.

Será que em relação à soma de cada coluna da tabela também é possível estabelecer alguma relação?

Neste caso à soma de cada coluna adiciona-se 10 e obtém-se a soma da coluna seguinte pois a cada número soma-se 1 para obter o número que está à sua direita.

São estes padrões relativos às linhas e colunas da tabela do 100 que justificam os procedimentos que se podem usar para somar e subtrair números com a tabela dos 100: por exemplo, para calcular $21+35$ parto do 21 e desço 3 linhas(para somar 30) chegando ao 51. Falta somar 5 e por isso dá-se 5 saltos para a direita do 51, chegando-se assim ao 56.



A tabela dos 100 pode ainda ser usada como suporte para a resolução de outras questões e problemas que envolvem a exploração de regularidades. Por exemplo:

- Somar dois múltiplos de 5. Em que coluna(s) se encontra essa soma? Porquê?
- Em que coluna(s) estão os números que são múltiplos de 2 e de 5? Porquê?

Partindo da tabuada

As tabuadas, para além de serem um suporte do cálculo numérico, contêm muitas regularidades e padrões. Vejamos algumas observações que podem ser feitas a partir da tabuada do 3 e do 9:

$$\begin{aligned} 1\times 3&=3\\ 2\times 3&=6\\ 3\times 3&=9\\ 4\times 3&=12\\ 5\times 3&=15\\ 6\times 3&=18\\ 7\times 3&=21\\ 8\times 3&=24\\ 9\times 3&=27\\ 10\times 3&=30\\ 11\times 3&=33\\ 12\times 3&=36\\ 13\times 3&=39\\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1\times 9&=9\\ 2\times 9&=18\\ 3\times 9&=27\\ 4\times 9&=36\\ 5\times 9&=45\\ 6\times 9&=54\\ 7\times 9&=63\\ 8\times 9&=72\\ 9\times 9&=81\\ 10\times 9&=90\\ 11\times 9&=99\\ 12\times 9&=108\\ 13\times 9&=117\\ &\dots \end{aligned}$$

Quando se multiplica 3 (ou 9) por um número par o produto é par; quando se multiplica por ímpar o produto é ímpar.

O algarismo das unidades do produto repete-se de 10 em 10 sempre pela mesma ordem.

Na tabuada do 9, o algarismo das unidades do produto decresce de nove até zero, e assim sucessivamente. O algarismo das dezenas cresce em sentido contrário.

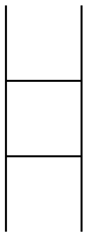
A soma dos algarismos do produto, até ao 10×9, dá sempre 9. Será que esta propriedade se mantém nos produtos seguintes?

O algarismo das centenas é 0 até 11×9, é 1 até 22×9, é 2 até 33×9.

Sabe-se quanto é, por exemplo, 45×9, pois o algarismo das centenas é 4 (até 44×9 era 3), o das unidades é 5, logo o das dezenas é 0 (a soma dos algarismos é 9).

As escadas que se montam

As escadas que se montam é um dos muitos exemplos de situações que permitem compreender relações entre padrões geométricos e numéricos.



Existem no mercado conjuntos compostos por ripas de madeira e peças metálicas de união que permitem a construção de escadas do tipo das da figura ao lado.

Para construir uma escada com um degrau, são precisas cinco ripas e duas peças metálicas.Para construir uma escada com dois degraus, são precisas oito ripas e quatro peças metálicas.

> *Para construir uma escada com três degraus de quantas peças metálicas preciso? E se a escada tiver 9 degraus?*
>
> *Como conseguir calcular o número de peças metálicas necessárias para construir uma escada de que se sabe o número de degraus?*
>
> *Qual o número de ripas necessário para construir uma escada com 6 degraus? E com 20?*

Neste exemplo pode-se associar o número de peças metálicas ao número de degraus (é o dobro). Também se pode, por exemplo, perceber que cada degrau a mais exige 3 ripas, conseguindo deste modo perceber que para fazer uma escada de n degraus preciso de $3n + 2$ ripas.

Mais regularidades em torno dos números naturais

Os números e as operações constituem um contexto quase inesgotável para a exploração de diferentes tipos de regularidades. Para além dos exemplos anteriores desafiamos o leitor a analisar os que a seguir se apresentam.

- *Completar e descobrir a igualdade seguinte, de acordo com o padrão numérico observado*

$$7 + 4 =$$
$$77 + 34 =$$
$$777 + 3334 =$$
$$7777 + 3334 =$$
$$\ldots\ldots$$

$$8 + 3 =$$
$$88 + 33 =$$
$$888 + 333 =$$
$$8888 + 3333 =$$
$$\ldots\ldots$$

$$9 - 7 =$$
$$89 - 67 =$$
$$889 - 667 =$$
$$8889 - 6667 =$$
$$\ldots\ldots$$

$$8 - 3 =$$
$$78 - 23 =$$
$$778 - 223 =$$
$$7778 - 2223 =$$
$$\ldots\ldots$$

- *Observe a seguinte regularidade e complete*

$$1 \times 1 = 1$$
$$11 \times 11 = 121$$
$$111 \times 111 = 12321$$
$$1111 \times 1111 =$$
$$11111 \times 11111 =$$

- *Calcular*

  12×42 $\quad$ 46×96

  21×24 $\quad$ 64×69

  Indique outros pares de números que verifiquem esta regularidade. Ela é sempre válida?

- *Observe as igualdades seguintes*

$$33 \times 8547 = 111111$$
$$66 \times 8547 = 222222$$

Qual a regra de formação destes números e porquê?

As capicuas

A associação dos números à sorte e ao azar tem raízes muito antigas. Enquanto os números 3 e 7 simbolizam, respectivamente, o divino e a plenitude dos tempos, o número 13 é, desde há muitos séculos, considerado o número do azar. Também se associa o factor sorte às capicuas, isto é, os números em que a disposição dos algarismos é simétrica.

Por exemplo, em base 10 existem nove capicuas de um algarismo, 1, 2, ..., 9, e outras nove com dois algarismos, 11, 22, 33, ...,99.

Por exemplo,

Base 10	Base 2
99	1100011

Base 10	Base 3
212	21212

- Quantas capicuas haverá com três algarismos? E com quatro? E com vinte?
- Construa capicuas na base 10 e converta-as noutras bases. Será que a simetria se mantém?

Explorando sequências

Pensar como se pode continuar uma dada sequência descobrindo o modo como ela poderá ser construída é uma actividade bastante interessante e que envolve o uso de diversos conhecimentos matemáticos.

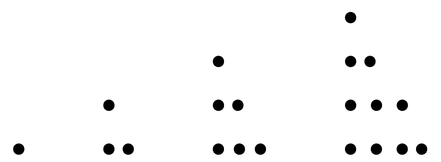
Os exemplos que apresentamos em seguida envolvem, por exemplo, a multiplicação e a adição de números inteiros e decimais – a soma de números ímpares consecutivos, a multiplicação por 0,1; 0,01 ou 0,001 — e a exploração de conceitos como os de quadrado perfeito ou de números triangulares.

- Descobrir uma regra geradora e completar os espaços assinalados de acordo com essa regra, em cada uma das sequências:

0,2	2	20	____	____	____	____	____
3000	300	30	____	____	____	____	____
4	8	13	19	____	____	____	____
1	1	2	3	5	8	____	____

Qual o décimo termo de cada uma das sequências anteriores?

- *Observar a seguinte sequência de figuras:*



Indicar uma regra de formação para esta sequência e desenhar a quinta figura. Quantos pontos tem essa figura? E quantos terá a oitava?

- *Continuar as três sequências, de forma a conservar os respectivos padrões numéricos*

$$\begin{array}{ccc} 0 \times 9 + 1 = 1 & 9 \times 9 + 7 = 88 & 1 \times 8 + 1 = 9 \\ 1 \times 9 + 2 = 11 & 98 \times 9 + 6 = 888 & 12 \times 8 + 2 = 98 \\ 12 \times 9 + 3 = 111 & 987 \times 9 + 5 = 8888 & 123 \times 8 + 3 = 987 \end{array}$$

Observemos que, na formulação destas questões, se teve o cuidado de clarificar que se pretende descobrir *uma* regra e não *a* regra para as continuar. Por exemplo, se for posta a questão

Será o número 333 um termo da sequência 11, 22, 33, 44, 55, $\ldots$?

a informação dada no enunciado é insuficiente para permitir uma resposta. Seria preciso indicar qual a regra que está subjacente à escrita da sequência apresentada. Se cada termo da sequência for obtido do anterior adicionando 11, o número 333 não é termo da sequência. Mas se interpretarmos a sequência como sendo formada pelos números compostos por algarismos todos iguais, então 333 será um dos seus termos. Se observarmos que a sequência assim construída tem 9 termos com 2 algarismos, outros 9 com 3 algarismos e assim sucessivamente, 333 é o 12º termo da sequência.

Progressões

As progressões são um tipo especial de sequências em que cada termo é gerado a partir do anterior através da adição de uma parcela ou da multiplicação por um factor constante.

As duas situações seguintes envolvem progressões e destinam-se a descobrir padrões na adição de um número finito dos seus termos que conduzam à formulação de regras.

- *Calcular*

  a) $1+2+3+4+5+\cdots+98+99+100$

  b) $1+2+3+4+\cdots+998+999$

  c) $2+4+6+8+\ldots+96+98+100$

Para calcular a soma proposta em a), comecemos por calcular o resultado da adição $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$:

> Observemos que $1+10=11$, $2+9=11$, $3+8=11$, $4+7=11$, $5+6=11$. Então a o resultado pretendido é igual a $5\times 11=55$, uma vez que adicionámos 5 vezes, obtendo sempre o resultado 11.

Da mesma forma, para calcular $1+2+3+4+5+\ldots+98+99+100$, basta ter em conta que $1+100=101$, $2+99=101$, $\ldots$, $50+51=101$. Então,

$$1+2+3+4+5+\ldots+98+99+100=50\times 101=5050.$$

No caso da alínea b), estamos a adicionar um número ímpar de parcelas, 999.

Comecemos por observar que para calcular $1+2+3+4+5+6+7+8+9$ podemos ter em conta que $1+9=10$, $2+8=10$, $3+7=10$, $4+6=10$, mas sobra a parcela 5.

Então,

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=5+4\times 10=45.$$

Resta agora adaptar o raciocínio anterior à longa adição proposta.

Conta-se que Gauss, com apenas 10 anos, quando confrontado pelo seu professor com esta soma, deu o resultado de imediato. Ele terá usado essencialmente o raciocínio que aqui explicitamos.

Temos que $1+999=1000$, $2+998=1000$, $\ldots$, $499+501=1000$ e sobra o número 500.

Então,

$$1+2+3+4+\cdots+998+999=500+499\times1000=499500.$$

No caso da alínea c), estamos a adicionar um número par de parcelas, 50, e observamos que

$$2+100=102, 4+98=102, 6+96=102, \ldots, 50+52=102.$$

Então $2+4+6+8+...+96+98+100=25\times102=2550$.

Observemos que nos três casos considerados estamos a adicionar parcelas que gozam de uma propriedade específica: cada uma resulta da anterior adicionando sempre o mesmo número (1 nos primeiro e segundo casos e 2 no terceiro caso). Exprime-se este facto dizendo que as parcelas estão em **progressão aritmética** e designa-se por razão o número que se adiciona a cada parcela para obter a seguinte.

Por exemplo, comecemos com o número 1 e adicionemos sequencialmente 5. Obtemos a progressão aritmética, de razão 5,

$$1, 6, 11, 16, 21, 26, \ldots$$

Ao calcularmos, por exemplo, $1+6+11+16+21+26+31$, podemos observar que se trata da soma de um número ímpar de termos, 7 termos, em que

$$1+31=6+26=11+21=32$$

sobrando o número 16, que é o termo médio da sequência $1, 6, 11, 16, 21, 26, 31$.

Então, $1+6+11+16+21+26+31=16+3\times32=112$.

Observemos que o raciocínio efectuado para calcular a adição sequencial de termos da progressão 1, 2, 3, 4, 5, 6, $\ldots$ foi análogo ao utilizado para a progressão 1, 6, 11, 17, 22, $\ldots$ Mais precisamente, para calcular $1+2+3+4+5+6+7$ ou $1+6+11+16+21+26+31$ usamos a mesma estratégia: no primeiro caso temos em conta que $1+7=2+6=3+5$ e, no segundo caso que $1+31=6+26=11+21$. No entanto, no primeiro caso, a diferença entre uma parcela e a anterior é igual a 1 e no segundo caso é igual a 5. Porque será que a estratégia se mantém?

Observemos que no caso $1+2+3+4+5+6+7$ temos que $2=1+1$ e $6=7-1$, pelo que

$$2+6=(1+1)+(7-1)=1+7,$$

uma vez que $+1-1=0$. Analogamente, $3+5=(2+1)+(6-1)=2+6$.

Para $1+6+11+16+21+26+31$ temos que $6=1+5$ e $26=31-5$, pelo que $6+26=(1+5)+(31-5)=1+31$, uma vez que $+5-5=0$. Analogamente, $11+21=(6+5)+(26-5)=6+26$.

Tendo em conta que todas as considerações anteriores se mantêm se em vez de 5 tomarmos outra razão qualquer, podemos concluir que a estratégia utilizada "funciona" porque as sequências consideradas têm em comum o facto de serem progressões aritméticas.

Retomemos a adição $1+6+11+16+21+26+31$.

Observemos que 16 é a semi-soma de 1 com 31, isto é, $16=\frac{32}{2}$, pelo que

$$\begin{aligned}1+6+11+16+21+26+31 &= 16+3\times 32=\frac{32}{2}+3\times 32\\ &= \frac{32+6\times 32}{2}=\frac{7\times 32}{2}\end{aligned}$$

A expressão do termo médio de uma sequência finita de termos de uma progressão aritmética com um número ímpar de termos em função dos seus primeiro e último termos resulta exclusivamente do facto de cada termo se obter do anterior somando uma quantidade constante. No caso particular que estamos a estudar temos que

$$16 = 1 + 3 \times 5, \quad 31 = 1 + 6 \times 5 \quad \text{e} \quad \frac{1 + (1 + 6 \times 5)}{2} = 1 + 3 \times 5$$

Se n é impar, o termo médio de uma sequência finita com n termos de uma progressão aritmética, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, isto é, o termo de ordem $\frac{n-1}{2}$, é igual a $\frac{a_1+a_n}{2}$.

Anteriormente estudámos estratégias para calcular a soma de uma sequência finita de termos de uma progressão aritmética.

Genericamente, dada uma sequência finita de termos de uma progressão aritmética, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, calculemos $a_1 + a_2 + a_2 + \cdots + a_n$.

Se n é par, a soma $a_1 + a_2 + a_2 + \cdots + a_n$, de n parcelas, é igual a $a_1 + a_n$ multiplicado por metade do número de termos, isto é, $(a_1 + a_n) \times \frac{n}{2}$.

Se n é ímpar, a soma $a_1 + a_2 + a_2 + \cdots + a_n$, de n parcelas, é igual a $a_1 + a_n$ multiplicado por metade do número de termos menos 1, a que se adiciona o termo médio, isto é, o termo correspondente ao índice $\frac{n-1}{2}$. Como esse termo é igual a $\frac{a_1+a_n}{2}$, obtemos

$$a_1 + a_2 + a_2 + \cdots + a_n = (a_1 + a_n) \times \frac{n-1}{2} + \frac{a_1 + a_n}{2} = (a_1 + a_n) \times \frac{n}{2}$$

Assim, obtemos a fórmula

$$a_1 + a_2 + a_2 + \cdots + a_n = (a_1 + a_n) \times \frac{n}{2}$$

qualquer que seja o valor de n.

No caso em que o primeiro termo e a razão são números positivos, esta expressão pode ser obtida de forma muito simples com algumas considerações de carácter geométrico. Para simplificar consideremos a adição de 5 parcelas a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 de uma progressão aritmética com razão r. Temos que $a_2 = a_1 + r$, $a_3 = a_2 + r$, $\ldots$ e podemos representar os termos da progressão como as áreas dos rectângulos que formam os degraus de uma escada em que a medida da profundidade dos degraus é constante e igual a r e a altura é igual a 1, conforme se ilustra na

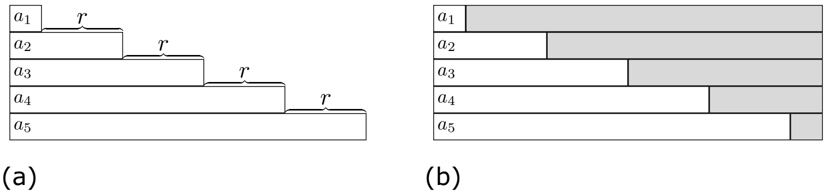


Figura 6.1: Soma de termos de uma progressão aritmética

Figura 6.1. Assim, calcular a soma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ equivale a calcular a área da figura plana representada na Figura 6.1 (a).

Esta "escada" é ajustável com outra igual (a sombreado na Figura 6.1 (b)) e a figura resultante é um rectângulo com lados $a_1 + a_5$ e 5.

Sendo a figura inicial e a figura sombreada iguais, a área de qualquer uma delas é metade da área do rectângulo com lados $a_1 + a_5$ e 5. Então

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_5 = \frac{(a_1 + a_5) \times 5}{2}$$

Este raciocínio mantém-se com qualquer número de degraus na escada, pelo que

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$$

- *Calcular*

a) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$

b) $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729$

Para resolver a), observemos que

$$\begin{aligned}2 &= 1+1\\ 4 &= (1+2)+1\\ 8 &= (1+2+4)+1\\ 16 &= (1+2+4+8)+1\\ 32 &= (1+2+4+8+16)+1\end{aligned}$$

e assim sucessivamente. Então, por exemplo, $1+2+4+8+16 = 32-1 = 31$. Observando que cada parcela é o dobro da anterior, seremos levados a admitir que

$$1+2+4+8+16+32+64+128 = 256-1 = 255$$

A mesma igualdade, tendo em conta que $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, etc., pode escrever-se na forma

$$1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7 = 2^8-1$$

O leitor mais atento desconfiará de que há aqui um padrão geral. De facto, para qualquer número inteiro positivo *n*, tem-se a igualdade

$$1+2+2^2+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1$$

como veremos mais adiante.

No caso b), temos

$$\begin{aligned}1 &= 1\\ 3 &= 1\times 2+1\\ 9 &= (1+3)\times 2+1\\ 27 &= (1+3+9)\times 2+1\\ 81 &= (1+3+9+27)\times 2+1\\ 243 &= (1+3+9+27+81)\times 2+1\\ 729 &= (1+3+9+27+81+243)\times 2+1\\ 2187 &= (1+3+9+27+81+243+729)\times 2+1\end{aligned}$$

e assim sucessivamente. Então

$$1+3+9+27+81+243+729 = \frac{2187-1}{2} = 1093$$

De novo, há aqui um padrão geral. Qual?

Tendo em conta que $9 = 3^2$, $27 = 3^3$, $81 = 3^4$, etc., a expressão anterior toma a forma

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 = \frac{3^7 - 1}{2}$$

Nestes dois casos adicionamos parcelas que gozam de uma propriedade específica: cada uma resulta da anterior multiplicando-a sempre pelo mesmo número (2 no primeiro caso e 3 no segundo caso). Exprime-se este facto dizendo que as parcelas estão em **progressão geométrica** e designa-se por razão o número pelo qual se multiplica cada parcela para obter a seguinte. Na alínea a) pretendemos adicionar termos de uma progressão geométrica com razão igual a 2 e na alínea b) com razão igual a 3.

Os resultados obtidos mostram que os valores obtidos para as somas sequenciais de termos dependem da razão. Representando por r a razão, pode demonstrar-se que

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

Puzzles numéricos

Os puzzles estão presentes nas páginas de passatempos de jornais e revistas. A sua origem remonta ao século V quando os chineses determinaram o primeiro quadrado mágico, isto é, um quadrado em que as somas dos algarismos, de 1 a 9 sem repetições, que estão nas linhas verticais, horizontais e diagonais, são iguais. Vejamos um exemplo muito simples:

- *Completar o seguinte quadrado mágico:*

		2
3	5	
		6

A resolução deste puzzle pode ser feita por tentativas. Mas raciocínios elementares conduzem à determinação unívoca dos algarismos que devem ser colocados no lugar das letras.

a	b	2
3	5	c
d	e	6

Com efeito, tendo em conta que a soma dos números de 1 a 9 é igual a 45, a soma dos números das linhas horizontais, verticais e diagonais é igual a 15 (porque $45 : 3 = 15$). Assim, $c = 7$ (porque $3 + 5 + c = 15$), $a = 4$ (porque $a + 5 + 6 = 15$) e $d = 8$ (porque $2 + 5 + d = 15$). Resta determinar b e e, para o que basta ter em conta que $a + b + 2 = 4 + b + 2 = 15$, logo $b = 9$, e $d + e + 6 = 8 + e + 6 = 15$, logo $e = 1$.

Neste exemplo explorou-se um quadrado mágico do tipo 3×3. No caso de se tratar de um quadrado mágico do tipo 4×4, poderemos usar todos os números de 1 a 16. É possível também pensar em quadrados mágicos do tipo 5×5 (números de 1 a 25), 6×6 (números de 1 a 36), etc.

- *Um quadrado mágico com números inteiros*

Habitualmente os quadrados mágicos incluem apenas números naturais. Mas podem usar-se também outros números, como se ilustra no exemplo seguinte:

Complete o quadrado mágico usando os números 10*,* 7*,* 4*,* 1*,* -5*,* -8*,* -11*,* -14*.*

	-2	

Quebra-cabeças numéricos

O factorial de um número natural a (que se representa por $a!$) é o produto de a por todos os números naturais inferiores a a. Por exemplo, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

A característica de um número x (que se representa geralmente por $\lfloor x \rfloor$, ou ainda por $[x]$ ou $C(x)$) é o maior inteiro não superior a x.
Por exemplo, $\lfloor 2,78 \rfloor = 2$ e $\lfloor -2,78 \rfloor = -3$.

Quatro quatros

- *Escrever os números de 0 a 20 com 4 quatros usando as quatro operações fundamentais, a raiz quadrada e o factorial de 4.*

Por exemplo, podemos escrever 0, 3 e 4 da seguinte forma:

$$0 = 4 - 4 + 4 - 4$$
$$3 = (4 + 4 + 4) : 4$$
$$4 = (4 : \sqrt{4}) \times (4 : \sqrt{4})$$

É interessante continuar este desafio até 100, tentando descobrir quais os números que não se conseguem escrever à custa de 4 quatros usando apenas as quatro operações elementares, a raiz quadrada e o factorial. Se a estas ferramentas acrescentarmos, por exemplo, a característica de um número, já se conseguem escrever todos os números até 100 usando quatro e só quatro algarismos 4.

Será interessante também trabalhar o desafio análogo com 5 cincos. A título de exemplo, temos $7 = 5 + (5 : 5) + (5 : 5)$ e $6 = 5 + (5 : 5) \times (5 : 5)$.

Números autodigitais

Chamam-se números autodigitais os que se escrevem à custa dos seus algarismos usando as operações fundamentais, as potências, os factoriais e as raízes quadradas.

Por exemplo, os números 121, 127 e 9025 são números autodigitais, porque

$$121 = 11^2 \qquad 127 = -1 + 2^7 \qquad 9025 = (90 + 5)^2$$

- *Justifique que os seguintes números são autodigitais:*

$$153,\ 216,\ 289,\ 343,\ 347,\ 625,\ 1530,\ 2187,\ 3125,$$
$$4374,\ 4624,\ 5120,\ 6144,\ 7928,\ 8192,\ 11664,\ 759375$$

Outros números autodigitais:

$$\begin{aligned} 145 &= 1! + 4! + 5! \\ 25 &= 5^2 \\ 126 &= 6 \times 21 \\ 625 &= 5^{6-2} \end{aligned}$$

Letras por números

- *Substitua as letras A, B, C, D, E e F pelos dígitos 2, 3, 4, 5, 6, 8 na diferença $ABC - DEF$ de forma a obter a maior diferença possível e a menor diferença possível*

Colocando no primeiro número os maiores algarismos possíveis, da esquerda para a direita e no segundo os menores possíveis também da esquerda para a direita, obtém-se a maior diferença possível: $865 - 234$.

Para obter a menor diferença possível e de modo a que ela seja positiva, é preciso que ABC seja maior do que DEF, minimizando a diferença. Para isso, escolhemos os dígitos da esquerda próximos: podemos pensar em escolher $A = 3$ e $D = 2$, ou $A = 4$ e $D = 3$. No entanto, como a diferença das centenas é sempre 100, em qualquer dos casos é preciso que, com os algarismos que restam, se possam formar números o menor e o maior possíveis, para estreitar ao máximo essa diferença inicial de 100. A solução é então $523 - 486$.

- *Substituir as letras pelos algarismos adequados de forma a tornar válida a operação*

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & a & 1 & b \\
 & & \times & 3 & c & 2 \\
\cline{3-6}
 & & & d & 3 & f \\
 & 3 & g & 2 & h & \\
i & 2 & j & 5 & & \\
\hline
1 & k & 8 & m & 3 & 0
\end{array}$$

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & \mathbf{4} & 1 & \mathbf{5} \\
 & & \times & 3 & \mathbf{8} & 2 \\
\hline
 & & & \mathbf{8} & 3 & \mathbf{0} \\
 & 3 & \mathbf{3} & 2 & \mathbf{0} & \\
\mathbf{1} & 2 & \mathbf{4} & 5 & & \\
\hline
1 & \mathbf{5} & 8 & \mathbf{5} & 3 & 0
\end{array}
$$

Pela observação da última linha (resultado da operação), é imediato que $f = 0$ e $h = 0$. Quanto a b, ele será tal que multiplicado por 2 dá um número que termina em 0 e que multiplicado por 3 dá um número que termina em 5, pelo que $b = 5$. Como o produto de c por 15 é um número acabado em 20, tem-se que $c = 8$. Como o produto de 8 por a é um número começado por 3, tem-se que $a = 4$ e assim $g = 3$. Para obter os restantes algarismos basta agora completar o algoritmo.

Charadas

O gosto pelas charadas remonta à antiguidade. Os gregos foram os primeiros a formulá-las, mas apenas no campo da geometria (por exemplo, o problema da duplicação do cubo, que se sabe hoje não ter solução). No campo da aritmética, já surgem charadas num papiro egípcio datado de 1650 a.C. (o bem conhecido papiro de Rhind comprado em meados do século XIX em Luxor pelo escocês Henry Rhind). Uma delas é a que segue, associada às progressões aritméticas:

> *Cinco pessoas repartem entre si cem medidas de trigo de tal modo que a segunda recebeu mais do que a primeira tanto quanto coube à terceira mais do que à segunda, à quarta mais do que à terceira e à quinta mais do que à quarta. Além disso, as duas primeiras receberam sete vezes menos do que as três restantes. Quanto recebeu cada uma?*

Observemos que existe uma diferença constante entre a quantidade recebida por cada um e pelo anterior, isto é, as quantidades recebidas por cada um estão em progressão aritmética (um tema que analisámos na página 81). Supondo que à primeira coube uma quantidade a, a segunda terá recebido $a+r$, a terceira $a+2r$, a quarta $a+3r$ e a quinta $a+4r$. A soma destes termos é igual a 100, isto é,

$$\frac{a + (a+4r)}{2} \times 5 = 100$$

ou seja

$$a + 2r = 20 \tag{6.1}$$

Como as duas primeiras pessoas receberam sete vezes menos que as restantes, temos que

$$a + (a + r) = \frac{1}{7}\left[(a + 2r) + (a + 3r) + (a + 4r)\right]$$

ou seja

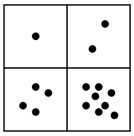
$$11a = 2r$$

Substituindo $2r$ por $11a$ na equação (6.1), obtemos $a+11a = 20$ e, assim, $a = \frac{5}{3}$. Uma vez que $11a = 2r$, obtemos $r = \frac{11a}{2} = \frac{55}{6}$.

Concluímos que o trigo foi repartido como se segue: $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{3} + \frac{55}{6}$, $\frac{5}{3} + \frac{55}{3}$, $\frac{5}{3} + \frac{55}{2}$, $\frac{5}{3} + \frac{110}{3}$ — ou, simplificando, $\frac{5}{3}$, $\frac{65}{6}$, 20, $\frac{175}{6}$, $\frac{115}{3}$.

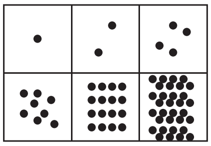
Associada às progressões geométricas está a célebre história da recompensa ao inventor do xadrez. Esta história teria sido contada pela primeira vez por Ibn Kallikan em 1256.

> O inventor do xadrez, Sissa ben Dahir, pediu ao rei indiano Shirham que o recompensasse nos seguintes termos:
>
> *"Majestade, dai-me um grão de trigo para colocar na primeira casa, dois na segunda, quatro na terceira, oito na quarta e, desta forma, ó meu Rei, permiti-me cobrir cada uma das sessenta e quatro casas do tabuleiro"*
>
> Será que Sissa ben Dahir fez um bom negócio?



Comecemos por pensar num tabuleiro com 4 casas: duplicando o número de grãos quando passamos de uma casa para a seguinte, ficamos com

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 = 2^4 - 1 = 15 \text{ grãos de trigo}$$



Num tabuleiro com 6 casas, ficamos com

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 2^6 - 1 \text{ grãos de trigo}$$

Num tabuleiro de xadrez com 64 casas, obteremos

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1 \text{ grãos de trigo}$$

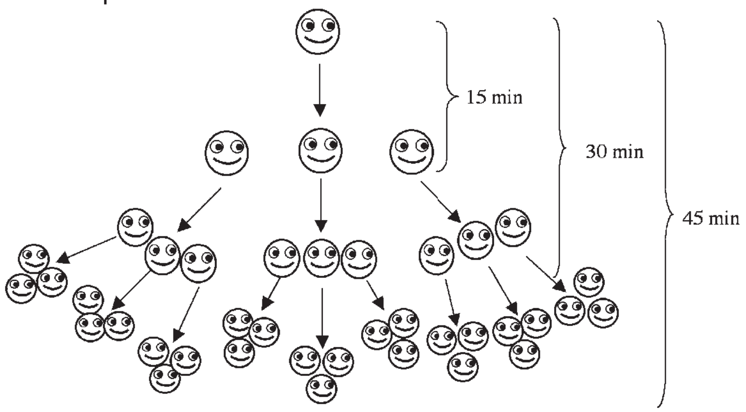
Esta quantidade daria para produzir pão capaz de alimentar toda a população mundial durante mais de um século!

Podemos concluir que ele teria feito um *óptimo* negócio. Com efeito, ele teria recebido — se os celeiros do rei pudessem comportar tamanha quantidade! — algo como 31×10^{12} alqueires de trigo.

Associada às progressões geométricas está a velocidade de propagação de uma notícia, extremamente rápida nos nossos dias fruto da tecnologia e dos meios de comunicação social. Mas mesmo através da comunicação boca a boca, a comunicação pode ser muito rápida, como ilustra a questão seguinte:

> *Suponhamos que alguém transmite às 8 horas uma notícia a 3 pessoas. Se cada uma dessas pessoas transmitir, no quarto de hora seguinte, a mesma notícia a 3 outras pessoas, ao fim de duas horas quantas pessoas conhecerão a notícia?*

Comecemos por construir uma esquema que ilustra o que se passa nos primeiros 45 minutos.



Uma simples contagem mostra que, ao fim de 45 minutos, já conhecem a notícia 40 pessoas. Podemos continuar o processo e as correspondentes contagens, o que se revela pouco prático. Tentemos exprimir com números e operações o avanço da difusão da notícia ao longo da primeira hora:

15 min ... $1 + 3$ pessoas
30 min ... $1 + 3 + (3 \times 3)$ pessoas
45 min ... $1 + 3 + (3 \times 3) + (3 \times 3) \times 3$ pessoas
60 min ... $1 + 3 + (3 \times 3) + (3 \times 3) \times 3 + ((3 \times 3) \times 3) \times 3$ pessoas

ou, mais simplesmente,

15 min ... $1 + 3 = 4$
30 min ... $1 + 3 + (3 \times 3) = 4 + 9 = 13$
45 min ... $1 + 3 + (3 \times 3) + (3 \times 3) \times 3 = 13 + 27 = 40$
60 min ... $1 + 3 + (3 \times 3) + (3 \times 3) \times 3 + ((3 \times 3) \times 3) \times 3 = 40 + 81 = 121$

Observemos a relação que existe entre o número de quartos de hora e o número de factores da última parcela correspondente: ao fim de 1 quarto de hora a última parcela é 3, ao fim de 2 quartos de hora a última parcela é (3×3), ao fim de 3 quartos de hora a última parcela é $(3 \times 3 \times 3)$, e assim sucessivamente.

Como em duas horas existem 8 quartos de hora, ao fim de duas horas o número de pessoas que conhecem a notícia é dado por

$1+3+(3\times3)+(3\times3\times3)+...+(3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3) = 9841$ pessoas.

Claro que a difusão é tanto mais rápida quanto maior for o número de pessoas informadas em cada quarto de hora.

Esta capacidade de difusão pode levar os menos prudentes a cair no conto do vigário. É muito frequente ser-se solicitado para participar em cadeias do tipo:

> *Quer enriquecer depressa? Mande 5 euros ao primeiro nome constante da lista anexa e envie a 3 amigos esta mensagem acompanhada de nova lista em que suprime o primeiro nome e acrecenta o seu em último lugar. Se a cadeia não for quebrada vai receber num curto espaço de tempo os seus 5 euros acrescidos de muitos zeros à direita.*

De acordo com os cálculos anteriores, ao fim de 8 passagens estariam envolvidas 9841 pessoas. Se a cadeia envolver 5 pessoas em cada volta, ao fim de 6 passagens estariam envolvidas 19531 pessoas. Se a cadeia envolver em cada passagem mais pessoas, em poucas voltas todos os habitantes de Portugal estão envolvidos. Vemos, pois, que a cadeia sai rapidamente do círculo de pessoas conhecidas, sendo cada vez mais difícil encontrar pessoas diferentes, pelo que a cadeia desaparece, sendo beneficiados apenas os fundadores.

Este exemplo mostra como o raciocínio matemático e o cálculo aritmético nos podem levar a poupar alguns euros e, sobretudo, a não fazer figuras tristes!

Mas nem só as progressões suscitaram charadas aritméticas. A seguinte foi formulada pelo indiano Brahma-Sphuta-Siddhanta no século VI.

- *Uma mulher foi ao mercado vender ovos, mas um cavalo passou-lhe por cima do cesto, tendo-lhe partido os ovos. O dono do cavalo quis pagar-lhe os prejuízos e perguntou-lhe quantos ovos foram partidos, mas ela não se lembrava do número exacto. No entanto, recordava-se de que quando havia tirado os ovos dois a dois lhe havia sobrado um no cesto e que o mesmo havia acontecido quando os tinha tirado três a três, quatro a quatro, cinco a cinco e seis a seis. Mas quando ela os havia tirado sete a sete do cesto não lhe tinham sobrado ovos. Qual o menor número de ovos que a mulher podia ter no cesto?*

Temos de procurar os números que são múltiplos de sete e que, quando subtraídos de uma unidade, são simultaneamente múltiplos de 2, de 3 e de 5, isto é, são múltiplos de 30. Resta depois escolher o menor que, subtraído de uma unidade, também é múltiplo de 4. Esta condição é considerada em segunda instância, porque o conjunto dos múltiplos de 4 é subconjunto do conjunto dos múltiplos de 2. Quanto ao facto de o número subtraído de uma unidade ser múltiplo de 6, ele é redundante, uma vez que se exige que ele seja múltiplo de 2 e de 3.

Os números que são simultaneamente múltiplos de 2 e de 3 são precisamente os múltiplos de 6.

Consideremos então múltiplos de 7 superiores a 30 para seleccionar os que, quando subtraídos de uma unidade, também são múltiplos de 30:

35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112
119	126	133	140	147	154	161	168	175	182	189	196
203	210	217	224	231	238	245	252	259	266	273	280
287	294	301	308	315	322	329	336	343	350	357	364
371	378	385	392	399	406	413	420	427	434	441	448
455	462	469	476	483	490	497	504	511	518	525	532
539	546	553	...								

Observemos que destes números podemos eliminar imediatamente os que não terminem em 1 uma vez que subtraídos de uma unidade têm que ser múltiplos de 5 e de 2. A lista anterior vai ficar consideravelmente reduzida:

91, 161, 231, 301, 371, 441, 511,...

Desta lista, retemos em primeira aproximação apenas os números 91, 301 e 511, porque 90, 300 e 510 são múltiplos de 30. Uma vez que 90 não é múltiplo de 4 e 300 é múltiplo de 4, a resposta procurada é 301, isto é, a mulher levava 301 ovos.

Indicamos em seguida algumas charadas simples, do estilo das que surgem como passatempos nas secções recreativas de jornais e revistas:

- *Três amigos vão jantar fora. A conta é 25 euros, e cada um dá uma nota de 10 euros para pagar. Quando chegaram os 5 euros de troco, eles decidem dar 2 euros de gorjeta, dividindo os restantes 3. Quando vão a sair do restaurante um deles diz que as contas não estão certas. Argumenta que afinal cada um pagou 9 euros, uma vez que só recebeu 1 euro de troco da nota de 10, pelo que o preço total do jantar foi 27 euros. Como deixaram 2 euros na mesa para gorgeta, onde está o euro que falta para atingir os 30?*

Analisando bem a situação percebe-se que não falta nenhum euro. Os dois euros de gorjeta são parte dos 27 euros pagos pelos três amigos, pelo que não faz sentido adicioná-los a esses 27 euros, mas sim subtraí-los.

- *A Maria nasceu no dia em que o seu pai completava 25 anos. Sabendo que em 2000 a idade da Maria era um sexto da idade do pai, em que ano é que a Maria terá metade da idade do pai?*

Em 2020 (porquê?).

- *Em meados do século XX o médico Português Egas Moniz recebeu o prémio Nobel da Medicina. Em 1998 passaram sobre esse acontecimento tantos anos quanto o número formado pelos dois últimos algarismos do ano em que ele ocorreu. Que ano foi esse?*

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 9 & 9 & 8 \\ - & 1 & 9 & a & b \\ \hline & & & a & b \end{array}$$

Tendo em conta que o acontecimento ocorreu no século XX, basta observar que 98 tem que ser dividido em duas partes iguais. Então o ano foi 1949.

Será que é necessário indicar que a atribuição do prémio foi no século XX?

A resposta é sim: repare-se que 1899 também seria solução do problema, já que $1998 - 1899 = 99$. Como se terá chegado a esta solução?

Observe que 99 é a metade de 198.

Será que poderia também ser no século XVIII?

A resposta é não (porquê?).

- Nos Estados Unidos um jovem pedia dinheiro ao pai enviando-lhe a charada ao lado.

$$\begin{array}{ccccc} & S & E & N & D \\ + & M & O & R & E \\ \hline M & O & N & E & Y \end{array}$$

Atribuindo a cada letra um algarismo diferente, qual o montante ($MONEY$ em cêntimos) que ele está a pedir?

Comecemos por observar que o valor máximo da soma de números com 4 dígitos é 19998. Uma vez que o resultado da soma tem 5 dígitos, à letra M deve corresponder o algarismo 1. Daqui resulta necessariamente que $S = 9$ e $O = 0$. Olhando agora para as centenas, e como N tem de ser diferente de E, vemos que $N = E + 1$, e que, portanto, tem de haver transporte na adição das dezenas. Se $E = 2$ ou 3, não conseguimos transportes na adição das unidades nem das dezenas, pois Y não pode ser nem 0 nem 1. Com $E = 5$, obtemos $N = 6$, e vêm depois $R = 8$, $D = 7$ e $Y = 2$. Com $E = 4$, 6 ou 7 vêm sempre a aparecer os algarismos 0 ou 1 na adição das unidades ou das dezenas, de modo que a solução é única:

$MONEY = 10652$ (cêntimos).

O pai em resposta enviou-lhe um determinado montante também acompanhado de uma charada... Quanto dinheiro (em cêntimos) é que o pai lhe enviou?

$$\begin{array}{ccccc} & S & A & V & E \\ + & M & O & R & E \\ \hline M & O & N & E & Y \end{array}$$

Para resolver esta segunda charada segue-se um raciocínio parecido mas, neste caso, a solução não é única.

7

Algumas notas sobre o uso de calculadoras

Algumas notas sobre o uso de calculadoras

Existe um grande desconhecimento acerca do que é a Matemática e do que fazem os matemáticos. Há muito quem ache que a Matemática se resume a fazer contas. Existe um ramo da Matemática, a Aritmética, que estuda os algoritmos operatórios e as suas propriedades nos diferentes conjuntos de números, mas há muita Matemática para além da Aritmética. A Matemática necessita de cálculos, assim como a física necessita de cálculos, assim como a economia necessita de cálculos, etc. As calculadoras são instrumentos auxiliares de cálculo, cuja utilidade não deve ser menosprezada. Embora cada dia mais poderosas, elas não raciocinam — apenas executam algoritmos para os quais foram programadas.

Pode pensar-se que a invenção das calculadoras se situa algures no século XX. De facto, as calculadoras de bolso inundaram o mercado nacional a partir de 1970 e, desde então, o seu uso generalizou-se. Mas há muitos anos que os matemáticos ansiavam por uma máquina que os ajudasse nos longos cálculos que tinham de executar, permitindo-lhes maior disponibilidade para se ocuparem com outros problemas. A primeira máquina de calcular foi obra de Blaise Pascal (1623-1662) que, em meados do século XVII, inventou uma máquina capaz de calcular somas. Também Gottfried Leibniz (1646-1716) sonhou com uma máquina capaz

Gottfried Leibniz

de processar algoritmos. Fez algumas tentativas nessa direcção, inventando uma máquina para efectuar as quatro operações elelemtares e, em 1674, construiu uma máquina capaz de resolver equações. Outros matemáticos, como Charles Babbage (1791-1871), construiram também instrumentos auxiliares de cálculo e estas tentativas sucederam-se até ao nascimento dos computadores na década de 40 do século XX.

As calculadoras podem acompanhar o estudo da Matemática nos vários ciclos de ensino desde que a sua utilização se faça de uma forma sensata. O uso da calculadora não pode substituir sistematicamente o uso dos algoritmos das quatro operações elementares nem tolher o cálculo mental. O aluno deve ser levado a seleccionar as situações em que, perante a necessidade de efectuar um cálculo, o uso da calculadora é o método mais adequado. Deve ser confrontado com situações em que, através do cálculo mental, consegue chegar à solução mais rapidamente do que se estivesse a carregar nas teclas da calculadora. Por exemplo é natural e aceitável que o aluno se socorra da calculadora para, por exemplo, calcular 256×1513. Já perante o cálculo de, por exemplo, 10×75, qualquer aluno deveria reconhecer mentalmente o resultado, 750.

Saliente-se que numa fase precoce da aprendizagem numérica os alunos resolvem a maior parte das questões que lhes são propostas recorrendo a processos individuais adaptados a cada situação. Nestes processos socorrem-se simultaneamente de diferentes meios, tais como desenhos, contagens e cálculos sucessivos. O recurso à calculadora nesta fase pode constituir um obstáculo ao raciocínio do aluno, uma vez que o incita a procurar obter imediatamente o resultado.

Apresentamos algumas situações em que um uso acrítico da calculadora pode constituir um entrave ao raciocínio do aluno, e realçamos outras em que a calculadora constitui uma mais-valia na aprendizagem, nomeadamente na identificação de padrões e regularidades.

A calculadora e a divisão inteira

Quando usamos a calculadora para calcular o quociente de dois números, e na situação em que o dividendo não é múltiplo do divisor, a divisão não tem resto zero. A calculadora não permite conhecer o resto e limita-se a apresentar uma aproximação do valor do quociente. A utilização acrítica da calculadora pode comprometer a própria definição de divisão: dividir A por B é determinar quantas vezes B "cabe" em A.

Consideremos, por exemplo, a seguinte questão:

Como dividir igualmente 400 gramas de rebuçados por quatro pacotes?

Se a questão dissesse respeito a açúcar e tivéssemos uma balança, a tarefa seria facilmente exequível: cada pacote ficaria com 100 gramas. Provavelmente o último pacote a encher ficaria com um pouco mais, ou um pouco menos, mas as diferenças seriam irrelevantes. Já no caso dos rebuçados a pesagem pode conduzir a um número diferente de rebuçados em cada pacote. Num caso como este tem mais sentido dividir os rebuçados em quatro lotes, cada um com o mesmo número de rebuçados. Supondo que os 400 gramas correspondem a 46 rebuçados, quantos rebuçados deve ter cada pacote? Ora em 46 cabem 11 vezes 4, sobrando 2, pelo que a resposta será: cada pacote tem 11 rebuçados. Note-se que nada se pergunta sobre as eventuais sobras. Um aluno que não tenha sido ensinado a usar a calculadora com sentido crítico, introduz os dados e apresenta a solução: cada aluno recebe $11,5$ rebuçados. O problema não está no uso da calculadora, mas na resposta irreflectida, dada pela leitura directa do resultado apresentado pela calculadora. O aluno pode concluir que o quociente da divisão inteira é igual a 11; como o produto de 11 por 4 é igual a 44, sobram 2 rebuçados.

O número real resultado desta divisão exacta é uma dízima infinita (os dígitos 216 repetem-se indefinidamente).

Analisemos outra situação com o cálculo da divisão inteira de 1229 por 37.

Utilizando a calculadora, obtemos como resultado 33.216216. Para obtermos o quociente da divisão inteira, temos apenas de considerar a parte inteira deste resultado, i. e., 33. O resto será $1229 - 33 \times 37 = 8$.

A calculadora e as sequências

As calculadoras podem ser uma mais-valia para criar sequências de números ou para procurar a forma como uma dada sequência de números foi gerada. Mas também neste caso se deve acautelar que o uso da calculadora não esvazie o sentido da tarefa a executar.

Exemplo:

a) Partindo de 11 gerar uma sequência em que cada termo se obtém do anterior somando 11 e reproduzir no caderno diário o processo utilizado para obter os primeiros cinco termos.

b) Será que o número 1100 pertence à sequência?

c) Em que lugar aparece?

d) Que termo está no lugar 49?

O aluno facilmente reconhece que os 5 primeiros termos da sucessão são 11, 22, 33, 44, 55 e que a regra de formação dos termos se mantém até ao nono termo. Tendo em conta a regularidade que se manifesta, deve ser encorajado a efectuar mentalmente os cálculos.

Para responder ao resto da pergunta o aluno que está com preguiça de pensar vai carregando nas teclas e, depois de carregar em mais de cem teclas, talvez consiga concluir que 1100 pertence à sequência. Mas, compreensivelmente, não consegue contar os passos intermédios, pelo que não responde à alínea c). Para responder a d) recomeça a carregar nas teclas e a contar...

No fim ficou, provavelmente, com um calo no dedo e a gostar um pouco menos de Matemática.

Um aluno mais atento percebe que, partindo de 11 e somando sempre 11, qualquer termo da sequência tem de ser múltiplo de 11. Então, divide (mentalmente) 1100 por 11. Como verifica que a divisão é exacta, 100, conclui que 1100 pertence à sequência. Em seguida olha para o segundo termo, 22, e verifica que é igual a 2×11, o terceiro, 33, é igual a 3×11 e conclui que 1100 é o termo que está no lugar 100. Para obter o termo que está no lugar 49, e tendo em conta o raciocínio anterior, faz 49×11 (à mão ou na calculadora).

É interessante explorar um exercício análogo mas começando, por exemplo, com 3 e adicionando sucessivamente 11. Em que lugar está o número 124?

Este tipo de questões requer cuidado na sua formulação. O enunciado pode conduzir a várias respostas, e o professor tem de ter em conta essa diversidade. Pode acontecer que não seja possível dar uma resposta, como se ilustra no exemplo seguinte.

> Será o número 333 um termo da sucessão 11, 22, 33, 44, 55, $\ldots$?

Esta pergunta não tem resposta. O conjunto de termos apresentado é insuficiente para deduzir uma única lei de formação, como vimos na página .

A calculadora na resolução de

- Dispor os algarismos 4, 5, 6, 7 e 8 em números de dois e três algarismos de forma a que o produto deste números seja máximo.

- Partindo do número 18 no ecrã da calculadora e usando apenas as teclas [+], [x], [=] , [2], e sem apagar, chegar ao número 332.

O primeiro problema resume-se a procurar dois números inteiros cuja soma seja 13 e com o produto maior possível. Observe-se que só é preciso testar seis casos.

No segundo, se um aluno se limitar a experimentar as várias possibilidades, tem de efectuar 120 multiplicações. Em vez disso, ele deverá constatar que, para obter um resultado elevado, deverá testar números em que o algarismo da esquerda seja o maior possível, i. e., 7 ou 8. Mesmo que não faça mais considerações, ele reduz o número de casos a testar para obter a solução a apenas 12. Com uma análise mais cuidada, o número de multiplicações a realizar pode ser reduzido para 6 (por exemplo, não tem sentido testar 746×85, porque o resultado é certamente menor que 764×85).

No terceiro problema, supondo o número 18 já no ecrã da calculadora, e tirando partido da tecla [=] para efectuar somas e produtos iterados, é possível chegar a 332 carregando apenas em 11 teclas.

Calcular com a calculadora

É amplamente difundida a ideia que uma calculadora efectua qualquer cálculo. Para um uso consciente da calculadora, os alunos devem ser confrontados com situações em que não é possível obter de forma imediata o resultado correcto do cálculo. É o que sucede, por exemplo, quando é ultrapassado o número de dígitos que comporta o ecrã da calculadora.

Pensemos na multiplicação e consideremos os números 342123 e 997. O produto tem mais de oito dígitos: basta observar que o produto de 340000 por 997 tem mais de 8 dígitos. Numa calculadora cujo ecrã comporte oito dígitos, um resultado como o anterior pode originar a indicação de erro, ou usar a notação exponencial, completamente inadequada para alunos do 1º ciclo. Esta limitação do uso directo da calculadora coloca um problema aos alunos, cuja resolução os leva a utilizar os seus conhecimentos sobre números, operações e algoritmos operatórios.

Neste caso será de observar que

$$342123 \times 997 = 342123 \times 1000 - 3 \times 342123$$

Assim, como $342123 \times 1000 = 342123000$, basta subtrair a este valor o resultado, 1026369, da operação 3×342123 (eventualmente obtido com o auxílio de uma calculadora). Observe-se que não se pode usar a calculadora para efectuar *directamente* a diferença em questão, uma vez que continuam a estar envolvidos mais de 8 dígitos; mas pode ser usada a calculadora para obter a diferença $2123000 - 1026369 = 1096631$ e, daí, concluir que $342123000 - 1026369 = 341096631$.

Bibliografia

[1] Albuquerque, Carlos [et al], *A Matemática na Formação Inicial de Professores*, APM/ Secção de Educação Matemática da SPCE, 2006

[2] Boyer, Carl B., *História da Matemática*, Editora Edgar Blücher, Lda, S. Paulo, 1989.

[3] Chabert, Jean-Luc [et al], *A History of Algorithms*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999.

[4] Loureiro, C.; Silva, A; Veloso, M., *Calculadoras na Educação Matemática*, APM, Lisboa, 1999

[5] Monteiro, A. A.; Paulo, J. S.*Aritmética Racional*, Sociedade Portuguesa de Matemática, 2007.

[6] Musser, G.; Burger. w.; Peterson, B. *Mathematics for Elementary Teachers — a Contemporary Approach*, John Wiley and Sons, Inc, 2003

[7] Neves, Eunice F., *Episódios da História da Matemática para o Ensino*, Departamento de Matemática da FCUL, 2007.

[8] Nogueira, J. Eurico [et al], *Contar e Fazer Contas — Uma introdução à Teoria dos Números*, Gradiva/SPM, 2004.

[9] Nogueira, J. Eurico, *Curiosidades Numéricas*, Leituras em Matemática, nº 2, SPM, 2001.

[10] Parelman, Y., *Matemáticas Recreativas*, Litexa-Portugal, 1979.

[11] Struik, Dirk J., *História Concisa das Matemáticas*, Gradiva, 1992.

[12] Vale, Isabel [et al], Organização de, *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores*, Secção de Educação Matemática da SPCE, 2006

[13] Valente, Isabel P., *Sistemas de Numeração*, Esc. Sup. Educ. Setúbal, 1992

[14] Wikipedia, *Axiomas de Peano*, `http://pt.wikipedia.org/wiki/Axiomas_de_Peano`

Ministério da Educação

dgidc
Direcção-Geral de Inovação
e de Desenvolvimento Curricular

9 789727 423101