PROGRAMA
e
Metas Curriculares
Matemática A

EST10 e EST11 – Atividades práticas

António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira, Luísa Loura e Maria Clementina Timóteo

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Metas Curriculares

EST10 – Soma dos Quadrados dos desvios

1. Para uma certa amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_6)$, conhecem-se os desvios $d_i = x_i - \bar{x}$ para $i = 1,2,\dots,5$: $d_1 = 3$, $d_2 = -2$, $d_3 = 5$, $d_4 = -1$, $d_5 = 2$

   1.1. Determine o valor de d_6 .

   1.2. Calcule a soma dos quadrados dos desvios, SS_x .

   1.3. Sabendo que $x_1 = 10$, identifique a amostra $\underset{\sim}{x}$ e calcule o valor da respetiva média.

2. Justifique as sucessivas passagens na seguinte sequência de igualdades:

$$SS_x = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{x} + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2.$$

Metas Curriculares

EST10 – Soma dos Quadrados dos desvios

3. Registou-se a altura, em *cm*, de 5 raparigas e obteve-se a seguinte amostra: $\underset{\sim}{x} = (160, 172, 158, 165, 166)$. Seja $\underset{\sim}{y}$ a amostra das alturas das *5* raparigas, convertidas para metros. Calcule SS_x e SS_y e verifique que SS_x = 10000 SS_y.

4. *Dado um número real a , considere as amostras $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\underset{\sim}{y} = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$. Utilizando a fórmula de cálculo de SS_y e propriedades dos somatórios, mostre que $SS_y = a^2 SS_x$.

5. Uma certa balança tem um desvio positivo sistemático de $5g$. Pesaram-se nessa balança 4 laranjas, uma de cada vez e registou-se o seu peso em gramas. Obteve-se a amostra $\underset{\sim}{x} = (210, 182, 205, 198)$. Seja $\underset{\sim}{y}$ a amostra dos verdadeiros pesos de cada uma das 4 laranjas. Calcule SS_x e SS_y e mostre que SS_x = SS_y

Metas Curriculares

EST10 – média e variância

1. Contou-se o número de folhas em cada uma de 150 plantas do tabaco (Havano). Os resultados estão registados na Tabela a seguir apresentada.

Número de Folhas	Número de Plantas
17	3
18	22
19	44
20	42
21	22
22	10
23	6
24	1

Calcule a média, a soma dos quadrados dos desvios em relação à média, a variância e o desvio padrão do número de folhas destas plantas.

EST10 – média e variância

2. Num estudo sobre a resistência individual ao esforço físico, submeteram-se dois grupos de indivíduos a dois aparelhos diferentes (bicicleta-ergómetro e passadeira rolante), medindo-se o tempo (em minutos) até ao consumo máximo de oxigénio. Os resultados foram os seguintes:

   Bicicleta : amostra $\underset{\sim}{x} = (7.5,\ 8.7,\ 9.2,\ 9.8,\ 10.9,\ 11.1,\ 11.2,\ 12.8,\ 13.5)$

   Passadeira: amostra $\underset{\sim}{y} = (8.7,\ 13.2,\ 13.8,\ 14.7,\ 15.5,\ 16.2,\ 16.2,\ 17.8)$

   2.1 Calcule $\bar{x}$ e $\bar{y}$ e, com base nestes valores e na dimensão das duas amostras, calcule a média da amostra conjunta $\underset{\sim}{z}$.

   2.2 Calcule SS_x , SS_y e SS_z , indique os respetivos graus de liberdade e verifique que $SS_z = SS_x + SS_y + n_x(\bar{x} - \bar{z})^2 + n_y(\bar{y} - \bar{z})^2$.

   2.3 Para qual dos aparelhos foi observada uma maior variabilidade nos tempos até ao consumo máximo de oxigénio?

EST10 – média e variância

3. *Considere uma amostra $\underset{\sim}{x}$ ordenada, $\left(x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}\right)$, e admita que se substitui o máximo da amostra por um valor $y = x_{(n)} + h$ com $h > 0$. Determine o menor valor de h que faz com que a média da nova amostra fique superior a $x_{(n-1)}$. Considera que neste caso a média traduz bem a localização central da amostra? Justifique.

4. De acordo com dados históricos, a amostra das temperaturas mínimas diárias em Lisboa durante os meses de janeiro dos anos 2000 a 2010 tem uma média igual a 10º e um desvio padrão igual a 3º. Indique um limite superior para a percentagem de dias em que a temperatura mínima foi inferior a 0º.

EST10 – Percentis

1. Considere a amostra $\underset{\sim}{x} = (110, 150, 180, 200, 140, 135, 180, 120)$ dos pesos, em gramas, de 8 maçãs.

   1.1. Identifique x_4 e $x_{(4)}$.

   1.2. Qual das seguintes expressões repesenta o percentil 80.

   (i) $x_{(7)}$ (ii) $\frac{x_{(6)}+x_{(7)}}{2}$ (iii) $\frac{x_{(7)}+x_{(8)}}{2}$

   1.3. Calcule o percentil 25.

   1.4. A que percentil pertence a maçã com 140 gramas?

Metas Curriculares

EST10 – Percentis

2. Na seguinte tabela estão representados dados relativos ao peso (kg) de 35 crianças do sexo masculino com 20 meses de idade e acompanhadas num determinado centro de saúde.

8,3	15,7	15,1	8,9	14,4
11,9	13,0	11,4	9,1	15,7
10,2	12,6	10,1	12,9	15,3
14,7	9,5	11,6	12,1	9,6
9,2	9,9	14,5	10,3	12,7
15,1	10,4	16,2	11,6	8,1
12,1	10,9	14,8	9,9	15,0

2.1 Agrupe os dados em classes de amplitude 2.

2.2 Construa o respetivo histograma.

2.3 Utilizando o histograma, determine os percentis de ordem 10, 15, 50, 75 e 85.

2.4 Identifique a que percentil pertence o dado 11,4.

2.5 Quantas crianças deste estudo têm peso inferior ao percentil 75?

2.6 Qual a criança com peso mais elevado do conjunto das que têm os pesos 20% mais baixos?

Metas Curriculares

EST11 – Declive da reta de mínimos quadrados

1. Considere um referencial ortogonal do plano e os pontos $A(2,3), B(4,5)$ e $C(6,4)$ e as amostras $\underset{\sim}{x} = (2,4,6)$ e $\underset{\sim}{y} = (3,5,4)$.

   1.1. Determine as médias de $\underset{\sim}{x}$ e de $\underset{\sim}{y}$.

   1.2. Escreva a expressão $f(a) = \sum_{i=1}^{3}(y_i - ax_i - b)^2$, onde $b = \bar{y} - a\bar{x}$, sem utilizar o símbolo de somatório.

   1.3. Determine $f'(a)$.

   1.4. Determine o valor de a para o qual a função f atinge um mínimo absoluto e designe-o por m.

   1.5. Verifique que $m = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i y_i - 3\bar{x}\bar{y}}{SS_x}$.

   1.6. Represente os pontos A, B e C e esboce a reta de mínimos quadrados desta sequência de pontos.

2. ** Considere um número natural n, um referencial ortogonal do plano e os pontos $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$.

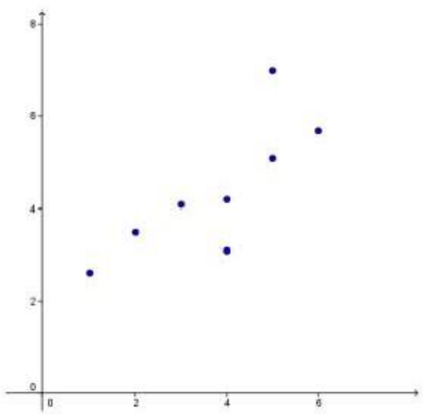
   2.1. Considere a função $f(a) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$, onde $b = \bar{y} - a\bar{x}$, e determine $f'(a)$.

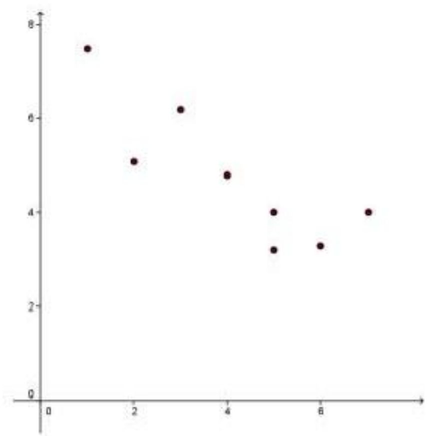
   2.2. Determine o valor de a para o qual a função f atinge um mínimo absoluto e verifique que é igual a $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{SS_x}$

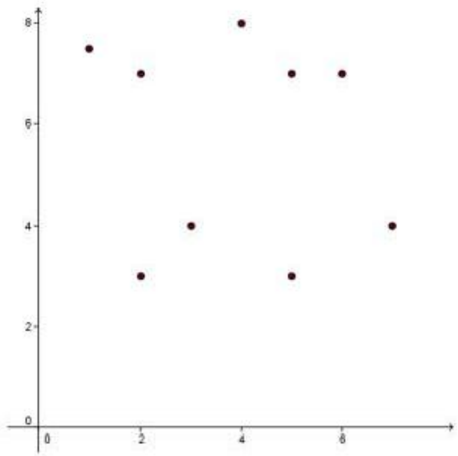
Metas Curriculares

EST11 – Coeficiente de Correlação

3. Nos gráficos estão representadas três nuvens de pontos. Faça corresponder a cada gráfico um dos coeficientes de correlação indicados $r_1 = -0{,}25$, $r_2 = 0{,}76$ e $r_3 = -0{,}84$ e justifique.







Metas Curriculares

EST11 – Dados Bivariados

4. O Sr. Silva aquece a sua casa com gás natural. A quantidade de gás utilizada depende da temperatura exterior e o Sr. Silva pretende fazer um estudo dos gastos durante os 9 meses em que se observam menores temperaturas, para poder estabelecer uma previsão para os gastos em função da temperatura exterior. Na tabela junta estão registadas as temperaturas médias observadas em cada um dos meses (em graus Celsius) e o respetivo volume de gás despendido pelo Sr. Silva (em metros cúbicos).

mês	out	nov	dez	jan	fev	mar	abr	mai	jun
temperatura	16,1	12,4	10,3	8,9	10,1	12,8	13,2	15,9	16,4
Volume de gás	0,01	0.10	0,24	0,26	0,19	0,09	0,05	0,03	0,01

4.1. Qual deve ser a variável explicativa e a variável resposta?

4.2. Utilize uma folha de cálculo ou uma calculadora gráfica para responder às seguintes questões:

4.2.1. Represente os dados num referencial ortogonal e diga se é razoável a existência de uma relação linear entre estas duas variáveis.

4.2.2. Determine a média dos valores de cada uma das amostras representadas. Apresente os resultados com arredondamento às décimas.

4.2.3. Determine o declive da reta dos mínimos quadrados que se ajusta a esta nuvem de pontos. Apresente o resultado com arredondamento às décimas.

4.2.4. Determine a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados.

4.2.5. Utilizando a equação obtida em 4.2.4. determine qual o consumo esperado para um mês em que a temperatura média seja de 7°C.