

# PROGRAMA e Metas Curriculares Matemática A

## Introdução

**António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira, Luísa Louro, Maria Clementina Timóteo**



GOVERNO DE  
**PORTUGAL**

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
E CIÊNCIA



**Metas Curriculares**

## Alguns apontamentos sobre o Ensino da Matemática no Secundário

**Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, 1989**  
National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)

### Ideias centrais

- A ideia de que o aluno deve ser um “investigador” (inquiry-based learning), que deve ser **confrontado com “situações problemáticas” sem grande preparação prévia**, e construir a partir delas o seu próprio conhecimento (construtivismo);
- O **abandono do ensino** de técnicas elementares e sistemáticas (algoritmos, procedimentos de resolução de problemas rotineiros,...etc);
- **Desprezo pelos conteúdos** (“Não é o que se ensina, é como se ensina”);
- **Abandono da Matemática enquanto corpo de conhecimentos estruturado**; abordagem de problemas avulso;
- Aprendizagem da Matemática de forma **exageradamente intuitiva**; Exagero na utilização de calculadoras e outros **recursos tecnológicos**;
- Desprezo e secundarização da avaliação dita “sumativa”, **recusa de estabelecimento de objetivos** precisos para o ensino;

**A convicção que é desta forma que se atinge a “compreensão Matemática”.**

# Alguns apontamentos sobre o Ensino da Matemática no Secundário

## Críticas dos opositores a este tipo de abordagem («Math Wars»)

- A Matemática é uma ciência cumulativa, que se aprende passo a passo, existindo uma clara **hierarquia na aquisição de conceitos** que deve ser respeitada;
- Memorizar procedimentos e rotinas elementares é um passo fundamental na aprendizagem da Matemática: **não se deve opor memorização e compreensão**;
- Não é razoável pensar que os alunos conseguem redescobrir por si só **conceitos que levaram séculos a depurar**;
- A avaliação **reforça** a aprendizagem;
- **Não é possível ser-se criativo e resolver problemas originais sem uma aprendizagem prévia, estruturada e séria de teorias, linhas de raciocínio e procedimentos clássicos.**

## Alguns apontamentos sobre o Ensino da Matemática no Secundário

**Les savoirs fondamentaux au service de l'avenir scientifique et technique, 2004**

Roger Balian, Jean-Michel Bismut, Alain Connes, Jean-Pierre Demailly, Laurent Lafforgue, Pierre Lelong, Jean-Pierre Serre.

«(...) um objetivo fixado para o 8.º ano é o de **compreender as operações matemáticas**. Trata-se das quatro operações ou de outra coisa, que nós matemáticos, não compreendemos? Tomam os jovens por idiotas ou querem torná-los idiotas?»

«A falta de conhecimentos estruturados dos jovens que finalizam o 12.º ano é de tal ordem que a Matemática, a Física, e **todas as ciências do Ensino Superior tornaram-se simplesmente demasiado difíceis para eles.**»

«Quanto às **calculadoras gráficas**: a utilização dessas **próteses electrónicas** deve ser abandonada enquanto o aluno não tiver obtido um domínio mínimo da análise das funções elementares de uma variável».

## **Alguns apontamentos sobre o Ensino da Matemática no Secundário**

### **Um recuo importante nas posições do NCTM:**

*Curriculum Focal points, 2006*

*Principles and Standards for School Mathematics, 2007*

### **National Mathematics Advisory Panel (NMAP), 2008**

*Foundations for Success: the Final Report of the NMAP*

*Common Core State Standards*

### **Algumas conclusões:**

- Introduzir os conteúdos de forma progressiva, estruturada e coerente;
- Indicar claramente os objetivos a atingir pelos alunos em cada ano curricular;
- Não colocar em oposição a memorização e a compreensão, são aspetos que se reforçam mutuamente;
- Treinar procedimentos rotineiros e conhecer factos e resultados elementares, por forma a que possam ser facilmente mobilizados quando necessário;
- Promover a compreensão conceptual dos objetos matemáticos;
- Utilizar a tecnologia de forma cuidadosa e criteriosa;
- Sensibilizar a comunidade educativa para a estreita relação que existe entre o esforço desenvolvido pelo aluno e o sucesso à disciplina.

# Alguns apontamentos sobre o Ensino da Matemática no Secundário

## O Programa em Vigor

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
<p data-bbox="108 411 678 504"><b>Funções seno, co-seno, tangente.</b></p> <ul data-bbox="108 515 678 822" style="list-style-type: none"><li>■ Estudo intuitivo com base no círculo trigonométrico, tanto a partir de um gráfico particular, como usando calculadora gráfica ou computador.</li><li>■ Estudo intuitivo de</li></ul> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x} .$ <ul data-bbox="108 1036 678 1286" style="list-style-type: none"><li>■ Derivadas do seno, co-seno e tangente.</li><li>■ Utilização de funções trigonométricas na modelação de situações reais.</li></ul>	<p data-bbox="726 411 1846 872">As propriedades a serem investigadas, recorrendo à calculadora gráfica, são: domínio, contradomínio, período, pontos notáveis, monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos YY e à origem, assíntotas, limites nos ramos infinitos. Os estudantes podem investigar, tal como o fizeram nas famílias de funções anteriores, qual a influência da mudança de parâmetros na escrita da expressão que define a função (em casos simples e se possível ligados a problemas de modelação). As derivadas do seno e do co-seno podem ser obtidas a partir das fórmulas do seno e do co-seno da soma e de que</p> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1 .$ <p data-bbox="726 1058 1846 1279">A modelação com funções trigonométricas pode ser feita tanto usando as capacidades específicas da calculadora gráfica (por exemplo, usando a regressão estatística a partir de dados recolhidos experimentalmente ou numa base de dados) como por análise algébrica da adequação de um modelo fornecido pelo professor.</p>

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
<p><b>Funções exponenciais e logarítmicas</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Função exponencial de base superior a um; crescimento exponencial; estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por <math>f(x) = a^x</math> com <math>a &gt; 1</math></li> <li>■ Função logarítmica de base superior a um; estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por <math>f(x) = \log_a x</math> com <math>a &gt; 1</math>.</li> <li>■ Regras operatórias de exponenciais e logaritmos.</li> <li>■ Utilização de funções exponenciais e logarítmicas na modelação de situações reais.</li> </ul>	<p>Com as novas famílias de funções surgem, também, novas oportunidades para cada estudante obter uma maior compreensão da matemática e suas aplicações, bem como para conectar e relacionar os novos conhecimentos com os já adquiridos em anos anteriores (quer dentro do mesmo tema quer com temas diferentes). É fundamental apresentar aos estudantes actividades diversificadas (ver, por exemplo, brochura de apoio ao programa sobre este tema) tendo-se em conta que a exploração com a utilização das várias tecnologias pode permitir discussões ricas, quer sobre o processo de modelação, quer sobre os conceitos matemáticos fundamentais, para além de facilitarem propostas aconselháveis de investigações.</p> <p>Os estudantes precisam de desenvolver a compreensão de procedimentos algébricos e utilizá-los (a par da utilização da calculadora) sem que para isso tenham que fazer exercícios repetitivos.</p> <p>A modelação com funções exponenciais e logarítmicas pode ser feita tanto usando capacidades específicas da calculadora gráfica (por exemplo, usando a regressão estatística a partir de dados recolhidos experimentalmente ou numa base de dados), como por análise algébrica da adequação de um modelo fornecido pelo professor.</p>

O Programa em vigor apresenta uma visão radicalizada da necessidade de aplicação imediata da Matemática ao real:

«[Os temas escolhidos] têm de estar ligados a necessidades reais e fornecer instrumentos de compreensão do real com **utilidade compreensível imediata** (p.1).»

«O ensino de todos estes temas tem de ser suportado em actividades propostas a cada estudantes e a grupos de estudantes que contemplem a modelação matemática, o trabalho experimental e **o estudo de situações realistas** sobre as quais se coloquem questões significativas e se fomente a resolução de problemas não rotineiros (p.2).»

«Tendo o pressuposto **ser o estudante agente da sua própria aprendizagem**, propõe-se uma metodologia em que **os conceitos são construídos a partir da experiência de cada um e de situações concretas...**» (p.10)

Trata-se naturalmente de uma postura radical e de execução, em geral, totalmente irrealista. No Programa de 2014, adopta-se uma postura bem mais equilibrada:

*«Nos enunciados de exercícios e problemas deve ter-se em conta a conveniência de uma progressiva utilização das técnicas e princípios que vão sendo adquiridos, procurando-se um equilíbrio entre a adequação das questões propostas a essa aquisição progressiva e uma ilustração, nem sempre possível, de situações inteiramente inspiradas na vida corrente. Desta maneira, pode ser conveniente, em diversas situações, propor problemas descrevendo situações que não traduzam de modo plenamente realista aspetos da experiência quotidiana dos alunos, mas que sejam particularmente adaptados aos objetivos do ensino de determinadas matérias.» (Programa de 2014)*

No Programa em vigor não se problematiza a questão do tempo de que se deve dispor para o treino do domínio do cálculo, apesar de se reconhecer a sua necessidade:

«A circunferência e a superfície esférica devem ser tratados essencialmente como lugares geométricos sem a preocupação de fazer **múltiplos exercícios que envolvam apenas as suas equações**» (p. 26)

«O tempo deve ser dedicado à compreensão dos conceitos e às aplicações ligadas a problemas reais, **reduzindo-se a ênfase em exercícios de cálculo**» (11º ano, p.1)

«Recorrendo-se ao círculo trigonométrico as relações entre as funções circulares (...) aparecem naturalmente aos estudantes mobilizando unicamente a compreensão dos conceitos já adquiridos. **Não tem pois sentido que lhes sejam propostos exercícios rotineiros em que essas relações intervenham**» (11º ano, p.2)

«Os estudantes precisam de desenvolver a compreensão dos procedimentos algébricos e utilizá-los (a par da utilização da calculadora) **sem que para isso tenham de fazer exercícios repetitivos**» (12º ano, p. 4).

No Programa de 2014 pode ler-se a este respeito que:

«O domínio de procedimentos padronizados deverá ser objeto de particular atenção no ensino desta disciplina. As rotinas e automatismos são essenciais à atividade matemática, uma vez que permitem libertar a memória de trabalho, de modo que esta se possa dedicar, com maior exclusividade, a tarefas que exigem funções cognitivas superiores.»

# Alguns apontamentos sobre o Ensino da Matemática no Secundário

## O Programa em Vigor

Muito marcado pelas ideias do NCTM dos anos 80:

- Grande destaque dado às indicações metodológicas em detrimento dos conteúdos (“Não é o que se ensina, é como se ensina”), plasmado na escolha da largura das colunas e tamanho da fonte.
- Pouco claro quanto aos conteúdos que devem ser ensinados: uso abundante do termo “estudo intuitivo”;
- Protagonismo exagerado dado às novas tecnologias;
- Utilização polvilhada e descontextualizada de termos ligados à investigação e não ao ensino (“As propriedades a serem investigadas...”, “Os estudantes poderão investigar...”, “...propostas aconselháveis de investigação...”, etc.
- Utilização desadequada do termo “compreensão”.

## O novo Programa

- Uma aprendizagem, **progressiva, coerente e estruturada da Matemática**, do 1.º ao 12.º ano de escolaridade (elaboradas cerca de 900 páginas de material);
- **Objetivos claros e avaliáveis;**
- **Utilização criteriosa das novas tecnologias**, por forma a não abafar a compreensão conceptual e a capacidade de resolver problemas dos alunos;
- Aos alunos requerem-se seis desempenhos: Identificar/Designar, Reconhecer, Saber, Provar, Justificar e Interpretar: verbos que exigem aos alunos que **definam** adequadamente os conceitos, que **construam argumentações coerentes**, que saibam **justificar passos** e **elaborar demonstrações** matemáticas o mais rigorosamente possível.
- **Resolver problemas** de complexidade crescente, rotineiros e não rotineiros.

**Devolver a Matemática ao Ensino Secundário**

# O novo Programa

## Autores

### Coordenação pedagógica

Helena Damião – Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Coimbra

Isabel Festas – Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Coimbra

### Coordenação científica

António Bivar – Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (aposentado)

Carlos Grosso – Escola Secundária c/ 3.º Ciclo de Pedro Nunes

Filipe Oliveira – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Maria Clementina Timóteo – Escola Secundária c/ 3.º Ciclo Padre Alberto Neto

Luísa Loura – Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (Probabilidades e Estatística)

# O novo Programa

## Consultores

Armando Machado – Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Cândida Palma – Escola Secundária do Lumiar (aposentada)

Carlos Andrade – Escola Secundária de Mem Martins

Cristina Viegas – Escola Secundária de Henriques Nogueira

Filipe Teixeira – Colégio do Sagrado Coração de Maria

Luciano Batalha dos Santos – Escola Secundária D. Filipa de Lencastre

Luís Canto de Loura – Instituto Superior de Engenharia de Lisboa (aposentado)

Joana Teles – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

José Carlos Santos – Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Jorge Buescu – Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Maria Alice da Silva Martins – Agrupamento de Escolas Artur Gonçalves

Maria Helena Almeida Santos – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Maria Manuela Neves Figueiredo – Instituto Superior de Agronomia

Marília Pires – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve

Paula Reis – Escola Secundária Padre António Vieira

## Os dois grandes eixos das Metas Curriculares

- Estabelecer **objetivos concisos, ensináveis e avaliáveis** para cada ano de escolaridade;
- Dar **liberdade** ao professor **na seleção das estratégias de ensino** adequadas a esses objetivos.

### Estrutura das Metas Curriculares de Matemática

#### Domínios

#### Subdomínio

#### 1. *Objetivo geral*

1. Descritor

2. Descritor

.....

## Domínios

### 10.º ano

- Lógica e Teoria dos Conjuntos (LTC)
- Álgebra (ALG)
- Geometria Analítica (GA)
- Funções Reais de Variável Real (FRVR)
- Estatística (EST)

### 12.º ano

- Cálculo Combinatório (CC)
- Probabilidades (PRB)
- Funções Reais de Variável Real (FRVR)
- Trigonometria e Funções Trigonométricas (TRI)
- Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas (FEL)
- Primitivas e Cálculo Integral (PCI)
- Números Complexos (NC)

### 11.º ano

- Trigonometria e Funções Trigonométricas (TRI)
- Geometria Analítica (GA)
- Sucessões (SUC)
- Funções Reais de Variável Real (FRVR)
- Estatística (EST)

### Declive e inclinação de uma reta

#### 1. Definir a inclinação de uma reta

1. Identificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado de origem  $O$  e dada uma reta  $r$  que passa pela origem e é distinta do eixo  $Ox$ , a «inclinação de  $r$ » como a amplitude do ângulo convexo formado pelo semi-eixo positivo das abcissas e a semirreta  $\overrightarrow{OP}$ , onde  $P$  é um qualquer ponto de  $r$  de ordenada positiva, e identificar a inclinação do eixo das abcissas como a amplitude nula.
2. Identificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado de origem  $O$ , a inclinação de uma reta  $r$  como a inclinação da reta paralela a  $r$  que passa por  $O$ .
3. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado, que o declive de uma reta não vertical é igual à tangente trigonométrica da respetiva inclinação.

# Estrutura das Metas Curriculares de Matemática

## Características dos descritores

- Objetivos e claros;
- Ensináveis e avaliáveis;
- Dentro de um dado objetivo geral, a ordem dos descritores é compatível com uma possível sequência de ensino;
- Normativos do vocabulário matemático;
- Não são sumários. Há por vezes necessidade de trabalhar descritores que pertencem a domínios distintos em simultâneo.

# Linguagem das Metas Curriculares de Matemática

As Metas estão escritas em **linguagem técnica**, com o objetivo de minimizar as ambiguidades de comunicação entre os professores e o Ministério.

## Exemplo:

### Produto escalar

#### 2. Definir e conhecer propriedades do produto escalar de vetores

1. Identificar, fixada uma unidade de comprimento, dados vetores não nulos  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , o «produto escalar (ou interno) de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ » como o número  $\overline{OP} \times \overline{OQ'}$ , (respetivamente o número  $-\overline{OP} \times \overline{OQ'}$ ) onde, fixado um ponto  $O$ ,  $P = O + \vec{u}$ ,  $Q = O + \vec{v}$ ,  $Q'$  é a projeção ortogonal de  $Q$  na reta  $OP$ , se  $\overline{OQ'}$  e  $\overline{OP}$  tiverem o mesmo sentido (respetivamente se tiverem sentidos contrários), reconhecendo que este valor é independente da escolha do ponto  $O$ , identificar o produto escalar de vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  como nulo se um dos vetores for nulo e representar o produto escalar de vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  por « $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ».

## Linguagem das Metas Curriculares de Matemática

Os diferentes descritores estão redigidos de forma objetiva, numa linguagem rigorosa destinada ao professor, devendo este selecionar uma estratégia de ensino adequada à respetiva concretização, incluindo uma adaptação da linguagem, sempre que seja necessária.

## Linguagem das Metas Curriculares de Matemática

O significado preciso de certos verbos com que se iniciam alguns descritores («identificar», «designar», «referir», «representar», «reconhecer», «saber», «provar», «demonstrar», «justificar») encontra-se definido no parágrafo intitulado «Leitura das Metas Curriculares».

«Identificar»/«Designar»/«Referir»/ O aluno deve utilizar corretamente a designação referida, sabendo definir o conceito apresentado como se indica ou de forma equivalente.

7. Designar, dado um polinómio  $P(x)$ , por «raiz do polinómio» (ou «zero do polinómio») qualquer número real  $a$  tal que  $P(a) = 0$ .

## Linguagem das Metas Curriculares de Matemática

«Reconhecer»: O aluno deve apresentar uma argumentação coerente, ainda que eventualmente mais informal do que a explicação fornecida pelo professor. Deve, no entanto, saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados nessa explicação.

12. Reconhecer, dado um polinómio  $P(x)$  de coeficientes inteiros, que o respetivo termo de grau zero é múltiplo inteiro de qualquer raiz inteira desse polinómio.

«Saber»: O aluno deve conhecer o resultado, mas sem que lhe seja exigida qualquer justificação ou verificação concreta.

4. Saber que uma sucessão crescente (respetivamente decrescente) em sentido lato e majorada (respetivamente minorada) é convergente.

## Linguagem das Metas Curriculares de Matemática

«Provar»/«Demonstrar»: O aluno deve apresentar uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível.

3. Demonstrar, dada uma reta numérica e dois pontos  $A$  e  $B$  de abcissas  $a$  e  $b$  respetivamente, que a abcissa do ponto médio do segmento de reta de extremos  $A$  e  $B$  é igual a  $\frac{a+b}{2}$ .

«Justificar»: O aluno deve justificar de forma simples o enunciado, evocando uma propriedade já conhecida.

7. Justificar, fixada uma unidade de comprimento, dado um plano munido de um referencial ortonormado, um ponto  $A(a_1, a_2)$  pertencente a esse plano e um número  $r > 0$ , que a equação  $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = r^2$  é uma equação cartesiana da circunferência de centro  $A$  e de raio  $r$ , e designá-la por «equação (cartesiana) reduzida da circunferência».

## Marcadores Especiais «+» e «#»

Certos descritores encontram-se assinalados com o símbolo «+».

- Relativamente aos que correspondem a propriedades que os alunos devem reconhecer, a procedimentos que devem efetuar ou a problemas que devem resolver, especificaram-se nos Cadernos de Apoio diferentes níveis de desempenho.
- Quanto aos relativos a propriedades que os alunos devem provar, entende-se que, embora todos devam conhecer o resultado em causa e saber aplicá-lo, a elaboração da respetiva demonstração é facultativa, não sendo portanto exigível aos alunos.

Por outro lado, certos grupos de descritores de um mesmo objetivo geral, relativos a conjuntos de demonstrações muito semelhantes entre si, encontram-se assinalados com o símbolo «#», ficando ao critério do professor quais devem ser tratadas como exemplo.

## Marcadores Especiais «+» e «#» - Exemplos

10. #Provar, dadas proposições  $p$  e  $q$ , que a proposição  $\sim(p \Rightarrow q)$  é equivalente à proposição  $p \wedge \sim q$ .
11. #Provar, dadas proposições  $p$  e  $q$ , que a proposição  $p \Leftrightarrow q$  é verdadeira se e somente se  $p \Rightarrow q$  e  $q \Rightarrow p$  forem ambas proposições verdadeiras e designar esta propriedade por «princípio da dupla implicação».
12. #Provar, dada uma proposição  $p$  e representando por  $V$  (respetivamente  $F$ ) uma qualquer proposição verdadeira (respetivamente falsa), que  $p \wedge V \Leftrightarrow p$ ,  $p \vee V \Leftrightarrow V$ ,  $p \vee F \Leftrightarrow p$  e  $p \wedge F \Leftrightarrow F$ .
13. #Provar, dadas proposições  $p$  e  $q$ , que  $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$  e que  $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$  e designar estas equivalências por «Primeiras Leis de De Morgan».
14. #Provar, dadas proposições  $p, q$  e  $r$ , que  $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ ,  $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$  e que  $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ , bem como as que se obtêm permutando em todas as ocorrências os símbolos « $\wedge$ » e « $\vee$ », e designá-las respetivamente por «associatividade», «comutatividade» e «distributividade».
15. #Provar, dadas duas proposições  $p$  e  $q$ , que a proposição  $p \Rightarrow q$  é equivalente à proposição  $\sim q \Rightarrow \sim p$ , designar esta última implicação por «implicação contrarrecíproca da implicação  $p \Rightarrow q$ ».

## Marcadores Especiais «+» e «#» - Exemplos

9. +Reconhecer, dada uma condição  $p(x)$  e um conjunto  $U$ , que a negação da proposição  $\forall x \in U, p(x)$  é equivalente à proposição  $\exists x \in U: \sim p(x)$ , que a negação da proposição  $\exists x \in U: p(x)$  é equivalente à proposição  $\forall x \in U, \sim p(x)$  e designar um elemento  $a \in U$  tal que  $\sim p(a)$  como um «contraexemplo» para a proposição  $\forall x \in U, p(x)$ .

Alguns exemplos de concretização dos Cadernos de Apoio:

1. Escreva afirmações equivalentes à negação das seguintes proposições, utilizando as segundas leis de De Morgan:
  - 1.1 «Existe um colega na minha turma que não tem irmãos»;
  - 1.2 «Todas as pessoas que estão nesta sala estão a usar um chapéu».
4. \*Dado um conjunto  $U$  e uma proposição  $p(x)$ , escreva, na forma de uma implicação quantificada, a proposição  $\forall x \in U, p(x)$  e utilize as segundas Leis de De Morgan para determinar uma proposição equivalente à respetiva negação, escrevendo-a também na forma abreviada.

## Marcadores Especiais «+» e «#» - Exemplos

4. +Provar, dado um triângulo  $[ABC]$ , de lados de medida  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$ , fixada uma unidade de comprimento, e sendo agudo o ângulo interno em  $A$ , que, se  $\alpha = \widehat{BAC}$ ,  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ , e designar este resultado por «Teorema de Carnot» ou «Lei dos cossenos».
  
8. +Provar, dados vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e um número real  $\lambda$ , que  $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$ .
9. +Provar, dados vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , que  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ .
  
8. +Provar, dada uma sucessão  $(u_n)$  limitada e uma sucessão  $(v_n)$  com limite nulo, que  $\lim u_n v_n = 0$ .
  - Quanto aos relativos a propriedades que os alunos devem provar, entende-se que, embora todos devam conhecer o resultado em causa e saber aplicá-lo, a elaboração da respetiva demonstração é facultativa, não sendo portanto exigível aos alunos.

## **Cadernos de Apoio**

São também disponibilizados aos professores Cadernos de Apoio às presentes metas curriculares (um por ano de escolaridade) contendo, em alguns casos, suportes teóricos aos objetivos e descritores, bem como exemplos de concretização de alguns deles. Nesses documentos, os níveis de desempenho esperados foram objeto de especificação.

### **Implementação:**

**10.º ano: 2015/16**

**11.º ano: 2016/17**

**12.º ano: 2017/18**