# PROGRAMA
# e
# Metas Curriculares
# Matemática A

## Trigonometria e Funções Trigonométricas (12º ano)

António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira, Luísa Loura, Maria Clementina Timóteo

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Metas Curriculares

# Trigonometria e Funções Trigonométricas

No 12º ano continua-se o estudo da Trigonometria e Funções Trigonométricas. Começa-se por abordar as fórmulas do seno e cosseno da soma e diferença de ângulos:

1. **+Reconhecer**, dados ângulos $\alpha$ e $\beta$ cuja soma é um ângulo **convexo**, que $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$ e $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$.

2. **+Reconhecer**, dado um ângulo $\alpha$ **convexo** de amplitude superior à de um ângulo $\beta$, que $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)$ e $\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)$, onde $\alpha-\beta$ é um ângulo cuja soma com $\beta$ é igual a $\alpha$.

3. **Saber** que, para todos os $x, y \in \mathbb{R}$, $\cos(x \pm y)=\cos x \cos y \mp \sin x \sin y$, $\sin(x \pm y)=\sin x \cos y \pm \cos x \sin y$, **estendendo-se** assim as fórmulas já conhecidas envolvendo apenas medidas de amplitude de ângulos geométricos convexos e **justificar** que $\sin(2x)=2\sin x \cos x$ e $\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x$.

O **reconhecimento** das fórmulas atrás expressas no caso dos ângulos convexos pode ser mais uma ocasião para a utilização dos conhecimentos de **Geometria Euclidiana sintética** adquiridos no ensino básico como se exemplifica no Caderno de Apoio do 12º ano e de que veremos um exemplo. No mesmo caderno (texto de apoio ao descritor TRI12-1.2) também se apresenta um exemplo de demonstração das mesmas fórmulas utilizando conhecimentos acerca do **produto escalar**.

Metas Curriculares

# Trigonometria e Funções Trigonométricas

Antes de se abordarem as demonstrações das fórmulas trigonométricas para o seno e o cosseno da soma de ângulos é conveniente ter bem presente como se obtêm imediatamente as medidas de **comprimento** dos **catetos** de um **triângulo retângulo** através da medida de **comprimento** da **hipotenusa** e do **seno** e **cosseno** de um dos **ângulos agudos** do triângulo.

É óbvio, da própria definição destas razões trigonométricas, que se for dado um triângulo $[ABC]$, rectângulo em $B$, e sendo $\alpha$ o ângulo interno de vértice em $A$ e $h$ a medida de comprimento da hipotenusa, então a medida de comprimento do **cateto adjacente** a $\alpha$ é dada por $\boldsymbol{h\cos\alpha}$ e a medida de comprimento do **cateto oposto** a $\alpha$ é dada por $\boldsymbol{h\sin\alpha}$.

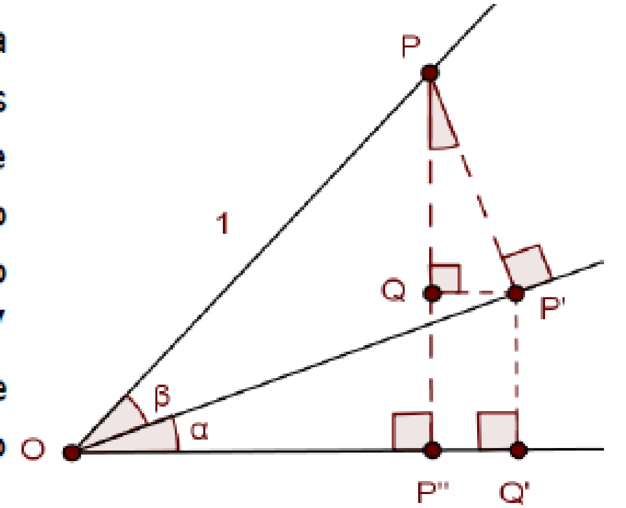
Ou seja, em certo sentido podemos dizer que para obter o comprimento da **projecção ortogonal** de um segmento em determinada direção basta multiplicar a medida do **comprimento** do segmento pelo **cosseno** do (menor) ângulo entre a recta suporte do segmento e essa direcção e para obter o comprimento da **projeção** do mesmo segmento numa **direção perpendicular** à inicial basta multiplicar a medida do respectivo comprimento pelo **seno** do referido ângulo.

Assim, em construções envolvendo **direções mutuamente perpendiculares** torna-se fácil exprimir rapidamente o comprimento de **projeções** de segmentos em pares de tais direções usando apenas **razões trigonométricas** de **um ângulo**.

Metas Curriculares

# Trigonometria e Funções Trigonométricas

1. Considere dois ângulos adjacentes $\alpha$ e $\beta$ de vértice $O$ cuja união é um ângulo agudo. Pretendemos deduzir as fórmulas que permitem calcular o seno e o cosseno de $\alpha + \beta$ em função do seno e do cosseno de $\alpha$ e $\beta$. Para o efeito, no lado do ângulo $\beta$ que não é comum ao ângulo $\alpha$, considere um ponto $P$ tal que $\overline{OP} = 1$, sejam $P'$ e $P''$ as projeções ortogonais do ponto $P$ nas retas suporte respetivamente do lado comum aos dois ângulos e do outro lado do ângulo $\alpha$ e resolva as seguintes questões:




1.1 Justifique que os pontos $P'$ e $P''$ estão, respetivamente, nos referidos lados dos ângulos $\beta$ e $\alpha$ e que $\overline{PP''} = \sin(\alpha + \beta)$, $\overline{OP''} = \cos(\alpha + \beta)$, $\overline{PP'} = \sin\beta$ e $\overline{OP'} = \cos\beta$.

1.2 Justifique que o ângulo $P'PP''$ é igual ao ângulo $\alpha$.

1.3 Considere o ponto $Q$, projeção ortogonal do ponto $P'$ na reta $PP''$, justifique que fica situado entre os pontos $P$ e $P''$ e, utilizando o triângulo retângulo $[PQP']$, prove que $\overline{PQ} = \sin\beta\cos\alpha$.

1.4 Considere o ponto $Q'$ projeção ortogonal do ponto $P'$ na reta $OP''$, justifique que o ponto $P''$ fica situado entre os pontos $O$ e $Q'$, utilizando o triângulo retângulo $[OQ'P']$, prove que $\overline{P'Q'} = \cos\beta\sin\alpha$ e conclua que $\overline{QP''} = \cos\beta\sin\alpha$.

1.5 Conclua das alíneas anteriores que $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \, . \cos\beta + \cos\alpha \, . \sin\beta$.

1.6 Utilizando novamente os triângulos retângulos $[PQP']$ e $[OQ'P']$ prove que $\overline{P''Q'} = \overline{QP'} = \sin\beta\sin\alpha$, que $\overline{OQ'} = \cos\beta\cos\alpha$ e conclua que $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \, . \cos\beta - \sin\alpha \, . \sin\beta$.

# Trigonometria e Funções Trigonométricas

As fórmulas trigonométricas anteriores, em conjunto com as que permitem calcular as razões trigonométricas de um ângulo de amplitude igual a metade da amplitude de um outro ângulo do qual se conhecem as razões trigonométricas (facilmente dedutíveis destas), permitiram, desde a **Antiguidade** (com Hiparco, por exemplo, matemático da Escola de Alexandria, que viveu no século II a.C.) a elaboração de **tabelas trigonométricas** com precisão suficiente para as inúmeras aplicações em que desde então se utilizou a **Trigonometria**, nomeadamente em **Astronomia**, **Cartografia**, etc.

Em exemplos do caderno de apoio do 12º ano (texto de apoio ao descritor TRI12-4.1) exploram-se estas questões, estabelecendo-se as fórmulas para o seno e cosseno "**do meio ângulo**" e requerendo-se em seguida a construção de uma pequena **tabela trigonométrica**, partindo de valores **exactos** facilmente dedutíveis de alguns ângulos e utilizando em seguida fórmulas trigonométricas para se passar para os restantes ângulos da tabela.

6. Utilize as fórmulas do seno e do cosseno da metade do ângulo (*cf.* exercícios 4. e 5. acima) e do seno e do cosseno da soma de ângulos para cumprir as seguintes tarefas:
   - 6.1 Construa uma tabela trigonométrica com os valores exatos dos senos, cossenos e tangentes dos ângulos agudos de amplitude múltipla de $7{,}5^\circ$ e, utilizando uma máquina de calcular, compare os valores obtidos com os fornecidos pela máquina.
   - 6.2 *Utilizando a alínea anterior determine o valor exato das razões trigonométricas do ângulo de $18^{\text{o}}\,45'$.

# Trigonometria e Funções Trigonométricas

Como passo indispensável para muitas das **aplicações essenciais** das funções trigonométricas calculam-se as **derivadas** das funções trigonométricas introduzidas no 11º ano (TRI12-2):

1. **+Reconhecer** que para todo o $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin x \leq x \leq \tan x$ e **provar** que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, referindo este limite como «limite notável».

2. **Provar** que as funções seno e cosseno são **diferenciáveis** e que para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\sin' x = \cos x$ e $\cos' x = -\sin x$.

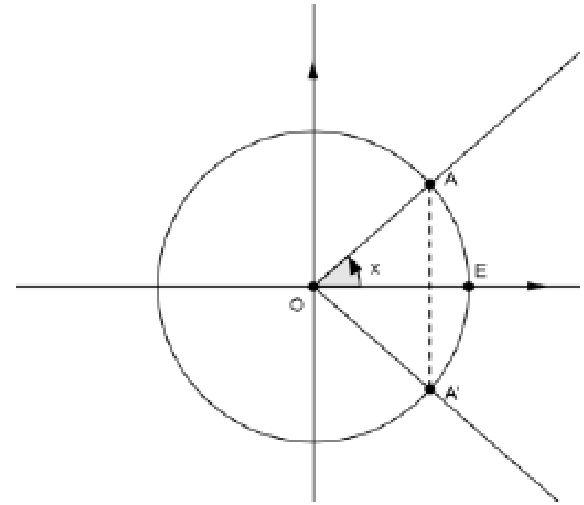
3. **Provar** que a função tangente é **diferenciável** no respetivo domínio $D_{\tan}$ e que para todo o $x \in D_{\tan}$, $\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

O reconhecimento requerido da cadeia de desigualdades da qual facilmente se deduz o **limite notável** que permite provar sem dificuldade a **diferenciabilidade** das funções trigonométricas, atendendo também às fórmulas atrás estudadas, pode seguir as linhas descritas no Caderno de Apoio.

# Trigonometria e Funções Trigonométricas

Consideremos, fixado um referencial ortonormado, o ângulo orientado de medida $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ radianos cujo lado origem coincide com o semieixo positivo das abcissas.

Consideremos ainda a intersecção $A$ do lado extremidade deste ângulo com a circunferência trigonométrica e o ponto $A'$ simétrico de $A$ relativamente ao eixo da abcissas.



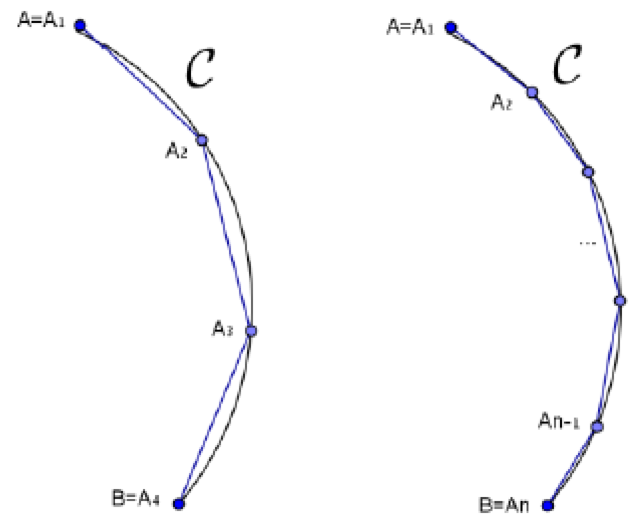

É bastante intuitivo reconhecer que uma **corda** tem comprimento **inferior** ao **arco** que subtende. Assim, sendo $2\sin x$ a medida do comprimento de $[AA']$ e, por definição de radiano, $2x$ a medida do comprimento do arco $AA'$ conclui-se que $2\sin x \leq 2x$, ou seja, que $\boldsymbol{\sin x \leq x}$.

Este resultado pode ser tornado **rigoroso** se definirmos adequadamente o que se entende por **comprimento** de um arco.

Metas Curriculares

# Trigonometria e Funções Trigonométricas

Em geral, o comprimento $l(\mathcal{C})$ de uma linha $\mathcal{C}$ de extremidades $A$ e $B$, é definido como o **supremo** dos **comprimentos** das **linhas poligonais** de extremidades $A$ e $B$ cujos vértices pertencem a $\mathcal{C}$, e estão **ordenados** por um processo que corresponde intuitivamente a um percurso ao longo da linha em determinado sentido, adiante designadas por «linhas poligonais **inscritas** em $\mathcal{C}$».




Este conceito é também abordado no caderno de apoio do 11.º ano, a propósito do descritor TRI11-6.1, no caso particular de **arcos de circunferência** e, nesse caso, que é o que será invocado para obter o resultado em análise, a "ordenação dos vértices da linha poligonal" pode ser facilmente definida através da ordenação de ângulos ao centro da circunferência, como se explica no referido texto de apoio.

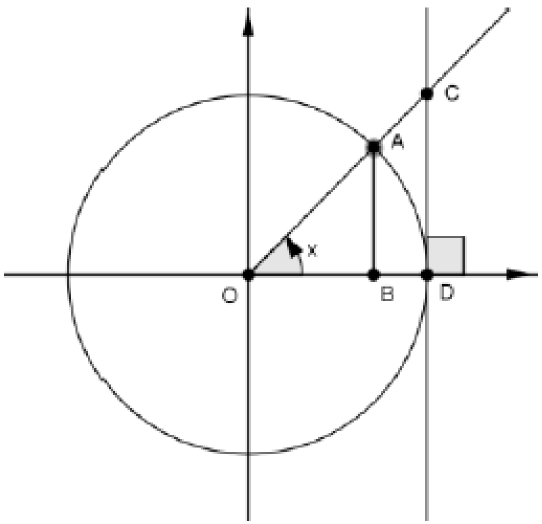
É imediato, com esta definição, que a medida de comprimento de qualquer **linha poligonal inscrita** em $\mathcal{C}$ é **inferior ou igual** à medida de comprimento de $\mathcal{C}$. Sendo $[AA']$, em particular, uma linha poligonal inscrita no arco $AA'$, $\overline{AA'} \leq l\left(\widehat{AA'}\right)$ o que justifica a desigualdade atrás obtida: $\sin x \leq x$, para $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Resta-nos ainda verificar que $\boldsymbol{\tan x \geq x}$.

Metas Curriculares

# Trigonometria e Funções Trigonométricas

Esta desigualdade é relativamente imediata fazendo considerações sobre as **áreas**. Designando por $B$ a projecção ortogonal de $A$ no eixo das abcissas e por $C$ o ponto da semi-recta $\dot{O}A$ cuja projecção ortogonal no eixo das abcissas é o ponto $D(1,0)$, a medida da área do **triângulo** $[OCD]$ é superior à do **sector circular** $OAD$. Tem-se portanto $\frac{1}{2}\tan x \geq \frac{x}{2}1^2$, ou seja, $\tan x \geq x$.

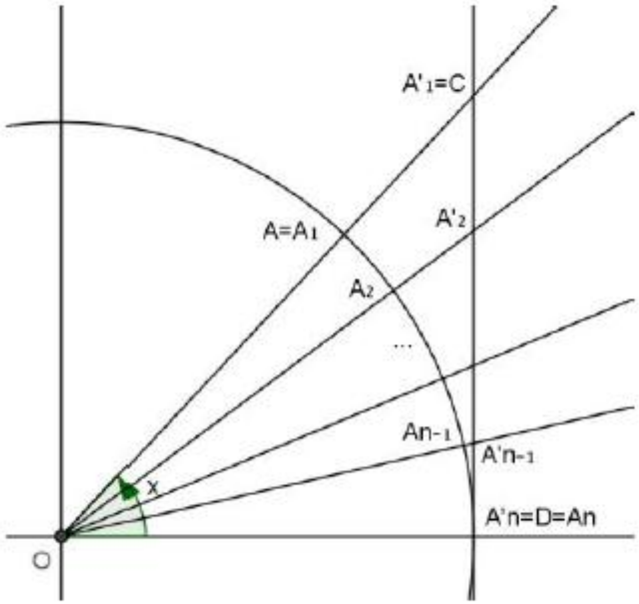


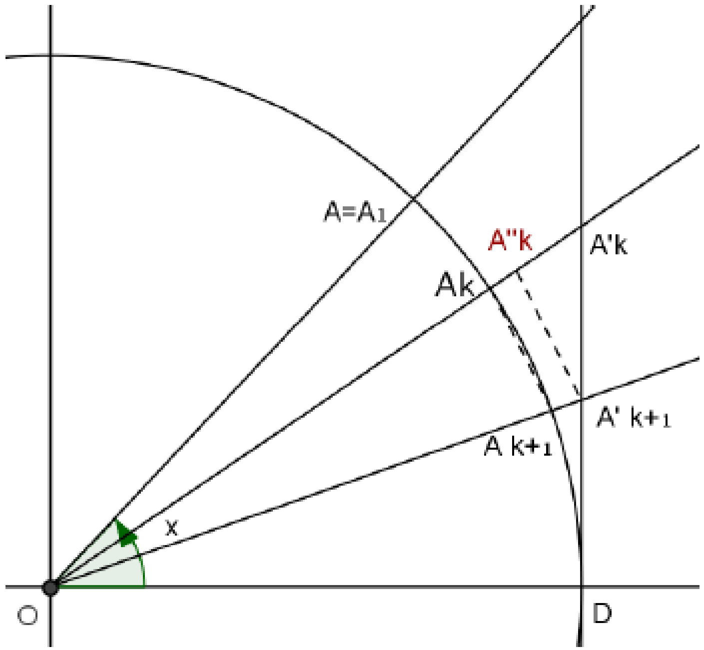

Este último resultado pode igualmente ser obtido recorrendo directamente à **definição de comprimento** do arco $\widehat{AD}$, evitando-se assim o recurso a propriedades das áreas que, sendo bastante **intuitivas**, requerem, para a respectiva justificação rigorosa, uma teoria mais complexa.

Apresentam-se construções geométricas que permitem efectuar essa demonstração; os pormenores podem ser seguidos no Caderno de Apoio, embora uma explicação oral acompanhada da ilustração seja substancialmente mais simples do que aparenta ser a demostração escrita!

Metas Curriculares

# Trigonometria e Funções Trigonométricas




Com base nas desigualdades que acabámos de examinar é agora bastante **rotineira** a obtenção do **limite notável** atrás referido e em seguida o cálculo das **derivadas** das funções trigonométricas

# Trigonometria e Funções Trigonométricas

Também neste domínio do 12º ano e conhecidas as propriedades diferenciais das funções trigonométricas aborda-se uma importante classe de problemas relacionados com estas funções, dando mais uma vez cumprimento ao propósito de se analisarem algumas **aplicações** da Matemática verdadeiramente interessantes e exemplos relevantes da importância da Matemática na **modelação** da realidade física (TRI12-3):

*1. Relacionar **osciladores harmónicos** e a segunda **lei de Newton***

1. Designar por «**oscilador harmónico**» um sistema constituído por um ponto que se desloca numa reta numérica em determinado intervalo de tempo $I$, de tal forma que a respetiva abcissa, como função de $t \in I$, seja dada por uma expressão da forma $\boldsymbol{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$, onde $A > 0$, $\omega > 0$ e $\varphi \in [0,2\pi[$, designar estas constantes, respetivamente, por «**amplitude**», «**pulsação**» e «**fase**», justificar que a função $x$ é **periódica** de **período** $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e designar $f = \frac{1}{T}$ por «**frequência**» do oscilador harmónico.
2. Esboçar o gráfico de funções definidas por $f(x) = a\sin(bx + c) + d$, $f(x) = a\cos(bx + c) + d$ e $f(x) = a\tan(bx + c) + d$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$.

Metas Curriculares

# Trigonometria e Funções Trigonométricas

3. **Saber**, dado um ponto material $P$ de massa $m$ colocado na extremidade de uma **mola** cuja outra extremidade se encontra fixa, que tomando por origem da reta numérica em que $P$ se desloca o respetivo ponto de equilíbrio, a abcissa $x(t)$ da posição de $P$ no instante $t$ satisfaz a equação $\boldsymbol{mx''(t) = -\alpha x(t)}$ $(\alpha > 0)$, intepretando o termo $-\alpha x(t)$ como a **força** exercida pela mola sobre $P$ («**lei de Hooke**»), designar a **igualdade** desta **força** com o **produto** da **massa** pela **aceleração** de $P$ por (um caso particular da) «**segunda Lei de Newton**» e **resolver problemas** envolvendo sistemas massa-mola com estas características.

4. **Justificar**, dado $\alpha > 0$, que as funções definidas por uma expressão da forma $x(t) = A\cos\left(\sqrt{\alpha}t + b\right)$, onde $A$ e $b$ são constantes reais, satisfazem a equação diferencial $x'' = -\alpha x$, **saber** que **todas** as soluções desta equação são dessa forma, e **reconhecer** que um sistema constituído por uma mola e por um ponto material $P$ colocado na respetiva extremidade constitui um **oscilador harmónico**.

Utilizou-se, no caso unidimensional, a **Relação Fundamental da Dinâmica**. Esta relação estabelece a **proporcionalidade**, em cada instante, entre a **força** a que se encontra submetido um **ponto material** e a respectiva **aceleração**, com **constante de proporcionalidade** igual à **massa** desse ponto.

Metas Curriculares

# Trigonometria e Funções Trigonométricas

Sendo um resultado que está, historicamente, na **génese** do próprio **cálculo diferencial**, e tendo em conta a importância que o presente Programa confere à **modelação do real**, este princípio deve ser **conhecido** pelos alunos, mesmo por aqueles que não frequentaram a disciplina de Física.

A **Relação Fundamental da Dinâmica**, em conjunção com a **Lei de Hooke**, permite evidenciar de forma simples um comportamento de **oscilação harmónica**. Esta lei diz essencialmente que uma **mola**, fixada numa extremidade, exerce sobre um **ponto material** $P$, de massa $m > 0$, colocado na outra extremidade, uma **força** de intensidade **proporcional** à **distância** $d(P, P_e)$ e de **sentido** igual ao do vector $\overrightarrow{PP_e}$, onde $P_e$ é a **posição de equilíbrio** que o ponto $P$ ocupa quando a mola se encontra em **equilíbrio**.

Designando por $p(t)$ e por $p_e$ as abcissas dos pontos $P$ e $P_e$ respectivamente, por $x(t)$ a diferença $p(t) - p_e$ e por $k > 0$ a constante de proporcionalidade entre a intensidade da força exercida pela mola e a distância $d(P, P_e)$, a **intensidade** algébrica da força exercida sobre $P$ no instante $t$ é dada por $\boldsymbol{F(t) = -kx(t)}$. Tem-se assim:

$$mx''(t) = m(p(t) - p_e)'' = mp''(t) = F(t) = -kx(t).$$

O deslocamento $x(t)$ satisfaz portanto a **equação diferencial** $x''(t) = -\alpha x(t)$, onde $\alpha = \frac{k}{m} > 0$.

# Trigonometria e Funções Trigonométricas

É imediato verificar que as funções da forma $x(t) = a\cos\left(\sqrt{\alpha}t + b\right)$, onde $a$ e $b$ são constantes reais, são **soluções** desta equação diferencial. Prova-se também que **todas as soluções** são desta forma, pelo que esta classe de funções descreve completamente os possíveis movimentos de um ponto material nas condições acima descritas, ou seja, apresentou-se assim um **modelo matemático**, fundamentado em **leis da Física**, que descreve o movimento oscilatório do ponto $P$.

Metas Curriculares