PROGRAMA
e
Metas Curriculares
Matemática A

FEL – atividades práticas

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Metas Curriculares

Juros compostos e número de Neper

1. Operar com juros compostos e definir o número de Neper

1. Designar, dado um número real r , uma unidade de medida temporal Te $n \in \mathbb{N}$, por «aplicar juros compostos à taxa de r% a T durante n períodos de tempo T» a um dado capital disponível em certo instante inicial t_0, a operação que consiste em calcular um juro igual a r% do capital disponível no início de cada período de tempo com duração igual a T e adicioná-lo ao capital findo esse período, começando este processo a partir do instante t_0, e levando-o a cabo n vezes seguidas.
2. Provar, dado um capital inicial C_0, que, aplicando-se juros compostos à taxa de r% a T, o capital disponível ao fim de $n \in \mathbb{N}$ periodos de tempo T é igual a $C_n = C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$.

2. *O senhor Esteves aderiu a um plano de poupança a uma taxa de juro semestral de 2,5%, em regime de juro composto. Para tal efetuou um depósito de 2000€ em janeiro de 2000 e comprometeu-se a efetuar reforços de 1000€ cada seis meses. Sabendo que este plano de poupança termina em janeiro de 2020, qual o capital acumulado ao fim deste período de tempo?

Limites notáveis

4. Conhecer alguns limites notáveis envolvendo funções exponenciais e logarítmicas

1. +Provar que $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty$.
2. Justificar que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.
3. +Calcular limites de funções e sucessões envolvendo logaritmos e exponenciais.

2. Calcule, em a, o limite das funções definidas pelas seguintes expressões, utilizando mudança de variável sempre que lhe parecer conveniente.

2.4. $f(x) = \frac{e^{4x}-1}{x^2} \ln(2x)$, $a = 0$ e $a = +\infty$;

2.8. $f(x) = x^x$, $a = 0$;

2.9. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, $a = 0$;

2.11. *$f(x) = \sin x^{\tan x}$, $a = 0$;

5. Dadas sucessões de termos gerais respetivamente x_n e y_n tais que x_n tem os termos todos positivos, $x_n \to a$ e $y_n \to b$ ($a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$) mostre que: ${x_n}^{y_n} \to a^b$
[Sugestão: comece por justificar que ${x_n}^{y_n} = e^{y_n \ln x_n}$]

Metas Curriculares

De forma análoga ao caso dos osciladores harmónicos, também o estudo de certas equações diferenciais lineares de primeira ordem permite justificar a utilização de funções exponenciais na modelação de inúmeros fenómenos, como a evolução de algumas populações, da temperatura de determinados sistemas ou o decaimento de uma substância radioativa.

Modelos exponenciais

5. *Estudar modelos de crescimento e decrescimento exponencial*

   1. Saber que a evolução de determinadas grandezas, como a massa de uma substância radioativa, a temperatura de alguns sistemas ou o número de indivíduos de certas populações, pode ser modelada por uma «equação diferencial de 1.ª ordem» da forma $f' = kf$, que traduz o facto de, em cada instante, a taxa de variação ser aproximadamente proporcional à quantidade de grandeza presente.
   2. Justificar, dado um número real k, que as funções $f(x) = ce^{kx}$, onde c é uma constante real, são soluções em $\mathbb{R}$ da equação diferencial $f' = kf$ e que todas as soluções desta equação são dessa forma, mostrando que dada uma qualquer solução f, tem derivada nula a função $e^{-kx}f(x)$.

4. +Resolver problemas envolvendo a modelação de sistemas por equações da forma $y' = ky, k \in \mathbb{R}$.

*Um copo com água acabada de ferver (portanto à temperatura de 100°C) é deixado arrefecer numa sala à temperatura ambiente de 25°C. Sabendo-se que ao fim de dois minutos a temperatura da água atinge 80°C, ao fim de quanto tempo atingirá a temperatura de 50°C?

Finalmente, consideremos a *lei de Newton do arrefecimento/aquecimento* que estabelece que a taxa de variação instantânea da temperatura de um corpo é diretamente proporcional à diferença entre a temperatura ambiente e a temperatura do corpo. Representando por $T(t)$ a temperatura do corpo no instante t e por T_a a temperatura ambiente, suposta constante, teremos então, para certa constante $k > 0$:

$$T'(t) = k\left(T_a - T(t)\right);$$

4. +Resolver problemas envolvendo a modelação de sistemas por equações da forma $y' = ky, k \in \mathbb{R}$.

Uma massa de $m_0 = 50$ gramas de Rádio 226 existente numa amostra no instante $t_0 = 0$ desintegra-se ao longo do tempo. Em todo o instante t, a taxa de variação instantânea da massa, $m'(t)$, é proporcional à massa $m(t)$ existente nesse instante. Sabendo que ao fim de 1 ano, a massa de Rádio é igual a $m(1) = 49{,}975$ gramas, calcule o tempo necessário à desintegração de metade da massa inicial. Apresente o resultado em anos, arredondado a unidade.

$$m(t) = m_0 e^{-k(t-t_0)},$$

onde m_0 é a massa da substância radioativa em determinado instante t_0