

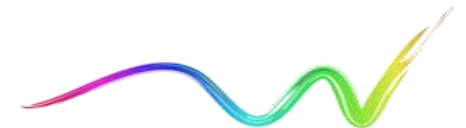
# PROGRAMA e Metas Curriculares Matemática A

**FEL – atividades práticas**



GOVERNO DE  
**PORTUGAL**

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
E CIÊNCIA



Metas Curriculares

**Juros compostos e número de Neper***1. Operar com juros compostos e definir o número de Neper*

1. Designar, dado um número real  $r$ , uma unidade de medida temporal  $T$  e  $n \in \mathbb{N}$ , por «aplicar juros compostos à taxa de  $r\%$  a  $T$  durante  $n$  períodos de tempo  $T$ » a um dado capital disponível em certo instante inicial  $t_0$ , a operação que consiste em calcular um juro igual a  $r\%$  do capital disponível no início de cada período de tempo com duração igual a  $T$  e adicioná-lo ao capital findo esse período, começando este processo a partir do instante  $t_0$ , e levando-o a cabo  $n$  vezes seguidas.
2. Provar, dado um capital inicial  $C_0$ , que, aplicando-se juros compostos à taxa de  $r\%$  a  $T$ , o capital disponível ao fim de  $n \in \mathbb{N}$  períodos de tempo  $T$  é igual a  $C_n = C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$ .

2. \*O senhor Esteves aderiu a um plano de poupança a uma taxa de juro semestral de 2,5%, em regime de juro composto. Para tal efetuou um depósito de 2000€ em janeiro de 2000 e comprometeu-se a efetuar reforços de 1000€ cada seis meses. Sabendo que este plano de poupança termina em janeiro de 2020, qual o capital acumulado ao fim deste período de tempo?

**Limites notáveis***4. Conhecer alguns limites notáveis envolvendo funções exponenciais e logarítmicas*

1. +Provar que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty$ .
2. Justificar que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ .
3. +Calcular limites de funções e sucessões envolvendo logaritmos e exponenciais.

2. Calcule, em  $a$ , o limite das funções definidas pelas seguintes expressões, utilizando mudança de variável sempre que lhe parecer conveniente.

$$2.4. f(x) = \frac{e^{4x}-1}{x^2} \ln(2x), a = 0 \text{ e } a = +\infty;$$

$$2.8. f(x) = x^x, a = 0;$$

$$2.9. f(x) = x^{\frac{1}{x}}, a = 0;$$

$$2.11. *f(x) = \sin x^{\tan x}, a = 0;$$

5. Dadas sucessões de termos gerais respetivamente  $x_n$  e  $y_n$  tais que  $x_n$  tem os termos todos positivos,  $x_n \rightarrow a$  e  $y_n \rightarrow b$  ( $a > 0$  e  $b \in \mathbb{R}$ ) mostre que:  $x_n^{y_n} \rightarrow a^b$   
[Sugestão: comece por justificar que  $x_n^{y_n} = e^{y_n \ln x_n}$ ]

De forma análoga ao caso dos osciladores harmónicos, também o estudo de certas equações diferenciais lineares de primeira ordem permite justificar a utilização de funções exponenciais na modelação de inúmeros fenómenos, como a evolução de algumas populações, da temperatura de determinados sistemas ou o decaimento de uma substância radioativa.

### Modelos exponenciais

#### 5. *Estudar modelos de crescimento e decrescimento exponencial*

1. Saber que a evolução de determinadas grandezas, como a massa de uma substância radioativa, a temperatura de alguns sistemas ou o número de indivíduos de certas populações, pode ser modelada por uma «equação diferencial de 1.ª ordem» da forma  $f' = kf$ , que traduz o facto de, em cada instante, a taxa de variação ser aproximadamente proporcional à quantidade de grandeza presente.
2. Justificar, dado um número real  $k$ , que as funções  $f(x) = ce^{kx}$ , onde  $c$  é uma constante real, são soluções em  $\mathbb{R}$  da equação diferencial  $f' = kf$  e que todas as soluções desta equação são dessa forma, mostrando que dada uma qualquer solução  $f$ , tem derivada nula a função  $e^{-kx}f(x)$ .

4. +Resolver problemas envolvendo a modelação de sistemas por equações da forma  $y' = ky, k \in \mathbb{R}$ .

\*Um copo com água acabada de ferver (portanto à temperatura de  $100^{\circ}\text{C}$ ) é deixado arrefecer numa sala à temperatura ambiente de  $25^{\circ}\text{C}$ . Sabendo-se que ao fim de dois minutos a temperatura da água atinge  $80^{\circ}\text{C}$ , ao fim de quanto tempo atingirá a temperatura de  $50^{\circ}\text{C}$ ?

Finalmente, consideremos a *lei de Newton do arrefecimento/aquecimento* que estabelece que a taxa de variação instantânea da temperatura de um corpo é diretamente proporcional à diferença entre a temperatura ambiente e a temperatura do corpo. Representando por  $T(t)$  a temperatura do corpo no instante  $t$  e por  $T_a$  a temperatura ambiente, suposta constante, teremos então, para certa constante  $k > 0$ :

$$T'(t) = k(T_a - T(t));$$

4. +Resolver problemas envolvendo a modelação de sistemas por equações da forma  $y' = ky, k \in \mathbb{R}$ .

Uma massa de  $m_0 = 50$  gramas de Rádio 226 existente numa amostra no instante  $t_0 = 0$  desintegra-se ao longo do tempo. Em todo o instante  $t$ , a taxa de variação instantânea da massa,  $m'(t)$ , é proporcional à massa  $m(t)$  existente nesse instante. Sabendo que ao fim de 1 ano, a massa de Rádio é igual a  $m(1) = 49,975$  gramas, calcule o tempo necessário à desintegração de metade da massa inicial. Apresente o resultado em anos, arredondado a unidade.

$$m(t) = m_0 e^{-k(t-t_0)},$$

onde  $m_0$  é a massa da substância radioativa em determinado instante  $t_0$