PROGRAMA
e
Metas Curriculares
Matemática A

Modelos exponenciais

António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira, Luísa Loura, Maria Clementina Timóteo

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Metas Curriculares

Modelos exponenciais

A notável propriedade da função **exp** de **coincidir com a própria derivada** tem como consequência que qualquer função da forma $\boldsymbol{Ce^{ax}}$ tem derivada **directamente proporcional à própria função** (com constante de proporcionalidade real qualquer).

Aliás é fácil concluir que não há outras funções reais definidas em intervalos de $\mathbb{R}$ com esta propriedade, já que se uma função real f definida num intervalo I de $\mathbb{R}$ (não degenerado) tiver esta propriedade, ou seja, se existir $k \in \mathbb{R}$ tal que para x em I :

$$f'(x) = kf(x)$$

então podemos transformar esta equação de modo a concluirmos que determinada função tem **derivada identicamente nula**, multiplicando ambos os membros por e^{-kx} (obtém-se uma equação equivalente, já que se tem sempre $e^{-kx} > 0$):

$$f'(x)e^{-kx} = kf(x)e^{-kx} \Leftrightarrow e^{-kx}f'(x) - ke^{-kx}f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(e^{-kx}f(x)\right)' = 0.$$

Metas Curriculares

Modelos exponenciais

A última equação desta cadeia garante que a função $e^{-kx}f(x)$ é constante em I, ou seja, que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $x \in I$:

$$e^{-kx}f(x) = C,$$

ou ainda:

$$f(x) = Ce^{kx}.$$

O estudo das funções exponenciais permitiu-nos assim identificar exactamente a classe de funções com a propriedade notável de terem **derivada proporcional à própria função**. Como se pode suspeitar, esta propriedade torna estas funções particularmente adequadas ao estudo de determinados **fenómenos naturais**; neste programa privilegia-se o estudo de **modelos matemáticos devidamente fundamentados** pelo que se prescreve explicitamente o estudo de alguns desses modelos (FEL12-5):

Metas Curriculares

Modelos exponenciais

5. Estudar modelos de crescimento e decrescimento exponencial

1. Saber que a evolução de determinadas grandezas, como a **massa de uma substância radioativa**, a **temperatura** de alguns sistemas ou o número de indivíduos de certas **populações**, pode ser modelada por uma «**equação diferencial de 1.ª ordem**» da forma $\boldsymbol{f' = kf}$, que traduz o facto de, em cada instante, a taxa de variação ser aproximadamente proporcional à quantidade de grandeza presente.

2. Justificar, dado um número real k, que as funções $f(x) = ce^{kx}$, onde c é uma constante real, são soluções em $\mathbb{R}$ da equação diferencial $f' = kf$ e que todas as soluções desta equação são dessa forma, mostrando que dada uma qualquer solução f, tem derivada nula a função $e^{-kx}f(x)$.

Metas Curriculares

Modelos exponenciais

Embora apenas se requeira que os alunos tenham conhecimento de que os fenómenos referidos no descritor FEL12-5.1, entre outros, podem ser modelados através de uma equação diferencial da forma aí indicada, esse conhecimento implica obviamente uma **descrição** adequada desses fenómenos. Além disso é conveniente, tanto quanto possível, com base nessa descrição, **motivar** o referido modelo. Os textos que se seguem, destinados aos professores, também poderão servir de base a apresentações devidamente adaptadas aos alunos a que se destinem.

Decaimento radioactivo

Consideremos, para começar, o problema que consiste em determinar a **evolução ao longo do tempo da massa de determinada substância radioactiva**.

Desde a descoberta da **radioactividade** que se sabe que determinadas substâncias emitem continuamente partículas α, β e γ, o que corresponde a alterações da respectiva estrutura atómica, de tal modo que ao longo do tempo os átomos da substância inicial se vão transformando em átomos de outras substâncias (sofrem o chamado «**decay**», «**decaimento**» ou «**desintegração radioactiva**»), numa cadeia característica de cada elemento radioactivo.

Metas Curriculares

Modelos exponenciais

Decaimento radioactivo

Da substância inicial sobra sempre uma porção, correspondente aos átomos que ainda não se desintegraram, e que, evidentemente, diminui progressivamente com o tempo. Designando por $m(t)$ a medida em dada unidade da **massa** de substância que ainda não se desintegrou em determinado instante t (**proporcional** ao **número de átomos** que ainda não sofreram o chamado **decaimento radioactivo**), o problema está em obter informações acerca da função $m(t)$ em dado intervalo de tempo.

A análise do fenómeno físico que preside à variação de m com o tempo sugere que a **probabilidade** de um átomo de determinada substância iniciar o processo de **desintegração radioactiva** durante um período de uma **unidade de tempo** é **constante**, ou seja, em cada um desses períodos a massa de substância que sofre desintegração é, em média, uma **percentagem fixa** da massa existente.

Assim, obtém-se a **massa total que se desintegra entre os instantes t e $t + \Delta t$** ($\Delta t > 0$) multiplicando por Δt essa percentagem da massa existente; este postulado está formulado com certo grau de imprecisão, uma vez que a massa deverá variar entre os instantes t e $t + \Delta t$, pelo que se pode pôr a questão de saber exactamente de que massa se deve considerar a percentagem.

Metas Curriculares

Modelos exponenciais

Decaimento radioactivo

Podemos começar por supor que será da massa considerada em certo **instante intermédio** $\xi \in [t, t+\Delta t]$; teremos então, para certa constante $k > 0$:

$$m(t+\Delta t) = m(t) - km(\xi)\Delta t$$

Ou seja,

$$\frac{m(t+\Delta t) - m(t)}{\Delta t} = -km(\xi)$$

Para podermos supor que a função m é solução de alguma equação diferencial, teremos de fazer a hipótese de se tratar de **função diferenciável**. Esta hipótese tem, evidentemente, algum grau de **irrealismo**, já que, em certo intervalo de tempo, o número de átomos que começou a desintegrar-se é inteiro, pelo que a variação de m se faz por múltiplos inteiros da massa de um átomo da substância, tratando-se portanto sempre de função "em escada", logo descontínua em muitos instantes, e portanto certamente **não diferenciável**.

Metas Curriculares

Modelos exponenciais

Decaimento radioactivo

Como, no entanto, a massa de cada átomo é muito reduzida relativamente à massa total em estudo, podemos tentar **aproximar** a função massa por uma **função diferenciável**, pois, por exemplo, para intervalos de tempo reduzidos, mas significativos do ponto de vista experimental, temos a percepção de que a variação de massa será também reduzida, o que pelo menos justifica a hipótese de **continuidade**.

Formalmente, poderíamos até **justificar a continuidade** através da equação acima, pois dela resulta que, para cada t, $m(t+\Delta t)$ é **decrescente** como função de Δt, pelo que poderíamos **majorar** $|m(t+\Delta t)-m(t)| = m(t)-m(t+\Delta t)$ por $km(t)\Delta t$ que **tende para zero** quando $\Delta t \longrightarrow 0^+$.

Analogamente, substituindo na referida equação, t por $t-\Delta t$, obtemos $m(t) = m(t-\Delta t) - km(\xi)\Delta t$, para $\xi \in [t-\Delta t, t\,]$, donde se deduz que $|m(t-\Delta t)-m(t)|$ tende para zero quando $\Delta t \longrightarrow 0^+$, ou seja, $|m(t+\Delta t)-m(t)|$ também **tende para zero** quando $\Delta t \longrightarrow 0^-$, o que mostra que m é de facto **contínua** em todo o t.

Metas Curriculares

Modelos exponenciais

Decaimento radioactivo

De qualquer modo, os pressupostos que se fazem ao procurar adoptar um **modelo matemático** para estudar determinado fenómeno têm sempre algum grau de arbitrariedade, correspondendo a certa **simplificação da realidade**. Uma vez desenvolvidas as consequências matemáticas do modelo adoptado e confrontados os resultados com a realidade em estudo, pode-se aferir o **grau de precisão** do modelo.

Caso se verifiquem discrepâncias notáveis com os resultados da experiência, dever-se-ão **reexaminar** os pressupostos que lhes serviram de base, procurando eventualmente aproximá-los mais da realidade observada.

Repete-se então o processo de desenvolver a teoria matemática, resultante agora dos **novos pressupostos**, e de confrontar com a realidade os resultados teóricos obtidos, podendo prosseguir-se do mesmo modo indefinidamente, o que constitui, no fundo, o progresso normal das ciências envolvendo processos de matematização.

Metas Curriculares

Modelos exponenciais

Decaimento radioactivo

No caso sobre o qual nos estamos a debruçar, feita a hipótese de **continuidade** de m, podemos passar ao limite quando $\Delta t \longrightarrow 0^+$ no segundo membro da última equação acima, pois essa continuidade garante que esse limite é igual a $m(t)$, já que, independentemente da escolha de ξ para cada Δt, ter-se-á sempre $\xi \longrightarrow t$ quando $\Delta t \longrightarrow 0^+$, pois, por construção $t \leq \xi \leq t + \Delta t$. Obtemos assim:

$$\lim_{\Delta t \longrightarrow 0^+} \frac{m(t+\Delta t) - m(t)}{\Delta t} = -km(t)$$

Raciocínio idêntico pode ser levado a cabo relativamente a cada intervalo $[t - \Delta t, t\,]$, o que permite obter também:

$$\lim_{\Delta t \longrightarrow 0^-} \frac{m(t+\Delta t) - m(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0^+} \frac{m(t-\Delta t) - m(t)}{-\Delta t} = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0^+} \frac{m(t) - m(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

$$= -km(t).$$

Metas Curriculares

Modelos exponenciais

Decaimento radioactivo

A igualdade destes dois limites garante que a função m é diferenciável e:

$$m'(t) = -km(t)$$

A análise atrás efectuada da classe de funções que satisfazem a uma condição como esta, ou, como podemos agora dizer, que são **soluções** desta **equação diferencial** em determinado intervalo de tempo, já nos garante que existe uma constante real C tal que:

$$m(t) = Ce^{-kt}$$

Ainda podemos notar que, se conhecermos o valor m_0 da massa em certo instante t_0, então teremos:

$$m_0 = m(t_0) = Ce^{-kt_0} \Longrightarrow C = m_0 e^{kt_0}.$$

Metas Curriculares

Modelos exponenciais

Decaimento radioactivo

Portanto existe uma e somente uma solução da equação considerada que, num dado intervalo de tempo (que neste caso pode ser, por exemplo, $[t_0, +\infty[$ ou mesmo $\mathbb{R}$), é dada por :

$$m(t) = m_0 e^{kt_0} e^{-kt} = m_0 e^{-k(t-t_0)}$$

Neste como noutros problemas semelhantes, é, em geral, mais interessante nesta fase que os alunos consigam desenvolver em cada caso o processo que conduz do **modelo diferencial** à **expressão analítica** das soluções, nomeadamente na forma que acabámos de obter (ficando explícita uma **condição inicial** prescrita), em vez de aplicarem simplesmente uma fórmula já conhecida.

Metas Curriculares

Modelos exponenciais

Decaimento radioactivo

Outro método que pode ser utilizado para se obter esta forma geral para as soluções da equação inicial, após a abordagem do domínio «**Primitivas e Cálculo Integral**», consiste em partir da equação $\left(m(t)e^{kt}\right)'_t = 0$ e **integrar** ambos os membros num intervalo genérico da forma $[t_0, t]$. Utilizando a **fórmula de Barrow** obtemos imediatamente:

$$0 = \int_{t_0}^{t} \left(m(s)e^{ks}\right)' ds = m(t)e^{kt} - m(t_0)e^{kt_0} \Longrightarrow m(t) = m_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

Para que a solução a que se chegou possa ser utilizada para a **resolução de problemas práticos**, é necessário conhecer a constante k, característica de cada substância. A própria forma das soluções permite-nos chegar a um processo exequível para a **determinação de k**; com efeito, supondo conhecida a massa da substância radioativa presente em determinada amostra em dois instantes t_0 e t_1, se designarmos por m_1 a massa no instante t_1 teremos:

Modelos exponenciais

Decaimento radioactivo

$$m_1 = m(t_1) = m_0 e^{-k(t_1 - t_0)} \Longrightarrow k = -\frac{1}{t_1 - t_0} \ln \frac{m_1}{m_0},$$

ou seja, podemos agora escrever a solução apenas em função de t_0, t_1, m_0 e m_1:

$$m(t) = m_0 e^{-k(t-t_0)} = m_0 e^{\frac{t-t_0}{t_1-t_0} \ln \frac{m_1}{m_0}} = m_0 \left(\frac{m_1}{m_0}\right)^{\frac{t-t_0}{t_1-t_0}}.$$

Estas fórmulas permitem também notar que, no caso particular em que $m_1 = \frac{m_0}{2}$, obtemos:

$$k = -\frac{1}{t_1 - t_0} \ln \frac{1}{2} = \frac{\ln 2}{t_1 - t_0} \Longleftrightarrow t_1 - t_0 = \frac{\ln 2}{k};$$

Metas Curriculares

Modelos exponenciais

Decaimento radioactivo

Em particular, o tempo $t_1 - t_0$ que a massa leva a **reduzir-se a metade**, designado por «**half-life**» («**semivida**»), não depende da massa inicial e é uma quantidade característica da substância radioactiva em questão. Se designarmos a semivida por t_h teremos então:

$$t_h = \frac{\ln 2}{k} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{t_h}$$

e obtemos também, em função da semivida:

$$m(t) = m_0 2^{-\frac{t-t_0}{t_h}}.$$

É nesta fórmula que se baseia o processo de **datação** de objectos dito "pelo **Carbono 14**"; com efeito, podemos resolver esta equação em ordem a $t - t_0$, para t igual determinado instante t_1, designando $m(t_1)$ por m_1 (ou partir directamente da fórmula atrás obtida para k em função de t_0, t_1, m_0 e m_1 e substituir k por $\frac{\ln 2}{t_h}$):

Metas Curriculares

Modelos exponenciais

Decaimento radioactivo

$$t_1 - t_0 = \frac{t_h}{\ln 2} \ln \frac{m'(t_0)}{m'(t_1)}$$

Como, em geral, o que se mede directamente são as taxas de decaimento e não as massas subsistentes de substância radioactiva, podemos ainda notar que, da própria equação resulta imediatamente que:

$$\frac{m'(t_0)}{m'(t_1)} = \frac{m(t_0)}{m(t_1)} \ ,$$

pelo que a fórmula anterior para o lapso de tempo que se procura conhecer pode exprimir-se na forma:

$$t_1 - t_0 = \frac{t_h}{\ln 2} \ln \frac{m'(t_0)}{m'(t_1)}$$

Metas Curriculares

Modelos exponenciais

Decaimento radioactivo

Esta fórmula pode ser directamente usada no chamado método de datação pelo Carbono 14. Para uma descrição mais pormenorizada do método *cf.* o texto de apoio ao descritor FEL12-6.4.

Crescimento populacional

Pensemos na **evolução de determinada população**, por exemplo de seres humanos nacionais de determinado país. Designando por $P(t)$ o **número de indivíduos** existentes em dado **instante** $\boldsymbol{t}$, pretendemos estudar a evolução da função $P(t)$, procurando fazer hipóteses tão realistas quanto possível acerca da população de modo a podermos, no entanto, supor que $P(t)$ é **solução de determinada equação diferencial**. Tal como para o caso da desintegração radioactiva, também é claro agora que a população só aproximadamente se pode considerar como **função diferenciável** do tempo, ou mesmo **contínua**, uma vez que só pode tomar **valores inteiros**, e uma função contínua só tomando valores inteiros em dado intervalo seria necessariamente constante.

Metas Curriculares

Modelos exponenciais

Crescimento populacional

Neste caso, porém, considerando populações constituídas por "grande número" de indivíduos, relativamente à variação que nessas populações ocorre em "pequenos" intervalos de tempo, podemos conjecturar que a **aproximação por funções diferenciáveis** será adequada, pelo menos em certos casos.

Comecemos por supor que a variação de P ao longo do tempo é apenas consequência das **mortes** e **nascimentos** que vão ocorrendo (ou seja supõe-se que a emigração e imigração se compensam); em primeira aproximação é razoável supor que o número de mortes que ocorre por unidade de tempo é **proporcional à população** total existente, com certa constante de proporcionalidade $M > 0$ (M diz-se **taxa de mortalidade** média por habitante), bem como o número de nascimentos, com certa constante de proporcionalidade $N > 0$ (**taxa de natalidade** média por habitante).

Teremos então o seguinte cálculo aproximado para a população no instante $t + \Delta t$, dada a população no instante t:

$$P(t+\Delta t) = P(t) + N\Delta t P(t) - M\Delta t P(t) \Longrightarrow \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = (N - M)P(t)$$

Metas Curriculares

Modelos exponenciais

Crescimento populacional

Note-se que poderíamos começar por fazer uma análise "mais fina" destas hipóteses à imagem do que se fez como decaimento radioactivo, substituindo $(N-M)P(t)$ por $(N-M)P(\xi)$, com $\xi \in [t, t+\Delta t\,]$ e seguindo o raciocínio atrás desenvolvido. Com a hipótese de diferenciabilidade, teremos em cada instante t, por passagem ao limite quando $\Delta t \longrightarrow 0$:

$$P'(t) = (N-M)P(t)$$

equação já nossa conhecida, pois é, mais uma vez, da forma $f' = kf$. Muitas vezes designa-se $N-M$ por «taxa de crescimento médio por habitante».

As soluções podem portanto ser todas expressa na forma:

$$P(t) = P_0 e^{(N-M)(t-t_0)},$$

onde P_0 é a população no instante t_0.

Metas Curriculares

Modelos exponenciais

Crescimento populacional

Assim, se a **taxa de natalidade** (média por habitante) for **superior** à **taxa de mortalidade**, a população terá **crescimento exponencial**, ao passo que no caso $N < M$ a população tenderá exponencialmente para a **extinção**.

Este modelo, dito "**Malthusiano**", em homenagem a Malthus, eclesiástico inglês que, na viragem do século XVIII para o século XIX, apresentou este modelo, fazendo, a partir dele, previsões catastróficas para o futuro da Humanidade, tem, evidentemente, fortes limitações, pois não leva em conta a limitação dos recursos, a imigração e emigração, as variações das taxas de natalidade e mortalidade, os conflitos, etc.

Tal como no caso do decaimento radioactivo, também agora, podemos dispensar o conhecimento prévio da constante $N - M$, desde que se tenha acesso a censos da população em dois instantes diferentes; assim, refazendo os cálculos acima efectuados no caso do decaimento obtemos, para valores P_0 e P_1 da população em instantes respectivamente t_0 e t_1:

$$N - M = \frac{1}{t_1 - t_0} \ln \frac{P_1}{P_0} = \frac{\ln P_1 - \ln P_0}{t_1 - t_0}$$

Metas Curriculares

Modelos exponenciais

Crescimento populacional

e portanto:

$$P(t) = P_0 \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{t-t_0}{t_1-t_0}} = P_0 e^{\frac{\ln P_1 - \ln P_0}{t_1-t_0}(t-t_0)}$$

Para uma análise de outros modelos de crescimento populacional (nomeadamente o logístico) *cf.* o texto de apoio ao descritor FEL12-6.4.

Lei de Newton do arrefecimento/aquecimento

Finalmente, consideremos a ***lei de Newton do arrefecimento/aquecimento*** que estabelece que a taxa de variação instantânea da **temperatura** de um corpo é directamente proporcional à **diferença** entre a temperatura ambiente e a temperatura do corpo.

Modelos exponenciais

Lei de Newton do arrefecimento/aquecimento

Representando por $T(t)$ a **temperatura do corpo** no instante t e por T_a a **temperatura ambiente**, suposta **constante**, teremos então, para certa constante $k > 0$:

$$T'(t) = k(T_a - T(t));$$

Embora esta equação não seja exactamente da mesma forma das anteriores, se definirmos $f(t) = T_a - T(t)$ teremos:

$$f'(t) = -T'(t) = -k(T_a - T(t)) = -kf(t).$$

Note-se que poderíamos ter passado por uma dedução da equação mais cuidadosa, a exemplo do que se fez para a desintegração radioactiva, começando por exprimir a lei de Newton do arrefecimento primeiramente não em termos da taxa de variação instantânea da temperatura (o que faz desde logo intervir uma derivada) mas da variação da temperatura em "pequenos" intervalos de tempo.

Metas Curriculares

Modelos exponenciais

Lei de Newton do arrefecimento/aquecimento

Teremos então:

$$T_a - T(t) = (T_a - T_0)e^{-k(t-t_0)},$$

sendo T_0 a temperatura do corpo no instante t_0.

Portanto:

$$T(t) = T_a - (T_a - T_0)e^{-k(t-t_0)} = T_0 e^{-k(t-t_0)} + T_a\left(1 - e^{-k(t-t_0)}\right),$$

ou seja, a temperatura em cada instante é uma **média pesada** entre a temperatura inicial do corpo e a temperatura ambiente, de modo que o "**peso**" associado à temperatura **do corpo tende para zero exponencialmente** e o "peso" associado à temperatura **ambiente tende para 1 também exponencialmente.** Tal como nos modelos anteriores, também se poderia determinar o valor de k conhecendo o valor T_0 e T_1 da temperatura em instantes, respectivamente t_0 e t_1:

$$k = -\frac{1}{t_1 - t_0}\ln\frac{T_a - T_1}{T_a - T_0}.$$

Metas Curriculares