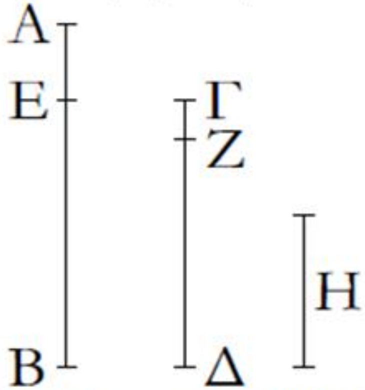
Metas Curriculares do Ensino Básico
Matemática – 2.º Ciclo

António Bivar
Carlos Grosso
Filipe Oliveira
Maria Clementina Timóteo

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Metas Curriculares

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.



Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ ΑΒ, ΓΔ. δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Εἰ μὲν οὖν ὁ ΓΔ τὸν ΑΒ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν, ὁ ΓΔ ἄρα τῶν ΓΔ, ΑΒ κοινὸν μέτρον ἐστίν. καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον· οὐδεὶς γὰρ μείζων τοῦ ΓΔ τὸν ΓΔ μετρήσει.

Εἰ δὲ οὐ μετρεῖ ὁ ΓΔ τὸν ΑΒ, τῶν ΑΒ, ΓΔ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος λειφθήσεταί τις ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. μονὰς μὲν γὰρ οὐ λειφθήσεται· εἰ δὲ μή, ἔσονται οἱ ΑΒ, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. λειφθήσεταί τις ἄρα ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν ΒΕ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΕΑ, ὁ δὲ ΕΑ τὸν ΔΖ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΖΓ, ὁ δὲ ΓΖ τὸν ΑΕ μετρείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ ΓΖ τὸν ΑΕ μετρεῖ, ὁ δὲ ΑΕ τὸν ΔΖ μετρεῖ, καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΔΖ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΓΔ μετρήσει. ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΕ μετρεῖ· καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΒΕ μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΑ· καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΒΑ μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΓΔ· ὁ ΓΖ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΓΔ μετρεῖ. ὁ ΓΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν

Algoritmo de Euclides (300 a.c.)

Descritores NO5-3.3, 3.4, 3.5, 3.6 e 3.7

Objetivo

Cálculo do máximo divisor comum (e do mínimo múltiplo comum) de dois números naturais, sem utilização da decomposição em fatores primos (6.º ano) e revendo o algoritmo da divisão.

Divisão inteira

Teorema

Dados ***a*** e ***b*** números naturais e ***d=mdc(a,b)***,

$$\{ax + by : x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z}\} = d.\mathbb{Z}$$

Teorema de Bezout

Se ***mdc(a,b)=1*** existem inteiros **x** e **y** tais que

ax+by=1

Lema de Euclides

Se ***a*** divide o produto ***bc*** e ***a*** é primo com ***b*** então ***a*** divide ***c***.

Teorema fundamental da aritmética

(decomposição em fatores primos)

Algoritmo de Euclides

Cálculo do máximo divisor comum de dois números naturais.

Divisibilidade no 1.º ciclo

NO3 e NO4 *Efetuar divisões inteiras*

NO3-7.2 Utilizar corretamente a expressão «múltiplo de».

NO3-9.4 Utilizar corretamente as expressões «divisor de» e «divisível por» e reconhecer que um número natural é divisor de outro se o segundo for múltiplo do primeiro.

NO3-9.5 Reconhecer que um número natural é divisor de outro se o resto da divisão do segundo pelo primeiro for igual a zero (e vice-versa)

NO4-2.5 Identificar os divisores de um número natural até 100.

$$720=90\times 8$$

2.º ciclo – Máximo divisor comum

NO3-9.5 Reconhecer que um número natural é divisor de outro se o resto da divisão do segundo pelo primeiro for igual a zero (e vice-versa).
NO4-2.5 Identificar os divisores de um número natural até 100.

Exemplo
Determina os divisores de 30.

R.:
1 e 30 são divisores de 30.
$30 : 2 = 15$, logo 2 e 15 são divisores de 30.
$30 : 3 = 10$, logo 3 e 10 são divisores de 30.
Dividindo 30 por 4, o quociente é 7 e o resto é 2.
$30 : 5 = 6$, logo 5 e 6 são divisores de 30.
$30 : 6 = 5$. Como $5 < 6$ podemos parar o processo.
Os divisores de 30 são $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15$ e 30.

NO5-3.2 Identificar o máximo divisor comum de dois números naturais por inspeção dos divisores de cada um deles.

Algoritmo de Euclides

NO5-3.3 Reconhecer que num produto de números naturais, um divisor de um dos fatores é divisor do produto.

NO5-3.4 Reconhecer que se um dado número natural divide outros dois, divide também a respetiva soma e diferença.

(Descritores que preparam o algoritmo, mas que têm um interesse em si, permitindo rever conteúdos do 1.º ciclo e indo um pouco mais além.)

Exemplo

Sabendo que $112 = 7 \times 16$ *e que* $245 = 7 \times 35$, *podemos afirmar, sem calcular a diferença, que* $245 - 112$ *é divisível por* 7?

R.: Sim, porque $245 - 112 = 7 \times 35 - 7 \times 16 = 7 \times (35 - 16) = 7 \times 19$, pelo que $245 - 112$ é divisível por 7.

(ver também descritores ALG5-1.1 e 1.2)

Metas Curriculares

Algoritmo de Euclides

NO5-3.5 Reconhecer, dada uma divisão inteira (*D=dxq+r*), que se um número divide o divisor (*d*) e o resto (*r*) então divide o dividendo (*D*).

NO5-3.6 Reconhecer, dada uma divisão inteira (*D=dxq+r*), que se um número divide o dividendo (*D*) e o divisor (*d*) então divide o resto (*r=D-dxq*).

Utiliza o divisor e o resto da divisão inteira de 413 por 70 para concluir que 413 (o dividendo) é divisível por 7.

R.: A divisão inteira de 413 por 70

$$\begin{array}{r|l} 413 & 70 \\ \hline 63 & 5 \end{array}$$

permite-nos afirmar que $413 = 70 \times 5 + 63$.

7 divide 63 ($9 \times 7 = 63$). Por outro lado, 7 divide 70, logo divide 70×5.
Se 7 divide 70×5 e divide 63, então 7 divide a soma $70 \times 5 + 63 = 413$.
O aluno poderá também responder sem utilizar explicitamente os dois descritores anteriores:

$$413 = 70 \times 5 + 63 = 7 \times 10 \times 5 + 7 \times 9 = 7 \times (50 + 9) = 7 \times 59$$

Algoritmo de Euclides

NO5-3.7 Utilizar o algoritmo de Euclides para determinar os divisores comuns de dois números naturais e, em particular, identificar o respetivo máximo divisor comum.

Máximo divisor comum de 210 e 45 ?

$210 = 4 \times 45 + 30$

2	1	0		4	5	
	3	0		4		

Os divisores comuns de 210 **e** 45 são os divisores comuns de 45 e 30.

$45 = 1 \times 30 + 15$

	4	5		3	0	
	1	5		1		

Os divisores comuns de 45 e 30 são os divisores comuns de 30 e 15.

$30 = 2 \times 15 + \mathbf{0}$

	3	0		1	5	
		0		2		

Os divisores comuns de 30 e 15 são os divisores de15: **mdc(210,45)=15**

Lista dos divisores comuns de 210 e 45: 1,3,5, 15.

Algoritmo de Euclides

Máximo divisor comum de 910 e 5775 ?

$$5775 = 6x910+315$$

5	7	7	5		9	1	0
	3	1	5		6		

$$910 = 2x315+280$$

9	1	0		3	1	5
2	8	0		2		

$$315 = 1x280+35$$

3	1	5		2	8	0
	3	5		1		

$$280 = 8x35+0$$

2	8	0		3	5	
		0		8		

O máximo divisor comum de 910 e 5775 é 35.

(Os divisores comuns de 910 e 5575 são exatamente os divisores de 35)

Atividades

1. **Calcular o máximo divisor comum de 1122 e 9384:**
   a. Utilizando o algoritmo de Euclides;
   b. Utilizando a decomposição em fatores primos destes números.

2. Conceber uma atividade para trabalhar os seguintes descritores com os alunos:

NO5-3.3 Reconhecer que num produto de números naturais, um divisor de um dos fatores é divisor do produto.

NO5-3.6 Reconhecer, dada uma divisão inteira ($D=dxq+r$), que se um número divide o dividendo (D) e o divisor (d) então divide o resto ($r=D-dxq$).