PROGRAMA
e
Metas Curriculares
Matemática A

GA – atividades práticas

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Metas Curriculares

Chama-se particular atenção para os níveis de desempenho de muitos dos descritores deste domínio. Consultar a página 27 do programa.

Os descritores especificados na tabela seguinte, que dizem respeito a propriedades que os alunos devem **reconhecer**, a **procedimentos que devem efetuar** ou a **problemas que devem resolver**, foram assinalados, nas Metas Curriculares, com o símbolo «+». Para estes descritores especificaram-se, no Caderno de Apoio, diferentes níveis de desempenho, materializados em exemplos de complexidade variada que poderão ser propostos aos alunos.

GA10 1.2, 1.4, 1.10, 1.11, 2.1, 3.5, 3.6, 4.1, 6.1, 6.2, 6.3, 7.5, 7.6, 10.1, 11.1, 11.2.

GA11 4.1, 4.2, 4.3, 4.4.

Por outro lado, alguns descritores (LTC10 2.9; ALG10 1.4; GA10 1.9, 8.3; TRI11 1.4; GA11 2.8, 2.9, 3.8; SUC11 6.8, 6.29, 6.30; FRVR11 7.8, 7.11; CC12 2.3; FRVR12 4.3, 4.4; FEL12 1.4, 2.1, 2.2, 2.3, 3.11, 4.1), relativos a propriedades que os alunos devem provar encontram-se igualmente assinalados, nas Metas Curriculares, com o símbolo «+». Entende-se, neste caso, que embora todos os alunos devam conhecer o resultado em causa e saber aplicá-lo, a elaboração da respetiva demonstração é facultativa, não sendo portanto exigível aos alunos.

Metas Curriculares

GA10 – 1. Definir analiticamente conjuntos elementares de pontos do plano

Neste domínio dá-se especial relevo ao estudo das equações cartesianas da circunferência e da elipse, cuja definição geométrica a partir da propriedade focal é apresentada.

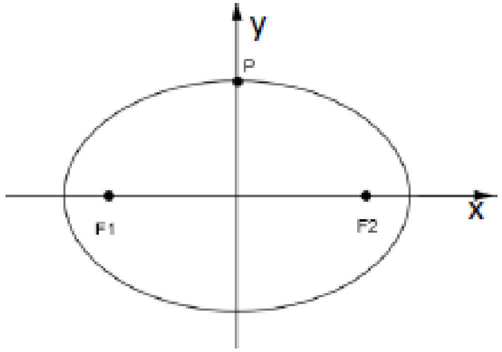
8. Designar, fixada uma unidade de comprimento e um plano, dados dois pontos A e B pertencentes a esse plano e um número $a > \frac{1}{2}\overline{AB}$, por «elipse» o conjunto de pontos P do plano tais que $d(P,A) + d(P,B) = 2a$, por «focos da elipse» os pontos A e B, por «centro da elipse» o ponto médio do segmento de reta $[AB]$, e por «eixo maior da elipse» o número $2a$ (e a por «semieixo maior da elipse»), interpretando-o geometricamente.

9. +Demonstrar, dada uma elipse de focos A e B e de eixo maior $2a$, que a mediatriz de $[AB]$ interseta a elipse em dois pontos C e D equidistantes do centro da elipse e que tomando $b = \frac{1}{2}\overline{CD}$ se tem $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, onde $c = \frac{1}{2}\overline{AB}$, designando $2b$ por «eixo menor da elipse» (e b por «semieixo menor da elipse»).

GA10 – 1. Definir analiticamente conjuntos elementares de pontos do plano

9. $\boxed{\text{+Demonstrar}}$, dada uma elipse de focos A e B e de eixo maior $2a$, que a mediatriz de $[AB]$ interseta a elipse em dois pontos C e D equidistantes do centro da elipse e que tomando $b = \frac{1}{2}\,\overline{CD}$ se tem $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, onde $c = \frac{1}{2}\overline{AB}$, designando $2b$ por «eixo menor da elipse» (e b por «semieixo menor da elipse»).

1. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado e dado $c > 0$, a elipse de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ e de eixo maior $2a$ $(a > c > 0)$. Seja P o ponto de interseção da elipse com o semi-eixo positivo das ordenadas.
   - 1.1. Justifique que $\overline{F_1P} = \overline{F_2P}$.
   - 1.2. Indique, justificando, a medida comum de $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$.
   - 1.3. Conclua que $\overline{OP} = \sqrt{a^2 - c^2}$.



10. +Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, dado um plano munido de um referencial ortonormado e $0 < b < a$ que a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é uma equação cartesiana da elipse de semieixo maior a e semieixo menor b que tem focos $A(-c, 0)$ e $B(c, 0)$, onde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, e designá-la por «equação (cartesiana) reduzida da elipse».

1. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado, os pontos $F_1(-4{,}0)$ e $F_2(4{,}0)$.
   1.1. Qual o valor que deve tomar o número real d por forma que um ponto $P(x, y)$ pertença à elipse de focos F_1 e F_2 e semieixo maior a, $(a > 4)$ quando e apenas quando $d = \sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$?
   1.2. *Considere que $a = 5$.
   Mostre que um ponto $P(x, y)$ pertence à elipse referida na alínea anterior quando e apenas quando $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.
   1.3. Tendo em conta a alínea 1.2, calcule as coordenadas dos pontos A_1 e A_2 em que a elipse interseta o eixo das abcissas, as coordenadas dos pontos B_1 e B_2 em que a elipse interseta o eixo das ordenadas e o eixo menor $b = \overline{B_1 B_2}$.
   1.4. Verifique, neste exemplo, que $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, onde $c = \frac{1}{2}\overline{F_1 F_2}$ é a semidistância focal.

10. +Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, dado um plano munido de um referencial ortonormado e $0 < b < a$ que a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é uma equação cartesiana da elipse de semieixo maior a e semieixo menor b que tem focos $A(-c, 0)$ e $B(c, 0)$, onde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, e designá-la por «equação (cartesiana) reduzida da elipse».

2. **Considere num plano munido de um referencial ortonormado, dois números reais a e c $(a > c > 0)$ e os pontos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

2.1. Justifique que a equação $\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$ é a equação da elipse de focos F_1 e F_2 e de semieixo maior a.

2.2. Mostre que a equação da alínea anterior é equivalente a $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$.

2.3. Escreva a equação da alínea anterior utilizando no primeiro membro apenas as constantes a e b, onde b representa o semieixo menor da elipse.

Metas Curriculares

Relativamente ao programa anterior,
a abordagem das equações das retas no espaço e da respetiva posição relativa com retas e com planos está simplificada e a interseção de três planos não faz parte do programa.

GA10

8. *Definir analiticamente conjuntos elementares de pontos do espaço*

1. Justificar, dado um referencial ortonormado do espaço e $a \in \mathbb{R}$, que $x = a$ é uma equação cartesiana do plano paralelo ao plano coordenado yOz que interseta o eixo das abcissas no ponto $A(a, 0,0)$ e determinar as equações dos planos paralelos aos planos coordenados $x0z$ e xOy.
2. Justificar, dado um referencial cartesiano do espaço e $a, b \in \mathbb{R}$ que o conjunto dos pontos $P(x, y, z)$ cujas coordenadas satisfazem o «sistema de equações cartesianas» $x = a \wedge y = b$ é a reta paralela ao eixo das cotas que interseta o plano coordenado xOy no ponto $A(a, b, 0)$ e determinar sistemas de equações cartesianas de retas paralelas ao eixo das abcissas e ao eixo das ordenadas.

4. Determinar, dado um referencial ortonormado do espaço e as coordenadas de dois pontos A e B do espaço, uma equação do plano mediador do segmento de reta $[AB]$ na forma $ax + by + cz + d = 0$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

GA10

10. Operar com coordenadas de vetores do espaço

3. Estender do plano ao espaço a definição e propriedades das equações vetoriais e sistemas de equações paramétricas de retas.

5. Conhecer propriedades dos vetores diretores de retas do plano

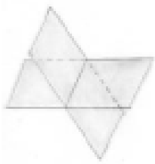
5. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado, que dada uma reta r de vetor diretor $\vec{v}$, os pontos de r são os pontos $P = A + t\vec{v},\ t \in \mathbb{R}$, onde A é um qualquer ponto de r, e designar esta equação por «equação vetorial da reta r».

6. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dados $a_1, a_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, que um ponto $P(x, y)$ pertence à reta r de vetor diretor $\vec{v}(v_1, v_2)$ passando pelo ponto $A(a_1, a_2)$ se e somente se existir $t \in \mathbb{R}$ tal que $x = a_1 + tv_1 \wedge y = a_2 + tv_2$, e designar este sistema por «sistema das equações paramétricas da reta r».

3º Ciclo
GM 9

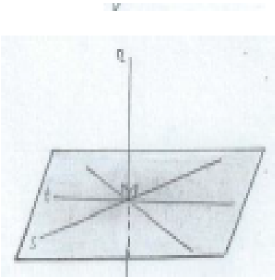
5. *Identificar planos paralelos, retas paralelas e retas paralelas a planos no espaço euclidiano*

   1. Saber que a interseção de dois planos não paralelos é uma reta e, nesse caso, designá-los por «planos concorrentes».



6. *Identificar planos perpendiculares e retas perpendiculares a planos no espaço euclidiano*

   3. Saber que se uma reta r é perpendicular a duas retas s e t num mesmo ponto P, é igualmente perpendicular a todas as retas complanares a s e t que passam por P e que qualquer reta perpendicular a r que passa por P está contida no plano determinado pelas retas s e t.



   4. Identificar uma reta como «perpendicular a um plano» num ponto P quando é perpendicular em P a um par de retas distintas desse plano e justificar que uma reta perpendicular a um plano num ponto P é perpendicular a todas as retas do plano que passam por P.

GA11 – 3. Determinar equações do plano no espaço

1. Identificar um vetor $\vec{v}$ como «normal a um plano α» se for nulo ou, não sendo nulo, se as retas de vetor diretor $\vec{v}$ forem perpendiculares a α .
2. Justificar, dados planos α e β e vetores $\vec{v}_\alpha$ e $\vec{v}_\beta$ não nulos, normais respetivamente a α e β, que α e β são (estritamente) paralelos ou coincidentes se e somente se $\vec{v}_\alpha$ e $\vec{v}_\beta$ forem colineares e α e β são perpendiculares se e somente se $\vec{v}_\alpha$ e $\vec{v}_\beta$ forem perpendiculares.
3. Justificar, dado um vetor não nulo $\vec{v}$ normal a um plano α e um ponto $P_0 \in \alpha$, que para todo o ponto P do plano, $P \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P}.\vec{v} = 0$.
4. Reconhecer, fixado um referencial ortonormado do espaço e dado um vetor não nulo $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ e um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, que existe um único plano α que passa por P_0 tal que $\vec{v}$ é normal a α e provar que $P(x, y, z) \in \alpha$ se e somente se $v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0$.

3.4. O reconhecimento deste último envolve revisões da Geometria Euclidiana no espaço estudada no Ensino Básico, mas uma vez estabelecido como resultado de Geometria Analítica, pode depois, evidentemente, ser utilizado para justificar consequências simples como as expressas em 3.5 e 3.6.

Metas Curriculares

GA11 – 3. Determinar equações do plano no espaço

5. Justificar que as equações da forma $ax + by + cz + d = 0$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \neq (0,0,0)$, são equações de planos e, reciprocamente, que qualquer plano admite uma equação cartesiana daquela forma.
6. Justificar, dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \neq (0,0,0)$, que o vetor de coordenadas (a, b, c) é normal ao plano de equação $ax + by + cz + d = 0$.

As justificações pedidas nos descritores 3.5 e 3.6 resultam simplesmente do resultado expresso no descritor 3.4. Com efeito, por um lado, dado um plano qualquer α, um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de α e um ponto P distinto de P_0 da reta normal a α passando por P_0, se (v_1, v_2, v_3) for o sistema de coordenadas do vetor $\overrightarrow{P_0P}$, por 3.4, uma equação cartesiana de α será:

$$v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0 \qquad v_1x + v_2y + v_3z - (v_1x_0 + v_2y_0 + v_3z_0) = 0$$

que, por sua vez, é evidentemente uma equação da forma $ax + by + cz + d = 0$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \neq (0,0,0)$, já que o vetor $\overrightarrow{P_0P}(v_1, v_2, v_3)$, por construção, não pode ser nulo.

Reciprocamente, dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, e supondo que, por exemplo, $a \neq 0$, é imediato concluir que a equação $ax + by + cz + d = 0$ é equivalente à equação:

$$a\left(x - \frac{-d}{a}\right) + by + cz = 0$$

o plano de vetor normal com coordenadas (a, b, c) que passa pelo ponto de coordenadas $\left(-\frac{d}{a}, 0,0\right)$.

que $ax + by + cz + d = 0$ é equação de um plano, o que completa a justificação requerida em 3.5, e que o vetor de coordenadas (a, b, c) é normal a esse plano, tal como se afirma no descritor 3.6.

Metas Curriculares

GA11 – 3. Determinar equações do plano no espaço

7. Identificar, dado um plano α, um vetor $\vec{v}$ como «paralelo a α» se $\vec{v}$ for nulo ou, não sendo nulo, se for vetor diretor de uma reta de α.
8. $\boxed{\text{+Provar,}}$ dado um plano α, um ponto $P_0 \in \alpha$ e dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não colineares paralelos a α, que para todo o ponto P do espaço, $P \in \alpha \Leftrightarrow \exists s, t \in \mathbb{R}, P = P_0 + s\vec{u} + t\vec{v}$ e designar esta equação por «equação vetorial do plano α».
9. Justificar, dado um plano α, um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ e dois vetores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ não colineares paralelos a α, que para todo o ponto $P(x, y, z)$ do espaço, $P \in \alpha \Leftrightarrow \exists s, t \in \mathbb{R}, x = x_0 + su_1 + tv_1 \wedge y = y_0 + su_2 + tv_2 \wedge z = z_0 + su_3 + tv_3$ e designar este sistema de equações por «sistema das equações paramétricas do plano α».

4. *Resolver problemas*

   3. +Resolver problemas relativos à determinação de equações de planos em situações diversas envolvendo a noção de perpendicularidade e de paralelismo.
   4. +Resolver problemas envolvendo equações de planos e de retas no espaço.

Exemplos do caderno de apoio.

2. Fixado um referencial ortonormado no espaço, considere os pontos $A(1,1,1)$, $B(2,-1,0)$ e $C(0,2,-3)$.
   2.1. Determine uma equação cartesiana do plano mediador de $[AB]$.
   2.2. Prove que os pontos A, B e C não são colineares e determine uma equação do plano δ por eles definido.

2. Fixado um referencial ortonormado no espaço, considere a reta s de equação vetorial $s: (x, y, z) = (0,5,0) + t(-2,2,1),\ t \in \mathbb{R}$.
   2.1. Averigue se os pontos $A(-3,1,4)$ e $B(2,3,-1)$ pertencem à reta s.
   2.2. Determine o ponto de interseção da reta s com o plano xOz.
   2.3. Indique uma equação vetorial da reta r, paralela a s e que passa pela origem do referencial.
   2.4. Indique uma equação vetorial da reta t perpendicular a s e que passa pelo ponto B.
   2.5. Justifique que a reta s interseta o eixo Oy e determine uma equação vetorial do plano definido pela reta s e o eixo Oy.
   2.6. Indique, justificando, qual a posição relativa da reta s e do plano π definido pela equação 4x- 4y- 2z – 5 = 0.