PROGRAMA
e
Metas Curriculares
Matemática A

Teorema dos valores intermédios
e uso da calculadora gráfica

António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira, Luísa Loura, Maria Clementina Timóteo

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Metas Curriculares

Teorema dos valores intermédios e uso da calculadora gráfica

O **Teorema dos Valores Intermédios** constitui uma propriedade central das funções contínuas. A respectiva prova, que necessita em particular do **princípio do supremo** ou de alguma propriedade equivalente, não é requerida neste Programa (embora seja apresentada, como informação complementar para o professor, no caderno de apoio). Assim, temos (FRVR12-2):

1. **Saber**, dada uma função real de variável real f contínua num intervalo $I = [a, b]$, $(a < b)$, que para qualquer valor $k \in \mathbb{R}$ do intervalo de extremos $f(a)$ e $f(b)$ existe $c \in I$ tal que $f(c) = k$ e designar esta propriedade por «**Teorema dos valores intermédios**» ou por «Teorema de **Bolzano-Cauchy**».

Trata-se no entanto de um **resultado essencial**, que os alunos devem conhecer e utilizar em diversas situações, nomeadamente na **resolução de problemas** e na justificação de determinadas utilizações da **calculadora gráfica** (FRVR12-5):

Metas Curriculares

Teorema dos valores intermédios e uso da calculadora gráfica

5. +Resolver problemas envolvendo a determinação de **valores aproximados de soluções de equações** da forma $f(x) = g(x)$ (f e g funções contínuas) utilizando uma calculadora gráfica, em casos em que é possível justificar, através da leitura das informações fornecidas pela calculadora, que determinados valores coincidem, até à casa decimal indicada, com soluções da referida equação, utilizando propriedades conhecidas das funções contínuas, como o **Teorema dos valores intermédios**, ou **outras propriedades analíticas** das funções f e g, previamente estabelecidas.

Uma vez que as calculadoras gráficas e outros recursos tecnológicos apenas permitem obter valores (em geral aproximados) de abcissas e ordenadas de um **número finito** de pontos do gráfico de uma dada função, o facto de se **observar** com um desses recursos uma **intersecção** de representações de gráficos de duas dadas funções f e g **não garante** só por si que os gráficos se intersectem de facto ou que as coordenadas desses pontos de intersecção, observados nas referidas representações gráficas, sejam **aproximações adequadas** das coordenadas de eventuais **reais pontos de intersecção** dos gráficos de f e g.

Metas Curriculares

Teorema dos valores intermédios e uso da calculadora gráfica

Inversamente, o facto de não se observar nenhuma intersecção numa dessas representações, **não garante** que os gráficos não se intersectem de facto no intervalo considerado.

Como exemplo da primeira situação basta pensar no gráfico da função e^x; como é sabido, **não intersecta** o eixo dos xx, mas é fácil escolher um intervalo de extremos negativos ainda passível de ser representado nas calculadoras gráficas e no qual o gráfico da função se confunde com um segmento do referido eixo dos xx, mesmo alterando arbitrariamente as escalas dos eixos, dadas as limitações acima referidas destes meios tecnológicos.

É fácil construir outros exemplos que ilustram talvez de modo mais sugestivo esta situação; podemos considerar, por exemplo $f(x) = 61 - (x - 31)^2$ e $g(x) = 2x + e^{-10x}$. Qualquer que seja a escala e a janela de visualização que se fixe, nas calculadoras gráficas usuais, contendo os pontos dos gráficos de abcissa igual a 30 detecta-se sempre uma intersecção dos gráficos, que de facto não existe, nos pontos com essa abcissa.

Teorema dos valores intermédios e uso da calculadora gráfica

Quanto às outras situações, é possível que se observem determinadas intersecções que de facto representam apenas **pontos suficientemente próximos** dos gráficos para que se confundam na referida representação (como nos casos atrás exemplificados) enquanto existem **intersecções reais** dos gráficos em regiões em que **nada se detecta** na representação gráfica porque, por exemplo, uma ou ambas as funções sofrem "**grandes oscilações**" na vizinhança de determinados pontos, mas que não são detectadas por ocorrerem em intervalos do domínio situados entre dois valores consecutivos das abcissas dos pontos dos gráficos efectivamente representados no ecrã.

Basta considerar, por exemplo, o gráfico da função $\sin\frac{1}{x}$ em qualquer intervalo $]0, a]$ $(a > 0)$; em qualquer escala, haverá sempre uma **infinidade de pontos de intersecção** com o eixo dos xx que **não são detectados** na representação obtida numa calculadora gráfica.

No entanto, **é possível** em muitos casos **garantir** *a priori* que o que se **observa** nas representações gráficas obtidas, por exemplo, nas **calculadoras**, corresponde, de facto a **aproximações**, até determinada ordem decimal, de abcissas e ordenadas de pontos de intersecção de gráficos de duas dadas funções f e g.

Metas Curriculares

Teorema dos valores intermédios e uso da calculadora gráfica

Um dos instrumentos teóricos que pode ser utilizado para esse efeito é o **Teorema dos valores intermédios** para funções contínuas; por exemplo, se f e g forem contínuas em determinado intervalo $[a, b]$ e $f(a) < g(a)$, mas $f(b) > g(b)$ então é seguro que os gráficos de f e g se **intersectam** em pelo menos um ponto do intervalo $]a, b[$.

Com efeito, nesse caso, a função $f - g$ é **negativa** em a e **positiva** em b, pelo que o referido Teorema garante que tem de se **anular** em algum ponto de $]a, b[$.

Nesse caso, a e b são, portanto, em particular, **aproximações**, respectivamente por **defeito** e por **excesso**, de qualquer solução da equação $f(x) = g(x)$ nesse intervalo, como é óbvio. Assim, se a e b forem suficientemente próximos, podemos obter uma **aproximação** de uma tal solução (que sabemos *a priori* existir), com determinado número de **casa decimais exactas**.

Metas Curriculares

Teorema dos valores intermédios e uso da calculadora gráfica

Deste modo, com a informação *a priori* de que as funções f e g são **contínuas**, podemos depois utilizar um recurso tecnológico para examinar os gráficos de f e g e, se detectarmos intervalos como o acima referido $[a, b]$, podemos concluir que determinados **pontos de intersecção** observados nas representações obtidas para os gráficos de f e g têm por abcissa **aproximações** de soluções da equação $f(x) = g(x)$ até uma determinada **casa decimal**.

Note-se que, apenas com as informações referidas, **não é ainda possível** concluir, em geral, que os valores das **ordenadas** dos pontos de intersecção observados nas representações gráficas sejam aproximações adequadas dos valores de f e g nos **reais pontos de intersecção** dos gráficos, já que os valores dessas funções poderiam "**oscilar fortemente**" na vizinhança de uma solução da referida equação $f(x) = g(x)$.

Considere-se por exemplo $f(x) = 0$ e $g(x) = 10 \sin \frac{1}{x}$ no intervalo:

$$[0{,}00003; 0{,}0004]$$

Uma vez que g é **positiva** no extremo esquerdo deste intervalo e **negativa** no extremo direito, sabemos que existe pelo menos um **zero** desta função no interior do referido intervalo (**abcissa** de um ponto de intersecção dos gráficos de f e g no referido intervalo).

Teorema dos valores intermédios e uso da calculadora gráfica

Examinando o gráfico da função neste intervalo e utilizando, por exemplo, a tecla "Trace" da calculadora gráfica detecta-se que g troca de sinal entre diversos pontos consecutivos do gráfico observado, como por exemplo entre $0{,}0000418085106$ e $0{,}0000457446808$.

Por outras palavras, conhecemos a **abcissa** de um ponto de intersecção dos gráficos de f e g "até às centésimas milésimas", que é $0{,}00004\ldots$ e a respectiva **ordenada** só pode ser 0, já que f é constantemente igual a 0.

No entanto:

$$g(0{,}0000457446808) = 9{,}531346309\ldots$$

que, como **aproximação da ordenada** do ponto de intersecção dos gráficos de f e g no intervalo considerado **não tem um único algarismo correcto**. Podemos tornar este valor tão distante do valor correcto quanto quisermos, bastando aumentar adequadamente o coeficiente de $\sin\frac{1}{x}$ na definição da função g, sem alterar os restantes dados do problema nem as conclusões essenciais.

Metas Curriculares

Teorema dos valores intermédios e uso da calculadora gráfica

De facto, podemos mesmo conhecer a **abcissa** de um ponto de intersecção dos gráficos de f e g "até às bilionésimas", como por exemplo $0{,}000031830\ldots$, já que o valor de g troca de sinal entre $0{,}00003183$ e $0{,}00003183099$, e, mais uma vez, a respectiva **ordenada** só pode ser 0.

No entanto:

$$g(0{,}00003183) = 8{,}281267505\ldots$$

É importante reter que o **valor** de uma função num ponto que é uma **aproximação** considerada "adequada" de um dado **ponto** do domínio (ou seja, aproxima esse ponto com erro inferior a um valor pré-fixado) **não é** necessariamente uma **aproximação adequada**, no mesmo sentido, do **valor da função** no ponto dado.

Um caso interessante em que, pelo contrário, se podem extrair informações adequadas acerca das ordenadas dos pontos de intersecção ocorre quando, além do que se supôs, f (respectivamente g) é **monótona** em $[a, b]$, já que, nesse caso, os valores de f (respectivamente g) em a e b enquadram eles próprios os valores da função numa solução da referida equação.

Metas Curriculares

Teorema dos valores intermédios e uso da calculadora gráfica

Além disso, se, por exemplo, $f - g$ for também **estritamente monótona** em $[a, b]$ (o que acontece, por exemplo, se uma das funções for crescente e a outra decrescente) essa monotonia permite garantir a **unicidade** do ponto de intersecção dos gráficos no referido intervalo e utilizar com confiança os resultados observados em intervalos contendo o ponto de intersecção, tão pequenos quanto a capacidade da calculadora o permitir, já que, nesses intervalos, teremos os mesmos resultados de **comparação** das duas funções nos respectivos extremos que supusemos para o intervalo inicial $[a, b]$ ($f - g$ terá sempre sinais contrários à direita e à esquerda do valor em que se anula).

Exemplo (caderno de apoio do 12º ano, FRVR12-5.5, 1º exemplo):

1. Considere as funções f e g definidas por $f(x) = \ln(2x^2 - 1)$ e $g(x) = 2 - e^{(x+1)^2}$. Pretende-se estudar as possíveis interseções dos gráficos de f e g no intervalo $]-2, -1[$, obtendo valores aproximados para as abcissas e ordenadas dos pontos de interseção. Para o efeito resolva as seguintes alíneas:
   1.1 Mostre que a função f é decrescente e a função g crescente no intervalo $]-2, -1[$.
   1.2 *Utilizando a alínea anterior, prove que os gráficos das funções se intersetam num único ponto de abcissa no intervalo $]-2, -1[$ e, utilizando a calculadora gráfica, determine um valor aproximado às centésimas para as coordenadas desse ponto, explicando por que razão se pode garantir a validade do resultado obtido.

Teorema dos valores intermédios e uso da calculadora gráfica

Se observarmos numa calculadora gráfica os gráficos das restrições de f e g ao intervalo $]-2,-1[$, parece que, de facto, f é **estritamente decrescente** e g **estritamente crescente** neste intervalo. Verificadas **analiticamente** estas conjecturas (o que pode ser levado a cabo **sem ser necessário calcular derivadas**, utilizando já o que se conhece da monotonia das funções elementares envolvidas nas expressões analíticas de f e g), ficamos com a garantia de que, de facto, assim é, pelo que, atendendo também aos valores de f e g nos extremos deste intervalo, sabemos que existe **um e somente um ponto de intersecção** dos gráficos destas restrições.

Estas monotonias garantem agora que a **abcissa** do **único** ponto de intersecção dos gráficos ficará situada em qualquer intervalo contido em $]-2,-1[$ em cujos extremos $f-g$ tenha sinais opostos, o que se pode facilmente **observar** nos gráficos apresentados no ecrã da calculadora gráfica, com a precisão requerida; do mesmo modo, a monotonia de f e de g garante que os valores de f ou de g nesses extremos enquadram a **ordenada** do ponto de intersecção.

Assim, ajustando a janela de visualização após a primeira observação no intervalo $]-2,-1[$ e utilizando, por exemplo o “Trace” no gráfico de g, podemos verificar que o ponto de intersecção tem abcissa situada entre $-1{,}3167\ldots$ e $-1{,}3108\ldots.$ e ordenada situada entre $0{,}8944\ldots$ e $0{,}8985\ldots$; portanto, até às centésimas, teremos como coordenadas do ponto de intersecção,$(-1{,}31\ldots;0{,}89\ldots)$.