PROGRAMA
e
Metas Curriculares
Matemática A

Pequeno apontamento sobre o domínio ALG10

António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira, Luísa Louro, Maria Clementina Timóteo

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA
Metas Curriculares

Preâmbulo

Considere a seguinte função definida no conjunto dos racionais:

$$f(q) = f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m+2}{n+3}, \qquad \text{onde} \qquad q = \frac{m}{n}.$$

Será esta uma definição lícita?

$$f(0{,}5) = f\left(\frac{2}{4}\right) = \frac{2+2}{4+3} = \frac{4}{7} \qquad\qquad f(0{,}5) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1+2}{2+3} = \frac{3}{5}.$$

A função *f* está de facto mal definida, uma vez que $f(q)$ **depende da representação do número racional *q***.

Diz-se que para a relação de equivalência entre frações,
«***f* não passa ao quociente**».

Metas Curriculares

Como veremos, será conveniente definir a potência de expoente racional

$$a^q = a^{\frac{m}{n}} \qquad \left(a > 0, q = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right)$$

por

$$a^q = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Para garantirmos que esta definição é coerente, é imprescindível verificarmos que não depende do representante, isto é, que se

$$q = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \qquad \text{então} \qquad \left(\sqrt[n']{a}\right)^{m'} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

O estudo das propriedades (e a própria definição!) de expoente racional devem, em particular alicerçar-se num estudo prévio e cuidado das propriedades dos radicais.

Estrutura do domínio ALG10
(Radicais e Potências)

Definição de $\sqrt[n]{a} \quad (a > 0, n \in \mathbb{N})$

1.Definir e efetuar operações com radicais (1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5)

Propriedades dos radicais

1.Definir e efetuar operações com radicais (1.6, 1.7, 1.8, 1.9)

Definição de $a^{\frac{m}{n}} \; (a > 0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$

2. Definir e efetuar operações com potências de expoente racional (1.1, 1.2, 1.3)

Propriedades algébricas das potências de expoente racional

2.Definir e efetuar operações com potências de expoente racional (1.4)

Procedimentos e Resolução de Problemas

Descritor1.11 (Racionalização de denominadores)
Descritor 2.5 (Simplificação de expressões envolvendo radicais e potências)
Descritor 3.1 (Resolver problemas envolvendo radicais e potências)

Metas Curriculares

Definição de $\sqrt[n]{a} \quad (a > 0, n \in \mathbb{N})$

1.Definir e efetuar operações com radicais (1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5)

$n \in \mathbb{N}$ ímpar

- Reconhecer a monotonia $a < b \Rightarrow a^n < b^n$.
- Saber que para todo o $a \in \mathbb{R}$, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $r^n = a$.
- Justificar, graças à monotonia que *r* é único e representá-lo por $\sqrt[n]{a}$.

$n \in \mathbb{N}$ par

- Reconhecer as monotonias $0 \leq a < b \Longrightarrow a^n < b^n$ e $a < b \leq 0 \Longrightarrow a^n > b^n$
- Saber que para todo o $a > 0$ existe $r > 0$ tal que $r^n = a$
- Provar que $(-r)^n = a$ e usar as monotonias para justificar que *r* e –*r* são as únicas soluções da equação $x^n = a$
- Representar *r* por $\sqrt[n]{a}$

Metas Curriculares

Propriedades dos radicais
1.Definir e efetuar operações com radicais (1.6, 1.7, 1.8, 1.9)

Provar (#)

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b} \longrightarrow \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$ (reconhecer)

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \longrightarrow \left(\sqrt[n]{b}\right)^{-m} = \sqrt[n]{b^{-m}}$$ (justificar)

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \times m]{a}$$

Nota: Para as provas, basta elevar à potência adequada (*n* nos dois primeiros casos, *nxm* no terceiro), e utilizar a definição de radical e as propriedades já conhecidas das potências de expoente inteiro (Ensino Básico).

Definição de a^q, $a \geq 0, q = \frac{m}{n} > 0$

2. Definir e efetuar operações com potências de expoente racional (1.1, 1.2, 1.3)

- Para conservar a propriedade das potências de expoente inteiro

$$(a^b)^c = a^{b \times c}$$

é fácil observar que a definição que se impõe é $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$:

Para que $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \times n} = a^m$

terá de ser necessariamente $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Quando *n* é par, o sinal positivo de $a^{\frac{m}{n}}$ assim escolhido vem do facto de que a potência tem de ser necessariamente positiva, por poder ser escrita como um quadrado:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{2n} \times 2} = \left(a^{\frac{m}{2n}}\right)^2 \geq 0$$

- Verificar que a definição é coerente: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n']{a^{m'}}$ se $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$.

Metas Curriculares

Definição de $a^{-q}, a \geq 0, q = \frac{m}{n} > 0$

2. Definir e efetuar operações com potências de expoente racional (1.1, 1.2, 1.3)

- Para conservar a propriedade das potências de expoente inteiro

$$a^{b+c} = a^b \times a^c$$

a definição que se impõe para expoentes negativos é

$$a^{-q} = \frac{1}{a^q} \quad \left(a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \right)$$

uma vez que:

$$a^q \times a^{-q} = a^{q-q} = a^0 = 1$$

Metas Curriculares

Propriedades algébricas das potências de expoente racional
2.Definir e efetuar operações com potências de expoente racional (1.4)

Verificação de algumas propriedades que se pretenderam preservar (condição suficiente).

Exemplo:

$$a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[2]{a} = \sqrt[3\times2]{a^2} \times \sqrt[2\times3]{a^3} \qquad \text{(descritor 2.1)}$$

$$= \sqrt[3\times2]{a^2 \times a^3} \qquad \text{(descritor 1.7)}$$

$$= a^{\frac{2+3}{2\times3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} \qquad \text{(definição 2.2).}$$

Nota: Trata-se de um «+Reconhecer»: estes exemplos poderão ser mais gerais ou menos gerais.

Metas Curriculares