REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

11.º ANO | ENSINO SECUNDÁRIO

Matemática B

(Matemática Aplicada às Artes Visuais)

INTRODUÇÃO

Matemática Escolar Orientada para o Futuro

A formação de indivíduos matematicamente competentes é um propósito fundamental do currículo de Matemática para o ensino secundário. A sociedade e o mundo contemporâneos, marcados pela globalização, pela crescente digitalização, conectividade e automatização, e por uma aceleração do desenvolvimento tecnológico, enfrentam desafios nos quais o conhecimento matemático adquire um papel essencial, proporcionando conceitos, métodos, modelos e formas de pensar. Esse poder matemático deve ser parte integrante da educação de todos os cidadãos, incluindo conhecimentos e capacidades que os jovens transportarão para a sua vida pessoal, social e profissional.

Empreender uma formação matemática, abrangente, relevante e inovadora, neste ciclo de escolaridade, significa desenvolver nos alunos a capacidade de identificar conceitos matemáticos relevantes para resolver problemas reais, aplicar procedimentos matemáticos adequados, e interpretar os resultados em contextos diversos. O raciocínio matemático está na base dos processos de compreensão dos conceitos e objetos matemáticos, que podem e devem ser analisados, representados e relacionados de diferentes formas. São igualmente importantes a formulação de hipóteses, a testagem de conjeturas, a dedução, a generalização e a abstração, na construção de argumentos lógicos e conclusões, cuja comunicação de forma apropriada é cada vez mais importante no mundo atual.

O currículo consagra o propósito de preparar os alunos para formularem juízos e tomarem decisões fundamentadas, contribuindo para que se tornem cidadãos reflexivos, empenhados e participativos. Visa também contribuir para que os jovens apreciem o papel da Matemática no mundo e o seu carácter de ciência em evolução e renovação permanente, apreciando a sua dimensão estética a par do seu legado histórico.

Assim, o currículo de Matemática para o futuro orienta-se para o desenvolvimento de áreas de competências, à luz do que é preconizado no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*, nomeadamente no que se refere ao pensamento crítico aliado à resolução de problemas, promovendo a criatividade e a comunicação, além de acentuar a pertinência do trabalho colaborativo.

Ideias Inovadoras do Currículo

- Matemática para a Cidadania

O reconhecimento do ensino secundário enquanto um ciclo de formação geral dos jovens, incluído na escolaridade obrigatória, cria um contexto em que todas as disciplinas, incluindo a Matemática, devem contribuir para o desenvolvimento dos alunos enquanto cidadãos ativos, conscientes, informados e interventivos.
A crescente relevância do papel da Matemática na sociedade atual realça a importância e a necessidade de dotar os alunos de ferramentas de análise dos processos sociais que estão na base do exercício de uma cidadania ativa. Assim, as Aprendizagens Essenciais introduzem modelos e processos eleitorais e a análise de modelos financeiros e valorizam o desenvolvimento da literacia estatística.

- Pensamento Computacional

Os aspetos comuns entre o Pensamento Matemático e o Pensamento Computacional, bem como a relevância atual do Pensamento Computacional na ciência e na sociedade, justificam que o currículo de Matemática valorize esta abordagem conceptual na resolução de problemas. As Aprendizagens Essenciais de Matemática promovem o desenvolvimento de práticas como a abstração, a decomposição, o reconhecimento de padrões, a análise e definição de algoritmos e o desenvolvimento de hábitos de depuração e optimização dos processos envolvidos na atividade matemática, com o objetivo de os alunos mobilizarem estes processos em toda a sua atividade. Deste modo, a aposta no Pensamento Computacional revela a aproximação do currículo às recomendações internacionais e também o alinhamento com o currículo de Matemática do ensino básico, favorecendo o desenvolvimento desta competência de forma integrada, coerente e progressiva.

- Diversificação de temas no currículo

Para além do desenvolvimento de competências no âmbito da cidadania, pretende-se disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos e nas abordagens de cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com os métodos numéricos, a par do recurso à tecnologia, e a inclusão de temas com pouca tradição no ensino secundário em Portugal, com diferentes graus de aprofundamento. Desta forma, pretende-se dotar os alunos de competências de índole científica que permitam sustentar diferentes percursos académicos e profissionais.

- Papel central da Geometria

O Curso de Artes Visuais dos cursos científico-humanísticos do ensino secundário necessita de uma disciplina de Matemática especialmente desenhada tendo em vista esse curso. Neste contexto, a área da Geometria deve desempenhar um papel muito importante. Com efeito, a Geometria está de tal modo presente na natureza, que a Arte frequentemente se sustenta na Geometria para a descrever. Pareceria assim estranho que um artista não tivesse uma forte formação em Geometria, para além do que é estudado no ensino básico. A abordagem da Geometria inclui assuntos elementares de geometria analítica, padrões geométricos e trigonometria, com as competências de resolução de problemas métricos, com permanentes preocupações de contextualização, indo assim ao encontro das motivações e interesses dos alunos e também do perfil dos alunos dos cursos de Artes Visuais.

- Aproximação aos Cursos Artísticos Especializados

Desde 2007 que os Cursos Artísticos Especializados possuem a sua própria disciplina de Matemática que, embora com menor carga horária, tem vindo a proporcionar uma formação matemática adequada aos alunos das Escolas Artísticas Soares dos Reis e António Arroio. Assim, as Aprendizagens Essenciais de Matemática B aproximam-se do programa dessa disciplina e acrescentam alguns temas também relevantes para a formação dos alunos desta área.

- Aproximação aos Cursos Profissionais

As Aprendizagens Essenciais de Matemática B integram os seis módulos obrigatórios da disciplina de Matemática dos cursos profissionais de 300 horas, possibilitando que, para efeitos de prosseguimento de estudos de nível superior, a prova de exame para a Matemática B e da Matemática dos Cursos Profissionais, seja a mesma e centrada nesses seis módulos obrigatórios.

Ideias-Chave das Aprendizagens Essenciais

As Aprendizagens Essenciais de Matemática no ensino secundário dão continuidade às aprendizagens do ensino básico e assumem um conjunto de princípios e orientações metodológicas, cuja concretização e especificação é feita para cada ano de escolaridade e tema matemático. A seguir, enunciam-se e apresentam-se as ideias-chave preconizadas nas Aprendizagens Essenciais, esquematizadas na Figura 1:

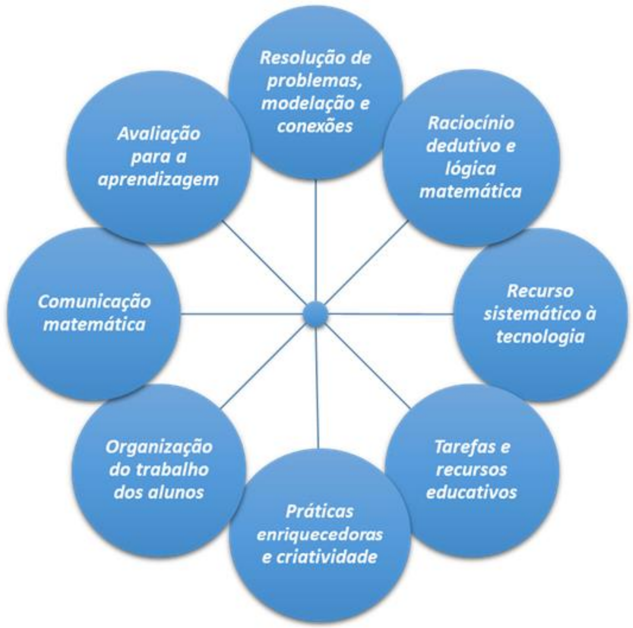

Figura 1. Ideias-chave das aprendizagens essenciais

1) Resolução de problemas, modelação e conexões

Dar sentido à Matemática e enfatizar a modelação e as aplicações

A resolução de problemas, tal como a modelação, devem constituir o contexto para o estabelecimento de conexões entre diferentes conceitos e áreas da Matemática, assim como entre a Matemática e outras áreas do saber, permitindo uma abordagem integrada e significativa para os alunos na sua atividade matemática. É fundamental que os alunos tenham contacto com o processo de modelação matemática e sejam capazes de criticar, validar e aperfeiçoar modelos matemáticos. Preconizando a exploração de ideias e conceitos matemáticos, pretende-se que a aprendizagem não se reduza à memorização de regras, treino de procedimentos ou conhecimento de resultados ou à execução de procedimentos sem compreensão. É essencial que as definições, os resultados e os procedimentos matemáticos adquiram sentido e que os alunos os saibam mobilizar e aplicar adequadamente para resolver problemas do mundo real, em situações do dia a dia ou de outras disciplinas. O raciocínio e a resolução de problemas, sendo uma das áreas de competências no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*, implica que os alunos sejam capazes de: interpretar informação, planear e conduzir pesquisas; gerir informações e tomar decisões; e desenvolver processos conducentes à construção de conhecimento, usando recursos diversificados.

2) Raciocínio dedutivo e lógica matemática

Incentivar processos de raciocínio dedutivo, integrando a lógica matemática nos diversos temas

O aluno deve ser sistematicamente incentivado a justificar processos de resolução, a encadear raciocínios, a testar conjeturas, a demonstrar resultados e alguns teoremas. Os conceitos e métodos relativos à lógica matemática não constituem um tema específico das Aprendizagens Essenciais, mas devem, de forma natural, ser integrados nos vários temas abordados. Noções elementares de Lógica podem e devem ser introduzidas à medida que forem relevantes para a clarificação de processos e de raciocínios. Pretende-se, assim, que o aluno adquira a capacidade de raciocinar dedutivamente e de forma autónoma, usando os princípios e a simbologia inerentes à lógica matemática. A integração do raciocínio dedutivo e da lógica, bem como da linguagem matemática e simbólica, deve estar presente em todos os momentos de aprendizagem, sem se transformar num conteúdo tratado de forma isolada. O grau de formalização a utilizar deve ter sempre em conta o nível de maturidade matemática dos alunos e deve surgir, se possível, como uma necessidade, garantindo que o processo de formalização acompanha a apropriação dos conceitos. Diversos temas, como, por exemplo, Geometria, Funções e Probabilidade, em contexto de resolução de problemas, podem constituir-se como excelentes oportunidades para desenvolver o raciocínio dedutivo, no qual se inclui a utilização de linguagem e de notações, bem como a estrutura hipotético-dedutiva envolvida no processo de resolução e/ou demonstração de resultados.

3) Recurso sistemático à tecnologia

Incentivar a exploração de ideias e conceitos, integrando a tecnologia como alavanca para a compreensão e resolução de problemas.

Preconiza-se a abordagem exploratória de ideias e conceitos matemáticos, o que implica levar o aluno a participar ativamente num processo de construção e aprofundamento, motivado por questões desafiadoras, problemas e procura de justificações. A integração da tecnologia é considerada como indispensável nesse processo, pelas possibilidades que oferece de experimentação, visualização, representação, simulação, interatividade, bem como, evidentemente, de cálculo numérico e simbólico. O recurso à folha de cálculo, a ambientes de geometria dinâmica, a aplicativos digitais diversos, a simulações, a *smartphones*, à calculadora gráfica e sensores, bem como a outros equipamentos e materiais, deve ser feito de forma sistemática. As atividades de programação devem ser integradas com uma complexidade progressiva, sendo relevantes para o desenvolvimento de processos algorítmicos, de um pensamento estruturado e do raciocínio lógico, proporcionando um vasto campo de aplicação da Matemática e envolvendo genuinamente a formulação e a resolução de problemas, promovendo o desenvolvimento do pensamento computacional.

4) Tarefas e recursos

Apoiar a aprendizagem em tarefas poderosas, contextos e recursos diversificados

A construção de tarefas de aprendizagem constitui uma das ações decisivas do professor. Uma tarefa matemática poderosa pode ser um problema, uma questão, um exercício, uma investigação que cumpre os seguintes critérios: ser interessante e desafiante, envolver matemática relevante, criar oportunidades para aplicar e ampliar conhecimentos, permitir diferentes estratégias, tornar possível monitorizar a compreensão dos alunos e apoiar o seu progresso. As tarefas devem ser diversificadas e ajustadas aos objetivos de aprendizagem e a sua planificação deve prever diferentes tipos de organização do trabalho dos alunos. A utilização de recursos variados, nomeadamente da tecnologia, bem como a diversificação de contextos de aprendizagem, incluindo laboratórios, espaços fora da sala de aula, museus de ciência e outros, deverão merecer especial atenção na construção de tarefas. O recurso a episódios e problemas marcantes da História da Matemática deve motivar pesquisas, estudos ou debates, não de caráter enciclopédico, mas contribuindo para que o progresso da Matemática seja apreciado e compreendido. Para além do seu valor intrínseco, enquanto património cultural que importa valorizar, existem factos, aspetos particulares e episódios da História da Matemática, que pelo seu potencial pedagógico devem ser explorados.

5) Práticas enriquecedoras e criatividade

Inovar e investir em práticas enriquecedoras, favorecendo o desenvolvimento da criatividade e atitudes positivas face à Matemática

O currículo integra propostas inovadoras, que incluem a realização de projetos ajustados às condições existentes e aos alunos. É igualmente recomendado que os alunos se envolvam na resolução de questões e problemas autênticos em contextos de interdisciplinaridade (nomeadamente, numa perspetiva integradora de STEAM – ciências, tecnologia, engenharia, artes e matemática). A programação, tal como a modelação ou o trabalho de projeto, abrem inúmeras vias de trabalho promissoras que não devem ser ignoradas. Também a beleza da Matemática, a sua aplicabilidade e a história fascinante que envolve a Matemática são fortes motivos para inovar através de práticas de enriquecimento das aprendizagens. É importante que os alunos experimentem o prazer da descoberta em Matemática e que desenvolvam o gosto pelo desafio, pela procura de soluções e pela sua comunicação. As oportunidades de aprenderem matemática mais significativa contribui para desenvolver nos alunos atitudes positivas em relação à disciplina. Tornar possível que reconheçam a importância da Matemática na sua formação e adquiram autoconfiança, sentindo-se capazes de raciocinar e comunicar matematicamente. Esta atitude positiva permitirá uma visão do papel da Matemática como essencial na formação de cidadãos críticos, reflexivos e capazes de tomar decisões e resolver problemas do quotidiano.

6) Organização do trabalho dos alunos

Valorizar o trabalho colaborativo num ambiente de entreajuda e corresponsabilização, cultivando comunidades de aprendizagem

A valorização do trabalho colaborativo é assumida enquanto estratégia de aprendizagem e enquanto competência a desenvolver nos jovens na sociedade atual. A colaboração é especialmente indicada em tarefas nas quais os alunos possam discutir e definir abordagens e processos de resolução, confrontar ideias e contribuir para um objetivo comum. É também uma forma de trabalho em que os alunos se devem apoiar mutuamente, envolvendo-se em processos matemáticos, argumentação e comunicação, valorizando as competências individuais de cada um. Assim, o trabalho em pares e em pequenos grupos é adequado em múltiplas situações de aprendizagem, desde a realização de tarefas curtas, passando por situações que envolvem pesquisa, recolha de dados, modelação, até ao desenvolvimento de projetos.

7) Comunicação matemática

Comunicar recorrendo a representações múltiplas, com clareza e rigor e um nível de formalização adequado

A comunicação matemática, a par do raciocínio e do pensamento crítico, está presente quando os alunos interpretam gráficos, esquemas, diagramas ou dados, justificam afirmações, utilizam diferentes representações, escrevem e criticam explicações e argumentos matemáticos, com simbologia adequada e produzindo encadeamentos lógicos. Importa pôr em prática diversos tipos de comunicação, dando espaço às discussões coletivas e em pequenos grupos, apresentações orais e/ou escritas, elaboração de relatórios e composições, publicações e exposições, que são essenciais no processo de desenvolvimento de conceitos ou processos matemáticos. É desejável que os alunos se familiarizem com a linguagem própria da Matemática, que sejam capazes de usar adequadamente a simbologia e a argumentação lógico-dedutiva. A simbologia constitui um sistema de representação matemática poderoso que deve ser relacionado com outros modos de representação, tendo em vista a sua utilização oportuna, nomeadamente no âmbito da comunicação matemática. A formalização de conceitos e de resultados matemáticos é uma etapa importante da aprendizagem, mas não pode ser alcançada por meio do excesso de manipulação simbólica ou pela prática de artifícios de cálculo excessivamente técnicos.

8) Avaliação para a aprendizagem

Privilegiar a avaliação formativa na regulação do processo de aprendizagem

A abordagem exploratória que se privilegia implica a integração da avaliação no processo de aprendizagem. É necessário que a avaliação seja um processo e não um fim, e que esteja ao serviço da aprendizagem dos alunos de modo a favorecê-la. A diversificação de formas e instrumentos de avaliação é uma das práticas de avaliação recomendadas. Constituem boas tarefas de avaliação formativa as resoluções detalhadas de tarefas, os relatórios e os cartazes. A produção de documentos de natureza audiovisual é igualmente válida e apelativa, designadamente sob a forma de pequenos vídeos, criação de páginas e blogs, tirando partido de ferramentas digitais. As partilhas de ideias e conclusões em sala de aula, bem como as apresentações orais, constituem boas oportunidades para monitorizar e acompanhar o desenvolvimento das aprendizagens e identificar dificuldades e obstáculos.

Operacionalização das Aprendizagens Essenciais

A disciplina de Matemática B destina-se aos alunos do Curso Científico-Humanístico de Artes Visuais, como disciplina bienal de opção, ou a alunos de outros cursos que, nos termos da legislação aplicável, optem por um percurso formativo próprio. Pretende-se que os alunos desenvolvam conhecimentos, capacidades e atitudes que lhes permitam adquirir um conjunto de competências, tendo em vista a construção do *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Os temas a abordar são Matemática para a Cidadania, Literacia Financeira, Geometria, Estatística, Probabilidade e Funções.

A organização das Aprendizagens Essenciais é apresentada em quatro áreas:

- *Temas, Tópicos e Subtópicos matemáticos*, em que são identificados os conceitos Matemáticos a abordar.
- *Objetivos de aprendizagem, conhecimentos, capacidades e atitudes que o aluno deve revelar*, em que são concretizadas, para cada tópico matemático, as aprendizagens visadas com a indicação do foco e da especificação preconizada.
- *Ações estratégicas de ensino do professor*, onde é clarificado o papel do professor e as indicações metodológicas que são consideradas adequadas para a obtenção dos objetivos de aprendizagem definidos, bem como a sugestão de exemplos para a concretização das atividades a propor aos alunos.
- *Áreas de competência do perfil do aluno*, em que é estabelecida uma ligação entre as aprendizagens matemáticas visadas, as indicações metodológicas e as competências, capacidades e atitudes definidas no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*.

Quando nas Aprendizagens Essenciais se refere recurso a tecnologia gráfica, deve entender-se a utilização de folhas de cálculo ou qualquer versão de calculadora gráfica, física ou sob a forma de emulador, inclusive com Cálculo Algébrico Simbólico (CAS), bem como o uso do Geogebra ou outro Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD), nas suas diversas versões disponíveis em qualquer dispositivo digital. Considera-se também o recurso a aplicativos digitais específicos (apliquetas), disponíveis na internet ou em fóruns temáticos.

Para cada tema são incluídas notas clarificadoras, nomeadamente no que se refere à sugestão de: atividades para o desenvolvimento do Pensamento Computacional, com recurso a exemplos; propostas de possíveis aprofundamentos de alguns temas ou de abordagens alternativas; referências bibliográficas que incluem documentos e recursos para apoio ao trabalho do professor.

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO **PERFIL DOS ALUNOS (ACPA)**

A Linguagens e textos

B Informação e comunicação

C Raciocínio e resolução de problemas

D Pensamento crítico e pensamento criativo

E Relacionamento interpessoal

F Desenvolvimento pessoal e autonomia

G Bem-estar, saúde e ambiente

H Sensibilidade estética e artística

I Saber científico, técnico e tecnológico

J Consciência e domínio do corpo

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
TAXA DE VARIAÇÃO Cálculo e interpretação da variação e da taxa de variação	Calcular e interpretar a variação entre dois pontos do domínio de uma dada função. Calcular a taxa média de variação entre dois pontos do domínio de uma função e interpretar geometricamente o valor obtido. Calcular, através da observação da representação gráfica, a taxa média de variação entre dois pontos do domínio de uma função. Calcular numericamente e interpretar em termos geométricos a taxa de variação instantânea. Reconhecer, numérica e graficamente, a relação entre o sinal da taxa de variação e a monotonia de uma função.	Tirar partido da utilização da tecnologia (calculadora gráfica, programas de geometria dinâmica como o *GeoGebra*, folhas de cálculo, aplicações interativas, ou outras), para calcular numericamente a variação e a taxa média de variação entre dois pontos e a taxa instantânea de variação num ponto. Promover o cálculo numérico da taxa de variação instantânea, através do algoritmo da calculadora gráfica que aproxima a taxa de variação instantânea pela taxa média de variação num intervalo tão pequeno quanto possível (e esclarecer o aluno das vantagens e inconvenientes de tal processo). Propor a utilização do gráfico da taxa de variação instantânea gerado com recurso à tecnologia, para obter um valor específico no domínio da função. Promover a interpretação das relações entre as taxas de variação (média e instantânea) e o crescimento, com recurso a exemplos reais da Física, da Demografia e da Economia; ou recorrendo, ainda, a recortes de jornais; recolhas na internet; dados obtidos em experiências com sensores.	Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A) Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais; avalia, valida e organiza a informação recolhida. (B) Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo. (C) Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição. (D)

Otimização Resolução de problemas envolvendo taxas de variação	Estudar gráfica e numericamente a monotonia de funções, recorrendo ao gráfico da função e ao gráfico da taxa de variação. Reconhecer, numérica e graficamente, a relação entre os zeros da taxa de variação e os extremos de uma função. Resolver problemas que envolvam a determinação de extremos de funções no contexto da vida real. Resolver problemas simples de modelação matemática. Perceber a importância do processo de modelação matemática na sociedade atual.	Promover a utilização do gráfico da taxa de variação instantânea, produzido com recurso à tecnologia, para efetuar tabelas de sinais e extrapolar para a variação da monotonia de uma função. Promover a análise de situações com contexto real, por exemplo, determinar as dimensões ótimas de pacotes de leite com a forma de prismas quadrangulares com uma determinada capacidade, ou situações que permitam a determinação de distâncias mínimas entre dois pontos. Devem ser criadas condições de aprendizagem para que os alunos, em experiências individuais e colaborativas, tenham oportunidade de resolver problemas e atividades de modelação ou desenvolver projetos, com ênfase especial no trabalho em grupo, que mobilizem conhecimentos adquiridos, fomentem novas aprendizagens e permitam a articulação com outras disciplinas.	Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos. (E) É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências. (F) Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)

Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles.

Antes de redigir o programa na linguagem Python, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Neste tema podem ser usados vários tipos de programas em Python para calcular taxas médias e instantâneas de variação, de forma aproximada.

Exemplo de programa em Python para determinar uma aproximação da variação instantânea de uma função do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d$ num dado ponto:

```
print("Introduza os parâmetros de uma função do tipo ax^3+bx^2+cx+d")
a=int(input("a = "))
b=int(input("b = "))
c=int(input("c = "))
d=int(input("d = "))
x=float(input("Calcular uma aproximação da derivada da função no ponto x = "))
```

```
fx=a*x**3+b*x**2+c*x+d
h=10**(-5)
x=x+h
fxh=a*x**3+b*x**2+c*x+d
d=(fxh-fx)/h
print(d)
```

Exemplo de programa em Python para determinar uma aproximação da variação instantânea de uma função do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d$ num dado ponto, com recurso a funções:

```
print("Introduza os parâmetros de uma função do tipo ax^3+bx^2+cx+d")
a=int(input("a = "))
b=int(input("b = "))
c=int(input("c = "))
d=int(input("d = "))

def f(x):
    y=a*x**3+b*x**2+c*x+d
    return y

h=10**-5
x=float(input("Calcular uma aproximação da derivada da função no ponto x = "))
d=(f(x+h)-f(x))/h
print(d)
```

Possíveis aprofundamentos

Poderá ser proposto o estudo da concavidade dos gráficos das funções, como aprofundamento deste tema.

Bibliografia de referência

Academia Kahn. *Taxa média de variação e taxa instantânea de variação*. Obtido de https://pt-pt.khanacademy.org/math/11ano/xec1aeb6fd449d293:funcoes-reais-de-variavel-real#xec1aeb6fd449d293:taxa-media-de-variacao-e-taxa-de-variacao-instantanea

Grupo de Trabalho T3 (2011). *Funções no 3.º Ciclo com Tecnologia*. Lisboa: APM.

Teixeira, P. et al. (1997). *Funções - 10º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
Teixeira, P. et al. (1998). *Funções - 11º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
Teixeira, P. et al. (1999). *Funções - 12º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
SESAMATH (2019). Manuel MATHS première. Magnard. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1spe_2019
WihiHow. Como Encontrar a Taxa Média de Variação. Obtido de https://pt.wikihow.com/Encontrar-a-Taxa-M%C3%A9dia-de-Varia%C3%A7%C3%A3o

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
PROBABILIDADE Fenómeno aleatório Experiência aleatória Espaço de resultados ou espaço amostral Modelo de probabilidade Acontecimentos União e interseção de acontecimentos	Distinguir entre fenómeno aleatório e não aleatório (determinístico). Compreender que as realizações individuais de um fenómeno aleatório são incertas, mas existe um padrão genérico de comportamento, recorrendo-se à Teoria da Probabilidade para construir modelos matemáticos que descrevam a regularidade estatística observada numa longa série de repetições do fenómeno. Compreender que: - À realização de um fenómeno aleatório se dá o nome de experiência aleatória; - Ao conjunto S dos resultados possíveis se dá o nome de espaço de resultados ou espaço amostral; - Um acontecimento é um subconjunto do espaço de resultados e que a estes resultados se dá o nome de “resultados favoráveis” à realização do acontecimento; - A descrição do fenómeno aleatório é feita através de um modelo de probabilidade, constituído pelos resultados possíveis e a probabilidade atribuída a cada resultado. Relembrar os conceitos: acontecimento certo, impossível, elementar e composto; acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos; acontecimentos contrários ou complementares; união e interseção de acontecimentos.	Recorrer a situações em contextos variados, para sensibilizar os alunos para a existência destes fenómenos, nomeadamente através de exemplos de fenómenos físicos, com leis determinísticas (movimento de um carro; queda de uma maçã do alto de uma torre) e de exemplos de fenómenos que se podem considerar aleatórios pela dificuldade em arranjar uma lei física para os descrever (número de irmãos de um aluno da escola, escolhido ao acaso; face do dado que fica virada para cima quando se lança; temperatura máxima a observar numa data futura). Salientar que os modelos de probabilidade são modelos matemáticos que descrevem os fenómenos aleatórios Realçar que para construir um modelo de probabilidade tem de se arranjar um processo que permita atribuir probabilidades aos acontecimentos elementares.	Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C) Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)

Probabilidade Probabilidade frequencista	Compreender que a caraterística do fenómeno aleatório permite definir, intuitivamente, a probabilidade de um acontecimento A, representada por P(A), como sendo o valor para o qual estabiliza a frequência relativa da realização de A, num grande número de repetições da experiência aleatória, nas mesmas condições, ou seja, P(A) é o valor em que estabiliza $\frac{n_A}{n}$, onde n_A representa o número de vezes que se realizou A em n repetições da experiência aleatória. Reconhecer que as probabilidades associadas aos acontecimentos elementares têm de ser números entre 0 e 1 e que a soma total deve ser 1.	Iniciar o estudo deste tema com modelos de probabilidade simples, com espaços de resultados finitos, nomeadamente os que descrevem os chamados "jogos de sorte e azar". Por exemplo, intuitivamente, espera-se que ao fim de muitas repetições do lançamento do dado, cada uma das faces saia aproximadamente 16,6(6)% das vezes. Alguns acontecimentos, associados com esta experiência, são: "sair uma face com um nº de pintas par", "sair uma face com um nº de pintas maior ou igual a 5", "sair uma face com um nº de pintas maior que 6", etc.	Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
Regras da probabilidade	Reconhecer que a probabilidade de um acontecimento é igual à soma das probabilidades dos acontecimentos elementares constituídos pelos resultados que o compõem. Utilizar a representação dos acontecimentos em diagramas de Venn, para mostrar que, dados dois acontecimentos A e B quaisquer, P(A∪B)=P(A)+P(B)-P(A∩B).	Propor a resolução de problemas que envolvam o cálculo de probabilidades recorrendo à regra de Laplace, evitando o uso excessivo de técnicas de contagem.	
Probabilidade da união de acontecimentos	Reconhecer que se admite que os acontecimentos elementares são equiprováveis quando não haja à partida razão para admitir que os resultados do espaço de resultados não tenham igual possibilidade de se verificarem.	Realçar que uma vez definido o modelo de probabilidade se pode calcular a probabilidade de qualquer acontecimento associado ao fenómeno em estudo.	
Regra de Laplace	Conhecer a regra de Laplace, para o cálculo da probabilidade de um acontecimento A, com o seguinte enunciado: $\text{Probabilidade de A} = \dfrac{\text{Número de resultados favoráveis a A}}{\text{Número de resultados possíveis}}$ Compreender em que situações se pode utilizar a regra de Laplace para determinar a probabilidade de um acontecimento.	Alertar os alunos para o facto de que na vida real as situações mais frequentes são aquelas em que que não é possível recorrer à regra de Laplace para calcular a probabilidade de acontecimentos, por exemplo: o tipo sanguíneo de uma pessoa escolhida ao acaso, de entre a população portuguesa, ou a eficácia de uma vacina.	

Probabilidade condicionada Definição Regra do produto Árvore de probabilidade Tabelas de contingência Acontecimentos independentes	Saber que a probabilidade de um acontecimento A se realizar, condicionada ou sabendo que o acontecimento B se realizou, com $P(B) > 0$, se representa por $P(A\|B)$ e se calcula de acordo com a seguinte fórmula: $P(A\|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ Reconhecer que a partir da definição de probabilidade condicionada se pode definir a probabilidade simultânea de dois acontecimentos, chamada regra do produto, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B\|A)$ ou $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A\|B)$ conforme seja A ou B o acontecimento que está a condicionar. Reconhecer a utilidade de árvores de probabilidade para organizar a informação disponível sobre os acontecimentos em cadeia. Reconhecer a utilidade das tabelas de contingência para calcular a probabilidade condicionada. Utilizar a probabilidade condicionada para definir acontecimentos independentes e saber que o acontecimento A é independente do acontecimento B, com $P(B) > 0$, se $P(A\|B) = P(A)$ Reconhecer que os acontecimentos A e B são independentes se, e só se: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$	Conduzir os alunos a reconhecerem que em muitas situações em que se pretende calcular a probabilidade de um acontecimento, já se dispõe de alguma informação sobre o resultado da experiência, a qual permite atualizar a atribuição de probabilidade a esse acontecimento. Exemplificar com situações intuitivas, como a extração de bolas, de vários tipos, de uma caixa sucessivamente, sem reposição, em que a composição da caixa se altera, implicando que a probabilidade de se retirar uma bola depende dos tipos de bolas que saíram nas extrações anteriores Pedir aos alunos que calculem a probabilidade de ocorrência de cadeias simples de acontecimentos, utilizando árvores de probabilidade, como forma de organização da informação disponível. Salientar que uma das situações mais simples para compreender intuitivamente o conceito de independência de acontecimentos está ligada à situação do lançamento de uma moeda. A moeda “não tem memória” e a probabilidade de sair “face nacional” no próximo lançamento não depende do que saiu nos lançamentos anteriores. Porém, no acontecimento “selecionar o nome de dois alunos do sexo masculino” de uma turma com 14 rapazes e 16 raparigas, a probabilidade de selecionar o segundo rapaz, depende da escolha do primeiro aluno (seleção sem reposição).	

Modelos de probabilidade em espaços finitos Variáveis aleatórias (discretas) Função massa de probabilidade	Reconhecer que se podem associar números aos resultados de um fenómeno aleatório, através de uma função denominada variável aleatória (v.a.) e que construir um modelo de probabilidade para modelar um fenómeno aleatório, com espaço de resultados finito, é equivalente a construir a função massa de probabilidade (f.m.p) da variável aleatória associada. Identificar a população com a variável aleatória associada e reconhecer que construir a f.m.p. é obter um modelo para a população. Reconhecer que a f.m.p. permite calcular a probabilidade de acontecimentos, relacionados com a realização do fenómeno modelado.	Exemplificar e orientar os alunos na construção de modelos de probabilidade simples, nomeadamente o que descreve o resultado do lançamento de um dado equilibrado, em que se define a variável aleatória X, que associa a cada face do dado, o seu número de pintas. Destacar a situação do lançamento de dois dados em que se pretende modelar o fenómeno aleatório que consiste em observar a soma das pintas dos dois dados e chamar a atenção para que embora o número de resultados possíveis seja igual a 11, a probabilidade de cada um não é $\frac{1}{11}$.	
Parâmetros Valor médio e desvio padrão populacional	Reconhecer que dois dos parâmetros, características numéricas da população, mais importantes são o valor médio (ou média populacional) e o desvio padrão populacional, e saber que estes parâmetros se representam pelas letras gregas μ (miu) e σ (sigma), respetivamente. Compreender o paralelismo entre valor médio (ou média populacional) e a média e também, de modo idêntico, para a variância e outras medidas calculadas para a população e para a amostra. Saber calcular o valor médio e o desvio-padrão populacional de uma variável aleatória de suporte finito, a partir da f.m.p.	Propor o cálculo do valor médio e do desvio padrão, recorrendo à f.m.p. em exemplos como o do lançamento do dado e de outros modelos como seja, a extração de bolas de um saco com e sem reposição. Salientar que a fórmula utilizada para calcular o valor médio é semelhante à fórmula utilizada para calcular a média com os dados discretos agrupados em tabelas de frequências relativas.	

Modelo Normal Propriedades	Reconhecer o modelo Normal, de suporte contínuo, como um dos modelos mais importantes para a modelação de fenómenos aleatórios. Saber calcular probabilidades com base nesta família de modelos.	Salientar que é necessário alargar o conceito de modelo de probabilidade a situações onde o espaço amostral não seja finito, como por exemplo, o “n.º de carros que atravessam a ponte 25 de Abril das 8h às 9h”, em que se considera como suporte do modelo os números naturais, ou o comprimento do salto de um atleta, em que o suporte da variável comprimento é IR. Destacar que o modelo normal é utilizado para estudar variáveis aleatórias de suporte contínuo, como, por exemplo, a “altura” ou o “peso” de um indivíduo adulto. Salientar a curva em forma de “sino” como representativa do Modelo Normal, bem como o significado nessa curva dos valores da probabilidade associados a intervalos. Utilizar a tecnologia gráfica para calcular probabilidades com base no modelo Normal.	

Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles. O reconhecimento de padrões na tarefa (ou situação) apresentada ou em problemas semelhantes, anteriormente resolvidos, poderá contribuir para facilitar a estruturação do algoritmo a desenvolver. Antes de redigir o programa na linguagem Python, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.
Exemplo de programa em Python para simular lançamentos de um dado cúbico, numerado de 1 a 6, e o registo das frequências relativas referentes à saída de cada face:

```
import random
n=int(input("Quantos lançamentos queres simular?"))
f1=0
f2=0
```

```
f3=0
f4=0
f5=0
f6=0
for i in range(0,n):
    r=random.randint(1, 6)
    if r==1:
        f1=f1+1
    elif r==2:
        f2=f2+1
    elif r==3:
        f3=f3+1
    elif r==4:
        f4=f4+1
    elif r==5:
        f5=f5+1
    elif r==6:
        f6=f6+1
print("Freq. relativa da saída da face 1 = "+str(f1/n))
print("Freq. relativa da saída da face 2 = "+str(f2/n))
print("Freq. relativa da saída da face 3 = "+str(f3/n))
print("Freq. relativa da saída da face 4 = "+str(f4/n))
print("Freq. relativa da saída da face 5 = "+str(f5/n))
print("Freq. relativa da saída da face 6 = "+str(f6/n))
```

Nota: O programa foi criado em Python IDLE 3.9.1 para computador.

Exemplo de programa em Python para simular lançamentos de 1 dado cúbico, numerado de 1 a 6, e o registo das frequências relativas referentes à saída de cada face, com recurso a ciclos e a listas:

```
import random

n=int(input("Quantos lançamentos queres simular?"))

f=[0 for k in range(6)]
for i in range(n):
    r=random.randint(1,6)
```

```
        f[r-1]=f[r-1]+1

    for k in range(6):
        print("Freq. relativa da saída da face",k+1,"=",f[k]/n)
```

Nota: O programa foi criado em Python IDLE 3.9.1 para computador.

Possíveis aprofundamentos

Nada se sugere atendendo à variedade de temas tratados.

Bibliografia de referência

COMAP (2016). FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World. New York: W. H. Freeman and Company.
Graça Martins, M. E (1998). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Sociedade Portuguesa de Estatística.
Graça Martins, M. E (2005). *Introdução à Probabilidade e à Estatística, com complementos de Excel*. Sociedade Portuguesa de Estatística.
Graça Martins, M. E. & Cerveira, A. (1998). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Universidade Aberta Graça Martins, M. E. & Loura, L. (2002). *Estatística, Modelos de Probabilidade e Introdução à Inferência Estatística* (edição da responsabilidade do DES, Lisboa). Obtido de https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online
Graça Martins, M. E. et al. (1999). *Probabilidades e Combinatória*. Ministério da Educação/Departamento do Ensino Secundário.
Graça Martins, M. E. & Loura, L. (2002). *Estatística, Modelos de Probabilidade e Introdução à Inferência Estatística* (edição da responsabilidade do DES, Lisboa). Obtido de https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online
Noções de Probabilidade. Obtido de http://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=132&Itemid=1204&lang=pt

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
GEOMETRIA SINTÉTICA Geometria no plano Perímetros e áreas de figuras semelhantes	Compreender a noção de semelhança. Relacionar área e perímetro de figuras planas semelhantes. Utilizar escalas para o cálculo de perímetros e áreas. Conhecer um ou mais problemas e factos marcantes da História da Geometria ou das aplicações contemporâneas da semelhança de figuras.	Propor o cálculo de perímetros e áreas a partir da análise de plantas, recorrendo à escala aplicada, para determinar, por exemplo: - o custo associado à pintura das paredes de uma casa; - a compra de mosaicos ou de azulejos; - os custos para proceder à vedação de um jardim. Propor a elaboração de um trabalho de pesquisa sobre problemas históricos ou aplicações contemporâneas da semelhança de figuras, por exemplo: - a altura da grande pirâmide do Egito, por Tales de Mileto; - modelagem 3D de fotografias de pessoas no computador para determinar o seu aspeto em diferentes idades; - identificar padrões de crescimento alométrico; - utilizar a ferramenta Google Maps para a determinação de uma área de um determinado terreno; - utilizar exemplos das viagens espaciais, por exemplo os fornecidos pela NASA e pela ESA-Agência Espacial Europeia. Orientar os alunos a exprimir, oralmente e por escrito a sua exploração dos exemplos trabalhados, evidenciando o domínio dos conceitos, dos raciocínios e das ideias matemáticas usados, interpretando textos de Matemática e justificando raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo a vocabulário e linguagem próprios da matemática.	Apresenta e explica conceitos em grupos, ideias e projetos diante de audiências reais, presencialmente ou a distância. (B) Preocupa-se com a construção de um futuro sustentável e envolve-se em projetos de cidadania ativa (G) Têm consciência de si próprio a nível emocional, cognitivo, psicossocial, estético e moral por forma a estabelecer consigo próprio e com os outros uma relação harmoniosa (J)

Geometria no Espaço Medidas de volume e capacidade Volumes de sólidos Áreas de superfícies	Desenvolver a capacidade de visualização no espaço tridimensional. Resolver problemas de cálculo de medidas, nomeadamente, volumes ou superfícies. Resolver problemas do quotidiano envolvendo volumes e capacidades. Aplicar os conceitos de volume e capacidade no cálculo de quantidades e custos. Relacionar sólidos semelhantes com os respetivos volumes.	Propor a resolução de problemas que impliquem o cálculo de volumes e superfícies de diferentes sólidos geométricos ou resultantes da composição dos mesmos, a partir da análise de modelos 3D ou da sua representação, por exemplo: - a capacidade de um determinado tanque ou a quantidade de água necessária para encher uma piscina; - o material e os custos gastos num embrulho; - o material e custos associados à construção de uma maquete. Incentivar os alunos a explorar a relação entre volumes de sólidos semelhantes, recorrendo ao Geogebra ou outro software de geometria dinâmica.	
Empacotamento	Investigar a melhor solução de empacotamento de objetos num determinado contentor.	Propor o desenvolvimento de um trabalho de projeto, individual ou a pares, podendo agregar outra(s) disciplina(s), que envolva em contexto real uma situação de um empacotamento, nomeadamente: - escolha do produto; - eficácia do empacotamento; - otimização dos custos.	

Pensamento Computacional

Neste tema há oportunidade de explorar de forma interativa vários tipos de empacotamento, usando o software GEOGEBRA. Páginas a explorar, por exemplo:
- Octagon Packing. Obtido de https://www.geogebra.org/m/KqrXf9Uu
- Circle Packing and Room Capacities for COVID 19. Obtido de https://www.geogebra.org/m/zqe6wtf9
- Circle Packing. Obtido de https://www.geogebra.org/m/DTD6dSxQ
- Malfatti's Packing Problem. Obtido de https://www.geogebra.org/m/bXjAVqhf

Possíveis aprofundamentos

Poderá ser feita uma referência ao problema da Mochila e à sua complexidade matemática:
Landau, E. (2020). How the Mathematical Conundrum Called the 'Knapsack Problem' Is All Around Us. SMITHSONIANMAG.COM, MARCH 9, 2020. Obtido de https://www.smithsonianmag.com/science-nature/why-knapsack-problem-all-around-us-180974333/

Bibliografia de referência

Agrupamento de Escolas D. Pedro I (2018). Geometria no Empacotamento. Obtido de http://agrupamento.dpedro.net/wp-content/uploads/2018/04/Prova2_Geometria_N%C3%ADvel-II.pdf

Caraça, Bento de Jesus (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática,* Ciência Aberta, Lisboa: Gradiva.

Cássio, J. (2019). *Aprendendo Geometria Plana com a Plataforma GeoGebra*. Obtido de https://www.geogebra.org/m/hsXHDRX7

Estrada, M. F. et al. (2000). *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Gupta, M. (1977). *The Geometry of Art and Life*. New York: Dover.

IMPA (2020). As lições de geometria do isolamento social. Obtido de https://impa.br/noticias/as-licoes-de-geometria-do-isolamento-social/

Loureiro, C. et al. (1997). *Geometria 10º ano de escolaridade*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Loureiro, C. et al. (1998). *Geometria 11º ano de escolaridade*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Martins, R. (2016). Isto é Matemática - T10E10 - “Empacotamentos”. Obtido de https://youtu.be/q2DWiAlw5Wk

OBMEP (2019). Atividade: Proporção em Geometria. Obtido de http://clubes.obmep.org.br/blog/atividade-proporcao-em-geometria-2/

Precatado, A., Guimarães, H. (2001). *Materiais para a aula de Matemática*. Lisboa: APM.

Sebastião e Silva, J. (1970). *Geometria Analítica Plana*. Lisboa: Empresa Literária Fluminense.

Sebastião e Silva, J. (1976). *A Matemática na Antiguidade*. Lisboa: SPM.

Veloso, E. (1998). *Geometria - Temas atuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
DISTÂNCIAS INACESSÍVEIS Resolução de triângulos retângulos	Conhecer e aplicar as relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo retângulo. Formular e resolver problemas geométricos ou da vida real que envolvam triângulos retângulos e o cálculo de medidas dos seus lados e dos seus ângulos.	Propor a resolução de problemas de triângulos retângulos, utilizando a variação de ângulos/lados, envolvendo situações concretas, como por exemplo sombras ao longo do dia ou alturas de edifícios.	Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A) Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais; avalia, valida e organiza a informação recolhida. (B) Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo. (C) Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição. (D) Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos. (E)
Resolução de triângulos obliquângulos	Estabelecer relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo não retângulo, a partir da sua decomposição em triângulos retângulos. Conhecer e aplicar nos processos de resolução de triângulos não retângulos a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos. Formular e resolver problemas geométricos ou da vida real que envolvam triângulos não retângulos e o cálculo de medidas dos seus lados e dos seus ângulos. Conhecer problemas e factos marcantes da História da Trigonometria e analisá-los em confronto com os conhecimentos disponíveis. Utilizar a visualização, a representação e o raciocínio espacial na análise de situações problemáticas da vida real e na resolução de problemas, construindo modelos úteis e adequados com recurso a medições e escalas.	Propor a resolução de problemas que envolvam triângulos não retângulos, usando a: - decomposição em triângulos retângulos; - Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos. Promover a aplicação de conhecimentos de trigonometria a situações da vida real, através da elaboração de esquemas, da identificação de triângulos, da escolha das relações trigonométricas adequadas e da validação das soluções. Propor a elaboração de um trabalho de pesquisa sobre problemas históricos que tenham envolvido o cálculo de distâncias inacessíveis, tais como: a altura da grande pirâmide do Egito, por Tales de Mileto; o raio da Terra por Eratóstenes; a construção do túnel da ilha de Samos; a altura de uma falésia do *Manual Matemático da Ilha do Mar*, do chinês Liu Hui; cálculos astronómicos no Observatório de Jantar Mantar, Ujjain, Índia.	

		Recorrer a situações e contextos variados, que envolvam aplicações e modelação matemática, incluindo a utilização de materiais diversificados e tecnologia, de modo a proporcionar aos alunos experiências individuais e colaborativas que integrem a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação matemática.	É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências. (F) Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)
Determinação de distâncias inacessíveis	Determinar lados e ângulos em problemas com triângulos retângulos e não retângulos, para calcular todo o tipo de distâncias inacessíveis. Exprimir, oralmente e por escrito, conceitos, raciocínios e ideias matemáticas, interpretando textos de Matemática e justificando raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo ao vocabulário e linguagem próprios da matemática.	Propor aos alunos a elaboração de um projeto de determinação de uma distância inacessível, usando instrumentos adequados de medição, ainda que rudimentares e construídos pelos alunos. Pode por exemplo ser usado um teodolito caseiro (transferidor, palhinha e fio de prumo ou clip), ou podem ser usados exemplos de livros antigos que recorrem ao grafómetro. Utilizar ferramentas tecnológicas específicas, incluindo calculadoras científicas ou gráficas e um programa de geometria dinâmica para: simular e modelar situações da vida real ou da geometria, fazer conjeturas, formular e resolver problemas.	

Pensamento Computacional

Para fomentar a visualização gráfica pode-se recorrer a ferramentas computacionais, como, por exemplo, o GeoGebra:
Lei dos senos: https://www.geogebra.org/m/uv8QJeDj
Lei dos senos: https://www.geogebra.org/m/vTxDD3eY
Leis trigonométricas: http://www.malinc.se/math/trigonometry/lawsen.php
O “som” do seno: http://www.malinc.se/math/trigonometry/musicen.php

Possíveis aprofundamentos

Poderá ser aprofundado o estudo da Lei dos Senos, abordando a sua demonstração e algumas aplicações, consultando por exemplo a página da Casa das Ciências: https://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php/Lei_dos_senos

Bibliografia de referência

Caraça, B. J. (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Ciência Aberta. Lisboa: Gradiva.
COMAP (2016). *FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.
Devlin, K. (2002). *Matemática - A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.
Estrada, M., Queiró, J. F., Silva, M. C. & Costa, M. J. (2000). *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
Khan Academy (s/d). *Problema de trigonometria: estrelas*. Obtido de https://pt-pt.khanacademy.org/math/geometry/hs-geo-trig/hs-geo-solving-general-triangles/v/law-of-cosines-word-problem
Matos, J. F., & Carreira, S. P. (1996). *Modelação e Aplicações no Ensino da Matemática*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
Neto, F. (2015). O cálculo de distâncias entre pontos inacessíveis. Universidade Federal da Paraíba. Obtido de https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/9410/2/arquivototal.pdf
Precatado, A. & Guimarães, H. (2001). *Materiais para a aula de Matemática*. Lisboa: APM.
Sebastião e Silva, J. (1975-1978). *Compêndio de Matemática* (3 volumes). Lisboa: GEP.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
MATEMÁTICA E ARTE Atividades investigativas	Apreciar o contributo da Matemática para a atividade artística, tendo por base o conhecimento de problemas e factos marcantes da História da Arte e da Matemática, discutindo-os em confronto com os conhecimentos disponíveis. Conhecer pintores, escultores, designers ou arquitetos que usaram a Matemática ou que encontraram inspiração nos conceitos matemáticos para as suas obras. Utilizar a Matemática para analisar e interpretar obras de arte (pintura, escultura, design, arquitetura, etc.). Aprofundar autonomamente conhecimentos matemáticos relacionados com uma obra de arte, uma escola, um artista ou um período da História da Arte e apresentá-los, de forma clara e organizada.	Propor aos alunos a escolha de uma obra, um artista, uma escola ou um período da História da Arte e investigar as técnicas ou conceitos de origem matemática usados ou que podem ser utilizados para interpretar a obra. Proporcionar aos alunos, em experiências individuais e colaborativas, o aprofundamento de forma autónoma e em interação com os outros, de conhecimentos matemáticos em contextos históricos e artísticos, através da construção de sínteses e da elaboração de relatórios.	Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A) Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais; avalia, valida e organiza a informação recolhida. (B) Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo. (C)
Comunicação matemática	Exprimir, oralmente e por escrito, conceitos, ideias e raciocínios matemáticos, interpretando textos de Matemática e justificando raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo ao vocabulário e linguagem próprios da matemática.	Organizar momentos em que os alunos tenham oportunidade de comunicar resultados de aprendizagens através de trabalhos e/ou projetos de diversa natureza (textos, imagens, desenhos, posters, maquetes, portefólios, debates, exposições, vídeos, apresentações digitais, blogues e/ou outros produtos multimédia), elaborados individualmente ou em grupo, realizados no contexto da disciplina e/ou de forma interdisciplinar.	Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição. (D)

<table>
<tr><td colspan="3">Exemplos de trabalhos de pesquisa
Apresentam-se três exemplos, entre outros possíveis, sendo que em cada caso os conhecimentos matemáticos a aprofundar serão necessariamente diferentes</td><td rowspan="3">Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos. (E)

É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências. (F)

Mobiliza os processos de reflexão, comparação e argumentação em relação às produções artísticas e tecnológicas, integradas nos contextos sociais, geográficos, históricos e políticos. (H)

Aprecia criticamente as realidades artísticas, em diferentes suportes tecnológicos, pelo contacto com os diversos universos culturais. (H)</td></tr>
<tr><td>1. Matemática e Arte no Renascimento

Perspetiva linear</td><td>Conhecer a obra de Brunelleschi, Leon Battista Alberti, Piero della Francesca e Albrecht Dürer e os conceitos matemáticos que usaram nas suas obras.

Aprofundar conhecimentos matemáticos relacionados com as obras destes artistas, precursores da perspetiva linear e da geometria projetiva, estudando conceitos como por exemplo: plano de tela, ponto de fuga, linha do horizonte, linhas de fuga, projeções e secções.

Encontrar os elementos da perspetiva linear em obras de arte desta época e fazer as suas representações em réplicas dessas obras.</td><td>Propor aos alunos a elaboração de um trabalho de pesquisa sobre a perspetiva linear no Renascimento com o objetivo de investigarem as técnicas ou conceitos de origem matemática usados ou que podem ser utilizados para interpretar as obras de arte.

Organizar momentos em que os alunos tenham oportunidade de comunicar, de variadas formas, os resultados das suas aprendizagens.</td></tr>
<tr><td>2. Matemática e arquitetura

Poliedros</td><td>Conhecer a obra de arquitetos, como por exemplo, Rafael Leoz, Anna e Ricardo Bofill, Piet Blom, Richard Fuller, Arata Isozaki, Antoni Gaudi, Siza Vieira, Souto Moura, Philip Johnson ou Zaha Hadid, e os conceitos matemáticos que usaram nas suas obras.

Aprofundar conhecimentos matemáticos relacionados com as obras destes arquitetos, estudando os poliedros visíveis nas suas obras, bem como outros conceitos geométricos.</td><td>Propor aos alunos a elaboração de um trabalho de pesquisa sobre a obra de um ou mais arquitetos com o objetivo de investigarem as técnicas ou conceitos de origem matemática usados nas suas obras.

Organizar momentos em que os alunos tenham oportunidade de comunicar, de variadas formas, os resultados das suas aprendizagens.</td></tr>
</table>

	Elaborar uma maquete, com materiais recicláveis, de uma das obras de um desses arquitetos que evidencie os poliedros que serviram de inspiração a essa obra.		Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)
3. Le Corbusier Proporções	Conhecer os conceitos matemáticos presentes na obra do arquiteto Le Corbusier. Aprofundar conhecimentos matemáticos relacionados com as obras de Le Corbusier, especialmente os que se referem ao "Le modulor" e às proporções entre as medidas da figura humana, com repercussões no design de objetos ergonómicos. Realizar um trabalho de antropometria com a recolha de medidas do corpo humano numa amostra da população, verificando proporções e estabelecendo correlações entre algumas dessas medidas, comparando-as com as propostas por Le Corbusier.	Propor aos alunos a elaboração de um trabalho de pesquisa sobre a obra de Le Corbusier com o objetivo de investigarem as técnicas ou conceitos de origem matemática usados nas suas obras. Organizar momentos em que os alunos tenham oportunidade de comunicar, de variadas formas, os resultados das suas aprendizagens.	

Pensamento Computacional

Neste tema podem ser utilizadas diversas aplicações interativas que permitem explorar diferentes configurações. Podem ser exploradas as aplicações interativas da exposição Formas & Fórmulas: http://formas-formulas.fc.ul.pt/multimedia/interactivo/
Podem ser usados os módulos de software construídos pelo IMAGINARY, em casa, na escola ou num museu. Todos os módulos incluem especificações para instalações públicas: https://www.imaginary.org/programs

Possíveis aprofundamentos

Devido à natureza do tema, não se sugerem aprofundamentos.

Bibliografia de referência

Atractor (2003). O ritmo das formas - Itinerário matemático (e não só) no mundo da simetria. Ed. Atractor.

Atractor (2018). A Matemática dos Azulejos, *Gazeta de Matemática*, nº 186, p. 3-9. Obtido de https://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=1484

Bastos, R. (2006). Simetria, *Educação & Matemática*, nº 88, p. 9-11. Obtido de https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1484

IMAGINARY. Obtido de https://www.imaginary.org/

King, J. & Schattschneider, D. (Eds.). (2003). *Geometria Dinâmica*. Lisboa: APM.

Marques, A. (2020). O Século de Le Corbusier. Obtido de https://www.acasinhadamatematica.pt/?p=17698

Museu da Ciência (2012). *Imaginary - Matemática e Natureza*. Universidade de Coimbra.

Museu Nacional de História Natural e da Ciência (2012/2013). Formas & Fórmulas (Conceitos naturais e matemáticos em ação e interação). Universidade de Lisboa. Obtido de http://formas-formulas.fc.ul.pt/

Reis, L. (2007). Le Modulor por Le Corbusier, *Educação & Matemática*, nº 93, p. 43-48. Obtido de https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1612/1651

Siqueira, V., Sirilo, G. & Marques, J. (2017). *A proporção no corpo humano e sua influência na arquitetura*. Obtido de https://www.researchgate.net/publication/342666922_A_PROPORCAO_NO_CORPO_HUMANO_E_SUA_INFLUENCIA_NA_ARQUITETURA

Teixeira, R. (2013). *Simetrias nos Açores*. Obtido de http://sites.uac.pt/rteixeira/simetrias/

Veloso, E. (1998). *Geometria - Temas atuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Veloso, E. (2012). *Simetria e Transformações Geométricas*. Lisboa: APM.

Veloso, E. (2020). *Arte e Geometria no Renascimento*. Lisboa: APM. Obtido de https://wordpress.apm.pt/wp-content/uploads/2020/10/ArtGeom_OUT_2020.pdf

Veloso, E. et al. (2009). Isometrias e Simetria com materiais manipuláveis, *Educação & Matemática*, n.º 101, p. 23-28. Obtido de https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1746

Cofinanciado por:

UNIÃO EUROPEIA
Fundo Social Europeu