

# **PROGRAMA e Metas Curriculares Matemática A**

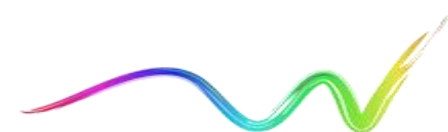
## **Funções exponenciais e logarítmicas**

**António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira, Luísa Loura, Maria Clementina Timóteo**



**GOVERNO DE  
PORTUGAL**

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
E CIÊNCIA



**Metas Curriculares**

# Funções exponenciais e logarítmicas

Podem seguir-se diversos caminhos para a definição das **funções exponenciais** de base positiva. Optou-se por aproveitar directamente o facto de tais funções **já estarem definidas nos racionais**, utilizando-se as **potências de expoente racional**, conceito já estudado para bases reais positivas quaisquer.

Dado um número real  $a > 0$ , está definida a função  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para  $x \in \mathbb{Q}$ :

$$f(x) = a^x$$

e pretendemos **estender** esta função a todo o  $\mathbb{R}$ , mantendo-se algumas propriedades básicas de  $f$  que poderão ser demonstradas, nomeadamente a **monotonia** e a **continuidade**; na verdade, não é difícil verificar que a manutenção de qualquer uma delas, isoladamente, já garante a unicidade da extensão.

Embora não esteja ao alcance dos alunos demonstrar com rigor todos os passos necessários para a construção das funções exponenciais, já que não se dispõe ainda de uma **teoria dos números reais** suficientemente desenvolvida para o efeito, é possível, com os conhecimentos já abordados, descrever as ideias essenciais que podem presidir a essa construção.

## Funções exponenciais e logarítmicas

Para que  $f(x)$ , com as características requeridas, fique também definido sempre que  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  (usando também  $f$  para designar a pretendida extensão) é necessário que ao tomarmos uma sucessão  $(q_n)$  de números racionais com limite  $x$ ,  $f(q_n)$  convirja, e que esse limite seja **independente** da sucessão  $(q_n)$  escolhida com essa propriedade. Além disso, se assim for,  $f(x)$  terá de ser exactamente o limite de  $f(q_n)$  o que nos sugere o caminho para definir essa extensão; em particular, demonstrar a **independência** acima referida poderá ser um passo essencial para demonstrarmos de forma simples muitas das propriedades básicas dessa extensão.

**Não se exige** que os alunos saibam **provar** os resultados básicos relacionados com a construção e algumas das propriedades fundamentais das funções exponenciais (FEL12-2):

5. **Saber**, dado um número real  $a > 0$  e um número irracional  $x$ , que se  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma qualquer sucessão de números racionais de limite  $x$ , a sucessão de termo geral  $a^{q_n}$  é convergente e o respetivo limite depende apenas de  $x$  e de  $a$ , e que, representando esse limite por « $a^x$ », se estende a função definida por  $f(x) = a^x$  em  $\mathbb{Q}$  ao conjunto  $\mathbb{R}$ , obtendo-se por este processo uma função contínua nesse conjunto, designada por «função exponencial de base  $a$ », que mantém a monotonia, os limites em  $\pm\infty$  e as propriedades algébricas de  $f$  em  $\mathbb{Q}$ : para todos  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $b > 0$ ,  $a^x \times a^y = a^{x+y}$ ,  $(a^x)^y = a^{xy}$ ,  $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$ ,  $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ ,  $(ab)^x = a^x b^x$  e  $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ .



# Funções exponenciais e logarítmicas

No entanto, como atrás foi referido, apenas com os conhecimentos de que os alunos dispõem, podemos ir mais longe na descrição do processo de definição da exponencial e na justificação de algumas das respectivas propriedades.

Pode motivar-se esta definição utilizando as **aproximações** dos números reais por **dízimas finitas** dadas pela representação habitual destes números na forma de dízima finita ou infinita. Sabemos, por exemplo, que  $\frac{1}{3} = 0, (3)$ ; em particular, atendendo ao significado da dízima infinita «0, (3)» (cf. NO8-1), a sucessão das dízimas finitas:

$$0,3; 0,33; 0,333; \dots; 0,333 \dots 3; \dots$$

converge para  $\frac{1}{3}$ . Assim, da **continuidade** e **monotonia** da função exponencial com domínio  $\mathbb{Q}$ , podemos garantir que, por exemplo para  $a > 1$ :

$$a^{0,3} < a^{0,33} < a^{0,333} < \dots < a^{0,333\dots 3} < \dots \rightarrow a^{\frac{1}{3}},$$

ou seja,

$$\sqrt[10]{a^3} < \sqrt[100]{a^{33}} < \sqrt[1000]{a^{333}} < \dots < \sqrt[1000\dots 0]{a^{333\dots 3}} < \dots \rightarrow \sqrt[3]{a}.$$



# Funções exponenciais e logarítmicas

Ora, se considerarmos um número irracional e a respectiva representação como dízima infinita não periódica (cf. NO8-1 e 2), seja, por exemplo,

$$\pi = 3,1415926535897932384626 \dots,$$

podemos considerar a sucessão crescente das potências de expoente racional:

$$a^3 < a^{3,1} < a^{3,14} < a^{3,141} < \dots < a^{3,1415926} < \dots,$$

ou seja:

$$a^3 < \sqrt[10]{a^{31}} < \sqrt[100]{a^{314}} < \sqrt[1000]{a^{3141}} < \dots < \sqrt[10000000]{a^{31415926}} < \dots.$$

Sendo esta sucessão crescente e majorada (por qualquer  $a^q$ ,  $q$  racional,  $q > \pi$ , por exemplo por  $a^4$ ), concluímos que é necessariamente convergente em  $\mathbb{R}$ ; e é esse limite que pretendemos identificar como  $a^\pi$ .

# Funções exponenciais e logarítmicas

Podemos até aproveitar o enquadramento :

$$3 < 3,1 < 3,14 < \dots < 3,1415926 < \dots < \pi < \dots < 3,1415927 < \dots < 3,15 < 3,2 < 4,$$

Para enquadrar, por exemplo,  $2^\pi$ , por duas sucessões convergindo para este número, uma crescente e a outra decrescente:

$$2^3 < \sqrt[10]{2^{31}} < \sqrt[100]{2^{314}} < \dots < \sqrt[10000000]{2^{31415926}} < \dots < 2^\pi < \dots < \sqrt[10000000]{2^{31415927}} \\ < \dots < \sqrt[100]{2^{315}} < \sqrt[10]{2^{32}} < 2^4$$

Ou seja:

$$8 < 8,5741877 \dots < 8,815240927 \dots < \dots < 8,824977499 \dots < \dots < 2^\pi < \dots \\ < 8,824978111 \dots < \dots < 8,876555777 \dots < 9,18958684 \dots < 16$$

Assim, a análise destas desigualdades a partir do terceiro termo das sucessões já nos permite concluir que  $2^\pi = 8,8 \dots$ , já que se situa entre 8,815240927 e 8,876555778, e, a partir do oitavo termo, que  $2^\pi = 8,82497 \dots$ , já que está entre 8,824977499 e 8,824978112.



# Funções exponenciais e logarítmicas

Note-se que para obter estes resultados basta proceder ao cálculo de potências de expoente inteiro e extracção de raízes, sendo que estas últimas operações podem, em teoria, ser realizadas com a aproximação que se quiser, também por enquadramento, por consulta de tabelas de potências previamente elaboradas, embora evidentemente existam processos mais expeditos de cálculo. Deste modo se percebe como as **potências de base positiva e expoente real quaisquer** podem, em princípio, ser calculadas com qualquer aproximação requerida utilizando apenas as **operações elementares**.

Em seguida, tendo em conta as propriedades conhecidas dos limites, poder-se-iam demonstrar sem dificuldade, uma a uma, muitas das propriedades pretendidas.

Por exemplo, tomando  $a > 0$ , números reais  $x$  e  $y$  e sucessões de racionais  $(q_n)$  e  $(q'_n)$  de limites respectivos  $x$  e  $y$ ,

$$\begin{aligned} a^x a^y &= \lim a^{q_n} \lim a^{q'_n} \text{ (definição)} \\ &= \lim a^{q_n} a^{q'_n} \text{ (propriedade dos limites de sucessões convergentes)} \\ &= \lim a^{q_n + q'_n} \text{ (propriedade algébrica das potências de expoente racional)} \\ &= a^{x+y} \text{ (definição, uma vez que } q_n + q'_n \rightarrow x + y \text{).} \end{aligned}$$



# Funções exponenciais e logarítmicas

A construção atrás esboçada pressupõe em particular o conhecimento de algumas propriedades básicas das potências de expoente racional, cujo **conhecimento** é requerido aos alunos, embora as **demonstrações** possam corresponder a um **nível de desempenho** considerado **avançado**, sendo portanto **facultativas** e apenas **recomendadas** para os alunos mais interessados (estas distinguem-se através do símbolo «+»). Temos assim em FEL12-2:

1. +Provar, dado um número real  $a > 0$ , que a função definida no conjunto dos números racionais por  $f(x) = a^x$  é crescente se  $a > 1$  e decrescente se  $a < 1$ .
2. +Provar, dado um número real  $a > 0$ , que a função  $f$  definida no conjunto dos números racionais por  $f(x) = a^x$  satisfaz  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$  e **justificar** que  $f$  é contínua.
3. +Provar, dado um número real  $a > 1$ , que a função  $f$  definida no conjunto dos números racionais por  $f(x) = a^x$  satisfaz  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , utilizando o limite já conhecido  $\lim a^n = +\infty$  e o facto de  $f$  ser crescente.
4. **Justificar**, dado  $a \in \mathbb{R}$ , que a função  $f$  definida no conjunto dos números racionais por  $f(x) = a^x$  satisfaz  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  quando  $a > 1$ , e, quando  $0 < a < 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .



# Funções exponenciais e logarítmicas

Que a função definida no conjunto dos números racionais por  $f(x) = a^x$  é decrescente se  $0 < a < 1$  e crescente se  $a > 1$  é uma consequência simples do caso em que  $a > 1$ . Basta utilizar as propriedades conhecidas das potências de expoente racional e notar que, para  $a > 0$ , tem-se  $a < 1$  se e somente se  $a^{-1} > 1$ .

Para  $a > 1$ , podemos começar por mostrar que, para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}$ :

$$m < n \Rightarrow a^m < a^n$$

Este resultado é consequência da seguinte cadeia de implicações, cuja justificação pode ser formalizada utilizando o método de indução:

$$a > 1 \Rightarrow a^2 > a \Rightarrow a^3 > a^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow a^{n+1} > a^n,$$

para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ .

Com efeito, torna-se depois óbvio, pela transitividade da relação de ordem, que, para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ :

$$a^n > a^{n-1} > \dots > a^2 > a$$

o que é outro modo de exprimir o resultado acima.

# Funções exponenciais e logarítmicas

É também fácil agora estender sucessivamente o resultado de  $\mathbb{N}$  a  $\mathbb{Q}^+$  e em seguida a  $\mathbb{Q}$ . Começamos por notar que, das propriedades das potências de expoente natural relativamente à relação de ordem expressas nos descritores ALG10-1.1 e 1.2 e da tricotomia dessa mesma relação de ordem, facilmente se conclui que a função raiz de índice  $n$  (para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ ) é crescente para valores não negativos (esse resultado também poderia ser obtido agora invocando o sinal da derivada). Utilizando esse resultado temos então, para quaisquer  $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} < \frac{p}{q} &\Rightarrow mq < np \Rightarrow a^{mq} < a^{np} \Rightarrow \sqrt[q]{a^{mq}} < \sqrt[q]{a^{np}} \Rightarrow a^m < \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^n \Rightarrow \sqrt[n]{a^m} < a^{\frac{p}{q}} \\ &\Rightarrow a^{\frac{m}{n}} < a^{\frac{p}{q}}, \end{aligned}$$

o que prova o resultado pretendido em  $\mathbb{Q}^+$ .

# Funções exponenciais e logarítmicas

Podemos agora estender o resultado a todo o  $\mathbb{Q}$ .

Começando por analisar o caso de dois racionais de sinais contrários, se  $r, r' \in \mathbb{Q}^+$ , temos, obviamente,  $-r < r'$ ,  $a^r > 1$  e  $a^{r'} > 1$  (já que, por hipótese,  $a > 1$ ), donde:

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} < 1 < a^{r'}.$$

Resta assim provar o resultado para dois racionais negativos ou para um racional qualquer e o racional nulo; excluindo este último caso, que é trivial, temos, para quaisquer  $r, r' \in \mathbb{Q}^+$ , se  $-r < -r'$  então  $r' < r$ , donde  $a^{r'} < a^r$  e portanto  $\frac{1}{a^r} < \frac{1}{a^{r'}}$ , ou seja, como pretendíamos,  $a^{-r} < a^{-r'}$ .

# Funções exponenciais e logarítmicas

Quanto ao descritor FEL12-2.2, note-se que, embora **não seja requerido** a todos os alunos que saibam **demonstrar** que  $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$ , já a **justificação**, a partir deste facto, de que a função  $a^x$  é **contínua** deverá estar ao alcance de todos os alunos

Para um dado  $a > 0$ , comecemos por demonstrar que a função  $f$  definida nos racionais por  $f(x) = a^x$  é contínua em 0; para o efeito provemos que os limites de  $f$  à esquerda e à direita de 0 existem e são ambos iguais a  $1 = a^0$ .

Seja então  $(q_n)$  uma sucessão de números racionais positivos, de limite nulo. Sabemos já (cf. SUC11-6.30) que  $\lim a^{\frac{1}{n}} = 1$ ; fixado  $\varepsilon > 0$ , existe portanto  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq p \Rightarrow |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \varepsilon$ . Considerando, para já, que  $a > 1$ , tem-se, em particular, que  $1 \leq a^{\frac{1}{p}} < 1 + \varepsilon$ . Então, para  $n$  suficientemente grande,  $0 < q_n \leq \frac{1}{p}$ , e, por monotonia,  $1 \leq a^{q_n} \leq a^{\frac{1}{p}} < 1 + \varepsilon$ , ficando assim provado, por definição, que  $\lim a^{q_n} = 1$ .

# Funções exponenciais e logarítmicas

O mesmo se pode concluir no caso  $0 < a < 1$ , observando simplesmente que  $a^{q_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{q_n}}$  e que esta sucessão tem por limite 1, já que  $\frac{1}{a} > 1$ . Acabámos portanto de concluir que, em qualquer caso:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} a^x = 1.$$

Resta agora provar que  $a^x$  também tende para 1 à esquerda de 0.

Considerando uma sucessão  $(p_n)$  de números racionais negativos, de limite nulo,  $(-p_n)$  é obviamente uma sucessão de números racionais positivos de limite nulo, pelo que:

$$a^{p_n} = \frac{1}{a^{-p_n}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1.$$

Mostrou-se assim que a função  $f$  definida nos racionais por  $f(x) = a^x$  é contínua em 0, uma vez que existe  $\lim_{x \rightarrow 0} a^x$ .

# Funções exponenciais e logarítmicas

Podemos agora justificar facilmente a **continuidade**, em qualquer ponto do domínio, das funções exponenciais definidas nos racionais. Consideremos então um qualquer número racional  $q$ ;

$$f(x) = a^x = a^{x-q+q} = a^q a^{x-q}.$$

Então, a existência do limite de  $f(x)$  em  $q$  resulta imediatamente da existência do limite da função  $a^{x-q}$  em  $q$  que, por sua vez, é consequência imediata da existência do limite de  $f(x) = a^x$  em  $0$ , já que, obviamente,  $x - q \xrightarrow{x \rightarrow q} 0$  (cf. FRVR11-1.11).

Conclui-se assim que  $f$  é contínua em  $\mathbb{Q}$ .

Também podemos justificar a continuidade de  $f$  em  $q$  invocando muito simplesmente o facto de se tratar do produto da constante  $a^q$  pela função  $a^{x-q}$  que é a composta das funções  $x - q$  e  $a^x$ , que sabemos ser contínuas respectivamente em  $q$  e em  $q - q = 0$  (cf FRVR11-2.10).

De facto, tratando-se de uma justificação extremamente simples, até se poderia recorrer directamente à **definição de limite** e propriedades elementares dos limites de sucessões, tomando uma sucessão arbitrária  $q_n$  em  $\mathbb{Q}$  a convergir para  $q$ , donde imediatamente  $q_n - q \rightarrow 0$  e portanto  $a^{q_n} = a^q a^{q_n-q}$  tende para  $a^q$ .





# Funções exponenciais e logarítmicas

Quanto ao limite de uma função exponencial em  $+\infty$ , a demonstração pode seguir linhas muito semelhantes à da continuidade.

Dado  $a > 1$  e  $L > 0$ , como  $\lim a^n = +\infty$  (cf. SUC11-6.29), existe em particular  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $a^p \geq L$ .

Considerando uma sucessão de racionais  $(q_n)$  de limite  $+\infty$ , a partir de certa ordem,  $q_n \geq p$ . Por monotonia, tem-se a partir dessa mesma ordem que

$$a^{q_n} \geq a^p \geq L,$$

ficando assim demonstrado que  $\lim a^{q_n} = +\infty$ .

É agora fácil calcular os limites de qualquer função exponencial em  $+\infty$  e em  $-\infty$ , reduzindo ao caso que acabámos de analisar, **justificações** que são requeridas aos alunos.



# Funções exponenciais e logarítmicas

## Número de Neper

De entre as funções exponenciais merece particular destaque, por razões que se tornarão claras, a que tem por base o chamado **número de Neper**, que se representa por « $e$ ».

O programa determina que a introdução deste número seja motivada pelo cálculo de **juros compostos** (FEL12-1):

1. Designar, dado um número real  $r$ , uma unidade de medida temporal  $T$  e  $n \in \mathbb{N}$ , por «aplicar **juros compostos** à taxa de  $r\%$  a  $T$  durante  $n$  períodos de tempo  $T$ » a um dado capital disponível em certo instante inicial  $t_0$ , a operação que consiste em calcular um juro igual a  $r\%$  do capital disponível no início de cada período de tempo com duração igual a  $T$  e adicioná-lo ao capital findo esse período, começando este processo a partir do instante  $t_0$ , e levando-o a cabo  $n$  vezes seguidas.

# Funções exponenciais e logarítmicas

## Número de Neper

2. Provar, dado um capital inicial  $C_0$ , que, aplicando-se juros compostos à taxa de  $r\%$  a  $T$ , o capital disponível ao fim de  $n \in \mathbb{N}$  períodos de tempo  $T$  é igual a  $C_n = C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$ .
3. Justificar, dado um número real  $r$ , um número natural  $n$  e um capital  $C_0$  disponível no início de um determinado período de um ano, que dividindo esse ano em  $n$  períodos iguais de medida temporal  $T$  e aplicando juros compostos à taxa de  $\frac{r}{n}\%$  a  $T$  durante esses  $n$  períodos ao capital inicial  $C_0$ , o capital disponível ao fim do ano é igual a  $C_n = C_0 \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^n$ .
4. +Provar que a sucessão de termo geral  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  é crescente, majorada, justificar que é convergente, designar por «número de Neper» (« $e$ ») o respetivo limite, **interpretar todos estes resultados à luz da noção de juro composto** e saber que  $e$  é um número irracional.

# Funções exponenciais e logarítmicas

## Número de Neper

O facto de ser **crescente** a sucessão de termo geral  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  traduz a ideia, aliás intuitiva, de que **aumenta** o proveito que se consegue **aumentando** o número  $n$  de períodos iguais em que se divide o prazo contratado (seja, por exemplo, um ano) para efeito de se capitalizarem **juros** (positivos) proporcionais à amplitude de cada um desses subperíodos, no final de cada um deles, fixada a taxa anual de 100% e calculando-se assim os **juros compostos** no final do ano, relativos a um **dado capital**.

Quanto à existência do número  $e$ , como limite **finito** daquela sucessão, pode agora ser encarada como equivalente ao facto de ser **limitado** o proveito que se consegue **aumentando indefinidamente** o número  $n$  de subperíodos acima considerados.

Pode agora perguntar-se o que acontece com juros anuais a uma taxa de  $r$  % qualquer.

Pelo que atrás ficou enunciado, se se calcularem os juros compostos correspondentes a  $n$  períodos, sendo  $x = \frac{r}{100}$  o capital virá no final multiplicado por:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x.$$



# Funções exponenciais e logarítmicas

## Número de Neper

Como  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{n}{x} = \pm\infty$ , consoante o sinal de  $x$ , veremos que o limite da sucessão dentro do parêntesis recto é igual a  $e$ ; por continuidade da função  $y \rightarrow y^x$  (cf. FEL12-2.6), podemos então concluir que:

$$\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x,$$

sendo, além disso, esta sucessão estritamente crescente, se  $x > 0$ , como se poderá verificar mais adiante. Fica assim respondida a nossa pergunta: com juros anuais a uma taxa de  $r\%$  qualquer, capitalizando juros em  $n$  períodos iguais, o capital inicial fica, ao fim de um ano, multiplicado por um factor que fica **limitado** quando  $n$  aumenta indefinidamente, convergindo, em  $n$ , para:

$$e^{\frac{r}{100}}$$

Por exemplo, com juros de 3% ao ano o factor limite é igual a  $e^{0,03} = 1,03045453 \dots$ , ou seja, corresponde a uma taxa de juros simples anuais cujo acréscimo em relação aos 3% é de apenas 0,045..%, portanto inferior a 0,05%.

Além disso, tal como no caso  $r = 100$ , se  $r > 0$  o proveito final cresce com  $n$ .



# Funções exponenciais e logarítmicas

## Número de Neper

Motivada a introdução do número de Neper também como **base** particularmente importante para uma **função exponencial** podemos examinar com mais algum pormenor como se podem demonstrar algumas propriedades acima utilizadas da sucessão dita exponencial (FEL12-1), embora algumas das demonstrações sejam de carácter facultativo e especialmente recomendadas apenas para os alunos mais interessados, como se assinala com o uso do símbolo + (note-se que esse carácter facultativo não diz respeito ao que se pede para **justificar** ou **interpretar**):

4. +Provar que a sucessão de termo geral  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  é **crecente, majorada**, **justificar** que é **convergente**, designar por «número de Neper» (« $e$ ») o respetivo limite, interpretar todos estes resultados à luz da noção de juro composto e saber que  $e$  é um número irracional.

Demonstrar que a sucessão é convergente pode fazer-se de modo relativamente expedito utilizando a desigualdade, para  $0 \leq x \leq 1$  e  $n \in \mathbb{N}$ :

$$(1 - x)^n \geq 1 - nx.$$



# Funções exponenciais e logarítmicas

## Número de Neper

Esta desigualdade, dita por vezes «**desigualdade de Bernoulli**», pode ser facilmente demonstrada por indução ou justificada da seguinte forma:

$$n = 1 + 1 + \cdots + 1 \geq 1 + (1 - x) + (1 - x)^2 + \cdots + (1 - x)^{n-1} = \frac{1 - (1 - x)^n}{1 - (1 - x)},$$

donde se conclui o resultado.

A monotonia da sucessão de termo geral  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  pode agora ser verificada calculando, para  $n > 1$ , o quociente  $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ :

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{n+1}{n} \left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right)^{n-1} = \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n-1}.$$

Aplicando a desigualdade de Bernoulli com  $x = \frac{1}{n^2}$ ,  $\frac{u_n}{u_{n-1}} \geq \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{n^3} > 1$ , donde se conclui que a sucessão de termo geral  $u_n$  é **crescente**.



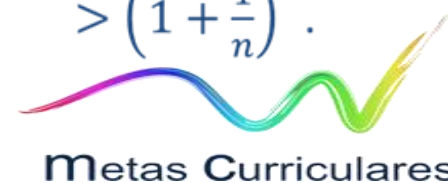
# Funções exponenciais e logarítmicas

## Número de Neper

Em alternativa à utilização da desigualdade de Bernoulli, pode obter-se a monotonia da sucessão  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  utilizando o **binómio de Newton** e escrevendo as respectivas parcelas a partir da terceira (portanto com  $p = 2, \dots, n$ ), como:

$$\begin{aligned} {}^nC_p \frac{1}{n^p} &= \frac{1}{p!} \times \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n} \times \dots \times \frac{n-p+1}{n} \\ &= \frac{1}{p!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right), \end{aligned}$$

examinando o efeito de substituir em cada parcela destas  $n$  por  $n + 1$ , facilmente se conclui que se obtém um valor superior. Ora o desenvolvimento de  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  pelo binómio de Newton, para além destas parcelas, tem apenas mais duas (para  $p = 0$  e  $p = 1$ ), iguais às correspondentes parcelas do desenvolvimento de  $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ , ao passo que o desenvolvimento desta última potência ainda tem a parcela positiva correspondente a  $p = n + 1$ . Assim, forçosamente,  $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .



# Funções exponenciais e logarítmicas

## Número de Neper

A partir da mesma representação das parcelas do binómio de Newton acima considerado podemos obter a limitação da sucessão exponencial e simultaneamente uma estimativa para  $e$ :

$${}^nC_p \frac{1}{n^p} = \frac{1}{p!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right) \leq \frac{1}{p!}$$

( $p = 2, \dots, n$ ). Ora:

$$p! \geq 2^{p-1} \Rightarrow \frac{1}{p!} \leq \frac{1}{2^{p-1}}$$

e portanto:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + n \frac{1}{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

# Funções exponenciais e logarítmicas

## Número de Neper

Concluimos assim (já que, obviamente,  $e$  é superior ao primeiro termo da sucessão, que é estritamente crescente):

$$2 < e \leq 3$$

Podemos obter melhores estimativas **refinando as majorações** efectuadas nos termos do binómio de Newton; por exemplo, é fácil concluir que para  $p \geq 4$ ,  $p! \geq 2^p$  (já que  $p!$  pode ser expresso como um produto de  $p$  factores não inferiores a 2, bastando para o efeito substituir 4 por  $2 \times 2$ ), donde:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{8}{3} + \frac{1}{24} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}}{1 - \frac{1}{2}} \leq \frac{8}{3} + \frac{1}{2^3} = \frac{67}{24}$$

e portanto (atendendo a que  $e$  é superior ao segundo termo da sucessão):

$$2,25 < e \leq \frac{67}{24} < 2,792,$$

ou seja,  $e = 2, \dots$ ; de facto  $e = 2,718281828 \dots$  e prova-se que é um número **irracional** (apesar da inicial repetição do grupo de algarismos «1828», que é até onde se obtém com algumas calculadoras...).

# Funções exponenciais e logarítmicas

## Função exp

A análise do problema dos juros compostos conduziu naturalmente à conclusão de que a exponencial de base  $e$  tem um papel particular importante; mas essa importância, como veremos, está longe de se esgotar neste exemplo de aplicação. Por esse motivo é habitual designar essa função, se não houver perigo de confusão, simplesmente por «**função exponencial**» ou mesmo apenas por «**exponencial**» e representá-la por **exp**.

## Funções logarítmicas

Uma vez que uma função exponencial  $a^x$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) é **monótona**, **contínua**, e tem **limites conhecidos** em  $+\infty$  e  $-\infty$ , é fácil concluir que tem **contradomínio** igual a  $\mathbb{R}^+$ . Assim a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  definida por  $f(x) = a^x$  é bijectiva, pelo que podemos considerar a respectiva função inversa, o que se prescreve no objectivo geral FEL12-3:

# Funções exponenciais e logarítmicas

## Funções logarítmicas

### 3. Definir as funções logarítmicas e estabelecer as respectivas propriedades principais

1. Reconhecer, dado um número real  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , que a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  definida por  $f(x) = a^x$  é bijetiva e designar a respetiva **bijeção recíproca**,  $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , por «**logaritmo de base  $a$** », representá-la por « **$\log_a$** », e justificar que  $\forall x \in \mathbb{R}^+, a^{\log_a(x)} = x$  e  $\forall x \in \mathbb{R}, \log_a(a^x) = x$ .
2. Designar o logaritmo de base 10 por «logaritmo decimal», representando-o também por «log» e designar o logaritmo de base  $e$  por «**logaritmo neperiano**», representando-o também por «**ln**».
3. Justificar que a função logaritmo de base  $a$  é crescente se  $a > 1$  e decrescente se  $0 < a < 1$ .
4. Justificar que  $x = 1$  é o único zero da função logaritmo de base  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , e que, se  $a > 1$  (respetivamente se  $0 < a < 1$ ),  $\forall x \in \mathbb{R}^+, \log_a(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$  (respetivamente  $\forall x \in \mathbb{R}^+, \log_a(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$ ).



# Funções exponenciais e logarítmicas

## Funções logarítmicas

5. Justificar, dado  $a > 1$ , que  $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a(x) = -\infty$  e que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = +\infty$ .
6. Justificar, dado  $0 < a < 1$ , que  $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a(x) = +\infty$  e que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = -\infty$ .
7. #Provar, dado  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , e  $x, y \in \mathbb{R}^+$ , que  $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ ,  $\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$ ,  $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$  e  $\log_a(x^y) = y\log_a(x)$ .
8. #Provar, dados  $a, b > 0$ ,  $a \neq 1$  e  $b \neq 1$ , que  $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ .
9. Justificar, dado  $a > 0$  e  $x \in \mathbb{R}$ , que  $a^x = e^{x \ln(a)}$ .
10. Justificar, dado  $a > 0$ , que a função exponencial de base  $a$  é diferenciável e que a respetiva derivada é dada, em  $\mathbb{R}$ , pela expressão  $\ln(a) a^x$ .
11. +Provar, dado  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , que  $\log_a$  é diferenciável e que para todo o  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $\log'_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \frac{1}{x}$ .
12. Justificar, dado  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , que a função  $x^\alpha$  é diferenciável para  $x > 0$ , de derivada  $\alpha x^{\alpha-1}$ , estendendo-se assim o caso já conhecido correspondente a  $\alpha$  racional.

# Funções exponenciais e logarítmicas

## Funções logarítmicas

Com excepção da **diferenciabilidade**, todas as propriedades acima referidas são relativamente fáceis de justificar, assinalando-se algumas delas com o símbolo # por se entender que as respectivas demonstrações são muito semelhantes, podendo portanto os professores optar por apresentar apenas algumas delas como exemplo.

## Diferenciabilidade das funções exponenciais e logarítmicas

Embora não se exija uma justificação completa de todos os passos conducentes à **diferenciabilidade** das funções exponenciais e logarítmicas, como se conclui da análise dos descritores relativos a esta questão, assinale-se que para a execução completa e coerente do caminho proposto no caderno de apoio é conveniente, antes de demonstrar a diferenciabilidade das exponenciais, introduzir as **funções logarítmicas** e demonstrar a **continuidade** da função  $\ln x$ . Essa demonstração, que não é exigida aos alunos, pode efectuar-se do seguinte modo (*cf.* parte final do texto de apoio ao descritor FEL12-3.11):

# Funções exponenciais e logarítmicas

## Diferenciabilidade das funções exponenciais e logarítmicas

Seja  $x > 0$  e  $(h_n)$  uma sucessão a tender para 0 tal que  $x + h_n > 0$ , para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ ; pretendemos provar que a sucessão de termo geral  $\ln(x + h_n)$  converge para  $\ln x$ . Ora:

$$\ln(x + h_n) - \ln x = \ln \frac{x + h_n}{x} = \ln \left( 1 + \frac{h_n}{x} \right);$$

assim, temos de mostrar que, dado  $\delta > 0$ , existe uma ordem  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para  $n \geq p$ :

$$-\delta < \ln \left( 1 + \frac{h_n}{x} \right) < \delta.$$

Como a função  $e^x$  é crescente, esta cadeia de desigualdades é equivalente a:

$$e^{-\delta} < 1 + \frac{h_n}{x} < e^{\delta},$$

ou seja, a:

$$-(1 - e^{-\delta}) < \frac{h_n}{x} < e^{\delta} - 1.$$

# Funções exponenciais e logarítmicas

## Diferenciabilidade das funções exponenciais e logarítmicas

Ora, do que se conhece da função exponencial, deduz-se que

$$-(1 - e^{-\delta}) < 0 < e^{\delta} - 1;$$

como a sucessão de termo geral  $\frac{h_n}{x}$  tende para 0, por definição de limite sabemos que, a partir de certa ordem  $p \in \mathbb{N}$ , teremos simultaneamente  $-(1 - e^{-\delta}) < \frac{h_n}{x} < 1 - e^{-\delta}$  e  $-(e^{\delta} - 1) < \frac{h_n}{x} < e^{\delta} - 1$ . Portanto, de facto, atendendo às equivalências acima referidas, a sucessão de termo geral  $\ln(x + h_n)$  converge para  $\ln x$ , o que termina a demonstração da continuidade de  $\ln$ .

Conhecida a continuidade da função  $\ln$ , ficamos aptos a justificar facilmente a continuidade de uma função que estende a “sucessão exponencial”, nomeadamente a função definida em  $\mathbb{R} \setminus [-1, 0]$  por:

$$f(y) = \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$$



# Funções exponenciais e logarítmicas

## Diferenciabilidade das funções exponenciais e logarítmicas

Basta, para o efeito, notar que:

$$\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e^{y \ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)}.$$

É possível agora mostrar que  $f$  é **crescente em**  $\mathbb{R}^+$  (de facto também o é em  $] -\infty, -1[$ , mas essa propriedade não é agora essencial e poderá ser demonstrada mais tarde como aplicação das propriedades das derivadas), estendendo de algum modo a monotonia da “sucessão exponencial”.

A **continuidade** de  $f$  permite deduzir esse facto da **monotonia em**  $\mathbb{Q}^+$ . Quanto a esta pode ser provada directamente a partir da definição, utilizando o **binómio de Newton**, com argumentos idênticos aos atrás utilizados para a “sucessão exponencial” (cf. texto de apoio ao descritor FEL12-2.7).

A **monotonia** de  $f$  em  $\mathbb{R}^+$  permite agora demonstrar que os respectivos **limites em**  $+\infty$  e  $-\infty$  são iguais a  $e$ , utilizando o caso conhecido da restrição de  $f$  a  $\mathbb{N}$ .



# Funções exponenciais e logarítmicas

## Diferenciabilidade das funções exponenciais e logarítmicas

Este resultado bastante intuitivo, tendo em conta o que se sabe da “sucessão exponencial”, é daqueles cujo **conhecimento** é requerido aos alunos e foi atrás utilizado para se obter  $e^x$  como limite de  $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ , **justificação** que também se pretende que os alunos conheçam.

O chamado «**limite notável**»:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

que é, no fundo, o cálculo da **derivada da função exponencial na origem** deve também ser conhecido pelos alunos. Embora não se exija a respectiva demonstração, o resultado pode ser motivado examinando a “aproximação” da razão incremental acima que resulta de substituir  $e^h$  por  $\left(1 + \frac{h}{n}\right)^n$ ; este processo pode ser levado mais ou menos longe, conduzindo a uma demonstração rigorosa se for levado até ao fim.



# Funções exponenciais e logarítmicas

## Diferenciabilidade das funções exponenciais e logarítmicas

Mais uma vez, podemos utilizar o **binómio de Newton** para obter estimativas adequadas (exprimindo as respectivas parcelas de modo análogo ao que foi feito atrás)

$$\begin{aligned}\frac{\left(1 + \frac{h}{n}\right)^n - 1}{h} &= \frac{1}{h} \left( 1 + h + \sum_{p=2}^n \frac{1}{p!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right) h^p - 1 \right) = \\ &= 1 + \sum_{p=2}^n \frac{1}{p!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right) h^{p-1}\end{aligned}$$

Podemos agora utilizar uma **majoração análoga** à que se utilizou para obter uma **estimativa do número  $e$** , começando por notar que, para  $p > 1$ ,  $p! \geq 2^{p-1}$ . Supondo para começar  $0 < h < 2$ :

$$1 \leq \frac{\left(1 + \frac{h}{n}\right)^n - 1}{h} \leq 1 + \sum_{p=2}^n \frac{h^{p-1}}{2^{p-1}} = \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{h}{2}\right)^p = \frac{1 - \left(\frac{h}{2}\right)^n}{1 - \frac{h}{2}} < \frac{2}{2-h}.$$



# Funções exponenciais e logarítmicas

## Diferenciabilidade das funções exponenciais e logarítmicas

Uma vez que  $\lim_n \left(1 + \frac{h}{n}\right)^n = e^h$ , passando ao limite em  $n$  as desigualdades acima obtemos, para  $0 < h < 2$ :

$$1 \leq \frac{e^h - 1}{h} \leq \frac{2}{2 - h};$$

Então, passando agora ao limite quando  $h$  tende para  $0^+$  estas desigualdades, concluímos que  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ .

Para obter o limite quando  $h$  tende para  $0^-$ , temos, ainda para  $h > 0$ :

$$\frac{e^{-h} - 1}{-h} = e^{-h} \frac{e^h - 1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 1,$$

donde se deduz imediatamente que, de facto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

# Funções exponenciais e logarítmicas

## Diferenciabilidade das funções exponenciais e logarítmicas

Este **limite notável** é a chave para o estudo da diferenciabilidade das funções exponenciais e depois também das funções logarítmicas. Podemos começar por provar, agora facilmente (é uma das demonstrações **não facultativas**) que a função  $\exp$  é **derivável** e que, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\exp'(x) = \exp(x)$ . Este resultado é um dos que explica a particular importância da exponencial de base  $e$  e será essencial para muitas das **aplicações do cálculo diferencial** que serão examinadas adiante.

Em seguida, utilizando já as funções logarítmicas, é fácil reduzir a diferenciabilidade de qualquer função exponencial ao caso da função  $\exp$ . Tanto esta demonstração como a anterior são bastante conhecidas e já usuais no ensino secundário.

Quanto à **diferenciabilidade das funções logarítmicas**, que também facilmente se reduz ao caso da função  $\ln$ , como já foi referido a respectiva demonstração é das que é apenas recomendada para os alunos mais interessados, embora, conhecida a continuidade desta função baste aplicar a definição de derivada:

# Funções exponenciais e logarítmicas

## Diferenciabilidade das funções exponenciais e logarítmicas

$$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x} = \frac{1}{x} \frac{1}{h} \ln \left( 1 + \frac{h}{x} \right) = \frac{1}{x} \ln \left( \left( 1 + \frac{1}{\frac{x}{h}} \right)^{\frac{x}{h}} \right).$$

Ora, para cada  $x > 0$ , o argumento do logaritmo no último membro desta cadeia de equações, como sabemos, converge para  $e$  quando  $h$  tende para 0, quer por valores positivos, quer por valores negativos, já que, nesse caso,  $\frac{x}{h}$  converge para  $+\infty$  ou para  $-\infty$ . Portanto o limite em 0 do primeiro membro da cadeia existe sempre e é igual a  $\frac{1}{x}$ .

No caderno de apoio (cf. texto de apoio ao descritor FEL12-3.11) apresenta-se uma demonstração do resultado geral, do qual esta diferenciabilidade poderia ser deduzida como caso particular, relativo à diferenciabilidade, **num ponto de continuidade**, da **inversa** de uma função diferenciável, com **derivada não nula** no ponto correspondente (note-se que este resultado é **falso** se se eliminar a hipótese de **continuidade** no ponto em que se pretende demonstrar a derivabilidade).