PROGRAMA
e
Metas Curriculares
Matemática A

ALG10 – atividades práticas

GOVERNO DE PORTUGAL

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Metas Curriculares

Nos diapositivos que se seguem estão alguns exemplos de atividades relativas ao domínio da Álgebra do 10.º ano.

Como se verá, a maioria das atividades em nada altera o que tem vindo a ser usual no ensino destes conteúdos.

Os casos de atividades que agora se propõem e que não seriam habituais tanto nas salas de aula como nos manuais escolares distinguem-se pela cor verde e apresentam-se possíveis resoluções.

Metas Curriculares

1. Prove que, se $0 \leq a < b$ e $a^2 < b^2$, então $a^3 < b^3$.

2. Prove que, se $0 \leq a < b$ e $a^n < b^n$, então $a^{n+1} < b^{n+1}$.

3. Prove que, para $a > 0$ $e\ n, m, k \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\times k]{a^{m\times k}}$.

4. Sabendo que $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$ $(n\ ímpar)$, justifique que $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

5. Apresente os seguintes números na forma de fração com denominador natural:

   5.1. $\frac{1}{3} + \frac{3}{\sqrt{2}}$ 5.2. $\frac{5}{2-\sqrt{3}}$ 5.3. $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

Exemplo de resolução

1. Prove que, se $0 \leq a < b$ e $a^2 < b^2$, então $a^3 < b^3$.

Resolução:

Se $a < b$ então multiplicando por a^2 (positivo) tem-se

$$a^3 < a^2 b$$

e se $a^2 < b^2$ então multiplicando por b (positivo) tem-se

$$a^2 b < b^3,$$

ou seja,

$$a^3 < a^2 b < b^3,$$

donde se conclui que

$$a^3 < b^3.$$

Exemplo de resolução

1. Prove que, se $a^2 < b^2$ e a e b são reais positivos, então $a^3 < b^3$.
2. Prove que, se $0 \leq a < b$ e $a^n < b^n$, então $a^{n+1} < b^{n+1}$.

Resolução:

Para a resolução destes exercícios também se pode recorrer a uma propriedade em $\mathbb{R}^+$, que poderá ter um enunciado do tipo:
«Em $\mathbb{R}^+$, o produto dos menores é menor do que o produto dos maiores.»
Ou seja, se $a < b$ e $c < d$ então $ac < bd$.

Vejamos, se $a < b$ e $c > 0$ então $\boldsymbol{ac} < \boldsymbol{bc}$ e se $c < d$ e $b > 0$ então $\boldsymbol{bc} < \boldsymbol{bd}$.
Donde se tem que $ac < bd$.

Assim, para o exercício 1, se $a < b$ e $a^2 < b^2$, então $a^3 < b^3$.

Relativamente ao exercício 2, se $a < b$ e $a^n < b^n$, então $a^{n+1} < b^{n+1}$.

Exemplo de resolução

3. Prove que, para $a > 0$ e $n, m, k \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \times k]{a^{m \times k}}$.

Resolução:

Elevando ambos os membros da igualdade a $n \times k$ e aplicando as propriedades das potências de expoente natural, obtemos:

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n \times k} = \left(\sqrt[n \times k]{a^{m \times k}}\right)^{n \times k}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right)^k = a^{m \times k}$$

$$\Leftrightarrow \quad (a^m)^k = a^{m \times k}$$

$$\Leftrightarrow \quad a^{m \times k} = a^{m \times k}.$$

6. Recorrendo à definição de potência de expoente racional, justifique que $12^{\frac{3}{4}} \times 12^{\frac{2}{5}} = 12^{\frac{3}{4}+\frac{2}{5}}$.

7. Verifique que $\frac{0{,}2^2}{0{,}2^{0{,}3}} = 0{,}2^{1{,}7}$.

8. Simplifique as seguintes expressões:

8.1. $3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{375}$

8.2. $\sqrt[3]{2\sqrt{3}} \times \sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} - \left(\sqrt[3]{2} - 1\right)^2$

9. Justifique que $\sqrt{6} - 2 = \sqrt{10 - 4\sqrt{6}}$

10. Escreva $\sqrt{12 + 8\sqrt{2}}$ na forma $a + b\sqrt{c}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $c \in \mathbb{N}$

Metas Curriculares

Exemplo de resolução

6. Recorrendo à definição de potência de expoente racional, justifique que $12^{\frac{3}{4}} \times 12^{\frac{2}{5}} = 12^{\frac{3}{4}+\frac{2}{5}}$.

Resolução:

Aplicando a definição de potência de expoente racional e propriedades dos radicais, temos:

$$12^{\frac{3}{4}} \times 12^{\frac{2}{5}} = \sqrt[4]{12^3} \times \sqrt[5]{12^2} = \sqrt[4\times5]{12^{3\times5}} \times \sqrt[5\times4]{12^{2\times4}} = \sqrt[4\times5]{12^{3\times5+2\times4}} =$$

$$= 12^{\frac{3\times5+2\times4}{4\times5}} = 12^{\frac{3\times5}{4\times5}+\frac{2\times4}{4\times5}} = 12^{\frac{3}{4}+\frac{2}{5}}$$

11. Determine a medida do lado de um quadrado que está inscrito numa circunferência com 3 unidades de raio.

12. Determine a medida da área de uma circunferência circunscrita a um quadrado com x unidades de lado.

13. Fixada uma unidade de comprimento, considere um cubo de aresta a e de volume V.
    13.1. Exprima a em função de V.
    13.2. Exprima a medida da área da superfície do cubo na forma nV^q, onde n é um número natural e q um número racional.

14. Verifique que $x_1 = \sqrt[6]{5}$ e $x_2 = -\sqrt[6]{\frac{5}{4}}$ são soluções de $2x^6 - \sqrt{5}x^3 - 5 = 0$.

Metas Curriculares

15. Utilize o algoritmo da divisão inteira de polinómios para efetuar a divisão de $A(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 3$ por $B(x) = x^2 + 2$.

16. Aplique a regra de Ruffini para dividir $A(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ por $B(x) = x - 1$ e verifique que os polinómios obtidos são de facto o quociente e o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$.

17. Considere um polinómio de sétimo grau que admite apenas três raízes, x_1, x_2 e x_3. Sabe-se que x_1 tem multiplicidade 2 e x_2 tem multiplicidade 3. Qual é a multiplicidade de x_3?

18. Determine a e b de modo que o polinómio $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 1$ seja divisível por $x - 1$ e que o resto da divisão por $x + 1$ seja -10.

19. Substitua x^2 por y e resolva a equação «biquadrada» $x^4 - 14x^2 + 45 = 0$.