PROGRAMA
e
Metas Curriculares
Matemática A

Derivadas e Aplicações (FRVR11)

António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira, Luísa Loura, Maria Clementina Timóteo

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Metas Curriculares

Regras de derivação

Os teoremas de derivação da soma, produto, quociente e composição de funções diferenciáveis são abordados no 11.º ano de escolaridade, no domínio FRVR11 (7.5, 7.6, 7.7, 7.8).

Pretende-se que os alunos saibam deduzir a fórmula de derivação da **soma** de duas funções diferenciáveis, e pelo menos, uma de entre as fórmulas para o **produto** e para o **quociente**.
Relativamente à **composição** de funções, trata-se de um objetivo facultativo:

Metas Curriculares

5. Provar, dado um conjunto $D \subset \mathbb{R}$ e funções reais de variável real $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$ diferenciáveis num ponto a de D e um número real k, que as funções $f + g$ e kf são diferenciáveis em a e que se tem $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ e $(kf)'(a) = kf'(a)$.
6. #Provar, dado um conjunto $D \subset \mathbb{R}$ e funções reais de variável real $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$ diferenciáveis num ponto a de D, que a função fg é diferenciável em a e que $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
7. #Provar, dado um conjunto $D \subset \mathbb{R}$ e funções reais de variável real $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$ diferenciáveis num ponto a de D, com $g(a) \neq 0$, que a função $\frac{f}{g}$ é diferenciável em a e que $\left(\frac{f}{g}\right)' (a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.
8. +Provar, dada uma função $f: D_f \to \mathbb{R}$ diferenciável num ponto $a \in D_f$ e uma função real de variável real $g: D_g \to \mathbb{R}$ tal que $D_f' \subset D_g$, diferenciável em $f(a)$, que a função composta gof é diferenciável em a e que $(gof)'(a) = f'(a) \times g'\big(f(a)\big)$.

Cálculo das derivadas das funções de referência

FRVR11

6.Operar com derivadas

As Metas Curriculares estabelecem um certo conjunto de funções, ditas «de referência». Os alunos devem saber deduzir uma expressão para as respetivas derivadas, memorizando o resultado final:

9. Calcular, utilizando a definição, uma expressão analítica para os valores das funções derivadas das «funções de referência (para o cálculo de derivadas)» definidas por $x, x^2, x^3, \frac{1}{x}$ e $\sqrt{x}$, ou constantes, e saber de memória estes resultados.
10. Provar, dado um número natural n (respetivamente dado um número inteiro n negativo), que uma função real de variável real f de domínio $\mathbb{R}$ (respetivamente de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$) definida por $f(x) = x^n$ é diferenciável e que, para todo o $x \in D_f$, $f'(x) = nx^{n-1}$, considerando também estas funções como «funções de referência (para o cálculo de derivadas)» e saber de memória este resultado.
11. +Provar, dado um número natural par n (respetivamente dado um número natural ímpar $n > 1$), que uma função real de variável real f de domínio $\mathbb{R}^+$ (respetivamente de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$) definida por $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é diferenciável e que, para todo o $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

Metas Curriculares

A estas funções vêm juntar-se, no 12.º ano, as derivadas das funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

Note-se que o cálculo da derivada da função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^n$ não obriga ao conhecimento da fórmula conhecida por «binómio de Newton» (tratada no 12.º ano), podendo os alunos simplesmente reconhecer, a partir da propriedade de distributividade, que tem lugar uma igualdade do tipo

$$(x+h)^n = x^n + nhx^{n-1} + h^2 P(x,h),$$

onde $\mathrm{P}(x,h)$ designa um polinómio de variáveis x e h, obtendo-se então, para todo o x,

$$f'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \left(nx^{n-1} + hP(x,h)\right) = nx^{n-1} + 0P(x,0) = nx^{n-1}.$$

Metas Curriculares

Relativamente ao cálculo da derivada da função raíz n-ésima, em $\mathbb{R}$ se n for impar e em $\mathbb{R}_+$ se n for par, poderá observar-se que, para A e B reais,

$$A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1}).$$

Temos assim, tomando $A = \sqrt[n]{x+h}$ e $B = \sqrt[n]{x}$:

$$\frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{h} = \frac{1}{h}\,\frac{x+h-x}{A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1}}$$
$$= \frac{1}{A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1}},$$

cujo limite quando h tende para 0 é obviamente igual a $\frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$.

Note-se que esta demonstração, estando assinalada com o símbolo «+» nas Metas Curriculares, corresponde a um nível de desempenho mais elevado e facultativo.

Metas Curriculares

Fica assim demontrado que a “fórmula” $(x^a)' = ax^{a-1}$, válida para $a = n \in \mathbb{N}$, permanece válida para valores de a da forma $a = \frac{1}{n}$.

A expressão derivada da função inversa $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, que facilmente se calcula,

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} -\frac{1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2},$$

combinada com o teorema de derivação da função composta, permite estender o resultado ao caso $a \in \mathbb{Q}$.

A relação entre o **sinal da derivada** de uma função num dado intervalo, e a respetiva **monotonia**, é abordada no domínio FRVR11, no objetivo geral

8. Aplicar a noção de derivada ao estudo de funções.

- É trivial, a partir da definição de derivada, observar que se uma função f diferenciável é crescente/decrescente num dado intervalo I, então f' é não negativa/não positiva nesse mesmo intervalo (ver descritor 7.3).

- A implicação recíproca, mais delicada, pode ser justificada do Teorema de Lagrange, cuja validade se admite, ainda que se solicite ao aluno uma interpretação geométrica conveniente desse resultado:

2. Saber, dada uma função real de variável real f contínua em $[a,b]$, $(a<b)$, e diferenciável em $]a,b[$ que existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, interpretar geometricamente este resultado e designá-lo por «Teorema de Lagrange».

Metas Curriculares

O Programa prevê aplicações da Matemática ao mundo real **devidamente fundamentadas**. É o caso da aplicação do conceito de derivada ao estudo do movimento de um ponto material:

FRVR11

- Taxa média de variação de uma função; interpretação geométrica;
- Derivada de uma função num ponto; interpretação geométrica;
- Aplicação da noção de derivada à cinemática do ponto: funções posição, velocidade média e velocidade instantânea de um ponto material que se desloca numa reta; unidades de medida de velocidade;

FRVR12

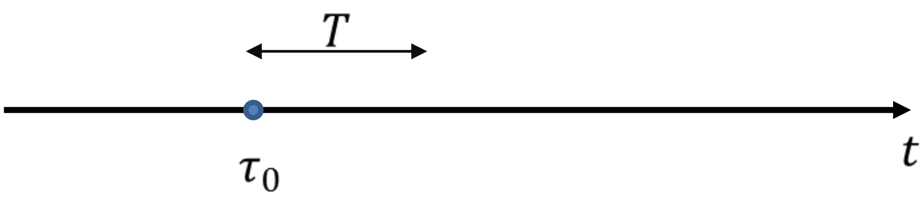
- Interpretação cinemática da derivada de segunda ordem de uma função posição: aceleração média e aceleração; unidades de medida de aceleração;

Metas Curriculares

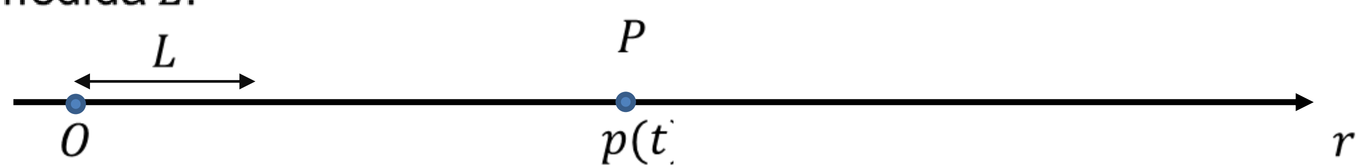
FRVR11 *6. Aplicar a noção de derivada à cinemática do ponto*

6.1 e 6.2

Eixo temporal, de origem τ_0 e unidade de medida T;



Ponto material P que se desloca numa reta numérica r de unidade de medida L.



«Função posição» $\mathrm{p}\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

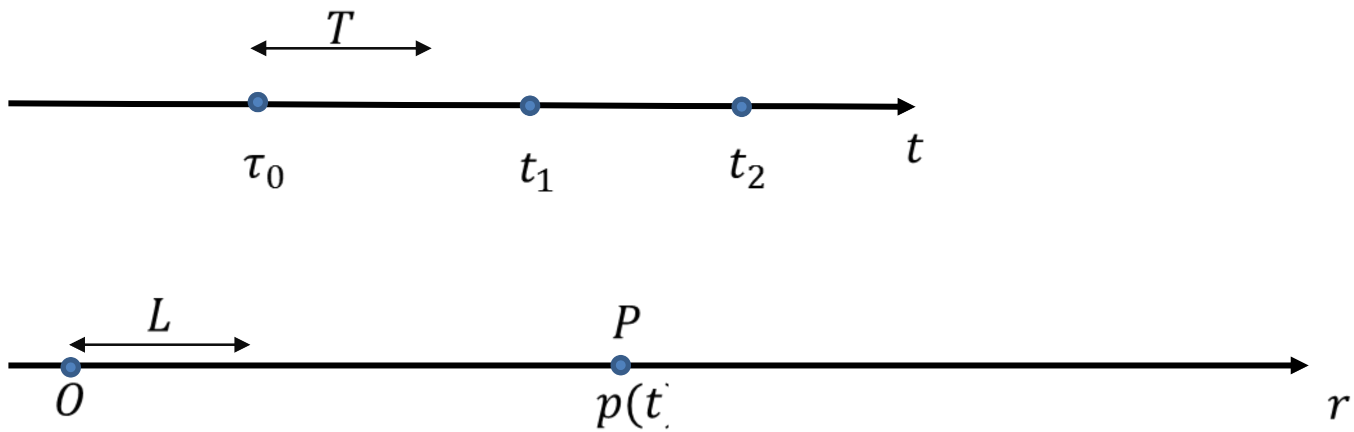
$$t \longrightarrow p(t),$$

abcissa do ponto P $|t|$ unidades de tempo T depois (se $t > 0$) /antes (se $t < 0$) de τ_0.

Metas Curriculares

FRVR11 *6. Aplicar a noção de derivada à cinemática do ponto*

6.1 e 6.2



Dados dois instantes t_1 e t_2 $(t_1 < t_2)$ define-se a

- «velocidade média de P no intervalo $[t_1, t_2]$ na unidade L/T» por

$$\frac{p(t_2) - p(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Define-se também a «velocidade instantânea de P no instante t na unidade L/T» por

$$p'(t)$$

(se esta derivada existir).

Metas Curriculares

Os professores poderão notar a seguinte ambiguidade terminológica:

Dada uma grandeza $\rho(t)$ indexada por um parâmetro contínuo $t \in [t\_1, t\_2\ ]$,

a definição de «ρ médio no intervalo $[t_1, t_2]$» mais natural seria

$$\rho_{médio} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \rho(t) dt \,.$$

Trata-se de uma passagem ao limite do caso em que a grandeza é indexada por um parâmetro que toma um número finito N de valores. Nessa situação, note-se que é usual confudir-se a quantidade «ρ médio» com a quantidade «média dos ρ», dada por

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \rho(t_i) \,.$$

Por exemplo, «a média das alturas dos portugueses» ou «a altura média dos portugueses» designam na linguagem corrente a mesma quantidade.

Metas Curriculares

Na presente situação, e tal como é tradicional, começa-se por definir a noção de «velocidade média» antes de se definir o que significa «velocidade».

Note-se no entanto que um cálculo simples permite verificar que a velocidade média definida nas Metas Curriculares corresponde de facto ao valor médio da grandeza velocidade, no sentido referido:

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} p'(t)dt = \frac{p(t_2) - p(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Uma observação similar pode ser feita a propósito da noção de «aceleração média», introduzida no 12.º ano.

Metas Curriculares

FRVR11 *9. Resolver Problemas*

2. +Resolver problemas envolvendo funções posição, velocidades médias e velocidades instantâneas e mudanças de unidades de velocidade.

Exemplo (Caderno de Apoio)

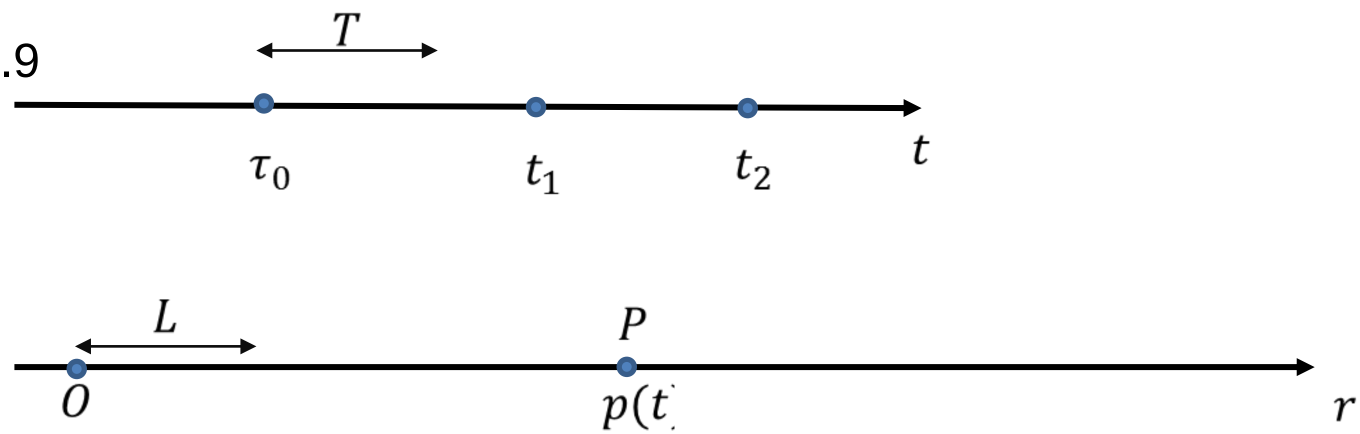
2. Um projétil foi lançado verticalmente e a respetiva altura a (medida em metros da altura do projétil acima do solo) é dada, em função de t, (medida em segundos do tempo decorrido após o instante inicial $t = 0$) por $a(t) = -4{,}9t^2 + 39{,}2t + 1{,}6$.
   2.1. Qual a altura do projétil no instante em que foi lançado?
   2.2. Determine a velocidade média nos dois primeiros segundos.
   2.3. Determine a velocidade no instante $t = 3$.
   2.4. Qual a altura máxima atingida pelo projétil?

Metas Curriculares

FRVR12

4. Relacionar a derivada de segunda ordem (com o sentido da concavidade do gráfico de uma função e) com a noção de aceleração

4.9



Define-se (quando todas as quantidades mencionadas existirem):

- a «aceleração média de P no intervalo na unidade $[t_1, t_2]$ na unidade $\frac{L}{T^2}$» como a taxa de variação média de p' nesse intervalo:

$$\frac{p'(t_2) - p'(t_1)}{t_2 - t_1}$$

- a «aceleração instantânea de P no instante t na unidade $\frac{L}{T^2}$ por $p''(t)$.

FRVR12 *9. Resolver Problemas*

4. +Resolver problemas envolvendo funções posição, velocidades médias e velocidades instantâneas, acelerações médias e acelerações instantâneas e mudanças de unidades de aceleração.

Exemplos (Caderno de Apoio)

4. *Uma partícula α é introduzida num acelerador linear de partículas e submetida desde o instante inicial a uma aceleração constante de tal forma que a respetiva velocidade sofre um acréscimo de 1000m/s para 5000m/s em $0{,}001$ segundos, instante em que choca com a parede do acelerador. Determine:
   - 4.1 a aceleração da partícula.
   - 4.2 o espaço percorrido pela partícula no referido período de $0{,}001$ segundos.