Metas Curriculares do Ensino Básico
Matemática – 3.º Ciclo

António Bivar
Carlos Grosso
Filipe Oliveira
Maria Clementina Timóteo

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Metas Curriculares

FSS7 - Funções, Sequências e Sucessões

1. Definir funções

1. Saber, dados conjuntos A e B, que fica definida uma «função f (ou aplicação) de A em B», quando a cada elemento x de A se associa um elemento único de B representado por $f(x)$ e utilizar corretamente os termos «objeto», «imagem», «domínio», «conjunto de chegada» e «variável».

(…)

9. Identificar, fixado um referencial cartesiano num plano, o «gráfico cartesiano» de uma dada função numérica f de variável numérica como o conjunto G constituído pelos pontos P do plano cuja ordenada é a imagem por f da abcissa e designar o gráfico cartesiano por «gráfico de f» quando esta identificação não for ambígua e a expressão «$y = f(x)$» por «equação de G».

10. Identificar e representar funções com domínios e conjuntos de chegada finitos em diagramas de setas, tabelas e gráficos cartesianos e em contextos variados.

FSS7 - Funções, Sequências e Sucessões

2. Operar com funções

1. Identificar a soma de funções numéricas com um dado domínio A e conjunto de chegada $\mathbb{Q}$ como a função de mesmo domínio e conjunto de chegada tal que a imagem de cada $x \in A$ é a soma das imagens e proceder de forma análoga para subtrair, multiplicar e elevar funções a um expoente natural.

3. Designar, dado um número racional b, por «função constante igual a b» a função $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tal que $f(x) = b$ para cada $x \in \mathbb{Q}$ e designar as funções com esta propriedade por «funções constantes» ou apenas «constantes» quando esta designação não for ambígua.

4. Designar por «função linear» uma função $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ para a qual existe um número racional a tal que $f(x) = ax$, para todo o $x \in \mathbb{Q}$, designando esta expressão por «forma canónica» da função linear e a por «coeficiente de f».

5. Identificar uma função afim como a soma de uma função linear com uma constante e designar por «forma canónica» da função afim a expressão «$ax + b$», onde a é o coeficiente da função linear e b o valor da constante, e designar a por «coeficiente de x» e b por «termo independente».

FSS7 - Funções, Sequências e Sucessões

2. Operar com funções

6. Provar que o produto por constante, a soma e a diferença de funções lineares são funções lineares de coeficientes respetivamente iguais ao produto pela constante, à soma e à diferença dos coeficientes das funções dadas.

Exemplo

1. Considera as funções lineares f e g definidas em $\mathbb{Q}$ por $f(x) = 2x$ e $g(x) = -5x$. Justifica que $f + g$ é uma função linear e indica a respetiva forma canónica relacionando o coeficiente de $f + g$ com os coeficientes das funções f e g.

2. Considera dois números racionais b e c e as funções lineares definidas por $f(x) = bx$ e $g(x) = cx$. Justifica que $f + g$ é uma função linear, identificando o coeficiente.*

Exemplo**

Dados dois números racionais b e k, seja f a função definida em $\mathbb{Q}$ por $f(x) = bx$ e g a função constante igual a k. Prova que a função $g \times f$ é linear e identifica o respetivo coeficiente.

FSS7 - Funções, Sequências e Sucessões

2. Operar com funções

7. Demonstrar que o produto por constante, a soma e a diferença de funções afins são funções afins de coeficientes da variável e termos independentes respetivamente iguais ao produto pela constante, à soma e à diferença dos coeficientes e dos termos independentes das funções dadas.

Exemplo

1. Considera as funções afins f e g definidas por $f(x) = 2x - 5$ e $g(x) = -5x + 1$. Justifica que $f - g$ é uma função afim e indica a respetiva forma canónica, relacionando o coeficiente e o termo constante de $f - g$ com os coeficientes e termos independentes das funções f e g.

Exemplo**

Considera os números racionais c, d, e k e as funções afins definidas por $f(x) = k$ e $g(x) = cx + d$. Justifica que $f \times g$ é uma função afim e indica a respetiva forma canónica, relacionando o coeficiente e o termo independente de $f \times g$ com a constante k e o coeficiente e termo independente da função g.

FSS7 - Funções, Sequências e Sucessões

2. Operar com funções

8. Identificar funções lineares e afins reduzindo as expressões dadas para essas funções à forma canónica.

Para cada uma das funções, de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$, definidas em cada uma das seguintes alíneas, indica se se trata de uma função afim, linear ou constante, apresentando a respetiva forma canónica.

a. $f(x) = 5 - 2(x + 3)$
b. $g(x) = -3x + 7 - (5 - 3x)$
c. $h(x) = \frac{2x+3}{4}$
d. $i(x) = 3(2x - 4) + 2(6 - 4x)$
e. $j(x) = 2 + x^2 - (7 + x + x^2)$;

Nestes descritores é por vezes necessário utilizar propriedades das operações algébricas referidas no descritor ALG7-1.1.

FSS7 - Funções, Sequências e Sucessões

5. Definir sequências e sucessões

1. Identificar, dado um número natural N, uma «sequência de N elementos» como uma função de domínio $\{1,2,\ldots,N\}$ e utilizar corretamente a expressão «termo de ordem n da sequência» e «termo geral da sequência».
2. Identificar uma «sucessão» como uma função de domínio $\mathbb{N}$, designando por u_n a imagem do número natural n por u e utilizar corretamente a expressão «termo de ordem n da sucessão» e «termo geral da sucessão».

Exemplo (5.1)

O termo geral de uma sequência é dado pela expressão $a_n = \frac{n}{3} - \frac{5}{6}$.

a. *Determina os três primeiros termos da sequência.*

b. *Sabendo que o último termo da sequência é* $\frac{5}{2}$, *quantos termos tem a sequência?*

FSS8 - Funções, Sequências e Sucessões

Gráficos de funções afins

1. Identificar as equações das retas do plano

1. Demonstrar, utilizando o teorema de Tales, que as retas não verticais num dado plano que passam pela origem de um referencial cartesiano nele fixado são os gráficos das funções lineares e justificar que o coeficiente de uma função linear é igual à ordenada do ponto do gráfico com abcissa igual a 1 e à constante de proporcionalidade entre as ordenadas e as abcissas dos pontos da reta, designando-o por «declive da reta» no caso em que o referencial é ortogonal e monométrico.

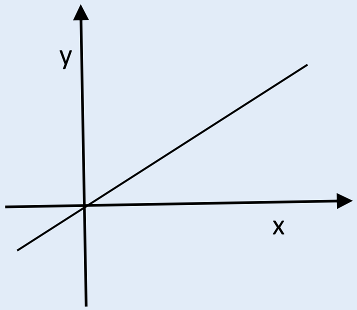
FSS8 - Funções, Sequências e Sucessões

Gráficos de funções afins

1. Identificar as equações das retas do plano

1. Demonstrar, utilizando o teorema de Tales, que as retas não verticais num dado plano que passam pela origem de um referencial cartesiano nele fixado são os gráficos das funções lineares e justificar que o coeficiente de uma função linear é igual à ordenada do ponto do gráfico com abcissa igual a 1 e à constante de proporcionalidade entre as ordenadas e as abcissas dos pontos da reta, designando-o por «declive da reta» no caso em que o referencial é ortogonal e monométrico.

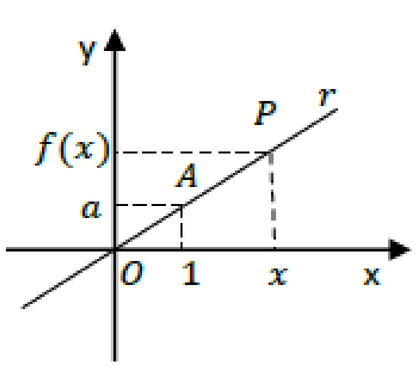
Por não ser vertical, r não é paralela a nenhuma reta vertical, pelo que interseta qualquer uma dessas retas em exatamente um ponto. Assim, para cada x em $\mathbb{R}$ existe um único ponto da reta r que tem x por abcissa. A reta r é portanto o gráfico de uma função f que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ a ordenada y do ponto de r de abcissa x.



FSS8 - Funções, Sequências e Sucessões

Seja $a = f(1)$:

Se $a = 0$, a reta r passa pelos pontos $(0,0)$ e $(1,0)$ do eixo das abcissas logo coincide com esse eixo e f é a função nula (função linear de coeficiente igual a $0 = f(1)$).



Se $a \neq 0$, seja P um ponto qualquer da reta r, de coordenadas $(x, f(x))$.

Pelo Teorema de Tales, podemos afirmar que $\frac{|f(x)|}{|a|} = \frac{|x|}{1}$, o que é equivalente a $|f(x)| = |a|.|x|$. Assim, para cada x em $\mathbb{R}$, apenas existem duas possibilidades: $f(x) = ax$ ou $f(x) = -ax$.

Se $a > 0$, x e $f(x)$ têm o mesmo sinal

Se $a < 0$, x e $f(x)$ têm sinais contrários

$f(x) = ax$, para qualquer x em $\mathbb{R}$.

Desta forma, $f(x) = ax$, ou seja f é uma função linear sendo portanto o coeficiente $a = f(1)$ a constante de proporcionalidade entre a ordenada e a abcissa dos pontos da reta.

FSS8 - Funções, Sequências e Sucessões

2. Reconhecer, dada uma função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(D \subset \mathbb{R})$ que o gráfico da função definida pela expressão $g(x) = f(x) + b$ (sendo b um número real) se obtém do gráfico da função f por translação de vetor definido pelo segmento orientado de origem no ponto de coordenadas $(0,0)$ e extremidade de coordenadas $(0, b)$.

3. Reconhecer que as retas não verticais são os gráficos das funções afins e, dada uma reta de equação $y = ax + b$, designar a por «declive» da reta e b por «ordenada na origem».

4. Reconhecer que duas retas não verticais são paralelas quando (e apenas quando) têm o mesmo declive.

5. Reconhecer, dada uma reta r determinada por dois pontos, A de coordenadas (x_A, y_A) e B de coordenadas (x_B, y_B), que a reta não é vertical quando (e apenas quando) $x_B \neq x_A$ e que, nesse caso, o declive de r é igual a $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

6. Reconhecer que os pontos do plano de abcissa igual a c (sendo c um dado número real) são os pontos da reta vertical que passa pelo ponto de coordenadas $(c, 0)$ e designar por equação dessa reta a equação «$x = c$».

FSS8 - Funções, Sequências e Sucessões

Exemplo**

Considera duas retas r e s não verticais que, num referencial cartesiano, têm equação respetivamente $y = ax + b$ e $y = cx + d$. Prova que r e s são paralelas quando e apenas quando têm o mesmo declive.

R.: Para provar esta propriedade, teremos de provar duas afirmações.

- Se as retas não verticais r e s têm o mesmo declive então são paralelas.
- Se as retas não verticais r e s são paralelas então têm o mesmo declive.

Para provar a primeira afirmação, suponhamos que as retas têm o mesmo declive, ou seja, $a = c$. Então, de acordo com 1.2, estas retas podem obter-se por translação de uma mesma reta de equação $y = ax$, pelo que são paralelas.

Para provar a segunda afirmação basta considerar as funções f e g dadas por $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$. De acordo com 1.2, o gráfico da função f obtém-se por translação do gráfico da função $h(x) = ax$ e o gráfico de g obtém-se por translação do gráfico da função j definida por $j(x) = cx$. Como as retas r e s são paralelas então também as retas de equação $y = ax$ e $y = cx$ o são e como têm um ponto em comum (a origem) são coincidentes, pelo que $a = c$, o que quer dizer que as retas r e s têm o mesmo declive.