PROGRAMA
e
Metas Curriculares
Matemática A

Teoremas de comparação para sucessões e funções

António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira, Luísa Loura, Maria Clementina Timóteo

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Metas Curriculares

Teoremas de comparação para sucessões e funções

Trata-se de uma boa oportunidade para consolidar as noções relativas ao cálculo de limites, devendo os alunos **realizar algumas das demonstrações propostas** sem que haja necessidade de as realizar todas, já que envolvem raciocínios bastante semelhantes (como se verá trata-se essencialmente de argumentos semelhantes aos utilizados para provar a **unicidade do limite**). Para esse efeito utiliza-se em todos os descritores deste objetivo geral o símbolo #. Por exemplo (FRVR12):

1. *Utilizar teoremas de comparação e os teoremas das sucessões e funções enquadradas*

   1. #Provar, dadas sucessões convergentes (u_n) e (v_n), que se, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$ então $\lim u_n \leq \lim v_n$.

   6. #Provar, dado um número real l, funções reais de variável real f,g e h de domínio D e $a \in \mathbb{R}$, que se $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = l$ e se para todo o $x \in D$,$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, então $\lim_{x \to a} f(x) = l$, estender este resultado ao caso de limites por valores superiores ou inferiores a a bem como ao caso de limites em $\pm\infty$, e designar este resultado por «Teorema das funções enquadradas».

Teoremas de comparação para sucessões e funções

Ao propor-se algumas demonstrações (como no exemplo que se segue) poderá chamar-se a atenção dos alunos para a conveniência em representar graficamente as posições numa reta numérica dos valores auxiliares considerados. Examinemos um dos exemplos do caderno de apoio (FRVR12-1.1):

1. Considere sucessões (u_n) e (v_n) convergentes respetivamente para l e l' tais que, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$. Pretendemos provar que $l \leq l'$; para o efeito resolva as seguintes alíneas:

   1.1 Suponha que $l > l'$ e, sendo $\delta = \frac{l-l'}{2}$, justifique, recordando a definição de limite de uma sucessão, que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq p$ então $u_n > l - \delta$.

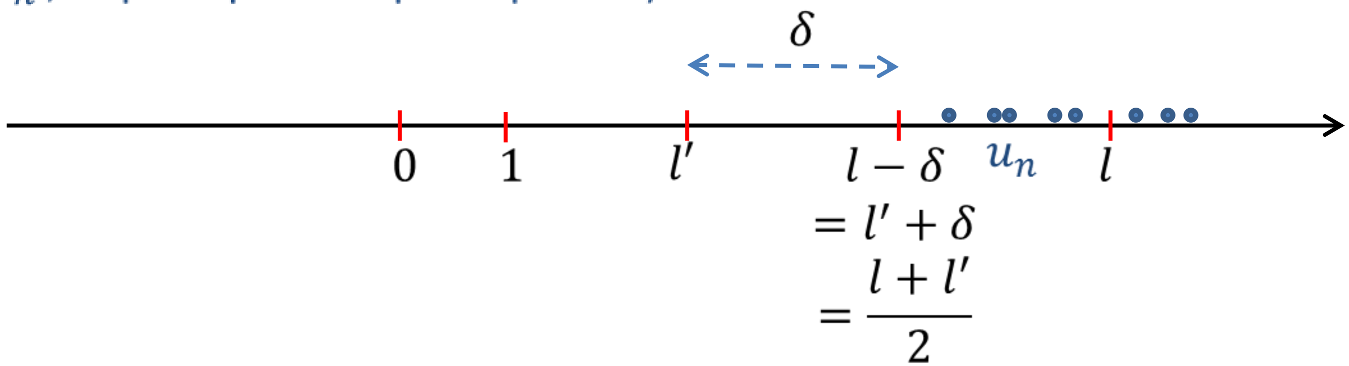
   1.2 Deduza da alínea anterior que, supondo $l > l'$, existe uma ordem a partir da qual $v_n > \frac{l+l'}{2}$, ou seja, $v_n > l' + \delta$ e conclua que, nessa hipótese, não se poderia ter $v_n \longrightarrow l'$.

   1.3 Conclua da alínea anterior que $l \leq l'$.

Metas Curriculares

Teoremas de comparação para sucessões e funções

Pode ilustrar-se a resolução das alíneas 1.1 e 1.2 representando numa reta numérica l, l', $\delta = \frac{l-l'}{2}$ e alguns valores de u_n para n maior ou igual a certo p, de acordo com a definição de limite (e supondo já p escolhido de modo que a partir dessa ordem $u_n \leq v_n$, o que é possível por hipótese):



Pode agora argumentar-se como na alínea 1.2; atendendo à hipótese $u_n \leq v_n$, a partir da mesma ordem p os v_n teriam de ficar na reta numérica à direita de $l - \delta = l' + \delta$, o que os impediria de ficar na vizinhança δ de l' pelo que não se poderia ter $v_n \to l'$, contra a hipótese.

Depois de se perceber bem graficamente a ideia da demonstração, que é considerar o ponto médio do segmento cujos extremos têm abcissas l' e l e utilizar as vizinhanças de l e l' que têm esse ponto como extremo comum, é fácil calcular qual o δ que corresponde a essas vizinhanças, muito simplesmente "forçando" a igualdade $l - \delta = l' + \delta$ e resolvendo esta equação em ordem a δ.

Teoremas de comparação para sucessões e funções

Uma vez demonstrados os teoremas de comparação para sucessões torna-se fácil justificar os teoremas de comparação para funções, já que os limites de funções podem ser obtidos por passagem ao limite de sucessões às quais se podem aplicar os resultados já conhecidos.

Estes resultados permitem-nos calcular limites aos quais não se podem aplicar diretamente resultados anteriormente conhecidos; por exemplo (FRVR12-3.1):

5. Considere a função g definida por $g(x) = \frac{\sin x}{x^2+1}$

 5.1 Determine funções f e h tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ em $\mathbb{R}$ e de modo que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x) = 0.$$

 5.2 Justifique que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x^2+1} = 0$.

Ou:

8. **Seja, para $x \in \mathbb{R}$, $E(x)$ a «parte inteira de x», isto é, o maior inteiro menor ou igual a x, ou seja, o único número inteiro $E(x)$ tal que $x \in [E(x), E(x)+1[$.

 Calcule o valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(xE\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

Metas Curriculares