PROGRAMA
e
Metas Curriculares
Matemática A

FRVR e TRI – atividades práticas

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA
Metas Curriculares

8. +Reconhecer, dada uma função real de variável real bijetiva f e um plano munido de um referencial monométrico, que os gráficos cartesianos das funções f e f^{-1} são a imagem um do outro pela reflexão axial de eixo de equação $y = x$.

1. Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 5$.

1.1. Justifique que f é uma função bijetiva e determine uma expressão analítica para $f^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Represente, num plano munido de um referencial ortonormado, os gráficos das funções f e f^{-1}.

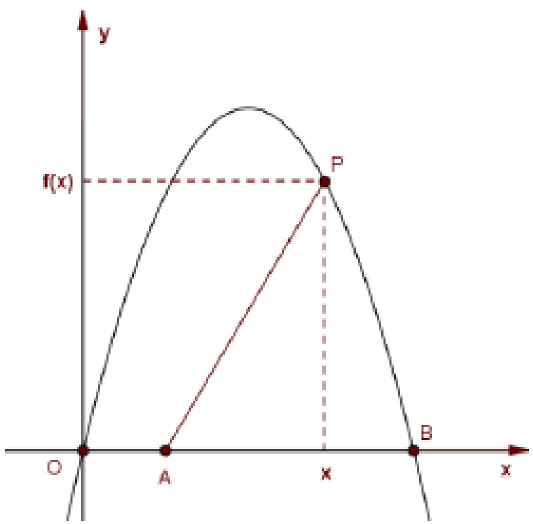
1.2. Determine a imagem dos pontos A e B do gráfico de f de abcissas respetivamente iguais a -3 e 1 pela reflexão axial de eixo de equação $y = x$ e verifique que se trata de pontos do gráfico de f^{-1}.

1.3. *Mostre que a imagem do gráfico de f pela reflexão de eixo de equação $y = x$ é o gráfico de f^{-1}.

3.** Fixado um plano munido de um referencial cartesiano, mostre que a imagem de um ponto $A(a, b)$ pela reflexão de eixo de equação $y = x$ é o ponto $B(b, a)$ e conclua, dada uma função bijetiva f, que os gráficos de f e de f^{-1} são simétricos relativamente a esse eixo.

Resolva a atividade seguinte identificando os descritores envolvidos na respetiva resolução.

11. Na figura junta está representada, num plano munido de um referencial ortonormado, parte do gráfico da função f definida por $f(x) = -x^2 + 4x$ e o ponto A de coordenadas $(1,0)$.
Considere a função g que associa a cada x a distância entre A e o ponto do gráfico de f de abcissa x.

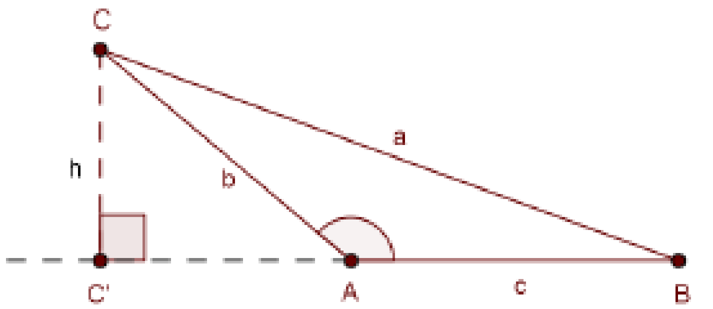


 11.1. Prove que para todo x,
 $g(x) = \sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1}$.
 11.2. Sabendo que existem exatamente dois pontos do gráfico de f que distam uma unidade de A, indique o valor exato da abcissa de um deles e utilize a calculadora gráfica para obter um valor aproximado às décimas da abcissa do outro, explicando o procedimento utilizado.
 11.3. Existe um ponto em que os gráficos de f e de g se intersetam. Determine-o por métodos analíticos e interprete geometricamente o resultado obtido.

3. Estender a definição do seno aos ângulos obtusos tomando, para um ângulo α obtuso, $\sin\ \alpha = \sin\ \alpha'$, onde α' é suplementar a α, reconhecendo que esta definição é a única possível por forma a estender a Lei dos senos a triângulos obtusângulos.

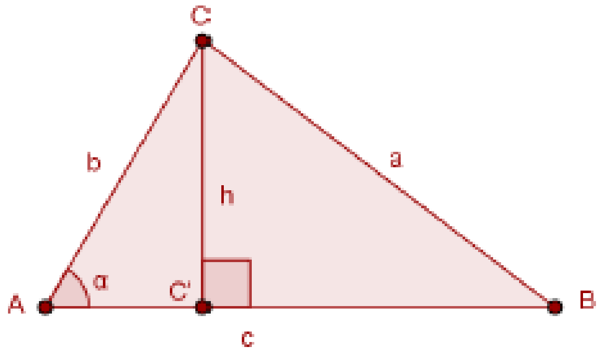
1. Considere um triângulo $[ABC]$ tal que o ângulo de vértice em A é obtuso. Designe $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ respetivamente por a, b e c e os ângulos de vértice em A, B e C exatamente por essas letras, seja C' a projeção ortogonal do ponto C sobre a reta AB e $h = \overline{CC'}$.

Justifique que o ponto A fica estritamente situado entre os pontos C' e B e, supondo que $\sin A$ se encontra definido de tal modo que $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$, justifique que $\sin A = \frac{h}{b}$, concluindo que $\sin\ A = \sin\ (180° - A)$.



4. +Provar, dado um triângulo $[ABC]$, de lados de medida $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$, fixada uma unidade de comprimento, e sendo agudo o ângulo interno em A, que, se $\alpha = B\hat{A}C$, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, e designar este resultado por «Teorema de Carnot» ou «Lei dos cossenos».

1. Considere um triângulo $[ABC]$ tal que os ângulos internos de vértice em A e B são agudos e de lados de medida de comprimento $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$. Seja $\alpha = C\hat{A}B$ a amplitude do ângulo interno de vértice em A, considere a projeção ortogonal C' do ponto C sobre AB e seja $h = \overline{CC'}$.



1.1. Justifique que o ponto C' fica estritamente situado entre os pontos A e B e mostre, aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos $[AC'C]$ e $[BC'C]$, que $h^2 = b^2 - (b\cos\alpha)^2 = a^2 - (c - b\cos\alpha)^2$.

1.2. Deduza da alínea anterior que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

8. Definir funções trigonométricas inversas

1. +Reconhecer que as funções $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$, $\cos: [0, \pi] \to [-1,1]$ e $\tan:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, obtidas por restrição respetivamente das funções sin, cos e tan aos intervalos indicados e tomando para conjuntos de chegada os respetivos contradomínios, são bijetivas e designar as bijeções recíprocas por «(função) arco-seno» (arcsin ou arcsen), «(função) arco-cosseno» (arccos) e «(função) arco-tangente» (arctan ou arctg), respetivamente, sabendo que são valores aproximados destas funções que as calculadoras fornecem, associados às teclas, respetivamente, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ e $\tan^{-1}$, desde que esteja selecionado o radiano para unidade de medida dos ângulos.

1. Considere as funções trigonométricas f, g e h definidas por:

$$f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1] \qquad g: [0, \pi] \to [-1,1] \qquad h:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$$
$$x \hookrightarrow \sin x \qquad\qquad x \hookrightarrow \cos x \qquad\qquad x \hookrightarrow \tan x$$

1.1. Justifique, utilizando argumentos geométricos, que f, g e h são bijetivas.

1.2. Determine o domínio e o contradomínio das funções inversas, designando-as por «arcsin» (ou «arcsen»), «arccos» e «arctan», e esboce o respetivo gráfico.

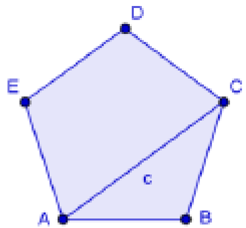
1.3. Determine $\mathrm{arcsen}(0{,}5)$, $\arccos(-0{,}5)$ e $\arctan(-1)$.

1.4. *Determine o valor da expressão $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{3}\right) - \arccos\left(\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

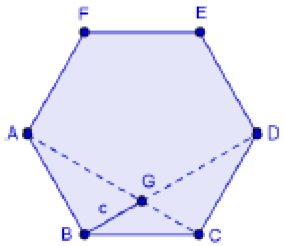
1. +Resolver problemas envolvendo a resolução de triângulos.

1. Nas seguintes figuras estão representados polígonos regulares de lado 2, numa dada unidade. Determine, em cada um deles, a medida c assinalada.

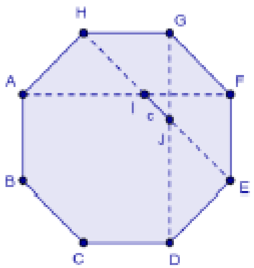
1.1.



1.2*



1.3**



3. +Resolver equações trigonométricas e problemas envolvendo fórmulas trigonométricas e a determinação de razões trigonométricas.

2. Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações

2.1. $2\,\text{sen}\,x + 1 = 0$;

2.2. $\sqrt{3} - 2\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$;

2.3. $2\,\text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) + \sqrt{2} = 0$;

2.4. $2\sqrt{3}\cos(2x) = \sqrt{6}$;

2.12. $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$;

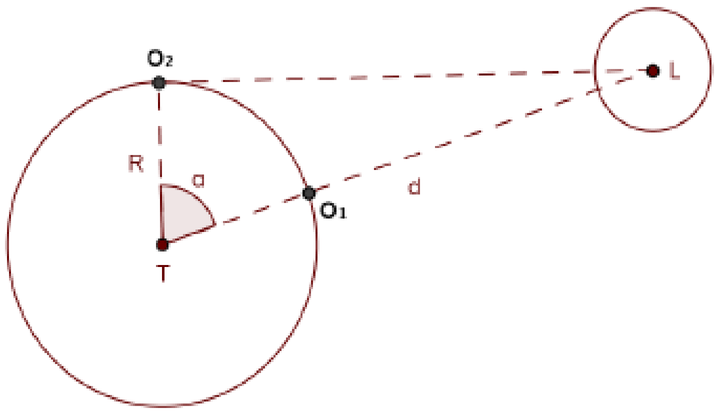
2.13. $\text{sen}^2 x - \cos^2 x = 0$;

2.20. *$\tan x + 2\,\text{sen}\,x = 0$;

2.21. *$2\,\text{sen}^2 x - \cos x - 1 = 0.$

2. +Resolver problemas envolvendo a determinação de distâncias utilizando ângulos e as respetivas razões trigonométricas.

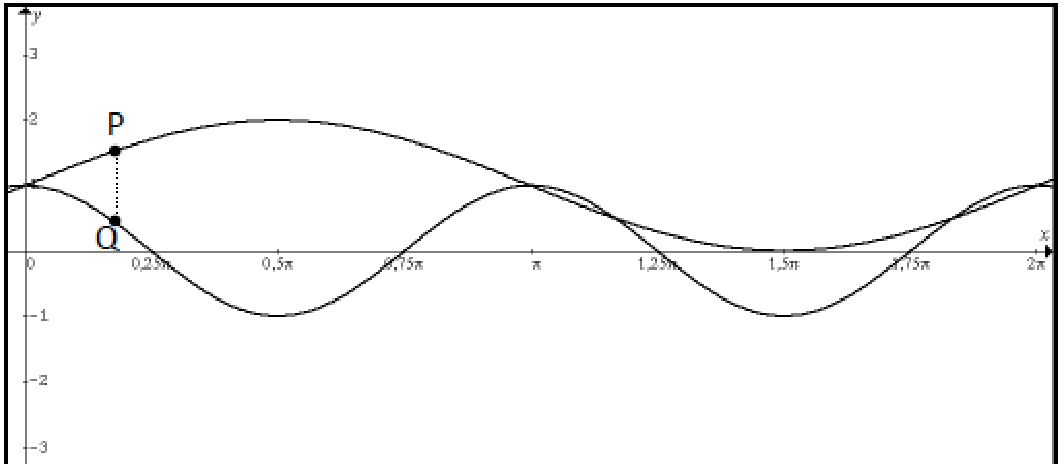
3. **Suponha que, num local O_1 da Terra situado no equador à longitude de $11°\,56'4'E$, um observador avista um eclipse da Lua, estando esta no zénite (ou seja, na vertical do próprio ponto O_1). O mesmo eclipse é observado também no equador mas a partir de um ponto O_2 à longitude de $100°\,59'\,8''E$, sendo a Lua avistada no horizonte.



Sabendo que o raio da Terra mede cerca de $6366\ km$ determine aproximadamente a distância da Terra à Lua (distância entre os respetivos centros), interpretando adequadamente a figura junta, em que as distâncias e os ângulos não são representados realisticamente à escala, para maior clareza do desenho (utilize uma calculadora científica para efetuar os cálculos aproximados que forem necessários).

9. Resolver problemas 4. +Resolver problemas envolvendo funções trigonométricas.

2. No seguinte referencial estão representados os gráficos das funções f e g definidas por $f(x) = \sin x + 1$ e $g(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ no intervalo $[0, 2\pi]$.



2.1. *Determine as coordenadas dos pontos de interseção dos dois gráficos..

2.2. Calcule os zeros da função $f \times g$.

2.3. *Os pontos P e Q pertencentes, respetivamente, aos gráficos de f e de g, têm a mesma abcissa e distam de uma unidade. Determine todos os pares de pontos (P, Q) destes gráficos que gozam da mesma propriedade.

2.4. Resolva a inequação $f(x) > \frac{1}{2}$, representando o conjunto-solução na forma de intervalo ou união de intervalos.