PROGRAMA
e
Metas Curriculares
Matemática A

A noção de limite no 11.º ano

António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira, Luísa Louro, Maria Clementina Timóteo

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Metas Curriculares

Simplificações inadequadas da noção de limite

Nos últimos anos tem-se assistido, no Ensino Secundário, a uma degradação sistemática no ensino da noção de limite.

Por se tratar do conceito central da Análise Matemática, este facto acaba por ter também consequências gravosas sobre outros temas que figuram nos programas.

As abordagens exageradamente intuitivas (e factualmente erradas) têm criado distorções assinaláveis na aquisição, por parte dos alunos, da noção de limite, distorções essas muito difíceis de reverter mais tarde, mesmo no Ensino Superior.

Estas más práticas são ainda mais incompreensíveis se observarmos que a noção (correta) de limite é até bastante simples e intuitiva.

Metas Curriculares

Simplificações inadequadas da noção de limite

Alguns exemplos (definição)

Dada uma sucessão numérica (u_n) e um número real l, o que significa dizer que (u_n) tende para l (ou seja, que o limite da sucessão (u_n) é igual a l) ?

«Significa que (u_n) "se aproxima cada vez mais" de l.»

Esta afirmação está duplamente errada.

- uma sucessão pode "aproximar-se cada vez mais" de um valor l sem tender para l.
  Exemplo: $u_n = \frac{1}{n}, l = -1$.
- uma sucessão pode tender para l sem se aproximar cada vez mais, ou seja, sem que a função que a n associa a distância de u_n a l seja decrescente.
  Exemplo: $u_n = 1 - \frac{1+(-1)^n}{n}, l = 1$.

Metas Curriculares

Simplificações inadequadas da noção de limite

Alguns exemplos (definição)

Uma variante:

«Significa que (u_n) se aproxima cada vez mais de l sem nunca o atingir.»

Esta noção de que a sucessão "não atinge nunca o seu limite" é naturalmente falsa…

- $u_n = \frac{1}{n}$ tende para $l = 0$ e, de facto, para todo o $n, u_n \neq 0$.
- A sucessão constante $u_n = 1$ atinge o seu limite logo a partir do primeiro termo.
- A sucessão $u_n = \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}$ atinge o seu limite em todos os termos de ordem par…

Metas Curriculares

Simplificações inadequadas da noção de limite

Alguns exemplos (propriedades)

Colocar a noção de limite nestes termos («…aproxima-se cada vez mais…», «…nunca chega a atingir…», etc, para além de errado, leva a que se reconheçam intuitivamente propriedades também elas falsas:

«Uma sucessão de termos positivos que tende para 0 é obrigatoriamente decrescente, pelo menos a partir de certa ordem.»

Falso: $u_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$

«Uma sucessão que tende para $+\infty$ é crescente, pelo menos a partir de certa ordem.»

Falso: Tomar $v_n = \frac{1}{u_n}$, onde u_n designa o termo geral da sucessão anterior.

Simplificações inadequadas da noção de limite

Alguns exemplos (propriedades)

Estes erros propagam-se depois a outros conteúdos mais complexos, construídos a partir da noção de limite:

«O gráfico de uma dada função nunca chega a intersetar uma sua assimptota.»

Falso: $f(x) = x + \frac{\sin(x)}{x}$, $y = x$

$f(x) = 3x, y = 3x$

Metas Curriculares

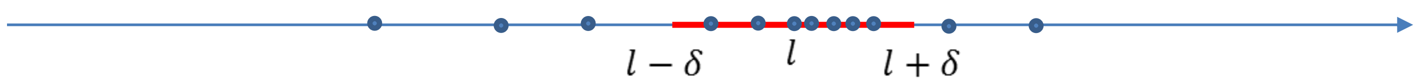
Como introduzir então adequadamente a noção de limite?

Dada uma sucessão numérica (u_n)e um número real l, diz-se que «(u_n) tende para l», quando para qualquer intervalo que se tome centrado em l, os termos u_n pertencem todos a esse intervalo a partir de certa ordem.

(descritor SUC11-6.1:)
Diz-se que $\lim u_n = l$ se para todo o real $\delta > 0$ existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq p \Longrightarrow |u_n - l| < \delta.$$

Isto é, $u_n \in]l-\delta, l+\delta[$ a partir da ordem p.



Ordem p

Intuitivamente, os termos da sucessão estão, a partir de certa ordem, "tão próximos do limite l quanto se queira".

Metas Curriculares

Como introduzir então adequadamente a noção de limite?

As Metas Curriculares prevêm um certo número de demonstrações extremamente simples que permitem, em particular, adquirir de forma mais segura a noção de limite:

SUC11-1.2: Unicidade do limite

Seja (u_n) uma sucessão com dois limites a e b distintos.
Sejam I_a e I_b dois intervalos centrados respetivamente em a e b que não se intersetam. Por exemplo $I_a =]a-r, a+r[$e $I_b =]b-r, b+r[$,
onde $r = \frac{1}{4}|b-a|$é um quarto da distância de a a b.)

Os termos da sucessão não podem pertencer, a partir de uma ordem p_1 a um dos intervalos e a partir de uma ordem $p_2$ao outro. Qualquer termo de ordem n simultaneamente superior a p_1 e a p_2 teria de pertencer a ambos os intervalos, o que é impossivel…

Metas Curriculares

Como introduzir então adequadamente a noção de limite?

SUC11-1.9: Provar que $\lim u_n = \lim \frac{2n+1}{n+3} = 2$.

Seja $\delta > 0$. Basta exibir uma ordem p a partir da qual $|u_n - 2| < \delta$.

$$|u_n - 2| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{2n+1}{n+3} - 2\right| < \delta \Leftrightarrow \frac{5}{n+3} < \delta \Leftrightarrow \frac{5}{\delta} - 3 < n.$$

Basta pois tomar qualquer natural p superior a $\frac{5}{\delta} - 3$.

Como introduzir então adequadamente a noção de limite?

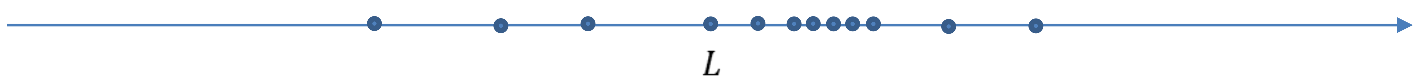
Limites infinitos

O significado de $\lim u_n = +\infty$ e de $\lim u_n = -\infty$ é apresentado nos descritores SUC11-1.5 e SUC11.1.6.

$\lim u_n = +\infty$ significa simplesmente que os termos u_n são superiores, a partir de certa ordem, a qualquer número real positivo L pré-fixado:

Para todo $L > 0$ existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq p \Longrightarrow u_n > L\,.$$



Ordem p

Também para os limites infinitos as Metas Curriculares prevêm algumas demonstrações simples que permitem adquirir com segurança o conceito:

Como introduzir então adequadamente a noção de limite?

SUC11-1.5
Reconhecer que se $\lim u_n = +\infty$, (u_n) é divergente.

Suponhamos que (u_n) é convergente, de limite $l \in \mathbb{R}$.
Então, existe uma ordem p_1 tal que, para todo $n \geq p$, $u_n \in]l-1, l+1[$.
Como $\lim u_n = +\infty$, existe uma ordem p_2 tal que, para todo $n \geq p$, $u_n > \mathrm{l} + 1$.

Qualquer termo u_n de ordem simultaneamente superior a p_1 e a p_2 tem de ser superior e inferior a $\mathrm{l} + 1$, o que é impossivel.

SUC11-1.9: Provar que $\lim u_n = \lim 3n + 1 = +\infty$.
Seja $L > 0$. Basta exibir uma ordem p a partir da qual $u_n > L$.

$u_n > L \Leftrightarrow 3\mathrm{n} + 1 > L \Leftrightarrow n > \frac{L-1}{3}$.
Basta pois tomar qualquer natural p superior a $\frac{L-1}{3}$.

Metas Curriculares

A consolidação da noção de limite de uma sucessão poderá ser efetuada pedindo aos alunos que mostrem, por definição, neste tipo de exemplos, que uma dada sucessão tem um dado limite.

Descritor SUC11 6.9

9. Provar, dados números reais a, b, c e d e utilizando a definição de limite, que o limite da sucessão de termo geral $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$ ($cn + d \neq 0$ para todo o n) é igual a $\frac{a}{c}$ se $c \neq 0$, a $+\infty$, se $c = 0$ e $\frac{a}{d} > 0$, a $-\infty$ se $c = 0$ e $\frac{a}{d} < 0$ e a $\frac{b}{d}$, se $a = c = 0$, ou seja, em particular, que o limite de uma sucessão constante é igual à própria constante.

Metas Curriculares

Teoremas envolvendo limites

O estudo da «álgebra dos limites», incluindo as situações ditas «indeterminadas» encontra-se expresso numa longa lista de descritores do domínio SUC11 (descritores 6.11 a 6.26).

Nessa lista abunda o símbolo «#», indicando-se assim que não é necessário efetuar um estudo sistemático de todas essas propriedades. Ainda que os alunos devam conhecer todos estes resultados, e saber aplicá-los, o professor poderá escolher apenas algumas das propriedades para tratar de forma mais detalhada na sala de aula.

11. Provar, dadas duas sucessões (u_n) e (v_n) convergentes, com limites respetivamente iguais a l_1 e l_2, que a sucessão $(u_n + v_n)$ é convergente e que $\lim\ (u_n + v_n) = l_1 + l_2$.
12. #Provar, dadas duas sucessões (u_n) e (v_n) convergentes, com limites respetivamente iguais a l_1 e l_2, que a sucessão $(u_n v_n)$ é convergente e que $\lim u_n v_n = l_1 l_2$.
13. #Provar, dada uma sucessão (u_n) convergente de termos não nulos, com limite l_1 não nulo, que $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l_1}$ e justificar que se for também dada uma sucessão $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, com limite l_2 então a sucessão $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ é convergente e $\lim \frac{v_n}{u_n} = \frac{l_2}{l_1}$.
14. #Provar, dada uma sucessão convergente (u_n) e um número real a, que a sucessão de termo geral au_n é convergente e que $\lim\ (au_n) = a \lim u_n$.
15. #Provar, dada uma sucessão convergente (u_n) e um número racional r, que, se $r \in \mathbb{N}$, ou se os termos da sucessão forem todos não negativos e r for positivo, ou ainda se os termos da sucessão forem todos positivos, então a sucessão de termo geral $(u_n)^r$ é convergente e $\lim\ (u_n)^r = (\lim u_n)^r$.
16. Provar, dadas sucessões (u_n) e (v_n), com limites respetivamente $+\infty$ e $l \in \mathbb{R}$ (ou ambas com limite $+\infty$), que $\lim(u_n + v_n) = +\infty$ e representar esta propriedade por «$+\infty + l = +\infty$» (ou por «$+\infty + (+\infty) = +\infty$»).
17. #Provar, dadas sucessões (u_n) e (v_n), com limites respetivamente $-\infty$ e $l \in \mathbb{R}$ (ou ambas com limite $-\infty$), que $\lim(u_n + v_n) = -\infty$ e representar esta propriedade por «$-\infty + l = -\infty$» (ou por «$-\infty + (-\infty) = -\infty$»).

18. Justificar, dadas sucessões (u_n) e (v_n), que apenas da informação $\lim u_n = +\infty$ e $\lim v_n = -\infty$ nada se pode concluir acerca da existência de $\lim(u_n + v_n)$ e referir esta situação por «indeterminação do tipo $(+\infty) + (-\infty)$».

19. #Provar, dadas sucessões (u_n), com limite $+\infty$, e (v_n) com limite $l \in \mathbb{R}^+$ ou $+\infty$ (respetivamente com limite $l \in \mathbb{R}^-$ ou $-\infty$), que $\lim(u_n v_n) = +\infty$ (respetivamente $\lim(u_n v_n) = -\infty$) e representar estas propriedades por «$(+\infty) \times l = +\infty$» e «$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$» (respetivamente por «$(+\infty) \times l = -\infty$» e «$(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$»).

20. #Provar, dadas sucessões (u_n), com limite $-\infty$, e (v_n) com limite $l \in \mathbb{R}^+$ (respetivamente com limite $l \in \mathbb{R}^-$ ou $-\infty$), que $\lim(u_n v_n) = -\infty$ (respetivamente $\lim(u_n v_n) = +\infty$) e representar esta propriedade por «$(-\infty) \times l = -\infty$» (respetivamente por «$(-\infty) \times l = +\infty$» e «$(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$»).

21. #Provar, dada uma sucessão (u_n) com limite $+\infty$ e de termos não negativos (respetivamente com limite $-\infty$) e um número racional r positivo (respetivamente $r \in \mathbb{N}$), que a sucessão de termo geral u_n^r tem limite $+\infty$ (respetivamente tem limite $+\infty$ se r for par e limite $-\infty$ se r for ímpar) e representar esta propriedade por «$(+\infty)^r = +\infty$» (respetivamente por «$(-\infty)^r = +\infty$» se r for par e por «$(-\infty)^r = -\infty$» se r for ímpar).

22. Justificar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) que apenas da informação $\lim u_n = +\infty$ (ou $\lim u_n = -\infty$) e $\lim v_n = 0$ nada se pode concluir acerca da existência de $\lim(u_n v_n)$ e referir esta situação por «indeterminação do tipo $\infty \times 0$».
23. #Provar, dada uma sucessão (v_n) de termos não nulos, positiva a partir de certa ordem, com limite nulo («$\lim v_n = 0^+$»), que $\lim \frac{1}{v_n} = +\infty$ e representar esta propriedade por «$\frac{1}{0^+} = +\infty$».
24. #Provar, dada uma sucessão (v_n) de termos não nulos, negativa a partir de certa ordem, com limite nulo («$\lim v_n = 0^-$»), que $\lim \frac{1}{v_n} = -\infty$ e representar esta propriedade por «$\frac{1}{0^-} = -\infty$».
25. #Provar, dada uma sucessão (v_n) de termos não nulos e a tender para $+\infty$ ou para $-\infty$, que $\lim \frac{1}{v_n} = 0$ e representar esta propriedade por «$\frac{1}{\infty} = 0$».
26. Justificar, dadas sucessões (v_n) e (v_n), que apenas da informação $\lim u_n = \pm\infty$ e $\lim v_n = \pm\infty$ (respetivamente $\lim u_n = \lim v_n = 0$, onde (v_n) não se anula) nada se pode concluir acerca da existência do limite $\lim \frac{u_n}{v_n}$ e referir esta situação por «indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$» (respetivamente «indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$»).

Um limite bastante importante, cuja demonstração se encontra preconizada no descritor SUC11 6.30, ainda que a título facultativo é o limite $\lim \sqrt[n]{a}$, onde $a > 0$:

30. +Provar, dado um número real $a > 0$, que $\lim \sqrt[n]{a} = 1$, começando por observar, no caso de $a \geq 1$, que $1 \leq a \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$.

Esta prova poderá ser efetuada sem utilizar o «binómio de Newton» nem o «Teorema das Sucessões enquadradas», resultados que se encontram previstos para o 12.º ano de escolaridade.

Com efeito, utilizando simplesmente a propriedade distributiva da multiplicação, poderá observar-se que

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = 1^n + n\frac{a}{n} + \text{"}termos\ não\ negativos\text{"} \geq a$$

Desta forma, se $a \geq 1$, obtém-se a desigualdade anunciada, ou ainda$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq 1 + \frac{a}{n}$

Fixado $\varepsilon > 0$, obtém-se para $N > \frac{a}{\varepsilon}$ que $\sqrt[n]{a} \in]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[$.

O caso $0 < a < 1$ decorre então da igualdade $\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

Metas Curriculares