PROGRAMA
e
Metas Curriculares
Matemática A

Primitivas e Cálculo Integral

António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira, Luísa Loura, Maria Clementina Timóteo

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Metas Curriculares

Primitivas e cálculo integral em $\mathbb{R}$.

Trata-se de um domínio novo relativamente ao Programa ainda em vigor, que se encontrava, neste aspeto, totalmente desalinhado com a grande maioria dos currículos dos países Europeus.

O tratamento, ainda que a nivel superficial e intuitivo, da noção de primitiva e de integral definido permite:

- Consolidar a aprendizagem da derivação;
- Co-substanciar, a um nível mais abstrato, o conceito de diferenciabilidade;
- Resolver um vasto leque de novos problemas, tanto teóricos como de aplicação mais direta ao real.

Metas Curriculares

1. Definir a noção de primitiva

- Definição de primitiva de uma função f num dado intervalo I;
- Propriedade: duas primitivas de f diferem de uma constante;
- Propriedade: dada uma primitiva F de f num intervalo I, o conjunto de todas as primitivas de f é o conjunto das funções da forma $F(x) + c$, onde c é uma constante;
- Introduzir as notações «Pf» e «$\int f(x)dx$» para designar o conjunto das primitivas de *f* em *I*, com o abuso de notação

$$Pf(x) = \int f(x)dx = \{x \in I \to F(x) + c : c \in \mathbb{R}\} = F(x) + c, c \in \mathbb{R}.$$

- Propriedade: dado $a \in I$ e $b \in \mathbb{R}$, existe uma única primitiva F tal que $F(a) = b;$
- Primitivas de referência: $1, x^a (a \neq 0, a \neq -1), \frac{1}{x}, e^x, \sin(x), \cos(x)$. (justificar e memorizar)
- Propriedade: linearidade da primitivação, no sentido em que, em termos de conjuntos, $P(f+g)(x) = Pf(x) + Pg(x)$ e $P(kf)(x) = kP(f)(x), k \in \mathbb{R}.$
- Primitivas de funções da forma $u'(x)f(u(x))$, conhecida uma expressão de uma primitiva de f.

Metas Curriculares

2. Abordar intuitivamente a noção de integral definido

Optou-se por não construir formalmente a noção de integral definido, mas antes partir do pressuposto que existe uma noção de área, associada a regiões do plano delimitadas por gráficos de funções contínuas, que verifica axiomaticamente algumas propriedades:

- Se R_1 e R_2 são regiões do plano cuja interseção tem área nula, $A(R_1 \cup R_2) = A(R_1) + A(R_2)$;
- A área de um segmento de reta é nula;
- A área é preservada por isometria.

Descritores do segundo objetivo geral

- Dada f não negativa num dado intervalo *[a,b]*, denota-se por $\int_a^b f(x)dx$ a área da região do plano delimitada pelas retas de equação $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pela curva de equação $y = f(x)$.

- Comentar a origem histórica deste sinal de integral e a respetiva interpretação intuitiva de soma de uma infinidade de "retângulos infinitesimais". Poderá aproveitar-se para comentar igualmente a notação

$$\frac{df}{dx}$$

para designar a derivada de f.

- Chamar a atenção para o facto de, na expressão $\int_a^b f(x)dx$, «x» ser uma ocorrência muda.

Metas Curriculares

Descritores do segundo objetivo geral

- Propriedade: monotonia do integral

Sejam funções contínuas f e g tais que $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x) \leq g(x)$.
Então

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Teorema fundamental do cálculo integral
(por enquanto para funções contínuas não negativas)

Dada f contínua e não negativa num dado intervalo $I = [a, b]$, a função F definida em I por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é uma primitiva de f no intervalo I.

Metas Curriculares

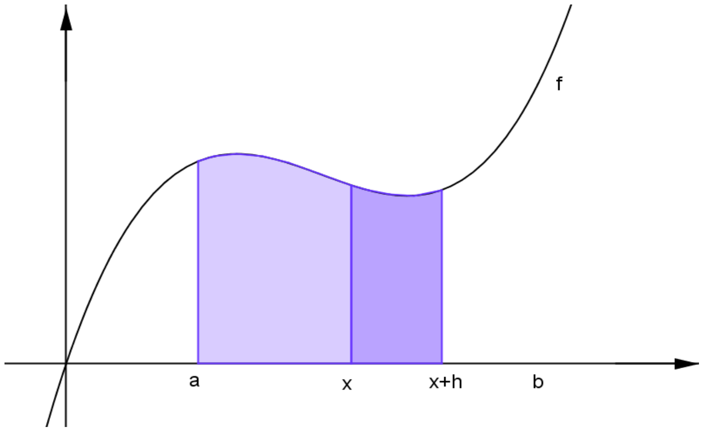
Prova do teorema fundamental do cálculo

Dado o carácter intuitivo com que a noção de integral está a ser introduzida, a demonstração deste resultado baseia-se em propriedades intuitivas da área que deverão ser aceites como verdadeiras.

1. Dado $x \in I = [a, b]$ e $h > 0$ tal que $x + h \in I$,

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

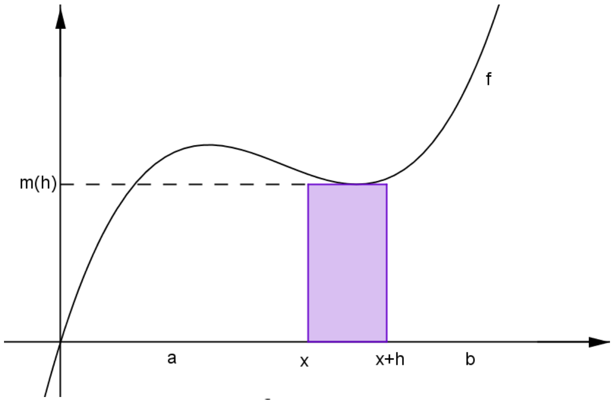
(decompor a área delimitada pelas retas de equação $t = a$, $t = x + h$, $y = 0$ e pela curva de equação $y = f(x)$ em duas regiões cuja interseção é um segmento de reta, de medida nula.)

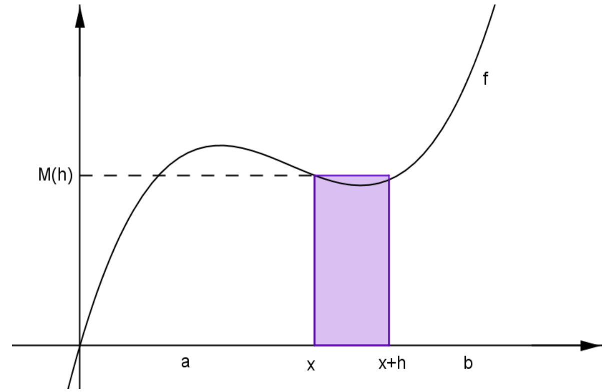


Metas Curriculares

2. Pelo teorema de Weierstrass, f admite máximo e mínimo no intervalo $[x, x+h]$ (denotados respetivamente «$m(h)$» e «$M(h)$». Tem-se então

$$h.m(h) \leq F(x+h) - F(x) \leq h.M(h),$$





ou seja,

$$m(h) \leq \frac{1}{h}\big(F(x+h) - F(x)\big) \leq M(h).$$

Por continuidade de f no ponto x, é fácil verificar que

$$\lim_{h\to 0^+} m(h) = \lim_{h\to 0^+} M(h) = f(x)$$

De facto, por definição de limite, fixado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo o $0 < h < \delta$, $t \in [x, x+h] \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \epsilon$.
Em particular, para todo o $0 < h < \delta$

$$|M(h) - f(x)| < \epsilon \text{ e } |m(h) - f(x)| < \epsilon,$$

de onde se conclui o resultado anunciado.

3. Procedendo de modo análogo para $h < 0$, obtém-se $F'(x) = f(x)$.

- Deste resultado, pode então obter-se facilmente a regra dita «de Barrow»:

Se F é uma primitiva de f no intervalo $[a, b]$,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

- Convenção: define-se, para $a < b$, o símbolo $\int_b^a f(t)dt$ como representando

$$-\int_a^b f(t)dt$$

verificando que esta convenção torna válida a relação «de Chasles»

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

para todo a, b, c no intervalo em que f está definida.

Metas Curriculares

- Propriedade: linearidade do integral definido.

Estando disponível o teorema fundamental do cálculo, esta propriedade resulta diretamente da linearidade da derivação.

No caso da fórmula

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\,,$$

Poderá ser interessante argumentar geometricamente, admitido o princípio de Cavalieri.

Metas Curriculares

Integral de uma função que muda de sinal um número finito de vezes

1. Para uma função f contínua e não positiva em $[a, b]$, define-se o integral de f em $[a, b]$ por

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b -f(x)dx\,.$$

Como a área de uma região do plano é invariante por reflexão axial, este integral pode também ser interpretado como o simétrico da área da região do plano delimitada pelas retas de equação $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pela curva de equação $y = f(x)$.

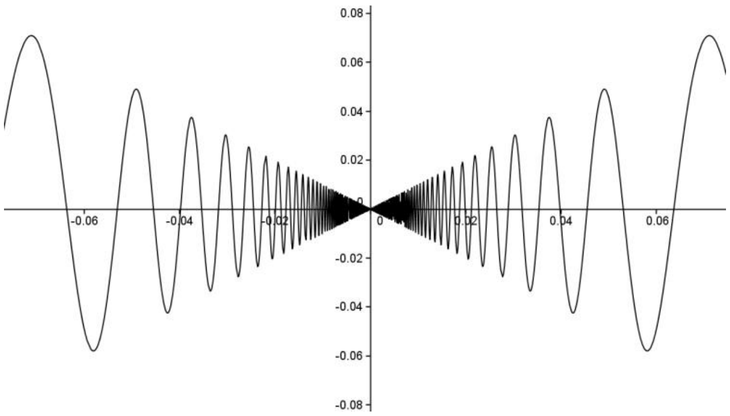
2. Se existir uma subdivisão $(a = c_0, c_1\,, c_k\,, \ldots., b = c_N)$ de $[a, b]$ tal que f é não negativa ou não positiva em cada um dos intervalos definidos pela subdivisão, define-se o integral de f em $[a, b]$ por

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \cdots + \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dx + \cdots + \int_{c_{N-1}}^{b} f(x)dx$$

Integral de uma função que muda de sinal um número finito de vezes

Poderão então generalizar-se as diversas propriedades do integral estudadas (monotonia, teorema fundamental do cálculo, regra de Barrow, linearidade, relação de Chasles) a esta classe de funções.

Deve-se chamar a atenção que existem funções contínuas (como a função definida no intervalo $[0,1]$ por $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$) que não pertencem a esta classe, e para as quais, consequentemente, não se definiu a noção de integral.



Metas Curriculares