PROGRAMA
e
Metas Curriculares
Matemática A

Lógica e Teoria dos Conjuntos

António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira, Luísa Loura, Maria Clementina Timóteo

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Metas Curriculares

Lógica e Teoria dos Conjuntos

O tema de Lógica e Teoria dos Conjuntos faz parte do programa ainda em vigor, ainda que como Tema transversal:

■ Lógica e Raciocínio	
▪ Noções de lógica	Todas as noções de lógica e teoria de conjuntos devem ser introduzidas à medida que vão sendo precisas ou recorrendo a exemplos concretos de matéria usada: resolução de equações e inequações, propriedades dos módulos, propriedades das funções, axiomática das probabilidades. Alguns pequenos exemplos ligados ao trabalho com $\mathbb{R}$ e suas propriedades podem servir como exemplos de esclarecimento de alguma operação lógica. Terá de haver referências simultâneas a operações com condições e operações com conjuntos bem como à implicação formal e inclusão, para além das referências a algumas propriedades como a transitividade. Assuntos como a lei da conversão, as primeiras leis de De Morgan e os quantificadores não podem deixar de aparecer à medida que forem necessários.

Metas Curriculares

Lógica e Teoria dos Conjuntos

Também se explicita como devem (e como não devem) ser tratados os temas transversais, incluindo portanto a Lógica e Teoria dos Conjuntos:

As questões de lógica e de teoria de conjuntos são referidas entre os temas transversais, com um determinado desenvolvimento. Procura-se, deste modo, influenciar os professores no sentido de não abordar estas questões como conteúdo em si, mas de as utilizar quotidianamente em apoio do trabalho de reflexão científica que os actos de ensino e de aprendizagem sempre comportam, e só na medida em que elas vêm esclarecer e apoiar uma apropriação verdadeira dos conceitos. Como temas transversais consideram-se as formas de organizar o pensamento e as actividades de resolução de problemas, as aplicações e a modelação matemática, aspectos da história da matemática, da comunicação matemática e da utilização da tecnologia. Não podem nem devem ser localizadas temporalmente na leccionação e muito menos num determinado ano de escolaridade, antes devem ser abordadas à medida que forem sendo necessárias e à medida que for aumentando a compreensão sobre os assuntos em si, considerando sempre o sentido de oportunidade, as vantagens e as limitações.

Metas Curriculares

Lógica e Teoria dos Conjuntos

Assim, o tema de Lógica e Teoria dos Conjuntos **não constitui uma novidade** do Programa de 2014, relativamente ao ainda em vigor.

No entanto, de acordo com a filosofia do novo programa, tal como em todos os outros domínios, é muito maior a **explicitação** dos conteúdos, embora, como se verificou, já fossem genericamente referidos no programa anterior.

Em contrapartida, também de acordo com os propósitos expressos no novo programa, **não há directivas rígidas** relativamente ao **modo** como os conteúdos devem ser abordados, para além de se estabelecer o **ano lectivo** no fim do qual determinados conteúdos já devem ter sido lecionados, divergindo-se neste caso expressamente do que o programa em vigor recomenda.

Deste modo, **não se impede** nem se **desaconselha** aos professores a abordagem destes temas "**como conteúdo em si**" ou de os "**localizarem temporalmente**" na lecionação, ou seja, de dedicarem aulas ou partes de aulas a esclarecer questões e introduzir temas de Lógica e Teoria dos Conjuntos enquanto tais.

No entanto, também **não se impede**, nem se **desaconselha**, que os professores utilizem **muitas vezes** ou até **preferencialmente**, situações **concretas** de temas a lecionar ou de **revisão** do Ensino Básico para introduzirem e utilizarem os conceitos e resultados básicos deste domínio, como era exclusivamente recomendado no programa em vigor.

Metas Curriculares

Lógica e Teoria dos Conjuntos

O programa de 2014 determina:

O domínio *Lógica e Teoria dos Conjuntos* pode ser considerado **central** neste ciclo de estudos, uma vez que reúne temas **fundamentais** e **transversais** a todo o Ensino Secundário. Começa-se por introduzir algumas **operações sobre proposições**, de forma **intuitiva** e no contexto de uma **Lógica bivalente** em que valem os Princípios de **não contradição** e do **terceiro excluído**. Em seguida, é estudada a **quantificação universal e existencial de condições** e a relação entre **operações** sobre **condições** e sobre os respetivos **conjuntos-solução**, assunto que já tinha sido visitado, de forma menos específica, no **Ensino Básico**. É, ainda, a oportunidade para traduzir numa linguagem própria das teorias aqui desenvolvidas algumas **técnicas elementares de demonstração**, como a prova da igualdade entre conjuntos por **dupla inclusão** ou a prova de uma implicação pelo **contrarrecíproco**. De acordo com os princípios gerais de interpretação das Metas Curriculares, tal como estão enunciados na respetiva introdução, este estudo pode, naturalmente, ser **integrado** no tratamento de conteúdos pertencentes a **outros domínios** assim como em **revisões** de conteúdos de anos anteriores.

Metas Curriculares

Lógica e Teoria dos Conjuntos

Já no Ensino Básico, tanto no programa de 2007 como no novo programa se referia o **raciocínio matemático** e questões afins, como a **axiomatização** enquanto temas a serem tratados, mas também aqui, no novo programa do Básico, houve uma maior explicitação (GM9-1):

1. *Utilizar corretamente o vocabulário próprio do método axiomático*

   1. Identificar uma «teoria» como um dado conjunto de proposições consideradas verdadeiras, incluindo-se também na teoria todas as proposições que delas forem dedutíveis logicamente.
   2. Reconhecer, no âmbito de uma teoria, que para não se incorrer em raciocínio circular ou numa cadeia de deduções sem fim, é necessário fixar alguns objetos («objetos primitivos»), algumas relações entre objetos que não se definem a partir de outras («relações primitivas»), e algumas proposições que se consideram verdadeiras sem as deduzir de outras («axiomas»).
   3. Designar por «axiomática de uma teoria» um conjunto de objetos primitivos, relações primitivas e axiomas a partir dos quais todos os objetos e relações da teoria possam ser definidos e todas as proposições verdadeiras demonstradas e utilizar corretamente os termos «definição», «teorema» e «demonstração» de um teorema.
   4. Saber que os objetos primitivos, relações primitivas e axiomas de algumas teorias podem ter interpretações intuitivas que permitem aplicar os teoremas à resolução de problemas da vida real e, em consequência, testar a validade da teoria como modelo da realidade em determinado contexto.
   5. Distinguir «condição necessária» de «condição suficiente» e utilizar corretamente os termos «hipótese» e «tese» de um teorema e o símbolo «$\Rightarrow$».

Lógica e Teoria dos Conjuntos

(**Observação**: no descritor 1.3 não se pretende contradizer o 1º Teorema de Gödel! As "proposições verdadeiras" que se referem são as que podem ser demonstradas utilizando os processos dedutivos admitidos na teoria em questão, pelo que não se nega a existência de **verdades semânticas** como as que Gödel mostrou existirem, cuja veracidade pode ser argumentada logicamente mas que não podem ser demonstradas **formalmente** na teoria em que se podem exprimir, desde que esta tenha as características das hipóteses do referido Teorema. A este nível também não se está, evidentemente, a formalizar rigorosamente o que se entende por "demonstrar" ou "deduzir logicamente".)

Noções informais acerca de conjuntos também já vinham a ser introduzidas desde o primeiro ano de escolaridade:

NO1-1:

1. Verificar que dois conjuntos têm o mesmo número de elementos ou determinar qual dos dois é mais numeroso utilizando correspondências um a um.
4. Associar pela contagem diferentes conjuntos ao mesmo número natural, o conjunto vazio ao número zero e reconhecer que um conjunto tem menor número de elementos que outro se o resultado da contagem do primeiro for anterior, na ordem natural, ao resultado da contagem do segundo.

Metas Curriculares

Lógica e Teoria dos Conjuntos

OTD1-1:

1. Utilizar corretamente os termos «conjunto», «elemento» e as expressões «pertence ao conjunto», «não pertence ao conjunto» e «cardinal do conjunto».
2. Representar graficamente conjuntos disjuntos e os respetivos elementos em diagramas de Venn.

NO2-7:

3. Efetuar uma dada multiplicação fixando dois conjuntos disjuntos e contando o número de pares que se podem formar com um elemento de cada, por manipulação de objetos ou recorrendo a desenhos e esquemas.

OTD2-1:

1. *Operar com conjuntos*
   1. Determinar a reunião e a interseção de dois conjuntos.
   2. Construir e interpretar diagramas de Venn e de Carroll.
   3. Classificar objetos de acordo com um ou dois critérios.

OTD2-3:

2. Organizar conjuntos de dados em diagramas de Venn e de Carroll.

Lógica e Teoria dos Conjuntos

ALG7-3:

1. Identificar, dadas duas funções f e g, uma «equação» com uma «incógnita x» como uma expressão da forma «$f(x) = g(x)$», designar, neste contexto, «$f(x)$» por «primeiro membro da equação», «$g(x)$» por «segundo membro da equação», qualquer a tal que $f(a) = g(a)$ por «solução» da equação e o conjunto das soluções por «conjunto-solução».

GM9-4:

4. Identificar «lugar geométrico» como o conjunto de todos os pontos que satisfazem uma dada propriedade.

Ao longo de todo o Ensino Básico utiliza-se extensamente a linguagem dos conjuntos e desde o 1º ciclo se relacionam **conjuntos** com **condições,** por exemplo, ao relacionarem-se diagramas de **Venn** com diagramas de **Carroll**, na definição de **conjunto-solução** de equação ou no conceito de **lugar geométrico,** em que expressamente se traduz essa relação na linguagem tradicional da Geometria elementar.

No 10º ano sistematizam-se conhecimentos acerca de **operações lógicas** sobre **proposições** e consequentemente sobre **condições** e as respectivas relações com **operações** sobre **conjuntos**, o que será completado no 12º ano. Trata-se de uma boa ocasião para rever conteúdos abordados no Ensino básico, nomeadamente de Geometria (mas não só), agora com atenção especial ao **rigor** e **correcção do raciocínio**.

Metas Curriculares

Lógica e Teoria dos Conjuntos

Essas ocasiões vão multiplicar-se ao longo de todo o Ensino secundário, permitindo uma consolidação dos conceitos e propriedades abordados neste domínio.

No 10º os conteúdos especificados para este domínio são os seguintes, começando com os conceitos mais básicos (LTC10-1):

1. Designar por «**proposição**» toda a expressão p suscetível de ser «**verdadeira**» ou «**falsa**» e designar estes atributos por «**valores lógicos**».
2. Saber que uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa e designar esta propriedade por «**Princípio de não contradição**».
3. Saber, dadas proposições p e q, que «$\boldsymbol{p}$ **é equivalente a** $\boldsymbol{q}$» é uma proposição, designada por «**equivalência** entre p e q», que é verdadeira se e somente se p e q tiverem o mesmo valor lógico e representá-la também por «$p \Leftrightarrow q$».
4. Saber, dada uma proposição p, que «**não** $\boldsymbol{p}$» é uma proposição, designada por «**negação** de p», que é verdadeira se p for falsa e é falsa se p for verdadeira e representá-la também por «$\sim p$».
5. **Justificar**, dada uma proposição p, que $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$, designando esta propriedade por «**lei da dupla negação**».
6. Saber, dadas proposições p e q, que «$\boldsymbol{p}$ **e** $\boldsymbol{q}$» é uma proposição, designada por «**conjunção** de p e q», que é verdadeira se e somente se p e q forem simultaneamente verdadeiras, e representá-la também por «$p \wedge q$».

Metas Curriculares

Lógica e Teoria dos Conjuntos

7. Saber, dadas proposições p e q, que «$\boldsymbol{p}$ **ou** $\boldsymbol{q}$» é uma proposição, designada por «**disjunção** de p e q», que é falsa se e somente se p e q forem simultaneamente falsas, representá-la também por «$p \vee q$» e justificar que $p \vee \sim p$ é uma proposição verdadeira, designando esta propriedade por «Princípio do terceiro excluído».
8. Saber, dadas proposições p e q, que «$\boldsymbol{p}$ **implica** $\boldsymbol{q}$» é uma proposição, designada por «**implicação** entre p e q», que é falsa se e somente se p for verdadeira e q for falsa, representá-la também por «$p \Rightarrow q$», designar p por «antecedente» e q por «consequente» da implicação e reconhecer, dada uma proposição r, que se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow r$ então $p \Rightarrow r$.
9. Saber que, por convenção, em qualquer sequência de operações lógicas, a menos de utilização de parênteses, se respeitam as seguintes **prioridades**: negação; conjunção e disjunção; implicação e equivalência.

Em seguida pretende-se **provar** algumas **propriedades** das operações acima introduzidas, tal como se pediu a **justificação** (elementar) da lei da dupla negação.

Metas Curriculares

Lógica e Teoria dos Conjuntos

Não se pretende que se demonstrem **exaustivamente** todas as propriedades que se seguem, mas que se **exemplifiquem** algumas dessas demonstrações (o que se assinala com o símbolo #).

Para o efeito podem utilizar-se tanto **tabelas de verdade** como, em alternativa, argumentos que as **dispensem** baseados nas definições ou em propriedades antes verificadas. Também será oportuno examinarem-se exemplos concretos em diversos domínios dentro e fora da Matemática. Temos assim:

10. **#Provar**, dadas proposições p e q, que a proposição $\sim(p \Rightarrow q)$ é equivalente à proposição $p \wedge \sim q$.
11. **#Provar**, dadas proposições p e q, que a proposição $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira se e somente se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ forem ambas proposições verdadeiras e designar esta propriedade por «**princípio da dupla implicação**».
12. **#Provar**, dada uma proposição p e representando por V (respetivamente F) uma qualquer proposição verdadeira (respetivamente falsa), que $p \wedge V \Leftrightarrow p$, $p \vee V \Leftrightarrow V$, $p \vee F \Leftrightarrow p$ e $p \wedge F \Leftrightarrow F$.
13. **#Provar**, dadas proposições p e q, que $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ e que $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ e designar estas equivalências por «**Primeiras Leis de De Morgan**».

Metas Curriculares

Lógica e Teoria dos Conjuntos

14. #Provar, dadas proposições p, q e r, que $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$, $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ e que $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$, bem como as que se obtêm permutando em todas as ocorrências os símbolos «$\wedge$» e «$\vee$», e designá-las respetivamente por «**associatividade**», «**comutatividade**» e «**distributividade**».

15. #Provar, dadas duas proposições p e q, que a proposição $p \Rightarrow q$ é equivalente à proposição $\sim q \Rightarrow \sim p$, designar esta última implicação por «**implicação contrarrecíproca** da implicação $p \Rightarrow q$».

16 **+Simplificar** expressões envolvendo operações com proposições, substituindo-as por proposições equivalentes envolvendo menos símbolos, e determinar o respetivo valor lógico sempre que possível.

Por exemplo, para estabelecer a propriedade distributiva da conjunção relativamente à disjunção podemos utilizar a seguinte tabela:

Metas Curriculares

Lógica e Teoria dos Conjuntos

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Para preencher cada coluna relativa a uma **operação** limitámo-nos a utilizar o conhecimento da **tabela de verdade** dessa operação e os valores lógicos das proposições operandas constantes, nessa mesma linha, das colunas anteriores que lhes correspondem. A **identidade dos valores lógicos** representados em cada linha nas **quinta** e **oitava** colunas revela que as proposições $p \wedge (q \vee r)$ e $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ têm sempre o **mesmo valor lógico**, ou seja, são sempre **equivalentes**.

Não é assim **necessário** completar a tabela com uma coluna relativa à proposição $\big(p \wedge (q \vee r)\big) \Leftrightarrow \big((p \wedge q) \vee (p \wedge r)\big)$; tal coluna seria, evidentemente, inteiramente preenchida com o símbolo «V», ou seja, a expressão a que se refere é o que se chama uma «**tautologia**», por ser verdadeira independentemente dos valores lógicos das proposições p, q e r.

Lógica e Teoria dos Conjuntos

Em lugar de utilizarmos a tabela de verdade, para demonstrarmos esta propriedade poderíamos argumentar de modo mais **discursivo**, fazendo notar, por exemplo, que a proposição $p \wedge (q \vee r)$, tratando-se de uma **conjunção**, é verdadeira se e somente se p e $q \vee r$ forem **ambas** verdadeiras.

Basta-nos então verificar que **o mesmo** se passa com a proposição $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$; ora, por um lado, esta proposição é **obviamente verdadeira** se p e $q \vee r$ o forem ambas, pois, nesse caso, ou q é verdadeira e portanto $p \wedge q$ também o é, ou, caso contrário, r é verdadeira (já que $q \vee r$ o é) e então $p \wedge r$ é verdadeira. Assim **pelo menos uma** das proposições $p \wedge q$ ou $p \wedge r$ tem de ser verdadeira, ou seja, $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ é **verdadeira**.

Reciprocamente, se $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ for **verdadeira**, uma **pelo menos** das conjunções $p \wedge q$ ou $p \wedge r$ é **verdadeira**; assim, em qualquer caso, p é **verdadeira** (é operanda de ambas as conjunções) e **uma** das proposições q ou r também tem de o ser (cada uma delas é operanda numa das **conjunções**). Mas nesse caso é verdadeira também a **disjunção** $q \vee r$. Assim, como pretendíamos, a proposição $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ é verdadeira se e somente se p e $q \vee r$ o forem ambas, tal como a proposição $p \wedge (q \vee r)$; trata-se assim de **proposições equivalentes**.

Metas Curriculares

Lógica e Teoria dos Conjuntos

Sistematiza-se em seguida a relação entre **condições** e **conjuntos** e introduzem-se os **quantificadores**.

Note-se que a relação estabelecida entre **condições** e **proposições** dispensa que se tenham de **definir** as **operações** atrás introduzidas no quadro das condições.

Refiram-se algumas das principais limitações da abordagem seguida, resultantes da preocupação de não aumentar indevidamente o grau de complexidade deste domínio:

- Não se referiu explicitamente a distinção entre “**termo**” ou “**designação**” e “**objecto**” nem se introduziu a noção de “**expressão designatória**”.

- Neste domínio apenas se tratam explicitamente condições com **uma só variável** e consequentemente as **quantificações múltiplas** são tratadas em todo o programa de modo menos formalizável do que as simples.

Metas Curriculares

Lógica e Teoria dos Conjuntos

Analisemos agora uma das opções do programa relativa à introdução das condições. A discussão que se segue **não se destina**, evidentemente aos **alunos**, mas pretende-se que esclareça algumas dúvidas que se podem colocar a professores e autores de manuais.

Na definição de **expressão proposicional** ou **condição** optou-se por não fixar à partida um “**universo**” como “domínio” para a variável. Com efeito, as condições mais **primitivas** que permitem a **construção** dos **conjuntos básicos** que intervêm nas **teorias matemáticas** envolvem **variáveis** representadas por **letras** e que, intuitivamente, representam **objectos genéricos** da Matemática os quais **não constituem**, à partida, um **conjunto**.

Desta forma, nesses casos, as variáveis podem ser substituídas por quaisquer “**termos**” (**expressões** representando **objectos matemáticos**), sem que se limite à partida essa substituição a elementos de um **conjunto pré-fixado**, e tal substituição conduz sempre a uma **expressão admissível**, trate-se ou não de uma proposição verdadeira.

Metas Curriculares

Lógica e Teoria dos Conjuntos

Por exemplo, a condição $\sim(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x})$, negação da condição $x = x$, permite definir o chamado **conjunto vazio** (no sentido preciso que veremos mais adiante) e, sendo já dados dois conjuntos A e B, a condição $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$ permite definir o conjunto união de A e B.

A possibilidade de **construir** um conjunto através de uma dada **condição** com uma variável fica regulada pelos **axiomas** utilizados para a **Teoria dos Conjuntos**, sendo certo que **nem todas** as condições admissíveis permitem **definir um conjunto** no sentido acima referido.

À medida que se vão definindo conjuntos através de condições progressivamente mais elaboradas e introduzindo as habituais **abreviaturas** da linguagem matemática é depois usual utilizar condições em cuja formulação fica **explícito** ou **implícito** que todos os **objectos** que a transformam numa **proposição verdadeira**, por substituição da variável por um termo representando um desses objectos, pertencem a determinado **conjunto já definido**.

Uma tal condição pode assim considerar-se associada a determinado **conjunto** que pode ser designado por "**universo**" dessa condição e que se sabe *a priori* conter todos os objectos que satisfazem a referida condição. Do mesmo modo, nas condições utilizadas na linguagem comum, habitualmente considera-se implícita ou explicitamente que a variável representa um objecto genérico de determinado domínio de variação que se supõe fixado.

Lógica e Teoria dos Conjuntos

Como exemplo envolvendo condições para as quais não faz sentido fixar um universo *a priori* temos, no caderno de apoio do 10º ano o seguinte (a propósito das noções de condição universal, impossível e possível – LCT10-2.3 e 2.5):

1. Considere as condições «$x = x$», «$x \neq x$», «$x \in \mathbb{N}$», «$x \notin \mathbb{R}$», «$x \in \emptyset$» e «$x \notin \emptyset$».
   1.1. Indique as que são universais, as que são possíveis e as que são impossíveis.
   1.2. *Tendo em conta a alínea anterior, para cada uma das seguintes condições, indique se é possível, impossível ou universal:
      1.2.1. $x \neq x \wedge x \in \mathbb{N}$
      1.2.2. $x = x \vee x \in \emptyset$
      1.2.3. $x \in \mathbb{N} \vee x \in \emptyset$
      1.2.4. $x \notin \emptyset \vee x \in \mathbb{N}$
      1.2.5. $x \in \mathbb{N} \vee x \notin \mathbb{R}$

Lógica e Teoria dos Conjuntos

Temos assim, neste objectivo geral relativo a condições e conjuntos (LTC10-2):

1. Designar por «**expressão proposicional**» ou por «**condição**» uma expressão $p(x)$ envolvendo uma variável x tal que, substituindo x por um objeto a, se obtém uma **proposição** $p(a)$.
2. Saber, dada uma condição $p(x)$, que «**qualquer que seja $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$**» é uma **proposição** que é **verdadeira** quando e apenas quando se obtém uma proposição verdadeira sempre que se substitui x em $p(x)$ por um objeto arbitrário, representá-la por «$\forall x, p(x)$», e designar o símbolo «$\forall$» por «**quantificador universal**».
3. Identificar uma condição $p(x)$ como «**universal**» se $\forall x, p(x)$ for uma proposição verdadeira e **reconhecer** que a disjunção de qualquer condição com uma condição universal é uma condição universal.
4. Saber, dada uma condição $p(x)$, que «**existe $\boldsymbol{x}$ tal que $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$**» é uma **proposição** que é **verdadeira** se e somente se, para pelo menos um objeto a, $p(a)$ for verdadeira, representá-la por «$\exists x: p(x)$» e designar o símbolo «$\exists$» por «**quantificador existencial**».
5. Identificar uma condição $p(x)$ como «**possível**» se $\exists x: p(x)$ for uma proposição verdadeira, como «**impossível**» se não for possível e **reconhecer** que a disjunção de qualquer condição com uma condição possível é uma condição possível e a conjunção de qualquer condição com uma condição impossível é uma condição impossível.

Metas Curriculares

Lógica e Teoria dos Conjuntos

6. **Saber**, dada uma condição $p(x)$, que a negação da proposição $\forall x, p(x)$ é equivalente à proposição $\exists x: \sim p(x)$, que a negação da proposição $\exists x: p(x)$ é equivalente à proposição $\forall x, \sim p(x)$, designar estas propriedades por «**Segundas Leis de De Morgan**», **reconhecendo-as informalmente em exemplos**, e justificar que a negação de uma condição universal é uma condição impossível e vice-versa.
7. Representar, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U, a proposição $\forall x, x \in U \Rightarrow p(x)$ por «$\forall x \in U, p(x)$», e, no caso de ser verdadeira, designar $p(x)$ por «**condição universal em *U***».
8. Representar, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U, a proposição $\exists x: x \in U \wedge p(x)$ por «$\exists x \in U: p(x)$», no caso de ser verdadeira designar $p(x)$ por «**condição possível em *U***» e, no caso contrário, por «**condição impossível em *U***».
9. **+Reconhecer**, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U, que a negação da proposição $\forall x \in U, p(x)$ é equivalente à proposição $\exists x \in U: \sim p(x)$, que a negação da proposição $\exists x \in U: p(x)$ é equivalente à proposição $\forall x \in U, \sim p(x)$ e designar um elemento $a \in U$ tal que $\sim p(a)$ como um «**contraexemplo**» para a proposição $\forall x \in U, p(x)$.

Metas Curriculares

Lógica e Teoria dos Conjuntos

10. Representar, dada uma condição $p(x)$, por «$\{x : p(x)\}$» um conjunto A tal que $\forall x, x \in A \Leftrightarrow p(x)$, designando a igualdade $A = \{x : p(x)\}$ por «**definição em compreensão do conjunto A pela condição $p(x)$**».
11. **Saber**, dados conjuntos A e B, que $A = B$ se e somente se $\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B$.
12. Designar, dado um objeto a e um conjunto A, a por «**elemento de A**» quando $a \in A$, dados objetos $a_1, \ldots, a_k$ ($k \in \mathbb{N}$), representar por «$\{a_1, \ldots, a_k\}$» o conjunto A cujos elementos são exatamente $a_1, \ldots, a_k$ e designar a igualdade $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ por «**definição em extensão** do conjunto A de elementos $a_1, \ldots, a_k$».
13. Identificar, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U, o conjunto $\{x : x \in U \wedge p(x)\}$ como «**conjunto definido por $p(x)$ em U**» (ou «conjunto-solução de $p(x)$ em U») e representá-lo também por «$\{x \in U : p(x)\}$».
14. Identificar, dados conjuntos A e B, o «conjunto **união** (ou **reunião**) de A e B» e o «conjunto **interseção** de A e B» respetivamente como $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ e $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.

Metas Curriculares

Lógica e Teoria dos Conjuntos

10. Representar, dada uma condição $p(x)$, por «$\{x : p(x)\}$» um conjunto A tal que $\forall x, x \in A \Leftrightarrow p(x)$, designando a igualdade $A = \{x : p(x)\}$ por «**definição em compreensão do conjunto A pela condição $p(x)$**».
11. **Saber**, dados conjuntos A e B, que $A = B$ se e somente se $\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B$.
12. Designar, dado um objeto a e um conjunto A, a por «**elemento de A**» quando $a \in A$, dados objetos $a_1, \dots, a_k$ ($k \in \mathbb{N}$), representar por «$\{a_1, \dots, a_k\}$» o conjunto A cujos elementos são exatamente $a_1, \dots, a_k$ e designar a igualdade $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ por «**definição em extensão** do conjunto A de elementos $a_1, \dots, a_k$».
13. Identificar, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U, o conjunto $\{x : x \in U \wedge p(x)\}$ como «**conjunto definido por $p(x)$ em U**» (ou «conjunto-solução de $p(x)$ em U») e representá-lo também por «$\{x \in U : p(x)\}$».
14. Identificar, dados conjuntos A e B, o «conjunto **união** (ou **reunião**) de A e B» e o «conjunto **interseção** de A e B» respetivamente como $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ e $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.
15. Identificar, dados conjuntos A e B, A como estando «**contido** em B» («$A \subset B$») quando $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$ e, nesse caso, designar A por «**subconjunto** de B» ou por «uma **parte** de B».

Metas Curriculares

Lógica e Teoria dos Conjuntos

16. Designar, dados conjuntos A e B, por «**diferença** entre A e B» o conjunto $\{x \in A : x \notin B\}$ e representá-lo por $A \backslash B$ ou simplesmente por $\bar{B}$ quando $B \subset A$ e esta notação não for ambígua, designando-o então por «**complementar** de B em A».

17. Justificar, dadas condições $p(x)$ e $q(x)$, que a proposição $\forall x, p(x) \Leftrightarrow q(x)$ é equivalente à proposição $\forall x,\ (p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \Rightarrow p(x))$ e designar uma demonstração da segunda proposição por «**demonstração por dupla implicação**» da primeira.

18. Reconhecer, dados conjuntos A e B, que $A = B$ se e somente se $A \subset B$ e $B \subset A$, e designar esta propriedade por «**princípio da dupla inclusão**».

19. +Reconhecer, dadas condições $p(x)$ e $q(x)$, que a negação da proposição «$\forall x,\ p(x) \Rightarrow q(x)$» é equivalente à proposição «$\exists x\colon p(x) \wedge \sim q(x)$», isto é, que essa proposição é falsa se e somente se existir a tal que $p(a)$ é verdadeira e $q(a)$ é falsa.

20. **Justificar**, dadas condições $p(x)$ e $q(x)$, que a proposição $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ é equivalente à proposição $\forall x, \sim q(x) \Rightarrow \sim p(x)$, designar a segunda proposição por «**contrarrecíproco**» da primeira e uma demonstração da segunda proposição por «**demonstração por contrarrecíproco**» da primeira.

Metas Curriculares

Lógica e Teoria dos Conjuntos

Requer-se também neste domínio que sejam resolvidos **problemas** envolvendo as **operações lógicas** sobre proposições e sobre **condições** acima referidas; tanto para esse efeito como para levar a cabo os "**reconhecimentos**" e **justificações** pedidas podem utilizar-se ilustrações relativas a tópicos de **revisão** do Ensino básico e a matéria específica do **Ensino secundário**, como se exemplifica no caderno de apoio do 10º ano e depois em domínios como a **Geometria analítica** em que há larga oportunidade para se exemplificar o uso de operações lógicas relacionadas com operações sobre **conjuntos** (neste caso de pontos do **plano** ou do **espaço**).

Por exemplo, relativamente às **segundas Leis de De Morgan**, no descritor LTC10-2.6 indica-se, sem à partida se exigir qualquer justificação, como se relacionam os **quantificadores universal** e **existencial** através da negação. No entanto, como se refere no mesmo descritor, estas relações traduzem propriedades **intuitivas** que podem ser **motivadas** pela análise de exemplos concretos de utilização dos quantificadores na **linguagem corrente**, como por exemplo em (*cf.* texto de apoio ao descritor LTC10-2.9):

1. Escreva afirmações equivalentes à negação das seguintes proposições, utilizando as segundas leis de De Morgan:
    1.1 «Existe um colega na minha turma que não tem irmãos»;
    1.2 «Todas as pessoas que estão nesta sala estão a usar um chapéu».

Metas Curriculares

Lógica e Teoria dos Conjuntos

Também se podem utilizar exemplos invocando **conhecimentos matemáticos** constituindo revisões do Ensino básico:

3. Mostre que as seguintes afirmações são falsas, apresentando um contra-exemplo:
   - 3.1 Todos os quadriláteros do plano têm diagonais iguais.
   - 3.2 Todos os números ímpares são primos.
   - 3.3 Todos os números primos formados por dois algarismos têm os algarismos distintos.

As equivalências que constituem as **segundas Leis de De Morgan** podem também informalmente justificar-se interpretando, por exemplo, a proposição que resulta de aplicar o **quantificador universal** a uma condição $p(x)$ como o resultado de se unir por **conjunções** todas as proposições $p(a)$ (a um objecto arbitrário), notando que pela **comutatividade** e **associatividade** da conjunção, podemos intuitivamente atribuir significado a estas "**operações generalizadas**" sobre proposições. Deste modo as referidas equivalências podem ser interpretadas como **extensões** das **primeiras Leis de De Morgan** a estas "**conjunções e disjunções generalizadas**".

Lógica e Teoria dos Conjuntos

A propósito da introdução dos quantificadores assinale-se que como **notações alternativas**, utilizam-se também, por exemplo, as seguintes:

$$\forall x\, p(x) \text{ e } \exists x\, p(x)$$

$$(\forall x)\, p(x) \text{ e } (\exists x)\, p(x)$$

$$\forall_x\, p(x) \text{ e } \exists_x\, p(x)$$

Uma variante também por vezes utilizada desta última notação consiste em colocar o x **directamente abaixo** do símbolo de quantificador, em vez de o colocar em índice. Quando se utilizam as duas primeiras notações é também usual colocar entre parêntesis a expressão que se pretende quantificar, como por exemplo em $\forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$, ou seja, não se considera a **prioridade** das operações lógicas relativamente aos quantificadores que está implícita na notação utilizada nos descritores deste objectivo geral.

Deve acentuar-se que o facto de se introduzirem **símbolos** para os **quantificadores** não significa, evidentemente, que em textos de Matemática se **abuse** da utilização desses símbolos ou dos símbolos das **operações lógicas**. Em muitos casos deverá utilizar-se a **linguagem comum** para exprimir da maneira mais clara possível os conteúdos matemáticos que se pretende transmitir.

Metas Curriculares

Lógica e Teoria dos Conjuntos

Também há outras convenções e “abusos de linguagem” usuais na utilização dos quantificadores e das operações lógicas, nomeadamente a equivalência e implicação que convém assinalar.

O **quantificador universal** é frequentemente utilizado em Matemática em conjunto com as operações de **implicação** e de **equivalência**, por exemplo a propósito da resolução de **equações** e **inequações**. Muitas vezes pretende-se estabelecer uma **cadeia** de implicações ou de equivalências entre condições provando-se que cada uma dessas implicações ou equivalências é uma **condição universal** em determinado conjunto, partindo-se da condição que exprime a equação ou inequação a resolver até se chegar a uma que se considera como suficientemente simples para a partir dela se poderem tirar conclusões acerca das soluções da inicial.

Por exemplo, no conjunto $U = \mathbb{R}$, cada uma das seguintes equivalências é uma condição universal:

$$x^2 > 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2 > 0 \wedge x + 2 > 0) \vee (x - 2 < 0 \wedge x + 2 < 0)$$

$$\Leftrightarrow (x > 2 \wedge x > -2) \vee (x < 2 \wedge x < -2)$$

$$\Leftrightarrow x > 2 \vee x < -2$$

Metas Curriculares

Lógica e Teoria dos Conjuntos

Pretende-se, com esta apresentação, indicar a **conjunção** de todas as equivalências representadas. Pode utilizar-se a mesma convenção com **conjunções de implicações** ou mesmo de **equivalências e implicações**.

Em primeiro lugar há que notar que se se tratar de uma **cadeia de implicações** apenas poderemos concluir que as soluções da equação ou inequação **inicial** são soluções também da **última**, ou seja o **conjunto-solução** da **primeira** está **contido** no **conjunto-solução** da **última** (*cf.* o descritor LTC10-2.15). Este processo apenas **circunscreve** o conjunto no qual deveremos ainda procurar as soluções pretendidas, testando-se, para o efeito, por algum processo (uma a uma, por exemplo, se se tratar de um conjunto finito), quais são efectivamente soluções da equação ou inequação inicial (é o caso de algumas equações com **radicais**).

Se se tratar de uma cadeia de **equivalências**, já poderemos garantir que os **conjuntos-solução** da primeira e última condições são **iguais** (*cf.* o descritor 2.11) e a última condição é então o que muitas vezes se designa por “solução” da equação ou inequação inicial, de acordo com o que é requerido para cada tipo de problema.

Lógica e Teoria dos Conjuntos

Por vezes comete-se o abuso de linguagem que consiste em omitir o quantificador universal quando se pretende exprimir que uma implicação ou equivalência entre duas condições é universal em determinado conjunto, o que é admissível se não houver perigo de ambiguidade com este procedimento. Ou seja, estando entendido, por exemplo, que estamos a considerar x como número real, escreve-se por vezes apenas:

$$x^2 > 4 \;\Leftrightarrow x > 2 \vee x < -2$$

com o significado de:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 4 \;\Leftrightarrow x > 2 \vee x < -2$$

É de salientar a importância do uso correcto da implicação e da equivalência, em conjunto com o quantificador universal, no contexto da resolução de equações e inequações. Apresenta-se em seguida um exemplo que pode ser utilizado como ilustração (*cf.* texto de apoio aos descritores LTC10-2.7 e 2.8) .

1. Complete com $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ e $\Leftarrow$ as seguintes condições (substituindo as reticências por um destes símbolos), de modo que sejam universais em $\mathbb{R}$:
   - 1.1 $x > 2 \ldots x^2 > 4$
   - 1.2 $(x-1)(x-2) = 0 \ldots x = 1$
   - 1.3 $x = 3 \ldots x^4 = 81$
   - 1.4 $x > 3 \ldots x^3 > 27$
   - 1.5 $|x+3| < 2 \ldots x + 3 < 2$

Lógica e Teoria dos Conjuntos

Podemos ainda fazer algumas considerações **destinadas aos professores** acerca da relação entre **equivalência de condições** e **igualdade de conjuntos**.

Essa relação, que acabámos de invocar a propósito da resolução de equações resulta do princípio expresso no descritor 2.11 (Saber, dados conjuntos A e B, que $A = B$ se e somente se $\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B$) que traduz a ideia intuitiva de que "dois conjuntos são **iguais** quando e apenas quando têm **os mesmos elementos**", estabelecendo assim o princípio essencial para o uso dos símbolos de **igualdade** («=») e de **pertença** (« $\in$ »), que representam as duas relações básicas da Matemática.

Deste modo, a notação $\{x : p(x)\}$ introduzida no descritor 2.10 fica associada a um conjunto A **bem determinado**, no sentido em que se existir um conjunto A tal que $\forall x, x \in A \Leftrightarrow p(x)$ então qualquer conjunto A' tal que $\forall x, x \in A' \Leftrightarrow p(x)$ será igual a A.

A relação $A = A'$ traduz a ideia intuitiva de que os símbolos «A» e «A'» representam o mesmo **objecto**, e é nesse sentido que podemos dizer que A fica "bem determinado" pela condição (em A) $\forall x, x \in A \Leftrightarrow p(x)$. Resulta deste princípio que a igualdade de dois conjuntos A e B definidos em compreensão respectivamente pelas condições $p(x)$ e $q(x)$ significa que é **universal** a condição $p(x) \Leftrightarrow q(x)$, como atrás se exemplificou com as soluções de equações.

Metas Curriculares

Lógica e Teoria dos Conjuntos

No enunciado do descritor 2.10 **não se pressupõe** que, fixada uma condição $p(x)$, exista sempre um conjunto A com a propriedade nele referida. Com efeito, embora **não se pretenda** aqui desenvolver aspectos mais delicados dos **fundamentos** da Teoria do Conjuntos, há que ter em conta que, em formalizações habituais desta teoria surgem condições $p(x)$ para as quais não existe nenhum conjunto A tal que $\forall x, x \in A \Leftrightarrow p(x)$, ou seja, nesses casos não existe o conjunto $\{x : p(x)\}$: diz-se nesta situação que a condição $p(x)$ «**não é colectivizante**».

Um exemplo famoso é a condição $x \notin x$, que dá origem ao chamado «**Paradoxo de Russel**», enunciado por Bertrand Russel no início do século XX e que pôs em causa os fundamentos apresentados por Gottlob Frege para a Teoria dos Conjuntos; com efeito, se existisse um conjunto $A = \{x : \sim(x \in x)\}$ teríamos $\forall x, x \in A \Leftrightarrow \sim(x \in x)$, pelo que teria de ser verdadeira, em particular, a proposição que resulta de substituir x por A em $x \in A \Leftrightarrow \sim(x \in x)$, ou seja, teria de ser **verdadeira** a proposição $A \in A \Leftrightarrow \sim(A \in A)$, o que não é possível, pois uma proposição e a respectiva negação não podem ter o mesmo valor lógico.

No entanto, em tudo o que se segue, sempre que for definido um conjunto através de uma condição, pressupor-se-á, evidentemente, que tal conjunto **existe**, no sentido em que, numa formalização adequada da **Teoria dos Conjuntos**, essa existência poderia ser **provada** (ou, em particular, seria um **axioma**).

Lógica e Teoria dos Conjuntos

Para terminar esta resenha acerca deste domínio no 10º ano recorde-se que, como atrás vimos no 9.º ano abordam-se algumas noções acerca da **axiomatização** das teorias matemáticas. Introduziram-se nessa altura alguns termos usuais nesse contexto, como «**teorema**», «**hipótese**», «**tese**», «**demonstração**», bem como o símbolo de **implicação** e as noções de «**condição necessária**» e de «**condição suficiente**».

Estas questões devem evidentemente ser revistas a propósito destes tópicos do programa do 10º ano, devendo levar-se particularmente em conta que os alunos que frequentarão o novo programa do 10º ano em 2015/16 não frequentaram ainda o novo programa do Ensino básico, se bem que estes temas fossem genericamente referidos no programa de 2007.

Em muitos casos a demonstração de um teorema pode ser entendida como a verificação de que determinada **implicação** é "**verdadeira**" ou, mais propriamente, que é uma condição **universal**, o que pode ser traduzido indicando que determinada condição é **suficiente** para uma outra ou que esta é condição **necessária** para a primeira; noutros casos trata-se de verificar que uma implicação é "**falsa**" ou, mais propriamente, que **não é** uma condição **universal**.

Metas Curriculares

Lógica e Teoria dos Conjuntos

Neste domínio do 10º ano apresentam-se determinadas equivalências envolvendo implicações quantificadas e exploram-se os **processos de demonstração** de certos teoremas que delas resultam, introduzindo-se designações adequadas para esses processos, que podem ser exemplificados com inúmeras situações constituindo revisões do Ensino básico ou matéria nova do secundário. Apresentam-se alguns exemplos do Caderno de apoio (textos de apoio aos descritores LTI10-2.19 e 2.20):

1. Justifique que as seguintes proposições são falsas:
   1.1. Qualquer número natural que seja múltiplo de 5 é múltiplo de 10;
   1.2. Qualquer quadrilátero que tenha os quatro lados iguais é um quadrado;
   1.3. Qualquer quadrilátero que tenha os ângulos iguais também tem os lados iguais.

2. Escreva os contra-recíprocos das proposições indicadas no exercício anterior.

3. Demonstre por contra-recíproco que se o quadrado de um dado número natural n é ímpar, n é ímpar.

4. Demonstre por contra-recíproco que se, em dado plano, uma reta r é paralela a outras duas retas s e t, então s e t são paralelas entre si.

Metas Curriculares

Teoria dos Conjuntos e Combinatória

No 12º ano retomam-se algumas questões relativas à **Teoria dos Conjuntos**, a propósito da **Combinatória** (CC12-1):

1. #Provar, dados conjuntos A e B, que $A \subset B$ se e somente se $A \cap B = A$ e se e somente se $A \cup B = B$ e que o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.
2. Justificar, dados subconjuntos A e B de um conjunto U, que $A \subset B$ se e somente se $\bar{B} \subset \bar{A}$.
3. #Provar, dados conjuntos A, B e C, que são verdadeiras as igualdades $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $A \cap B = B \cap A$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ e $A \cap A = A$, bem como as que se obtêm permutando em todas as ocorrências os símbolos «$\cap$» e «$\cup$», e designá-las respetivamente por «**associatividade**», «**comutatividade**», «**distributividade**» e «**idempotência**».
4. #Provar, dado um conjunto U, que, para quaisquer subconjuntos A e B de U, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ e $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, e designar estas igualdades por «**Leis de De Morgan para conjuntos**».
5. Provar, dados conjuntos A, B e C, que $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ e que $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$.

Metas Curriculares

Teoria dos Conjuntos e Combinatória

Em seguida inicia-se o objectivo geral relativo aos factos mais elementares da Combinatória enunciando a relação básica entre a noção de **cardinal** de um conjunto e a noção de **bijecção**, fundamento de todas as “**operações de contagem**” que constituem o **Cálculo combinatório**.

Ao dizer-se que «dois conjuntos A e B têm o mesmo cardinal se e somente se existir uma bijecção de A sobre B» enuncia-se, na linguagem das aplicações entre conjuntos, um princípio que é utilizado desde que, no primeiro ano de escolaridade, se começaram a introduzir os **números naturais** e a efectuar **contagens**.

A relação de «**equipotência**» assim definida entre conjuntos pode ser interpretada como uma relação binária num dado domínio e é fácil concluir que se trata sempre de uma **relação de equivalência** (é reflexiva porque a aplicação identidade num dado conjunto é uma bijecção, é simétrica porque a inversa de uma bijecção é uma bijecção e é transitiva uma vez que a composição de bijecções é uma bijecção); cada **classe de equivalência** para uma dessas relações num **domínio** pré-fixado é constituída por conjuntos que, por definição, têm todos o mesmo **cardinal**.

Metas Curriculares

Teoria dos Conjuntos e Combinatória

Note-se que **nunca definimos** concretamente o que é o "**cardinal de um conjunto A**" e neste descritor apenas se **formaliza** finalmente o que significa dois conjuntos terem "**o mesmo cardinal**", embora esta ideia, como foi referido, já venha a ser utilizada, na prática e de forma intuitiva, desde o início do **1.º ciclo** do ensino básico.

Se fosse possível considerar o "**conjunto de todos os conjuntos**" poderíamos identificar o cardinal de um dado conjunto A como a classe de equivalência de A para a relação de equipotência definida para todos os conjuntos; foi essa a tentativa de formalização da aritmética que esteve subjacente a uma primeira versão dos Principia Mathematica de Alfred North Whitehead e Bertrand Russel (obra publicada em três volumes entre 1910 e 1913).

Pouco antes da publicação do primeiro volume, Russel apercebeu-se da **incongruência lógica** da teoria "ingénua" dos conjuntos (baseada na obra anterior de Gottlob Frege), subjacente a esta definição, ao descobrir o célebre **paradoxo** a que deu o nome e que atrás recordámos, também concretizado no conhecido "paradoxo do barbeiro". Ainda a tempo, a obra foi remodelada com a introdução da teoria dos tipos lógicos, com a qual se procurou ultrapassar as dificuldades inerentes ao paradoxo de Russel.

Metas Curriculares

Teoria dos Conjuntos e Combinatória

Outra possibilidade, adoptada em algumas das atuais teorias dos fundamentos da Matemática, consiste em começar por considerar a relação de equipotência como uma condição com duas variáveis, embora **não exista** o conjunto dos pares ordenados que satisfazem essa condição (caso contrário existiria, por exemplo, o conjunto das respectivas primeiras coordenadas que seria o conjunto de todos os conjuntos…).

Dado um conjunto A qualquer, o cardinal de A, $\#A$, é então definido a partir da condição (em X) «**X é equipotente a A**», aplicando-lhe o chamado "**símbolo de escolha de Hilbert**", muitas vezes representado pela letra grega τ com a variável da condição em índice e cujo resultado, intuitivamente, consiste em "**escolher**" ou seja, fixar de uma vez por todas, um dos objectos que satisfaz a condição a que se aplica o referido símbolo, se a condição for possível, ou (em certas formulações) um objecto sem qualquer restrição se a condição for impossível. Assim, por definição teríamos:

$$\#A = \tau_X(X \text{ é equipotente a } A).$$

Metas Curriculares

Teoria dos Conjuntos e Combinatória

Os números naturais, neste quadro, podem então ser definidos simplesmente como os **cardinais dos conjuntos finitos não vazios** (e o número 0 como o **cardinal do conjunto vazio**), definindo-se conjunto finito como um conjunto que não é equipotente a uma sua parte estrita (o conjunto dos números naturais, de acordo com esta definição, é de facto "infinito", ou seja, não é finito, já que, por exemplo, é equipotente ao conjunto dos números pares).

Note-se que, com esta formulação, uma vez que o único conjunto equipotente ao conjunto vazio é o próprio conjunto vazio, como facilmente se prova, temos mesmo:

$$0 = \#\emptyset = \emptyset.$$

No que diz respeito aos resultados básicos da **combinatória**, importa assinalar que o processo geral para "**contar**" o número de elementos de determinado conjunto é estabelecer uma **correspondência biunívoca** (ou seja, definir uma **bijeção**) entre o conjunto que se pretende contar e um conjunto cujo cardinal é, de algum modo, já **conhecido**.

Metas Curriculares

Teoria dos Conjuntos e Combinatória

Trata-se muito simplesmente de uma **extensão natural** dos processos mais elementares de **contagem**, que utilizam, para conjuntos-padrão, por exemplo, os **dedos das mãos** ou a lista dos “**nomes dos números**”, que se obtêm pela memorização de um conjunto de palavras-base e de regras de formação dos nomes dos números consecutivos a partir dessas palavras, ou ainda as respectivas **representações simbólicas**, utilizando um dado sistema de numeração.

Temos assim (CC12-2):

1. Saber, dados conjuntos A e B, que $\#A = \#B$ se e somente se existir uma bijeção de A sobre B e nesse caso identificar os conjuntos A e B como «**equipotentes**».
2. Saber, dados conjuntos A e B tais que $A \cap B = \emptyset$, que $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.
3. **+Provar**, dados conjuntos A e B de cardinais respetivamente iguais a $n \in \mathbb{N}$ e a $m \in \mathbb{N}$, que o cardinal do **produto cartesiano** $A \times B$ é igual a $n \times m$.
4. **+Reconhecer** que existem exatamente n^p sequências de $p \in \mathbb{N}_0$ elementos, não necessariamente distintos, escolhidos num conjunto de cardinal $n \in \mathbb{N}$, designar esse número por «**arranjos com repetição** de n elementos p a p» («${}^{n}A'_{p}$») e reconhecer que, dados n objetos, existem exatamente ${}^{n}A'_{p}$ formas distintas de efetuar p extrações sucessivas de um desses objetos, repondo o objeto escolhido após cada uma das extrações.

Metas Curriculares

Teoria dos Conjuntos e Combinatória

5. **+Designar**, dado um conjunto E, por «conjunto das partes de E» o conjunto formado pelos subconjuntos de E, representá-lo por $\mathcal{P}(E)$ e reconhecer que se E tiver $p \in \mathbb{N}_0$ elementos ($\#E = p$) então $\mathcal{P}(E)$ tem 2^p elementos ($\#\mathcal{P}(E) = 2^p$).
6. **Reconhecer** que existem exatamente $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ formas de ordenar os elementos de um conjunto de cardinal $n \geq 1$, designar este número por «(número de) permutações de n elementos» e representá-lo por «$n!$» («n fatorial»).
7. Saber que, por convenção, $0! = 1$, reconhecendo que esta definição é a única para a qual a igualdade $n! = n(n-1)!$ vale também para $n = 1$.
8. **+Reconhecer** que existem exatamente $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ sequências de $p \in \mathbb{N}_0$ elementos distintos escolhidos num conjunto de $n \geq p$ elementos, designar este número por «(número de) arranjos (sem repetição) de n elementos p a p» («${}^nA_p$») e reconhecer que, dados n objetos, existem exatamente ${}^nA_p$ formas distintas de efetuar p extrações sucessivas de um desses objetos, sem repor o objeto escolhido após cada uma das extrações.

Metas Curriculares

Teoria dos Conjuntos e Combinatória

9. **Justificar** que um conjunto de $n \in \mathbb{N}_0$ elementos tem exatamente $\frac{{}^nA_p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ subconjuntos de p elementos ($0 \leq p \leq n$), e designar este número por «(número de) **combinações** de n elementos p a p», reconhecendo que, dado $n \in \mathbb{N}$ objetos, existem exatamente $\frac{{}^nA_p}{p!}$ formas de escolher p ($p \leq n$) de entre eles e representar este número por «${}^nC_p$», por «C_p^n» ou por «$\binom{n}{p}$», reconhecendo que se trata de um número natural.

10. +Simplificar expressões envolvendo fatoriais, arranjos e combinações.

No caderno de apoio do 12º ano apresentam-se diversos textos e exemplos relativos ao que é requerido neste objectivo geral, correspondentes a diversos níveis de desempenho.

A título de exemplo apresentam-se os exercícios relativos ao número de subconjuntos de um conjunto finito:

Metas Curriculares

Teoria dos Conjuntos e Combinatória

1. Considere um conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ com 3 elementos.
   1.1. Determine em extensão todas as partes não vazias de X. Quantos subconjuntos tem X?
   1.2. Mostre que se obtêm todas as partes de X associando a cada sequência (k_1, k_2, k_3) de termos iguais a 0 ou a 1 o subconjunto de X constituído pelos elementos x_i tais que $k_i = 1$ (por exemplo, à sequência $(1{,}0{,}1)$ associa-se o conjunto $\{x_1, x_3\}$).
   1.3. Justifique que existem exatamente 2^3 sequências das referidas na alínea anterior, sem as construir explicitamente; compare o resultado obtido com o resultado da alínea 1.1.
   1.4. Utilizando argumentos inspirados nas duas alíneas anteriores justifique que se um conjunto X tiver $p \in \mathbb{N}_0$ elementos $(\#X = p)$ então $\mathcal{P}(X)$ tem 2^p elementos.

2. *Prove por indução que, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$, um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos.

3. Considere um conjunto X qualquer e seja $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X.
   3.1. **Mostre que é bijetiva a aplicação de $\mathcal{P}(X)$ no conjunto das aplicações de X em $\{0{,}1\}$ que a cada $A \subset X$ associa a aplicação $\chi_A\colon X \longrightarrow \{0{,}1\}$ tal que, para cada $x \in X$:
   $$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \notin A \\ 1 \text{ se } x \in A \end{cases}.$$
   3.2. *Atendendo à alínea anterior, justifique que se X tiver $p \in \mathbb{N}_0$ elementos $(\#X = p)$ então $\mathcal{P}(X)$ tem 2^p elementos.

Metas Curriculares