Metas Curriculares do Ensino Básico
Matemática – 3.º Ciclo

António Bivar
Carlos Grosso
Filipe Oliveira
Maria Clementina Timóteo

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA
Metas Curriculares

Grandes temas:

1. *Continuação do estudo dos polígonos e da circunferência.*
2. ***Congruência e semelhança: Teorema de Tales e algumas consequências fundamentais.***
3. *Vetores e translações.*
4. ***Elementos de axiomatização da Geometria.***
5. ***Geometria no espaço.***
6. *Trigonometria.*

1. Continuação do estudo dos polígonos e da circunferência.

GM7:

a) *Linhas poligonais, polígonos e quadriláteros.*
b) *Classificação dos quadriláteros (trapézios, paralelogramos, papagaios, losangos).*
c) *Propriedades dos polígonos e quadriláteros envolvendo ângulos internos, externos e diagonais.*
d) *Áreas de trapézios e papagaios.*

GM9:

a) *Lugares geométricos envolvendo pontos notáveis de triângulos.*
b) *Propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência.*

2. Congruência e semelhança: Teorema de Tales e algumas consequências fundamentais.

GM7:

a) Figuras isométricas ou congruentes.

b) Figuras semelhantes.

c) Polígonos semelhantes.

d) Teoremas de Tales.

e) Critérios de semelhança de triângulos.

f) Homotetias.

g) Relacionar perímetros e áreas de figuras semelhantes.

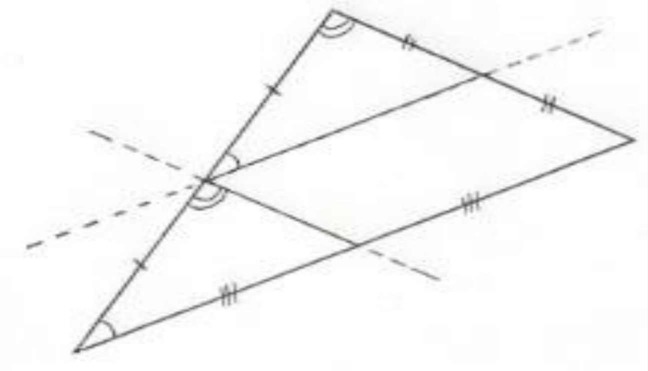
h) Mudança de unidade de comprimento e incomensurabilidade.

GM8:

a) Teorema de Pitágoras.

d) Teorema de Tales (GM7-4.5 a 4.7).

4.5. Decompor um dado triângulo em dois triângulos e um paralelogramo traçando as duas retas que passam pelo ponto médio de um dos lados e são respetivamente paralelas a cada um dos dois outros, justificar que os dois triângulos da decomposição são iguais e concluir que todos os lados do triângulo inicial ficam assim bissetados.



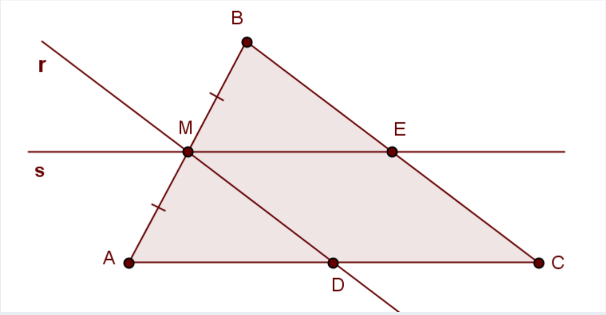
d) Teorema de Tales (GM7-4.5 a 4.7).

Caderno de Apoio

Exemplo

Considera um triângulo $[ABC]$ e duas retas r e s que passam por M, ponto médio do lado $[AB]$, respetivamente paralelas a $[BC]$ e a $[AC]$.

Considera ainda o ponto D, interseção de r e $[AC]$ e o ponto E, interseção de s e $[BC]$.



Mostra que:

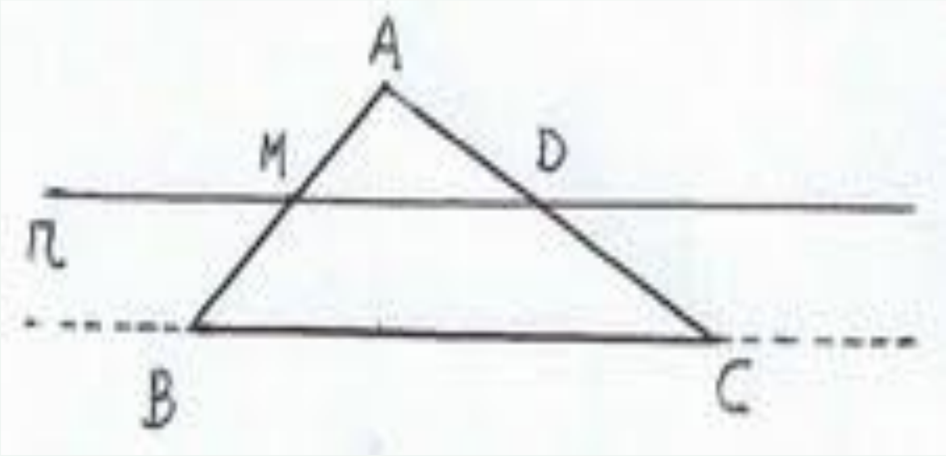
a. $\overline{ME} = \overline{DC}$ e $\overline{MD} = \overline{EC}$.

b. *os triângulos $[AMD]$ e $[MBE]$ são iguais.*

c. *D é o ponto médio de $[AC]$, E é o ponto médio de $[BC]$.*

d) Teorema de Tales (GM7-4.5 a 4.7).

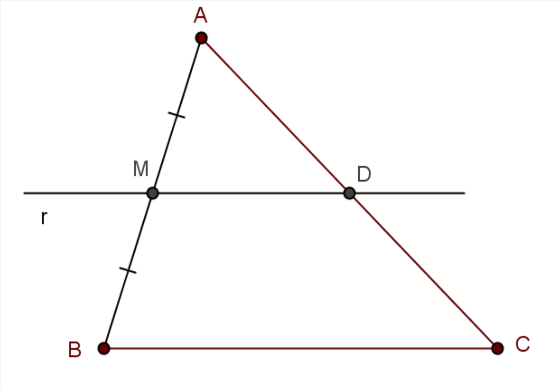
4.6. Reconhecer, dado um triângulo $[ABC]$, que se uma reta r intersetar o segmento $[AB]$ no ponto médio M e o segmento $[AC]$ no ponto D, que $\overline{AD} = \overline{DC}$ quando (e apenas quando) r é paralela a BC e que, nesse caso, $\overline{BC} = 2\overline{MD}$.



d) Teorema de Tales (GM7-4.5 a 4.7).

Exemplo

Considera um triângulo $[ABC]$ e uma reta r que interseta $[AB]$ no ponto médio M e o segmento $[AC]$ no ponto D.



a. *Mostra que:*

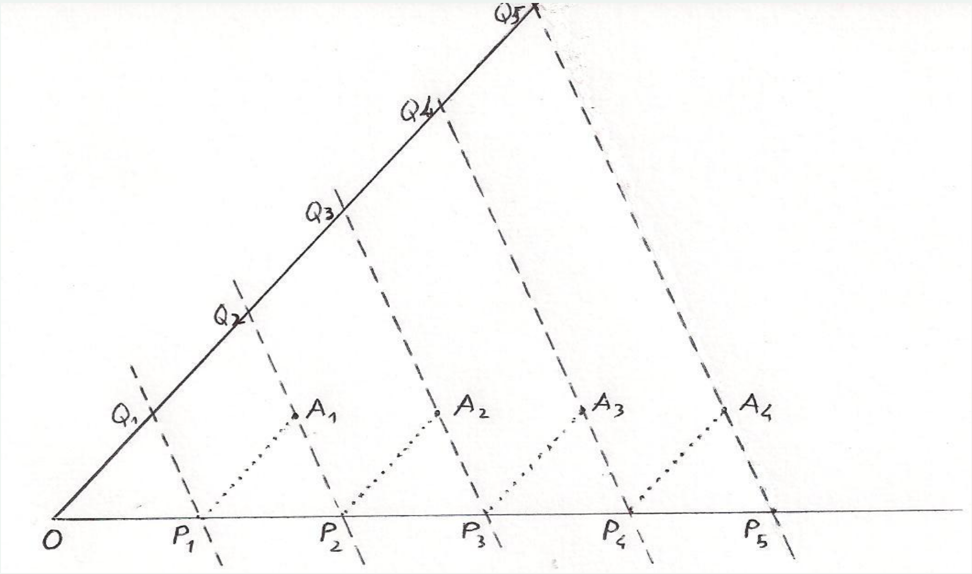
a_1. *Se r for paralela a $[BC]$ então $\overline{AD} = \overline{DC}$.*

a_2.** *Se $\overline{AD} = \overline{DC}$ então r é paralela a $[BC]$.*

a. *Se alguma das propriedades equivalentes anteriores se verificar, mostra que $\overline{BC} = 2\overline{MD}$.*

d) Teorema de Tales (GM7-4.5 a 4.7).

4.7. Enunciar o Teorema de Tales e demonstrar as condições de proporcionalidade nele envolvidas por argumentos geométricos em exemplos com constantes de proporcionalidade racionais.

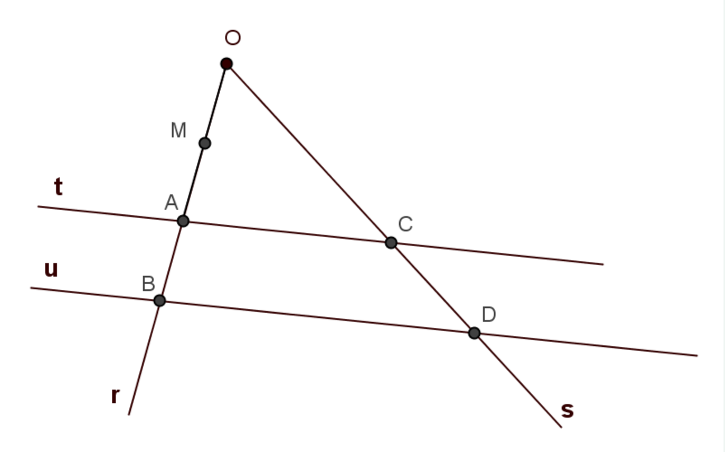


d) Teorema de Tales (GM7-4.5 a 4.7).

Exemplo*

Considera duas retas r *e* s *que se intersetam no ponto* O *e outras duas retas* t *e* u*, paralelas, que intersetam* r *em* A *e* B *e* s *em* C *e* D*, respetivamente*

e tais que $\overline{OA} = 2\overline{AB}$*. Considera ainda o ponto* M *como ponto médio de* $[OA]$*.*

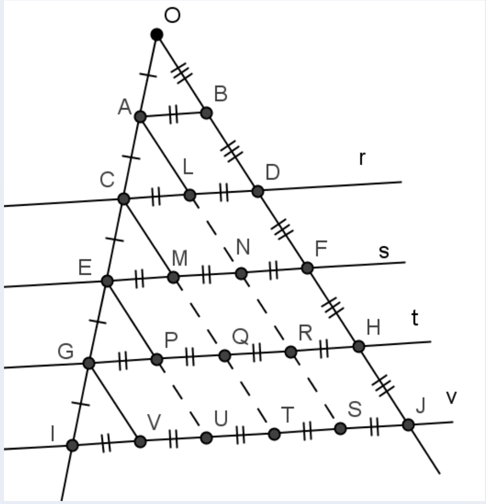


Prova que $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}$ *percorrendo os seguintes passos apresentados em alíneas.*

d) Teorema de Tales (GM7-4.5 a 4.7).

Exemplo

Na figura estão representadas as retas r, s, t e v paralelas e intersetadas por duas semirretas de origem O.



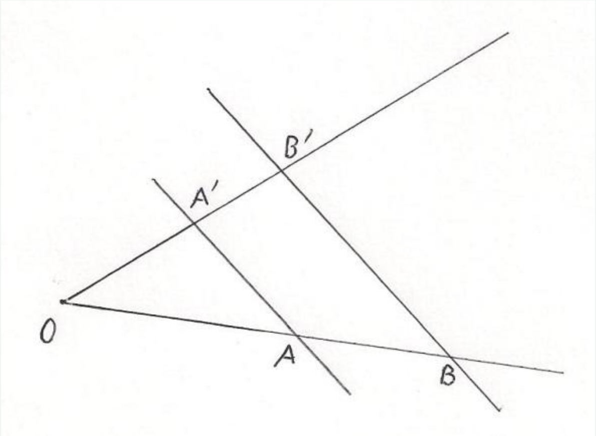
a. *Utilizando as igualdades entre comprimentos de segmentos indicadas na figura, mostra que:*

a_1. $\frac{\overline{OF}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AB}}$

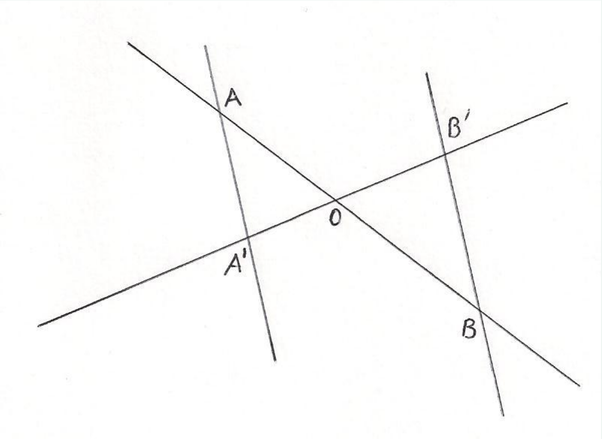
a_2. $\frac{\overline{OG}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{EF}}$

b. *Completa as proporções* $\frac{\overline{OI}}{\quad} = \frac{\quad}{\overline{OD}} = \frac{\overline{IJ}}{\quad}$ *utilizando medidas de comprimento de segmentos da figura.*

d) Teorema de Tales (GM7-4.5 a 4.7).

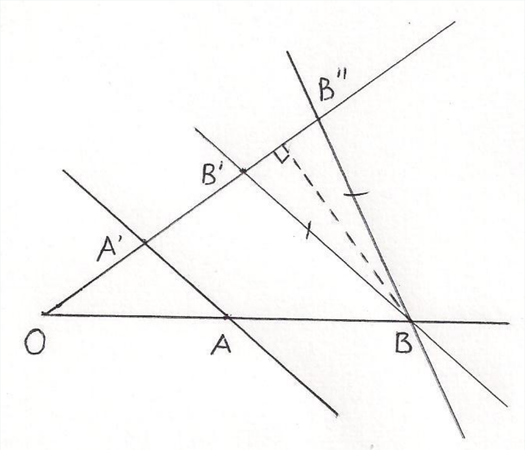


$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}}$$

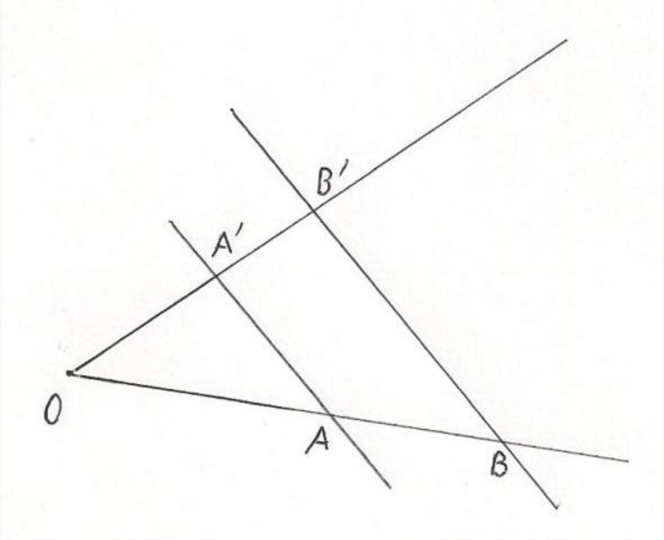


$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}}$$

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}}$$



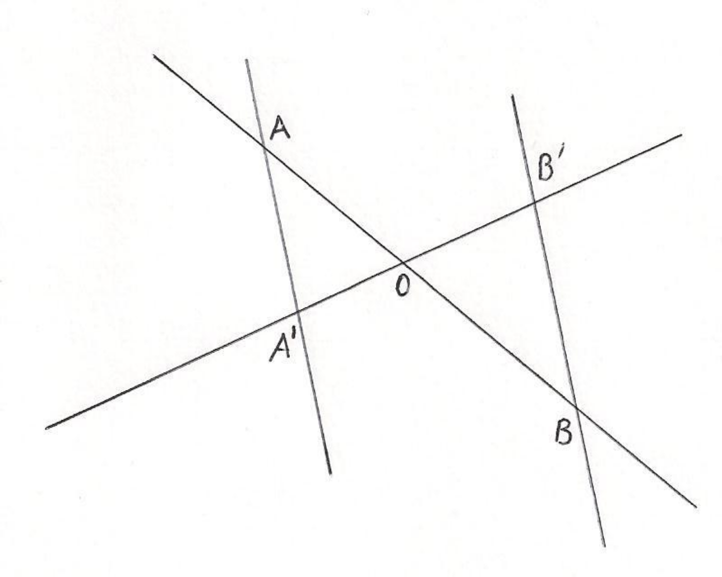
d) Teorema de Tales (GM7-4.5 a 4.7).



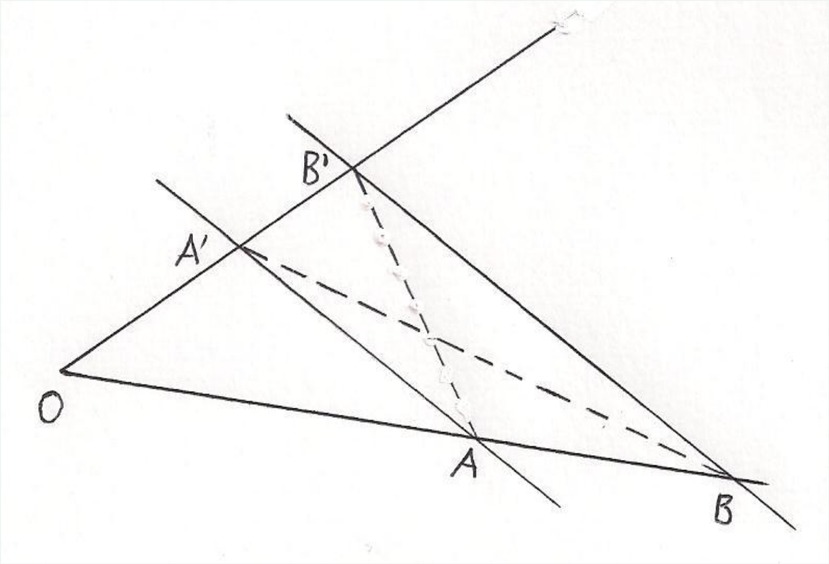
$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}}$$

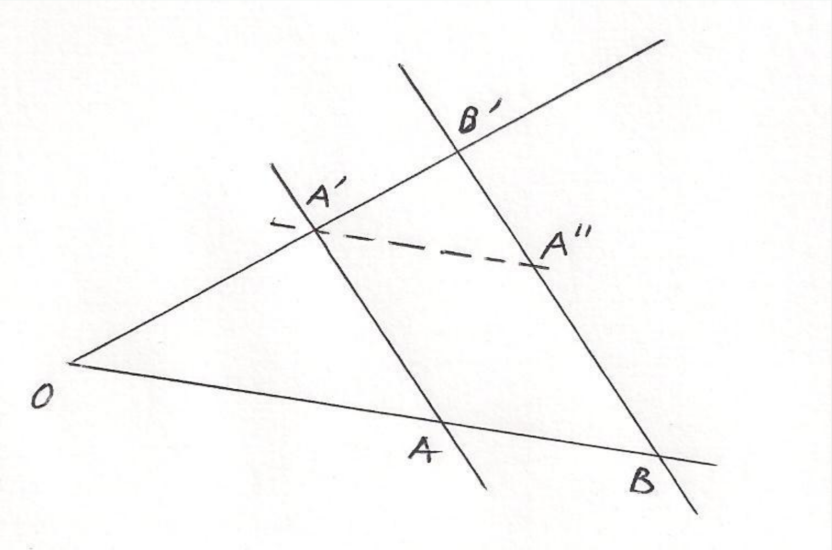
$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'B'}}$$

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{A'B'}}$$



d) Teorema de Tales (GM7-4.5 a 4.7).





$$\frac{\Delta\, OBA'}{\Delta\, OAA'} = \frac{\Delta\, OB'A}{\Delta\, OA'A}$$

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}}$$

$$\frac{\overline{B'O}}{\overline{A'O}} = \frac{\overline{B'B}}{\overline{A''B}}$$

$$\frac{\overline{B'O}}{\overline{A'O}} = \frac{\overline{B'B}}{\overline{A'A}} \Leftrightarrow \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}}.$$

e) Critérios de semelhança de triângulos (GM7-4.8 a 4.11).

4.8. Reconhecer que dois triângulos são semelhantes quando os comprimentos dos lados de um são diretamente proporcionais aos comprimentos dos lados correspondentes do outro e designar esta propriedade por «critério LLL de semelhança de triângulos».

4.9. Reconhecer, utilizando o teorema de Tales, que dois triângulos são semelhantes quando os comprimentos de dois lados de um são diretamente proporcionais aos comprimentos de dois dos lados do outro e os ângulos por eles formados em cada triângulo são iguais e designar esta propriedade por «critério LAL de semelhança de triângulos».

e) Critérios de semelhança de triângulos (GM7-4.8 a 4.11).

4.10. Reconhecer, utilizando o teorema de Tales, que dois triângulos são semelhantes quando dois ângulos internos de um são iguais a dois dos ângulos internos do outro e designar esta propriedade por «critério AA de semelhança de triângulos».

4.11. Reconhecer, utilizando o teorema de Tales, que dois triângulos semelhantes têm os ângulos correspondentes iguais.

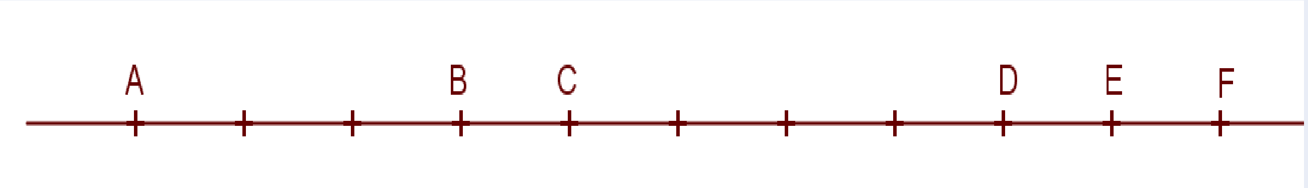
h) Mudança de unidade de comprimento e incomensurabilidade (GM7-7.1 a 7.6).

7.1. Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, um segmento de reta $[AB]$ de medida m e um segmento de reta $[CD]$ de medida m', que a medida de $[CD]$ tomando o comprimento de $[AB]$ para unidade de medida é igual a $\frac{m'}{m}$.

7.2. Reconhecer que o quociente entre as medidas de comprimento de dois segmentos de reta se mantém quando se altera a unidade de medida considerada.

Exemplo

Considera uma reta onde se representaram onze pontos de tal forma que a distância entre dois pontos consecutivos é constante.



a. *Calcula o quociente das medidas do comprimento de* $[AB]$ *e* $[CE]$ *tomando* $[EF]$ *por unidade.*
b. *Calcula o quociente das medidas do comprimento de* $[AB]$ *e* $[CE]$ *tomando* $[DF]$ *por unidade.*
c. *Calcula o quociente das medidas do comprimento de* $[AB]$ *e* $[CE]$ *tomando* $[BD]$ *por unidade e compara-o com os quocientes obtidos nas alíneas anteriores.*

Exemplo**

A medida do comprimento de cada um dos segmentos de reta $[AB]$ *e* $[CD]$, *numa dada unidade* u *é igual respetivamente a* $m = \frac{5}{3}$ *e* $m' = \frac{p}{q}$ *(p e q números naturais). Para determinares a medida do comprimento de* $[CD]$ *tomando* $[AB]$ *para unidade resolve a seguintes alíneas:*

a. *Decompondo a unidade* u *em* $3q$ *segmentos de reta iguais, quantos segmentos iguais a um destes é necessário justapor para se obter um segmento igual* $[AB]$*? E para se obter um segmento igual a* $[CD]$*?*
b. *Atendendo aos resultados da alínea anterior, exprime a medida do comprimento de* $[CD]$ *tomando* $[AB]$ *para unidade através de uma fração de denominador* $5q$.
c. *Conclui da alínea anterior que a medida do comprimento de* $[CD]$ *tomando* $[AB]$ *para unidade é igual a* $\frac{m'}{\frac{5}{3}} = \frac{m'}{m}$.

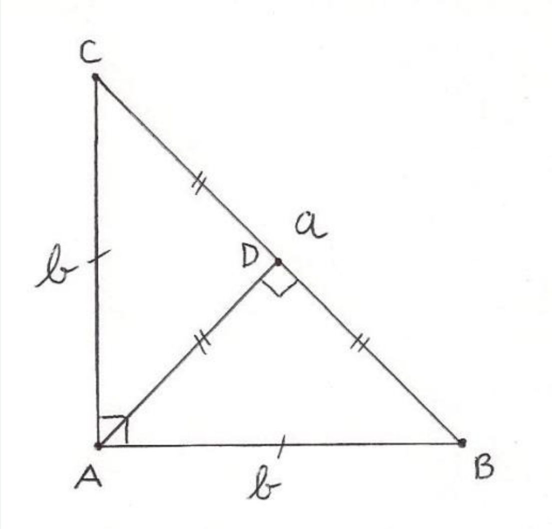
h) Mudança de unidade de comprimento e incomensurabilidade

7.3. Designar dois segmentos de reta por «comensuráveis» quando existe uma unidade de comprimento tal que a medida de ambos é expressa por números inteiros.

7.4. Reconhecer que se existir uma unidade de comprimento tal que a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo isósceles têm medidas naturais respetivamente iguais a a e a b então $a^2 = 2b^2$, decompondo o triângulo em dois triângulos a ele semelhantes pela altura relativa à hipotenusa, e utilizar o Teorema fundamental da aritmética para mostrar que não existem números naturais a e b nessas condições, mostrando que o expoente de 2 na decomposição em números primos do número natural a^2 teria de ser simultaneamente par e ímpar.

h) Mudança de unidade de comprimento e incomensurabilidade (GM7-7.1 a 7.6).

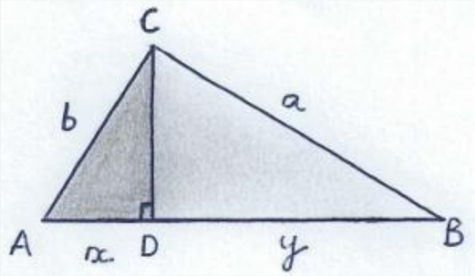
7.5. Justificar que a hipotenusa e um cateto de um triângulo retângulo isósceles não são comensuráveis e designar segmentos de reta com esta propriedade por «incomensuráveis».



7.6. Reconhecer que dois segmentos de reta são comensuráveis quando (e apenas quando), tomando um deles para unidade de comprimento, existe um número racional positivo r tal que a medida do outro é igual a r.

a) Teorema de Pitágoras.

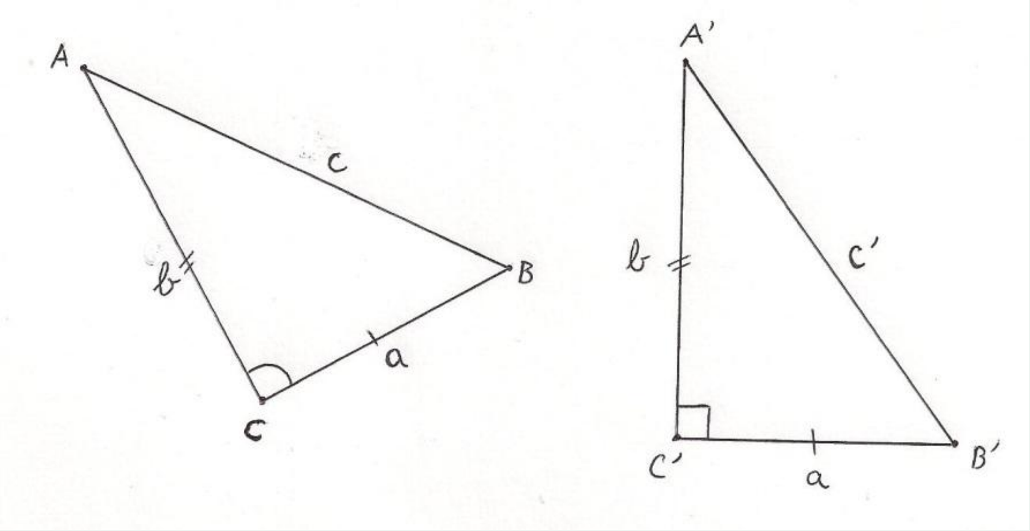
1.1. Demonstrar, dado um triângulo $[ABC]$ retângulo em C, que a altura $[CD]$ divide o triângulo em dois triângulos a ele semelhantes, tendo-se $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$ e $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$.



1.2. Reconhecer, dado um triângulo $[ABC]$ retângulo em C e de altura $[CD]$, que os comprimentos $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, $x = \overline{AD}$, $y = \overline{DB}$ satisfazem as igualdades $b^2 = xc$ e $a^2 = yc$ e concluir que a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa e designar esta proposição por «Teorema de Pitágoras».

a) Teorema de Pitágoras.

1.3. Reconhecer que um triângulo de medida de lados a, b e c tais que $a^2 + b^2 = c^2$ é retângulo no vértice oposto ao lado de medida c e designar esta propriedade por «recíproco do Teorema de Pitágoras».



3. Vectores e translações.

GM8:

a) *Identidade de direcção e de direcção e sentido para segmentos orientados.*
b) *Equipolência de segmentos orientados.*
c) *Vectores.*
d) *Vetores colineares e simétricos.*
e) *Soma de um ponto com um vector; translações.*
f) *Composição de translações e adição de vectores; regras do triângulo e do paralelogramo.*
g) *Propriedades algébricas da adição de vectores.*
h) *Propriedades das translações.*
i) *Reflexões deslizantes e classificação das isometrias de um plano.*

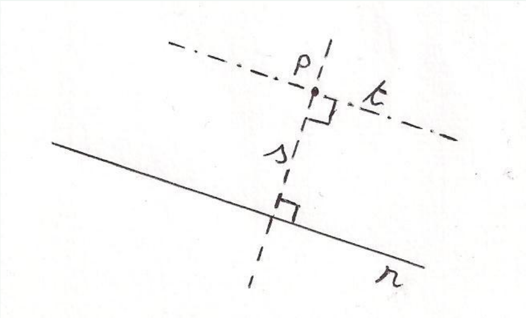
4. Elementos de axiomatização da Geometria.

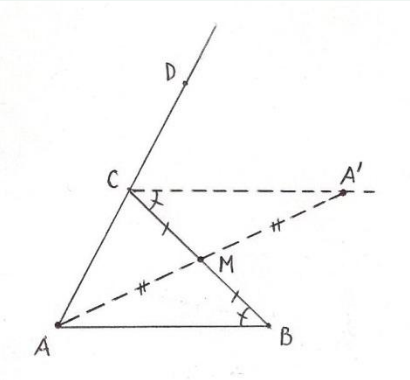
GM9:

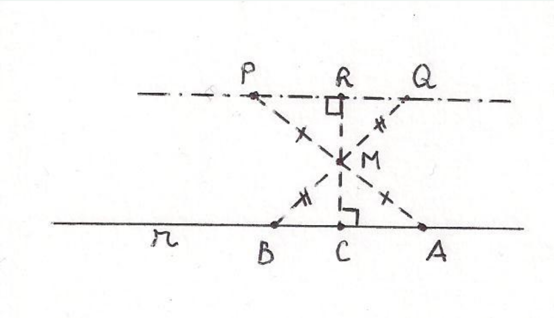
a) *Objectos primitivos, relações primitivas e axiomas.*
b) *Definições, teoremas e demonstrações.*
c) *Linguagem das teorias axiomatizadas.*
d) *Objectos primitivos e relações primitivas em algumas axiomáticas modernas da Geometria euclidiana.*
e) *Confronto com a axiomática de Euclides.*
f) ***O 5º postulados de Euclides e o axioma euclidiano de paralelismo; geometrias não-euclidianas.***
g) ***Demonstrações simples acerca da posição relativa de rectas num plano envolvendo o axioma euclidiano de paralelismo.***

f) O 5º postulados de Euclides e o axioma euclidiano de paralelismo; geometrias não-euclidianas (GM9-3.1 a 3.3).

Em Geometria absoluta por um ponto fora de uma recta passa sempre pelo menos uma recta paralela a uma recta dada:







O **axioma euclidiano de paralelismo** estabelece que não passa mais do que uma!

Este axioma é equivalente ao **5º postulado de Euclides**

g) Demonstrações simples acerca da posição relativa de rectas num plano envolvendo o axioma euclidiano de paralelismo.

4.1. Demonstrar que se uma reta interseta uma de duas paralelas e é com elas complanar então interseta a outra.

4.2. Demonstrar que são iguais os ângulos correspondentes determinados por uma secante em duas retas paralelas.

4.3. Demonstrar que duas retas paralelas a uma terceira num dado plano são paralelas entre si.

4. Geometria no espaço.

GM9:

a) *Posições relativas de rectas e planos no espaço.*

b) ***Ângulo de dois semiplanos; planos perpendiculares****.*

c) *Recta perpendicular a um plano.*

d) ***Critério de perpendicularidade de planos.***

e) *Projecção ortogonal de um ponto num plano e plano normal a uma recta num ponto.*

f) *Perpendicularidade entre recta e planos e paralelismo de planos*

g) *Plano mediador; caracterização como lugar geométrico.*

h) *Distância entre pontos e planos, rectas e planos e entre planos paralelos.*

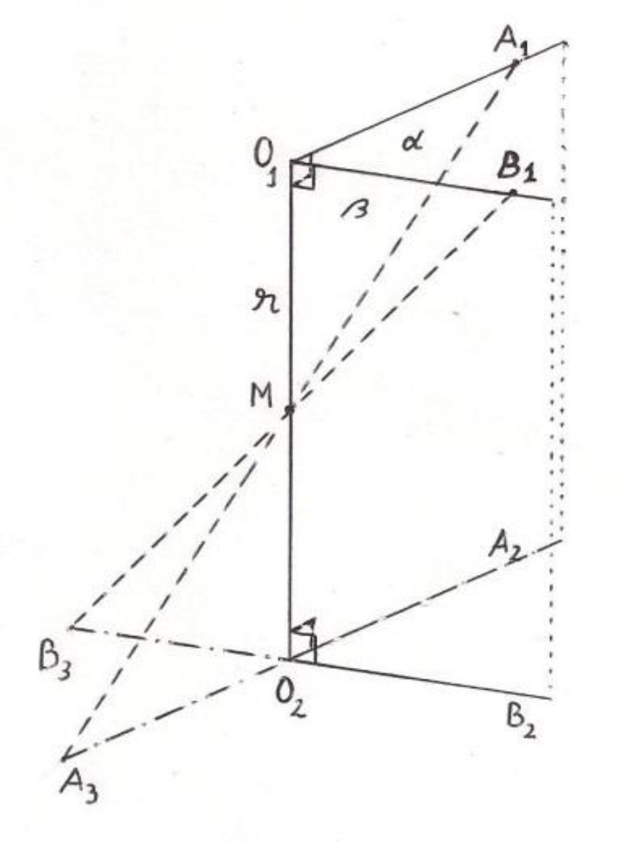
i) *Áreas laterais e volumes de sólidos.*

j) *Área de uma superfície esférica.*

b) Ângulo de dois semiplanos; planos perpendiculares.

GM9

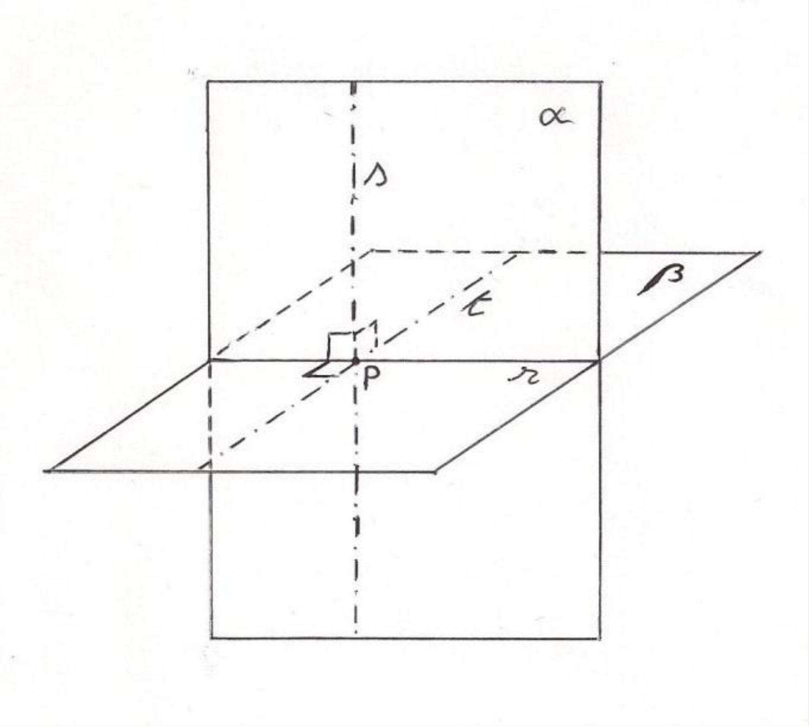
6.1. Reconhecer, dados dois planos α e β que se intersetam numa reta r, que são iguais dois quaisquer ângulos convexos $A_1O_1B_1$ e $A_2O_2B_2$ de vértices em r e lados perpendiculares a r de forma que os lados $\dot{O}_1A_1$ e $\dot{O}_2A_2$ estão num mesmo semiplano determinado por r em α e os lados $\dot{O}_1B_1$ e $\dot{O}_2B_2$ estão num mesmo semiplano determinado por r em β, e designar qualquer dos ângulos e a respetiva amplitude comum por «ângulo dos dois semiplanos».



d) Critério de perpendicularidade de planos.

GM9

6.5. Provar que é condição necessária e suficiente para que dois planos sejam perpendiculares que um deles contenha uma reta perpendicular ao outro.



4. Trigonometria.

GM9:

a) *Definição do seno, cosseno e tangente de um ângulo; coerência das definições.*
b) *Igualdade das razões trigonométricas de ângulos com a mesma amplitude e independência da unidade de medida de comprimento.*
c) *Relações trigonométricas elementares.*
d) *Determinação, utilizando argumentos geométricos, das razões trigonométricas dos ângulos de* 45°, 30° *e* 60°.
e) *Resolução de problemas.*