METAS CURRICULARES PARA O ENSINO SECUNDÁRIO – MATEMÁTICA A

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Caderno de Apoio

11.º ANO

António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira, Luísa Loura, Maria Clementina Timóteo

INTRODUÇÃO

Este Caderno de Apoio constitui um complemento ao documento *Metas Curriculares de Matemática do Ensino Secundário – Matemática A*. Na elaboração das Metas Curriculares utilizou-se um formato preciso e sucinto, não tendo sido incluídos exemplos ilustrativos dos descritores. Neste documento apresentam-se várias sugestões de exercícios e de problemas, comentários relativos a algumas opções tomadas no documento principal e informações complementares para os professores.

Procurou-se realçar os descritores que se relacionam com conteúdos e capacidades atualmente menos trabalhados no Ensino Secundário embora se tenham incluído também outros de modo a dar uma coerência global às abordagens propostas. Estas escolhas não significam, porém, que se considerem menos relevantes os descritores não contemplados. Longe de se tratar de uma lista de tarefas a cumprir, as atividades propostas têm um caráter indicativo, podendo os professores optar por alternativas que conduzam igualmente ao cumprimento dos objetivos específicos estabelecidos nas metas. Aos exemplos apresentados estão associados três níveis de desempenho. Os que não se encontram assinalados com asteriscos correspondem a um nível de desempenho regular, identificando-se com um ou dois asteriscos os exemplos que correspondem a níveis de desempenho progressivamente mais avançados.

Para além das sugestões de exercícios e problemas a propor aos alunos entendeu-se incluir também textos de apoio para os professores. Destinam-se a esclarecer questões de índole científica que fundamentam os conteúdos do Programa e que poderão ajudar à seleção das metodologias mais adequadas à lecionação.

11.º ANO Níveis de Desempenho

Trigonometria TRI11

<table>
<tr><th>Descritor</th><th>Texto de Apoio</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>

Dado um triângulo acutângulo $[ABC]$, designamos os ângulos internos de vértice em A, B e C exatamente por essas letras, e por a,b e c as medidas de comprimento dos lados opostos, respetivamente, aos ângulos A, B e C.

Sendo h a medida da altura relativa ao vértice C, é imediato verificar, por definição do seno, que

$$h = a \sin B = b \sin A,$$

donde, em particular,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

(Note-se que esta igualdade permanece válida em triângulos retângulos e obtusângulos em C.)

Desta forma, em triângulos acutângulos, repetindo o raciocínio relativamente a um outro vértice, facilmente se conclui que

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

</td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>

Comentário

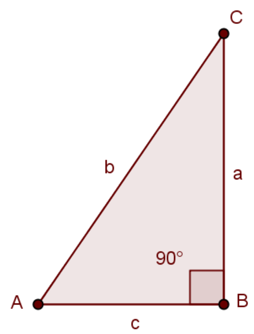
Optou-se, nas Metas Curriculares, por solicitar aos alunos o reconhecimento de que as definições habituais das razões trigonométricas dos ângulos retos e obtusos são as únicas possíveis se se pretender estender a triângulos retângulos e obtusângulos a Analogia dos Senos e a ângulos internos retos e obtusos o Teorema de Carnot, mantendo-se também a identidade entre a tangente e o quociente entre o seno e o cosseno.

No presente descritor apresenta-se, com esta motivação, a definição do seno de um ângulo reto.

Dado um triângulo $[ABC]$ retângulo em B, e designando respetivamente por a, b e c as medidas de comprimento $\overline{BC}, \overline{AC}$ e $\overline{AB}$ e os ângulos internos de vértice em A, B e C exatamente por essas letras, as equações

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{x}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

são equivalentes a $x = 1$, uma vez que $\sin A = \frac{a}{b}$ e $\sin C = \frac{c}{b}$.



Para que a Lei dos senos se possa aplicar a este triângulo devemos assim atribuir a $\sin B$ o valor 1.

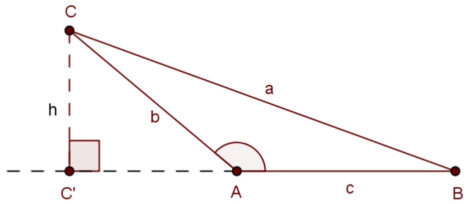
É pois esse o valor que se deve tomar para o seno dos ângulos retos de modo que a Lei dos senos se verifique em triângulos retângulos.

</td></tr>
</table>

1.3

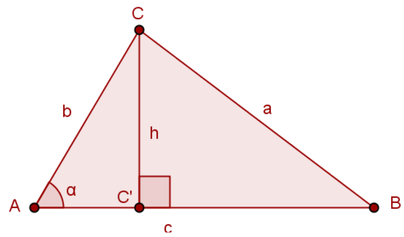
1. Considere um triângulo $[ABC]$ tal que o ângulo de vértice em A é obtuso. Designe $\overline{BC}, \overline{AC}$ e $\overline{AB}$ respetivamente por a, b e c e os ângulos de vértice em A, B e C exatamente por essas letras, seja C' a projeção ortogonal do ponto C sobre a reta AB e $h = \overline{CC'}$.

   Justifique que o ponto A fica estritamente situado entre os pontos C' e B e, supondo que $\sin A$ se encontra definido de tal modo que $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$, justifique que $\sin A = \frac{h}{b}$, concluindo que $\sin\ A = \sin\ (180° - A)$.



1.4

1. Considere um triângulo $[ABC]$ tal que os ângulos internos de vértice em A e B são agudos e de lados de medida de comprimento $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$. Seja $\alpha = C\hat{A}B$ a amplitude do ângulo interno de vértice em A, considere a projeção ortogonal C' do ponto C sobre AB e seja $h = \overline{CC'}$.

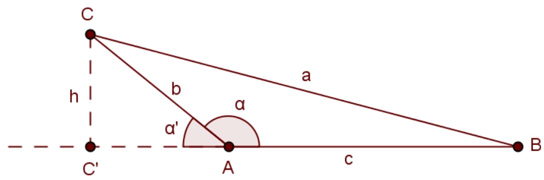


   1.1. Justifique que o ponto C' fica estritamente situado entre os pontos A e B e mostre, aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos $[AC'C]$ e $[BC'C]$, que $h^2 = b^2 - (b\cos\alpha)^2 = a^2 - (c - b\cos\alpha)^2$.

   1.2. Deduza da alínea anterior que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

1.6

1. Considere um triângulo $[ABC]$ em que o ângulo interno em A é obtuso. Seja $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ $c = \overline{AB}$, α o ângulo interno associado ao vértice A, C' a projecção ortogonal do ponto C na reta AB e α' o ângulo externo $C'AC$, suplementar de α.



   1.1 Justifique que o ponto A fica estritamente situado entre os pontos C' e B e, utilizando o teorema de Pitágoras relativamente aos triângulos retângulos $[CC'A]$e $[CC'B]$, justifique que $h^2 = b^2 - (b\cos\alpha')^2 = a^2 - (b\cos\alpha' + c)^2$.

   1.2 Conclua da segunda igualdade da alínea anterior que $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha'$.

   1.3 *Pelo teorema de Carnot, sabe-se que, num triângulo $[ABC]$ e com as notações habituais, se os ângulos internos de vértice em A e B forem agudos, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Deduza da alínea anterior que para este resultado se poder estender a ângulos internos obtusos se deve definir, para um ângulo α obtuso, $\cos\alpha = -\cos\alpha'$, onde α' é um ângulo agudo suplementar de α.

2. **Considere um triângulo $[ABC]$ em que o ângulo interno em A é obtuso. Seja $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, α o ângulo interno de vértice em A e α' um ângulo externo suplementar de α.

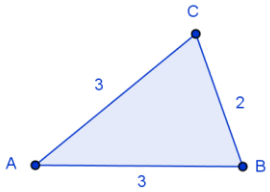
   2.1 Utilizando uma construção análoga à utilizada na demonstração do Teorema de Carnot para ângulos internos agudos, mostre que $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha'$.

   2.2 Proponha um valor para o cosseno do ângulo obtuso α de tal modo que o Teorema de Carnot se estenda a ângulos internos obtusos.

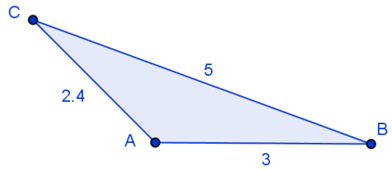
1.8

1. Tendo em conta unicamente os dados da figura em que a medida do comprimento dos lados está expressa numa dada unidade, resolva cada um dos seguintes triângulos $[ABC]$, apresentando, quando necessário, valores aproximados à décima de grau, para a amplitude dos ângulos e aproximados à décima da unidade para os comprimentos dos lados.

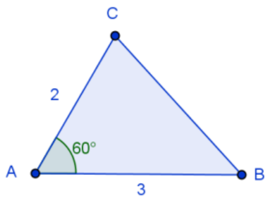
1.1.



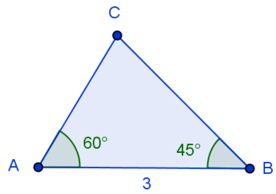
1.2



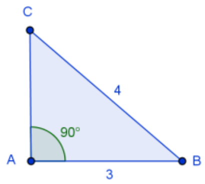
1.3



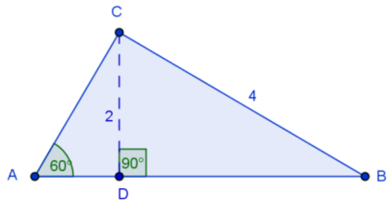
1.4.



1.5.



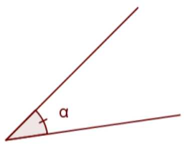
1.6.

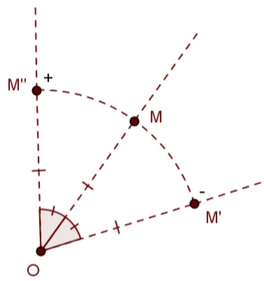


2.1
2.2
3.1

Informação Complementar para o professor

No 6.º ano (*cf.* Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico, GM6- 9.14 a 9.20 e Caderno de Apoio do 2º ciclo, 9.18 e Texto Complementar de Geometria, 6º ano, 9.13 a 9.19) introduziu-se a noção de rotação num plano com dado centro O e de um dado ângulo α, verificando-se que, se o ângulo não for nulo, nem raso, nem giro, existem exatamente duas imagens de um dado ponto por rotações de centro O e ângulo α.

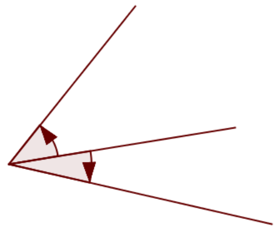


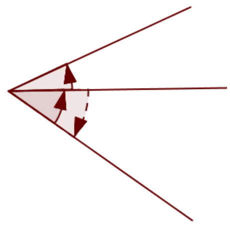


Como é óbvio, utilizando essas duas imagens é possível construir uma infinidade de aplicações do plano em si próprio que a cada ponto associem uma dessas imagens, arbitrariamente escolhida. Com o objetivo de, fixado um centro O e um ângulo α não nulo, nem raso, nem giro, privilegiar duas dessas aplicações, cada uma delas traduzindo a ideia intuitiva de "rotação do plano de centro O e ângulo α com determinado sentido ou orientação", distinguiram-se então essas duas imagens, intuitivamente, recorrendo ao movimento dos ponteiros de um relógio, de modo a poderem associar-se imagens adequadamente escolhidas dos diferentes pontos a uma mesma rotação do plano com determinado "sentido" ou "orientação", por comparação com o referido movimento. Com a definição agora dada em 2.1 de ângulo orientado torna-se possível, fixado um ponto O, associar a cada ângulo orientado uma rotação do plano bem determinada de centro O, utilizando 2.2, que traduz exatamente o referido processo intuitivo introduzido no Ensino Básico. É claro que se o ângulo orientado for raso, nada impede que se atribua também significado a "orientação negativa" e "orientação positiva" (como é feito em 2.2), embora ângulos rasos com orientações opostas determinem a mesma rotação com dado centro O.

Do que precede conclui-se que será conveniente rever os tópicos acima referidos do Ensino Básico ao abordar-se este objetivo geral do 11.º ano.

Como foi observado no referido Texto Complementar de Geometria, os dois ângulos que se utilizam para obter as imagens distintas de um ponto por rotações de um mesmo centro e ângulo partilham um lado (o que tem origem no centro de rotação e passa pelo ponto do qual se pretende determinar as imagens) e são adjacentes. Assim, embora a orientação de ângulos apenas se aborde no Ensino Secundário do modo intuitivo expresso no descritor 2.2, essa propriedade pode servir de base a uma definição rigorosa de "igualdade de orientação" de dois ângulos nos quais se distingue um lado origem e um lado extremidade, ou seja, de dois ângulos orientados (de acordo com a definição do descritor 2.1). Fica claro que a dois ângulos orientados adjacentes que partilhem o lado origem deve atribuir-se orientações opostas e, consequentemente, se o lado origem de um coincidir com lado extremidade do outro, deve considerar-se que têm a mesma orientação, já que também se pretende que tenham orientações opostas dois ângulos orientados que se definem escolhendo num mesmo ângulo diferentes lados origem, como é óbvio da ideia intuitiva que se pretende formalizar.

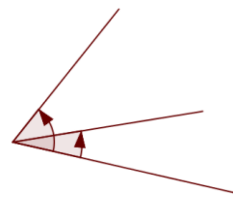




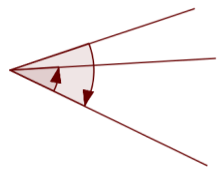
Está implícito na conclusão que acabámos de extrair que se pretende agrupar os ângulos orientados em exatamente duas classes disjuntas, cada uma delas correspondente a uma das duas possíveis orientações «opostas uma da outra» que pretendemos atribuir a esses ângulos; por outras palavras, pretendemos que seja de equivalência a relação estabelecida entre ângulos orientados α e β através de «α tem a mesma orientação que β» e que, para essa relação de equivalência, existam exatamente duas classes. Em particular, se dois dados ângulos não tiverem a mesma orientação que um terceiro, pretendemos que tenham ambos a mesma orientação. Estas propriedades traduzem de forma rigorosa o que fica expresso, fazendo apelo à intuição, no descritor 2.2, onde, para dados ângulos orientados α e β, se estabelece a alternativa de terem a mesma orientação ou orientações opostas, por comparação com o movimento dos ponteiros de relógios. Esse procedimento intuitivo implica, como facilmente se compreende, que a relação assim estabelecida entre ângulos orientados deva, de facto, ser de equivalência com exatamente duas classes, pois, por um lado, o próprio processo experimental descrito torna obviamente uma tal relação reflexiva, simétrica e transitiva, por outro lado é fácil fixar dois ângulos orientados que, por esse critério, tenham orientações opostas (por exemplo um qualquer ângulo orientado e o que se obtém deste permutando os lados origem e extremidade) e qualquer ângulo orientado terá de estar na classe de equivalência de um destes dois, já que temos a perceção intuitiva de que os movimentos dos ponteiros de um relógio, se não puderem descrever um ângulo começando no lado origem e terminado no lado extremidade, então poderão certamente descrevê-lo começando no lado extremidade e terminando no lado origem.

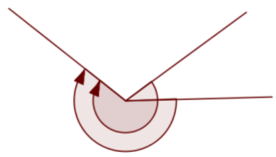
Deste modo ficamos já com critérios rigorosos para estabelecer a identidade de orientação no caso de ângulos orientados adjacentes ou de ângulos orientados que apenas se distinguem pela escolha do lado origem e podemos depois utilizar estes critérios e a pretendida transitividade desta relação entre ângulos orientados para guiar as definições em outros casos.

Assim, se dois ângulos orientados partilharem um lado mas não forem adjacentes, ou seja, se um deles estiver contido no outro, se o lado comum for o lado origem em ambos os casos, não é difícil concluir que se lhes deve atribuir a mesma orientação, já que ambos terão orientações opostas a um ângulo que com eles partilhe o lado origem mas seja adjacente a ambos.



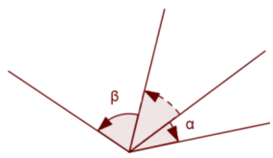
Naturalmente, agora é imediato concluir que se o lado comum for lado origem de um e extremidade do outro então deverão ter orientações opostas e que se o lado comum for lado extremidade de ambos deverão ter a mesma orientação.





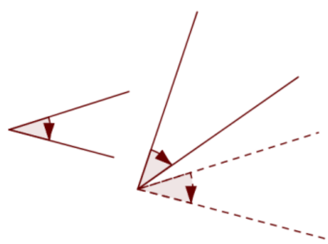
Consideremos agora o caso em que os dois ângulos orientados α e β apenas têm o vértice comum mas não partilham um dos lados.

Para estabelecermos se as respetivas orientações devem ser definidas como coincidentes ou opostas podemos sempre utilizar um ângulo orientado auxiliar, por exemplo, o que tenha lado origem coincidente com o lado origem de α e o lado extremidade coincidente com o lado origem de β e que seja adjacente a α, tendo portanto, por construção, orientação oposta à de α, e podendo verificar-se depois se tem orientação coincidente ou oposta à de β, já que com ele partilha um dos lados.



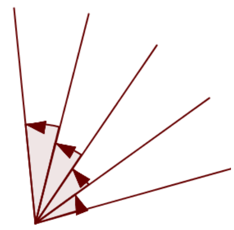
Pela transitividade pretendida e o facto de um ângulo orientado ter sempre uma das duas possíveis orientações podemos assim concluir se α e β devem ter a mesma orientação ou orientações opostas.

Finalmente, para comparar as orientações de ângulos com vértices não coincidentes, podemos sempre utilizar um par de ângulos orientados, ambos convexos ou ambos côncavos, cujos lados origem e extremidade sejam dois a dois diretamente paralelos, considerando que tais ângulos têm a mesma orientação. Assim podemos sempre reduzir-nos ao caso de ângulos com vértice comum invocando a transitividade e este novo princípio.



Como é óbvio, para legitimar esta descrição da relação assim estabelecida entre ângulos orientados seria necessário provar, examinando exaustivamente as diferentes situações possíveis, que esta construção é coerente e conduz de facto a uma relação de equivalência com exatamente duas classes.

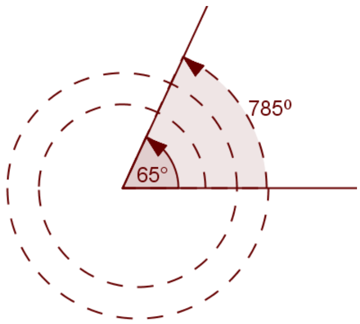
Não é difícil estabelecer a ligação entre estes critérios rigorosos e a ideia intuitiva de orientação, que invoca o conceito de "movimentos de rotação" de semirretas, materializados nos movimentos imaginados dos ponteiros de relógios; com efeito, por exemplo, uma sequência de ângulos orientados com a mesma amplitude, tais que ângulos "seguidos" na sequência são adjacentes e partilham um lado que é extremidade do primeiro e origem do segundo, traduz de certa maneira um movimento de rotação em determinado sentido efetuado num número finito de passos "discretos".



Se, na formulação intuitiva da orientação de ângulos, quisermos prescindir da referência a relógios, podemos, para comparar a orientação de dois ângulos orientados α e β, em alternativa, verificar se é possível "descrever os ângulos α e β fazendo rodar no mesmo sentido os lados origem dos dois ângulos até que coincidam com os lados extremidade" ou seja, se é possível imaginar observadores situados nos vértices dos ângulos α e β e no mesmo semiespaço determinado pelo plano π, que acompanham com o olhar os movimentos de semirretas que começam por coincidir com os lados origem e descrevem os ângulos até que coincidam com os correspondentes lados extremidade e verificar se esse movimento se realiza, para ambos os ângulos, da esquerda para a direita ("sentido dos ponteiros do relógio" ou "sentido retrógrado") ou, em ambos os casos, da direita para a esquerda ("sentido contrário ao dos ponteiros do relógio" ou "sentido direto").

É curioso notar que as designações "sentido direto " e "sentido retrógrado" se relacionam com o modo como um observador pode acompanhar o movimento diurno aparente do Sol, de sentido inverso ao do movimento de rotação da Terra; com efeito a designação "sentido direto" pretende descrever o sentido do movimento de rotação da Terra, pelo que o movimento diurno do Sol, seguido por um observador na Terra como tendo sentido inverso a esse movimento de rotação executado pela Terra em torno do respetivo eixo, ou seja, o movimento observado do Sol ao longo de um dia, seria no sentido retrógrado. Como consequência, o movimento diurno da sombra de uma vara com a direção do eixo da Terra, projetada num plano horizontal em que a vara está implantada e em que se situe o observador (excluindo o caso de pontos no Equador, em que a direção do eixo da Terra é sempre paralela ao plano horizontal), seria também efetuado no sentido retrógrado, tendo sido esse movimento que inspirou o movimento dos ponteiros dos relógios mecânicos que assim tentaram reproduzir os movimentos das sombras dos "gnómons" dos relógios de Sol horizontais.

Há que levar em conta, no entanto, que o movimento das referidas sombras fica determinado pelo movimento no plano horizontal do ponto interseção com esse plano da reta com a direção do raios solares que passa pela extremidade da vara (gnómon) a qual reta efetua um movimento de rotação em torno de um eixo no espaço, que se pode considerar como coincidente com a reta que a vara determina (para efeitos práticos coincidente com o próprio eixo da Terra, dadas as exíguas dimensões do planeta relativamente à respetiva distância ao Sol). Assim, o movimento de rotação observado dessas sombras (centrado no ponto de implantação do gnómon) tem, nesse plano horizontal, um sentido que, se for aferido pelo movimento dos ponteiros de um relógio ou pelo processo alternativo acima descrito, depende da posição do observador no espaço tridimensional, relativamente a esse plano; portanto, em determinado dia do ano, o movimento da sombra de uma vara nas condições acima descritas em determinado ponto da Terra terá sentido inverso ao que pode ser observado no mesmo dia num ponto situado nos antípodas, já que, num caso, o observador estará forçosamente no semiespaço determinado pelo plano horizontal e pelo polo Norte celeste e no outro no semiespaço determinado pelo plano horizontal e pelo polo Sul celeste; note-se que os planos

	horizontais podem confundir-se por serem perpendiculares a um mesmo diâmetro da Terra e porque, mais uma vez, as dimensões da Terra são desprezáveis relativamente à distância da Terra ao Sol. Um relógio cujos ponteiros rodam no mesmo sentido que a referida sombra observada em determinado local, se transportado para os antípodas no mesmo dia (ou, mais geralmente para um ponto situado no hemisfério oposto), teria ponteiros rodando em sentido contrário à sombra correspondente observada nesse novo local. Os relógios universalmente adotados atualmente baseiam-se em modelos que foram construídos de modo que os respetivos ponteiros rodassem no mesmo sentido que as acima referidas sombras ("imitando" assim os antigos relógios de Sol horizontais), mas resultando de observações efetuadas a latitudes do hemisfério Norte, que são, portanto, os locais da Terra em que, ao longo de todo o ano a sombras acima descritas rodam sempre "no sentido dos ponteiros do relógio". Em qualquer local do hemisfério Sul o sentido de rotação das referidas sombras é sempre contrário ao dos ponteiros do relógio e é assim com algum abuso de linguagem que se identifica, nessas regiões, o movimento contrário ao dos ponteiros do relógio com o "sentido direto", já que esses movimentos aí observados são evidentemente efetuados em sentido contrário ao movimento de rotação da Terra (que coincide com o sentido do movimento de translação, se o movimento de rotação for projetado no plano da eclítica).
4.1 4.2 4.3 4.4	**Comentário** Neste objetivo geral é feita uma introdução aos ângulos generalizados. Considerando, por momentos e para fixar as ideias, o grau como unidade da medida da amplitude angular (o ângulo giro terá então medida $g = 360$), os ângulos geométricos (não giros) estudados no Ensino Básico têm amplitudes com medida no intervalo $[0, 360[$. Fixado um plano munido de um referencial direto, os ângulos orientados, introduzidos no presente domínio do 11.º ano admitem como medidas de amplitude, juntamente com o ângulo nulo, exatamente todos os valores do intervalo $]-360, 360[$. Constroem-se agora ângulos, ditos «generalizados», que podem ter qualquer medida de amplitude real. O que poderá ser, por exemplo, um ângulo de amplitude 785°? Observe-se que $785 = 65 + 2 \times 360$. Esta igualdade, em que 785 aparece como a soma de uma medida de amplitude admissível de um ângulo orientado (65) com duas vezes a medida do ângulo giro (2×360) leva a associar um ângulo de 785 graus a uma rotação de 65 graus de uma semirreta em torno do respetivo vértice, seguida de um "movimento de rotação de duas voltas completas", em torno desse mesmo vértice e igualmente no sentido positivo, obtendo-se assim uma ideia de continuidade em todo o movimento.  Fig:1 Tendo em conta que qualquer número $x \geq 0$ se escreve de maneira única na forma $x = a + 360n$, onde $a \in [0,360[$ e $n \in \mathbb{N}_0$ (n é a parte inteira de $\frac{x}{360}$ e $a = x - 360n$), estas considerações

intuitivas podem estender-se a qualquer valor de x, podendo sempre associar-se deste modo a um dado número positivo ou nulo x uma medida de amplitude não negativa (a) de ângulo orientado (ou nulo) bem determinada, e a um "número de voltas" também bem determinado (n) efetuadas no sentido positivo. Ou seja, x fica associado exatamente aos ângulos orientados α com amplitude de medida a e ao número natural ou nulo n.

De forma análoga, se $x \leq 0$, existe um único $a \in]-360,0]$ e um único $n \in \mathbb{Z}_0^-$ tais que $x = a + 360\,n$, podendo desta feita associar-se a um qualquer número negativo x uma medida de amplitude negativa ou nula (a) de ângulo orientado (ou nulo) bem determinada e a um "número de voltas" (n) efetuadas no sentido negativo. Por exemplo, a $x = -380 = -20 + 360 \times (-1)$ poderá associar-se um ângulo orientado de medida de amplitude -20 e uma "volta" no sentido negativo.

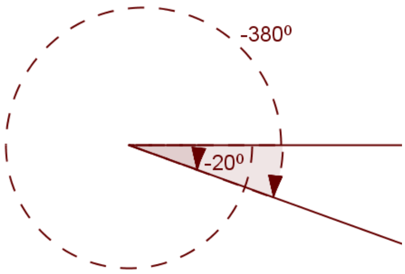
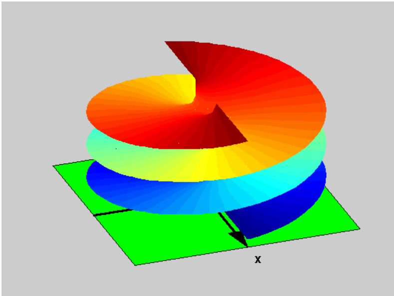


Fig: 2

No primeiro descritor apresentam-se estas ideias de um modo um pouco mais formalizado: um «ângulo generalizado» fica definido como sendo um ângulo orientado (ou nulo) α a que se associa um certo "número de voltas", representado por um número inteiro n cujo sinal coincide com o da amplitude de α: o ângulo generalizado fica identificado com o par ordenado (α, n).

Por exemplo, nas figuras 1 e 2 estão representados respetivamente os ângulos generalizados $(65,2)$ e $(-20,-1)$. Uma representação puramente geométrica destes ângulos é possível recorrendo à superfície dita de Riemann. Trata-se de uma "superfície folheada", representada na figura ao lado, com "folhas" que podem ser indexadas por $\mathbb{Z}$, tornando-se fácil associar o "número de voltas" n de um ângulo generalizado à n-ésima folha, representando-se nessa mesma folha o ângulo orientado α.



No descritor 3 estabelece-se simplesmente que a medida de amplitude do ângulo generalizado (α, n) é igual $a + ng$, onde a é a medida de amplitude do ângulo orientado ou nulo α, o que corresponde evidentemente à construção intuitiva efetuada neste comentário.

É ainda importante referir que esta definição dos ângulos generalizados não impede de forma alguma que se possa descrever do modo habitual um conjunto de medidas de ângulos generalizados.

Por exemplo, é totalmente correto escreverem-se as equivalências

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \cdots etc$$

De facto, a expressão «$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$» significa, neste contexto, que:

$$x \in \{y : \exists k \in \mathbb{Z}, x = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\}$$

sendo certo que:

$$\left\{y : \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\} = \left\{y : \exists k \in \mathbb{Z}, x = -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right\} = \left\{\dots, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots\right\}$$

	Ao escrever-se uma família de medidas de amplitude na forma $x = a + kg$, $k \in \mathbb{Z}$, a não tem de ser a medida de um ângulo orientado ou nulo α, e, mesmo que o seja, k apenas pode ser interpretado como o "número de voltas" associado a um ângulo generalizado (α, k) se tiver o sinal da amplitude de α ou se α for nulo.
4.5 4.6	**Informação Complementar para o professor** De acordo com a interpretação intuitiva dos ângulos generalizados, é natural identificar uma rotação de centro O e ângulo generalizado (α, n), no caso de α ser um ângulo nulo, como a aplicação identidade no plano e nos restantes casos como a aplicação do plano sobre si próprio que a cada ponto distinto de O associa a imagem desse ponto pela rotação de centro O e ângulo orientado α (e, naturalmente, que ao ponto O associa o próprio ponto O), como é referido no descritor 4.5. No descritor 4.6 identificam-se os ângulos orientados que, fixado o centro, determinam uma mesma rotação. A interpretação intuitiva do ângulo generalizado como o "resultado da rotação de uma semirreta em torno da respetiva origem, com determinada amplitude" não deve induzir o erro que consistiria em supor que dois ângulos generalizados com diferentes medidas de amplitude não podem determinar a mesma rotação. Com efeito, para começar, é imediato, pela definição, que todos os ângulos generalizados de medidas de amplitude iguais a um múltiplo inteiro da amplitude de um ângulo giro determinam a aplicação identidade no plano; mais geralmente, se α for um ângulo orientado qualquer, todos os ângulos generalizados (α, n) determinam, por definição, a mesma rotação de um dado centro O. Finalmente, é também possível, fixado o centro O, que dois ângulos orientados distintos α e α' determinem a mesma rotação; com efeito, se tiverem sentidos contrários e os valores absolutos das respetivas amplitudes tiverem soma igual à medida de um ângulo giro, as imagens de um dado ponto P por rotações de centro O de cada um destes dois ângulos são obtidas através de ângulos adjacentes (já que os ângulos orientados que as determinam têm sentidos opostos) cuja soma é igual a um ângulo giro, pelo que partilham os lados origem e extremidade, o que tem como consequência imediata que as imagens do ponto P através da cada uma das rotações pertencem à mesma semirreta de origem O e como também têm de estar à mesma distância de O, necessariamente coincidem. É imediato agora concluir que rotações com um dado centro O e de ângulos generalizados (α, n) e (α', n') apenas podem coincidir se α e α' tiverem a mesma amplitude ou estiverem na situação alternativa que acabámos de examinar. Assim, sendo a e a' as medidas de amplitude respetivamente de α e α', se supusermos que $a \neq a'$, da análise geométrica acima feita, utilizando a definição de rotação, é fácil concluir que se as imagens de uma dado ponto P pelas rotações de centro O e ângulos α e α' coincidirem então os valores absolutos das respectivas medidas de amplitude têm de somar a medida de um ângulo giro e têm de ter sinal contrário.
5.6	**Comentário** Atendendo ao descritor 4.4, se dois ângulos generalizados (α, n) e (α', n') tiverem a mesma amplitude, então α e α' são ângulos orientados com a mesma amplitude (ou são ambos nulos). Uma vez que as razões trigonométricas dos ângulos (α, n) e (α', n') são dadas respetivamente pelas razões trigonométricas de α e de α', a justificação pedida resume-se a argumentar que ângulos orientados com a mesma amplitude e partilhando o lado origem coincidem (*cf.* 5.3).

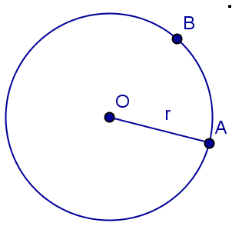
6.1	**Informação Complementar para o professor**
	A definição de comprimento de um arco de circunferência não foi até agora dada com rigor. No Ensino Básico (GM6-5.1) introduziu-se a noção de que o perímetro de um círculo pode ser aproximado pelos perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos, ficando implícita a ideia de que essa aproximação pode ser tão precisa quanto se desejar aumentando indefinidamente o número de lados dos polígonos considerados. De facto, a definição rigorosa de comprimento de um arco de circunferência pode basear-se nestes conceitos, partindo-se da noção de «linha poligonal inscrita no arco»; se um arco de circunferência for determinado por um ângulo ao centro de uma dada circunferência, qualquer conjunto finito de pontos desse arco e as respetivas extremidades determinam uma tal poligonal, bastando ordenar os pontos, partindo de uma das extremidades, através da amplitude dos ângulos ao centro com um dos lados fixo, determinado por essa extremidade do arco, e os segundos lados determinados pelos pontos que se fixaram no arco. Obtemos assim uma sequência de pontos $(P_0, P_1, \dots, P_{k+1})$, onde P_0 e P_{k+1} são as extremidades do arco e é crescente a sequência das amplitudes dos ângulos P_0OP_i (sendo O o centro da circunferência); a referida linha poligonal é a sequência dos segmentos de reta $[P_iP_{i+1}]$, com $i = 0, \dots, k$. Fixada uma unidade de comprimento, a soma das medidas dos comprimentos destes segmentos (medida do «comprimento da linha poligonal») pode ser tomada como aproximação da medida do comprimento do arco de circunferência; mais precisamente, essa medida pode ser definida rigorosamente como o supremo (menor dos majorantes) das medidas das poligonais inscritas no arco. Da desigualdade triangular resulta facilmente que, se se acrescentarem pontos em número finito a um dado conjunto finito de pontos do arco, a poligonal inscrita que corresponde ao maior número de pontos tem medida de comprimento superior à medida de comprimento da poligonal inicial, pelo que se obtêm progressivamente melhores aproximações do supremo "refinando" os conjuntos de pontos fixados no arco. Se em duas circunferências (ou numa mesma circunferência) fixarmos arcos correspondentes a dois ângulos ao centro iguais, podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre as poligonais inscritas num e noutro arco através das amplitudes dos ângulos ao centro de medidas de amplitude progressivamente maiores que determinam os vértices sucessivos das duas poligonais que assim se põem em correspondência. Invocando a semelhança dos triângulos que os lados correspondentes das duas poligonais formam com os raios das circunferências que passam pelos respetivos vértices (critério LAL) facilmente se conclui que as medidas dos comprimentos das poligonais inscritas correspondentes são proporcionais aos raios das circunferências. Sendo assim, os supremos desses valores, que são as medidas dos comprimentos dos arcos, também são proporcionais aos raios, ou seja, ângulos ao centro iguais determinam arcos com medidas de comprimento proporcionais aos raios das circunferências. A recíproca é fácil de estabelecer, pois se o quociente das medidas de comprimento de dois arcos de circunferência for igual ao quociente dos raios das respetivas circunferências, é fácil concluir que o ângulo ao centro que determina um dos arcos não pode ter maior nem menor amplitude do que o ângulo ao centro que determina o outro, examinando essas duas hipóteses, aumentando ou diminuindo a amplitude do ângulo que determina um dos arcos de modo a ficar igual ao outro e aplicando o resultado anterior ao novo arco assim obtido; este teria de ficar com o mesmo comprimento que o inicial, embora correspondesse a uma sua extensão ou contração, o que contradiz as propriedades do comprimento de um arco (análogas à do comprimento de um segmento, nomeadamente a aditividade, e que implica a "monotonia", ou seja, um arco estritamente contido noutro tem comprimento estritamente inferior).

Ficando estabelecido que dois ângulos ao centro em duas ou numa mesma circunferência são iguais se e somente se as medidas dos comprimentos dos arcos que determinam nas respetivas circunferências forem proporcionais aos raios, em particular, se os comprimentos de dois arcos de circunferência forem iguais aos raios das respetivas circunferências, os ângulos ao centro que os determinam serão iguais, pelo que ambos determinam (através da respetiva amplitude) a mesma unidade de medida de amplitude de ângulos, a qual se designa por «radiano».

O reconhecimento desta propriedade pode ser feito de modo mais ou menos intuitivo apresentando a construção acima esboçada do comprimento de arco com apelo apenas à intuição geométrica, ou procurando um maior suporte em propriedades já conhecidas, nomeadamente a semelhança de triângulos, que permite comparar os comprimentos de poligonais inscritas correspondentes a arcos com a mesma amplitude.

6.2

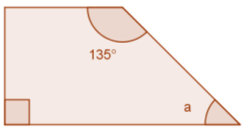
1. Considere uma circunferência de raio $r > 0$ e um arco AB de medida de cc .



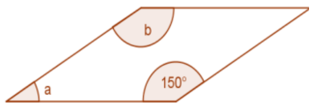
   1.1. Indique a medida de amplitude do arco AB, em radianos.
   1.2. Justifique que a amplitude do ângulo giro é igual a 2π radianos.
   1.3. Se $r = 3\ cm$ e um arco AC é tal que o seu comprimento é igual a 3π cm, qual a amplitude do arco AC?
   1.4. Sabe-se que $A\hat{O}D = 210°$ e que D pertence à circunferência.
      1.4.1. Exprima em radianos a amplitude do ângulo AOD.
      1.4.2. Determine a área do setor circular definido pelo ângulo AOD.

2. Nas seguintes figuras estão representados quadriláteros e assinalados alguns dos seus ângulos internos. Exprima a amplitude, em radianos, de todos os ângulos assinalados.

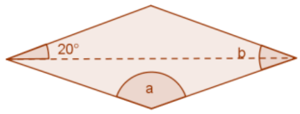
   2.1. Trapézio retângulo



   2.2. Paralelogramo



   2.3. Losango



3. Converta em graus, minutos e segundos, arrendondados às unidades, as seguintes medidas de amplitude expressas em radianos:

   3.1. 10 3.2. $\frac{\pi}{7}$ 3.3. $\frac{7\pi}{5}$ 3.4. 7,6 3.5. $\frac{11\pi}{9}$ 3.6. 0,1

8.1

1. Considere as funções trigonométricas f, g e h definidas por:

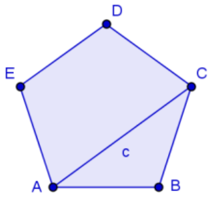
$$f\colon [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}] \to [-1{,}1] \qquad g\colon [0,\pi] \to [-1{,}1] \qquad h\colon]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$$
$$x \hookrightarrow \sin x \qquad\qquad x \hookrightarrow \cos x \qquad\qquad x \hookrightarrow \tan x$$

   1.1. Justifique, utilizando argumentos geométricos, que f, g e h são bijetivas.
   1.2. Determine o domínio e o contradomínio das funções inversas, designando-as por «arcsin» (ou «arcsen»), «arccos» e «arctan», e esboce o respetivo gráfico.
   1.3. Determine $\text{arcsen}(0{,}5)$, $\arccos(-0{,}5)$ e $\arctan(-1)$.
   1.4. *Determine o valor da expressão $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{3}\right) - \arccos\left(\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

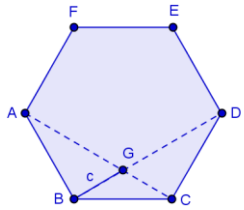
9.1

1. Nas seguintes figuras estão representados polígonos regulares de lado 2, numa dada unidade. Determine, em cada um deles, a medida c assinalada.

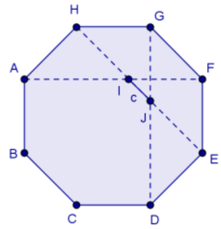
1.1.



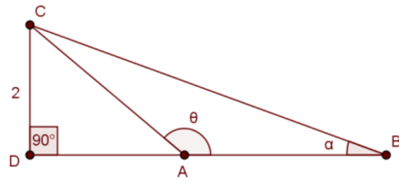
1.2*



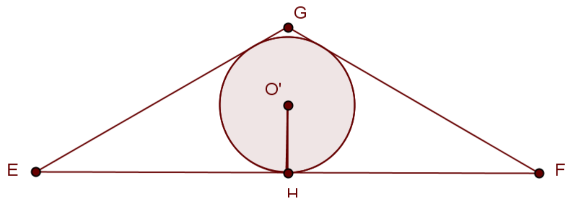
1.3**

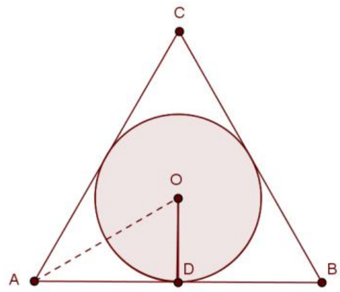


2. ** Na figura está representado um triângulo isósceles obtusângulo $[ABC]$ ($\overline{AB} = \overline{AC}$) e o ponto D, projeção ortogonal de C sobre a reta AB. Tem-se ainda que $\overline{DC} = 2$. Sendo $B\hat{A}C = \theta$ e $C\hat{B}A = \alpha$ e sabendo que $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, prove que $\sin \theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ e determine o perímetro do triângulo $[ABC]$.



3. Nas seguintes figuras estão representados um triângulo equilátero $[ABC]$ de lado 4 e um triângulo isósceles $[EFG]$ de base $\overline{EF} = 8$. Em cada um deles foi inscrito um círculo, respetivamente, de centro O e O'. Tem-se ainda $E\hat{G}F = 120°$.



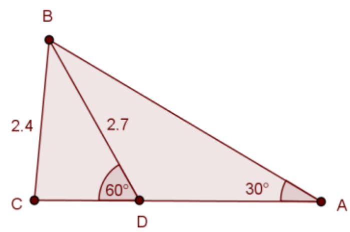


3.1. Determine a medida de $\overline{OD}$, raio do círculo inscrito em $[ABC]$.

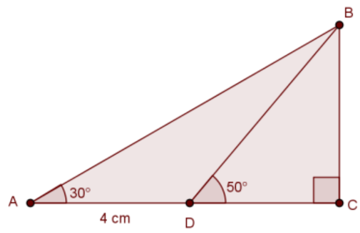
3.2. *Determine um valor aproximado às centésimas da medida de $\overline{O'H}$, raio do círculo inscrito em $[EFG]$.

9.2

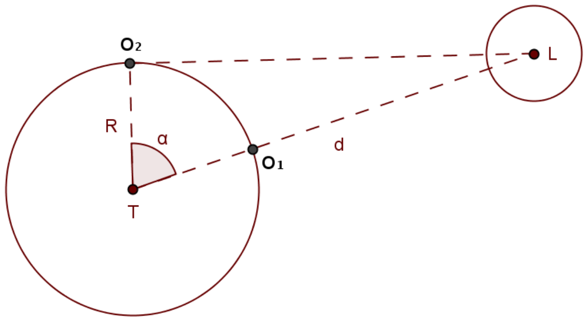
1. Tendo em conta as condições da figura, em que D pertence ao lado $[CA]$ e, numa dada unidade, $\overline{BC} = 2{,}4$, $\overline{BD} = 2{,}7$, $B\hat{D}C = 60°$ e $B\hat{A}D = 30°$, resolva o triângulo $[ABC]$.



2. *Na figura seguinte o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C e D pertence ao lado $[AC]$. Sabe-se ainda que $\overline{AD} = 4\ cm$, $B\hat{A}C = 30°$ e $B\hat{D}C = 50°$. Determine as medidas de $\overline{BC}$ e $\overline{DC}$, com aproximação às décimas.



3. **Suponha que, num local O_1 da Terra situado no equador à longitude de $11° 56' 4' E$, um observador avista um eclipse da Lua, estando esta no zénite (ou seja, na vertical do próprio ponto O_1). O mesmo eclipse é observado também no equador mas a partir de um ponto O_2 à longitude de $100° 59' 8'' E$, sendo a Lua avistada no horizonte.



Sabendo que o raio da Terra mede cerca de $6366\ km$ determine aproximadamente a distância da Terra à Lua (distância entre os respetivos centros), interpretando adequadamente a figura junta, em que as distâncias e os ângulos não são representados realisticamente à escala, para maior clareza do desenho (utilize uma calculadora científica para efetuar os cálculos aproximados que forem necessários).

9.3

1. Determine, caso existam, os valores de $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ tais que:
   1.1. $2 \sin x = -1$
   1.2. $\sqrt{3} + 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$
   1.3. $2 \sin(2x) + \sqrt{2} = 0$
   1.4. $2\sqrt{3} \sin x = \sqrt{6}$
   1.5. $\sin^2 x = 1$
   1.6. $2 \cos x + 1 = 0$
   1.7. $6 \cos\ (2x) + \sqrt{18} = 0$
   1.8. $2 \cos\ (\pi x) = 1$
   1.9. $\tan(3x) = \sqrt{\frac{1}{3}}$
   1.10. $2\tan\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$;
   1.11. $\sqrt{12} + 2 \tan(x) = 0$
   1.12. $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$

2. Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações
   2.1. $2 \text{ sen } x + 1 = 0$;
   2.2. $\sqrt{3} - 2\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$;
   2.3. $2 \text{ sen}\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) + \sqrt{2} = 0$;
   2.4. $2\sqrt{3} \cos(2x) = \sqrt{6}$;
   2.5. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$;
   2.6. $2\sqrt{3} \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) + \sqrt{3} = 0$;
   2.7. $(2 \sin x - 1)(2 \cos x + 1) = 0$;
   2.8. *$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$;
   2.9. $\text{sen}^2(3x) = 1$;

2.10. $\cos^2 x = \frac{1}{2}$;

2.11. $\text{sen}^2 x - 2\,\text{sen}\,x - 3 = 0$;

2.12. $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$;

2.13. $\text{sen}^2 x - \cos^2 x = 0$;

2.14. $\tan(3x) = \sqrt{\frac{1}{3}}$;

2.15. $2\tan\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$;

2.16. $\sqrt{12} + 2\tan(2x) = 0$;

2.17. $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$;

2.18. $\tan^2(\pi x) = \frac{1}{3}$;

2.19. $\tan^2(2x) + \sqrt{3}\tan(2x) = 0$;

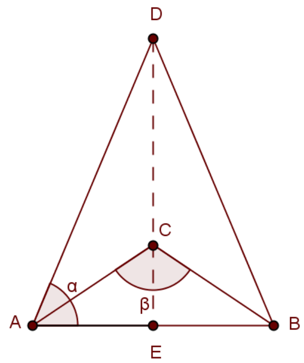
2.20. $*\tan x + 2\,\text{sen}\,x = 0$;

2.21. $*2\,\text{sen}^2 x - \cos x - 1 = 0$.

3. Determine o valor de x, com aproximação à centésima de radiano, que verifica cada uma das seguintes condições:
   3.1. $3\sin x + 1 = 0 \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
   3.2. $\cos(2x) = -0{,}6 \wedge x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right]$;
   3.3. $\tan x = -4{,}7 \wedge x \in \left[\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right]$.

4. Considere $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $4\sin(\alpha + \pi) = -1$.
   Determine o valor de $\cos(\alpha - \pi) + \tan(-\alpha)$.

5. *Na figura estão representados dois triângulos isósceles $[ABD]$ e $[ABC]$. O ponto E é a projeção ortogonal de D sobre a reta AB. Tem-se ainda que $\dot{A}C$ é a bissetriz do ângulo BAD e Determine $\cos A\hat{C}B$, sabendo que $\overline{DE} = 3{,}8$ e $\overline{AE} = 1{,}6$.



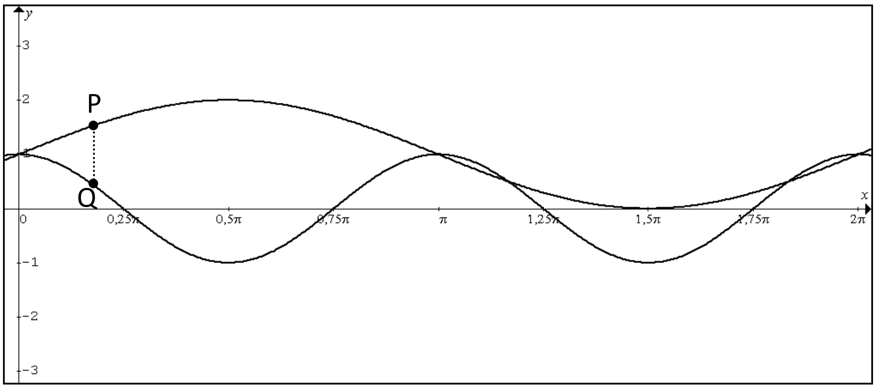
6. Sabe-se que a é um ângulo agudo e que $tga + \frac{1}{tga} = 2$. Determine $\sin a$.

7. Prove as seguintes igualdades para α tal que $cos\alpha \neq 0$ e $sin\alpha \neq 0$.
   7.1. $\sin\alpha \times \cos\alpha \times \left(\text{tg}\,\alpha + \frac{1}{\text{tg}\alpha}\right) = 1$.
   7.2. $(1 - \text{tg}^2\alpha)(1 - \sin^2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$.

9.4

1. Prove que as funções definidas por $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ e $g(x) = \frac{1-\cos x}{\sin x}$ coincidem no domínio $D = \{x: \sin x \neq 0\}$.

2. No seguinte referencial estão representados os gráficos das funções f e g definidas por $f(x) = \sin x + 1$ e $g(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ no intervalo $[0,2\pi]$.



2.1. *Determine as coordenadas dos pontos de interseção dos dois gráficos..

2.2. Calcule os zeros da função $f \times g$.

2.3. *Os pontos P e Q pertencentes, respetivamente, aos gráficos de f e de g, têm a mesma abcissa e distam de uma unidade. Determine todos os pares de pontos (P, Q) destes gráficos que gozam da mesma propriedade.

2.4. Resolva a inequação $f(x) > \frac{1}{2}$, representando o conjunto-solução na forma de intervalo ou união de intervalos.

3. Considere as funções f, g e h definidas respetivamente por $f(x) = \sin(2x)$, $g(x) = cos\frac{x}{3}$ e $h(x) = \tan(2\pi x + a)\,, a \in \mathbb{R}$.

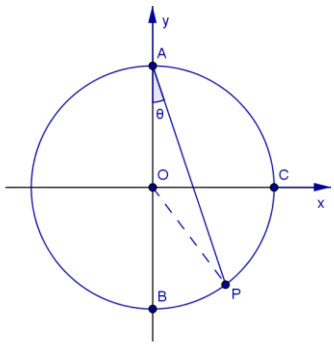
3.1. Prove que g é uma função periódica de período 6π.

3.2. Prove que h é uma função periódica de período $\frac{1}{2}$.

3.3. Tendo em conta que $x = -\frac{1}{6}$ é um dos zeros da função h, determine o valor de a.

3.4. *Prove que f é uma função periódica e indique o período positivo mínimo.

4. Na figura está representado um referencial ortonormado Oxy e uma circunferência de centro O e de raio $r > 0$, que interseta o eixo Oy nos pontos A (de ordenada positiva) e B e o semieixo positivo Ox no ponto C. O ponto P pertence ao arco BCA e θ representa a medida da amplitude do ângulo BAP, em radianos.



4.1. *Prove que a medida da distância $d = \overline{AP}$ é dada, para cada valor de θ, por $d = 2r\cos\theta$.

4.2. Determine um valor exato e um valor arredondado às centésimas de d quando $\overline{BP} = \overline{PC}$ e $r = 2$.

4.3. Determine para que valor de θ se tem $d = r$ e, para esse valor, obtenha uma expressão, em função de r, para a área do triângulo $[AOP]$.

4.4. Sabendo que $r = 1$ e que $d = \sqrt{3}$, determine o valor de θ e o comprimento do arco menor BP.

4.5. *Seja Q o ponto de interseção da reta AP com o eixo Ox.

4.5.1 Prove que a área A do triângulo $[OQP]$ é dada por $\frac{1}{2}r^2 \tan\theta\,|\cos 2\theta|$.

4.5.2 Resolva a equação $A(\theta) = 0$ e interprete geometricamente o resultado obtido.

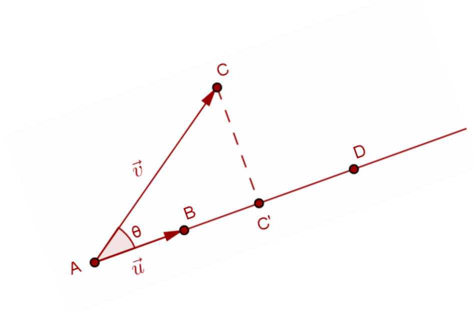
		4.5.3 Considere $r = 2$ e determine, utilizando uma calculadora gráfica, os valores de θ para os quais a área do triângulo $[OQP]$ é igual a 0,5, sabendo que não há mais do que dois para $\theta < \frac{\pi}{4}$. Apresente os resultados com aproximação às décimas.

Descritor	Texto de Apoio

2.8

Comentário

Esta propriedade pode ser demonstrada de forma geométrica:
Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores que formam um ângulo agudo θ e $\lambda > 0$. Fixemos um ponto A e seja $B = A + \vec{u}$, $C = A + \vec{v}$, ~~e~~ $D = A + \lambda\vec{u}$; por definição de $\lambda\vec{u}$, uma vez que $\lambda > 0$, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$ têm o mesmo sentido, ou seja, D está na semirreta $\dot{A}B$ (em particular D coincide com a sua própria projeção na reta AB), e $\overline{AD} = \lambda\,\overline{AB}$. Seja agora C' a projeção ortogonal de C na reta AB; como o ângulo θ é agudo, C' também está na semirreta $\dot{A}B$ (caso contrário o ponto A estaria situado entre o ponto C' e o ponto B, pelo que o ângulo $C'AC$ não seria coincidente com o ângulo θ, mas antes suplementar, o que é impossível já que nesse caso seria obtuso e não poderia ser ângulo interno do triângulo retângulo $[AC'C]$); portanto $\overrightarrow{AC'}$ e $\overrightarrow{AB}$ também têm o mesmo sentido. Então tem-se, por definição do produto escalar, que:



$$(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \overline{AD}.\overline{AC'} = \lambda\overline{AB}.\overline{AC'} = \lambda(\vec{u}.\vec{v}).$$

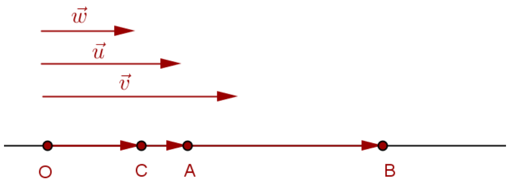
Por uma construção análoga, esta igualdade estende-se facilmente aos casos em que $\lambda \leq 0$ e, para qualquer λ, também aos casos em que θ é reto ou obtuso.

2.9

Comentário

- Comecemos por estudar o caso de vetores colineares $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não nulos.

Sejam pontos O e C tais que $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$. Tomando O por origem, podemos, na reta numérica OC, escolher uma unidade e um sentido tal que C tenha abcissa 1.
Sejam finalmente $A = O + \vec{u}$ e $B = A + \vec{v}$, de abcissas, respetivamente, a e b; por definição de soma de vetores, $B = O + (\vec{u} + \vec{v})$, ou seja, $\overrightarrow{OB} = \vec{u} + \vec{v}$.

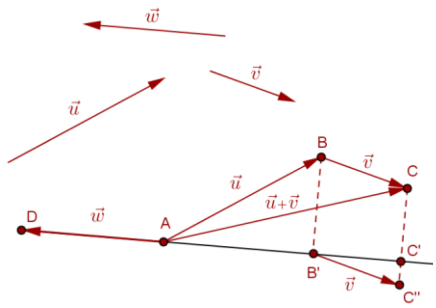


É imediato verificar, por definição de produto interno, que $\vec{w}.\vec{u} = a$, $\vec{w}.(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w}.\overrightarrow{OB} = b$ e $\vec{w}.\vec{v} = b - a$, pelo que a identidade $\vec{w}.(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w}.\vec{u} + \vec{w}.\vec{v}$ resulta simplesmente da igualdade $b = a + (b - a)$.

- Sejam agora $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores do plano não nulos.

Fixado um ponto A do plano, sejam $B = A + \vec{u}$, $C = B + \vec{v}$ e $D = A + \vec{w}$. Sejam ainda B' e C' as projeções ortogonais respetivamente dos pontos B e C na reta AD. Por definição de soma de vetores e de produto escalar, é imediato verificar que $\vec{w}.\vec{u} = \vec{w}.\overrightarrow{AB'}$, $\vec{w}.(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w}.\overrightarrow{AC'}$

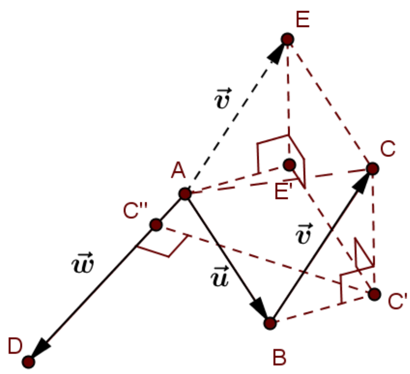
Tem-se ainda $\vec{w}.\vec{v} = \vec{w}.\overrightarrow{B'C'}$ podendo-se verificar esta última igualdade considerando o representante $\overrightarrow{B'C''}$ de $\vec{v}$ com origem em B'. O quadrilátero $[BCC''B']$ é um paralelogramo, pelo que a reta CC'' é perpendicular a AD (é paralela a BB') e C' é a projeção ortogonal de C'' em AD: $\vec{w}.\vec{v} = \vec{w}.\overrightarrow{B'C''} = \vec{w}.\overrightarrow{B'C'}$.



Finalmente, a igualdade $\vec{w}.(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{w}.\vec{u} + \vec{w}.\vec{v}$ é equivalente a $\vec{w}.\overrightarrow{AC'} = \vec{w}.\overrightarrow{AB'} + \vec{w}.\overrightarrow{B'C'}$, que é verdadeira por todos os vetores envolvidos serem colineares.

- No caso de vetores não nulos do espaço $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, é também possível reduzirmos o problema a vetores complanares Fixado um ponto A do espaço, sejam $B = A + \vec{u}$, $C = B + \vec{v}$ e $D = A + \vec{w}$.

Considerando a projeção C' de C no plano ABD, $\vec{w}.(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{w}.\overrightarrow{AC} = \vec{w}.\overrightarrow{AC'}$ uma vez que a projeção ortogonal C'' de C na reta ADcoincide com a projeção de C' nessa mesma reta (ver, a este propósito, o descritor GA10-9.6 e o respetivo texto de apoio).
Também podemos concluir que $\vec{w}.\vec{v} = \vec{w}.\overrightarrow{BC} = \vec{w}.\overrightarrow{BC'}$; com efeito, sendo $E = A + \vec{v}$, ou seja, $\overrightarrow{AE} = \vec{v} = \overrightarrow{BC}$, por definição de produto interno, $\vec{w}.\vec{v} = \vec{w}.\overrightarrow{AE'}$, onde E' é a projeção ortogonal do ponto E no plano ABD, por um argumento idêntico ao que acabámos de utilizar a propósito do produto interno $\vec{w}.\overrightarrow{AC}$.



Basta-nos então justificar que $\overrightarrow{AE'} = \overrightarrow{BC'}$, ou seja, que $[AE'C'B]$ é um paralelogramo. Ora, por construção, $[AECB]$ é um paralelogramo e os planos AEE' e BCC' são paralelos, já que EA é paralela a CB e EE' é paralela a CC' (são perpendiculares ao mesmo plano ABD); portanto as retas AE' e BC' também são paralelas, já que resultam de intersetar planos paralelos pelo plano ABD. Quanto a AB e $E'C'$ são também paralelas entre si por serem ambas paralelas a EC, já que $[AECB]$ é um paralelogramo e $[EE'C'C]$ é um retângulo. Esta última afirmação resulta da igualdade dos triângulos retângulos $[AE'E]$ e $[BC'C]$ (são iguais pelo critério ALA, pois têm iguais as hipotenusas $[AE]$ e $[BC]$ e os ângulos internos agudos AEE' e BCC', que têm lados dois a dois paralelos); com efeito, dessa igualdade de triângulos deduzimos que e $\overline{EE'} = \overline{CC'}$ e os pontos E e C estão no mesmo semiplano de fronteira $E'C'$ pois, caso contrário, o segmento $[EC]$ intersetaria a reta $E'C'$ e portanto o plano ABD, o que não é possível, já que a reta EC é paralela a esse plano por ser paralela a AB. Do paralelismo dos pares de retas AE' e BC', por um lado, e AB e $E'C'$, por outro, resulta que $[AE'C'B]$ é, de facto, um paralelogramo.

Assim, $\vec{w}.(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{w}.\vec{u} + \vec{w}.\vec{v}$ é equivalente a $\vec{w}.\overrightarrow{AC'} = \vec{w}.\overrightarrow{AB} + \vec{w}.\overrightarrow{BC'}$, igualdade esta que apenas envolve vetores do plano ABD, sendo $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'}$, pelo que resulta do que já se provou anteriormente para vetores do plano.

2.10

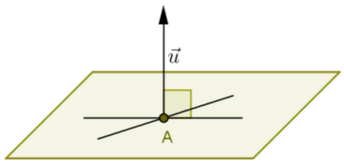
Comentário

Tendo-se já verificado as propriedades do produto interno enunciadas em 2.8, 2.9 e 2.10, esta propriedade (tal como a enunciada no descritor 2.13) é de demonstração imediata. Tomando os vetores da base $\vec{e}_1(1{,}0)$ e $\vec{e}_2(0{,}1)$ e vetores $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$, e começando por verificar, por aplicação direta da definição de produto interno, que $\vec{e}_1.\vec{e}_1 = \vec{e}_2.\vec{e}_2 = 1$ e $\vec{e}_1.\vec{e}_2 = 0$, então, aplicando as referidas propriedades algébricas do produto interno e a definição de coordenadas de um vetor:

$\vec{u}.\vec{v} = (u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2).(v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2) = u_1v_1\vec{e}_1.\vec{e}_1 + u_2v_2\vec{e}_2.\vec{e}_2 + u_1v_2\vec{e}_1.\vec{e}_2 + u_2v_1\vec{e}_2.\vec{e}_1 = u_1v_1 + u_2v_2$.

3.4
3.5
3.6

1. Fixado um referencial ortonormado no espaço, considere um ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e um vetor não nulo $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$.
   1.1. Justifique que existe um único plano α perpendicular a $\vec{u}$ e que passe no ponto A.
   1.2. Sendo $P(x, y, z)$ um ponto genérico do espaço, justifique que $\overrightarrow{AP}$ é perpendicular a $\vec{u}$ quando e apenas quando $P \in \alpha$.
   1.3. Justifique que
   $P \in \alpha \Leftrightarrow u_1(x - x_0) + u_2(y - y_0) + u_3(z - z_0) = 0$.



Comentário

As justificações pedidas nas alíneas 1.1 e 1.2 são consequências imediatas do descritor GM9-6.7 das Metas Curriculares do Ensino Básico. Uma demonstração rigorosa destes factos pode ser encontrada no respetivo Caderno de Apoio, nomeadamente no Texto Complementar de Geometria, 9.º ano, 6.7.

As justificações pedidas nos descritores 3.5 e 3.6 resultam simplesmente do resultado expresso no descritor 3.4. Com efeito, por um lado, dado um plano qualquer α, um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de α e um ponto P distinto de P_0 da reta normal a α passando por P_0, se (v_1, v_2, v_3) for o sistema de coordenadas do vetor $\overrightarrow{P_0P}$, por 3.4, uma equação cartesiana de α será:

$$v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0$$

que é obviamente equivalente à equação:

$$v_1x + v_2y + v_3z - (v_1x_0 + v_2y_0 + v_3z_0) = 0$$

que, por sua vez, é evidentemente uma equação da forma $ax + by + cz + d = 0$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \neq (0{,}0{,}0)$, já que o vetor $\overrightarrow{P_0P}(v_1, v_2, v_3)$, por construção, não pode ser nulo.

Reciprocamente, dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, e supondo que, por exemplo, $a \neq 0$, é imediato concluir que a equação $ax + by + cz + d = 0$ é equivalente à equação:

$$a\left(x - \frac{-d}{a}\right) + by + cz = 0$$

pelo que o conjunto dos pontos do espaço que satisfazem a esta equação, atendendo mais uma vez a 3.4, é o plano de vetor normal com coordenadas (a, b, c) que passa pelo ponto de coordenadas $\left(-\frac{d}{a}, 0,0\right)$. *Mutatis mutandis*, podemos concluir, sempre que $(a, b, c) \neq (0,0,0)$, que $ax + by + cz + d = 0$ é equação de um plano, o que completa a justificação requerida em 3.5, e que o vetor de coordenadas (a, b, c) é normal a esse plano, tal como se afirma no descritor 3.6.

Ao solicitar-se que o aluno justifique os resultados enunciados nos descritores 3.5 e 3.6 pretende-se apenas que o faça baseado já no conhecimento do resultado expresso no descritor 3.4. O reconhecimento deste último envolve revisões da Geometria Euclidiana no espaço estudada no Ensino Básico, mas uma vez estabelecido como resultado de Geometria Analítica, pode depois, evidentemente, ser utilizado para justificar consequências simples como as expressas em 3.5 e 3.6.

4.1

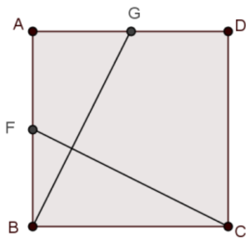
1. Considere vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 5$ e $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = 120°$. Calcule os seguintes produtos escalares:
   1.1. $(3\vec{u}) \, . \, \vec{v}$
   1.2. $(-4\vec{u}) \, . \, (2\vec{v})$
   1.3. $(\vec{u} + 3\vec{v}). \, \vec{v}$
   1.4. $(5\vec{u} - 2\vec{v}). \, (3\vec{v})$

2. Considere dois vetores não nulos $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
   2.1. Prove que $\|\vec{v}\|$=$\|\vec{w}\|$ quando e apenas quando os vetores $\vec{v}$ + $\vec{w}$ e $\vec{v} - \vec{w}$ são perpendiculares.
   2.2. Considere um quadrilátero $[ABCD]$ em que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$ e $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Se $\|\vec{v}\|$=$\|\vec{w}\|$, de que tipo de quadrilátero se trata?

3. Considere vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
   3.1. Prove que $\|\vec{u} + \vec{v}\,\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
   3.2. Caso $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam perpendiculares, a que teorema se reduz a propriedade referida em 3.1.?
   3.3. Considere vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que $\|\vec{u}\|$=$\|\vec{v}\| = \|\vec{u} + \vec{v}\|$. Determine o ângulo formado pelos vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{v}$.

4. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado, os pontos $A(-2{,}5)$ e $B(3, -1)$. Identifique o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano tais que $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP} = 0$.

5. *Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$. Os pontos F e G são os pontos médios respetivamente dos lados $[AB]$ e $[DA]$. Prove que $\overrightarrow{CF}$ e $\overrightarrow{BG}$ são vetores perpendiculares.



6. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado, os pontos $A(-3{,}4)$ e $B(5{,}1)$ e o vetor $\vec{u} = (5, -12)$.
   6.1. Determine $\left(\overrightarrow{AB} - 2\vec{u}\right).\vec{u}$.
   6.2. Determine um valor aproximado à décima de grau da amplitude do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{u}$.

7. * Num plano munido de um referencial ortonormado tem-se que $A(1,2)$ é o centro de um quadrado e $B(4,6)$ é um dos seus vértices. Determine as coordenadas dos outros três vértices.

8. Fixado um referencial ortonormado no espaço, considere os vetores $\vec{v}(1,0,2)$ e $\vec{w}(-2,1,-1)$.
   8.1. Indique as coordenadas de três vetores perpendiculares ao vetor $\vec{w}$ e que não sejam colineares.
   8.2. Determine as coordenadas de um vetor $\vec{u}$ não nulo que seja perpendicular aos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

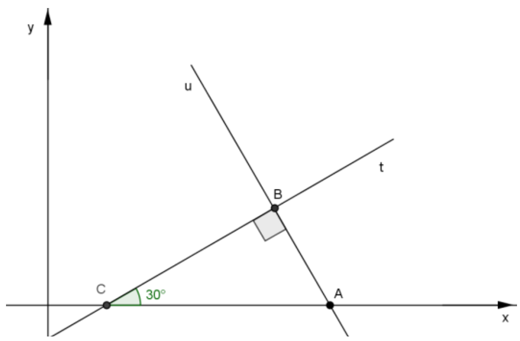
9. Considere, fixado um referencial ortonormado no espaço, os pontos $A(-2,5,1)$ e $B(2,3,-1)$. Identifique o lugar geométrico dos pontos $P(x,y,z)$ do espaço tais que:
   9.1. $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}=0$.
   9.2. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MP}=0$, onde M é o ponto médio de $[AB]$.
   9.3. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BP}=0$.

4.2

1. Num plano munido de um referencial ortonormado, considere a reta r de equação $12x-5y-1=0$.
   1.1. Determine a equação reduzida da reta s, perpendicular a r, que passa no ponto $A(2,-1)$.
   1.2. Considere a reta s de equação vetorial $(x,y)=(0,3)+t(4,-3), t\in\mathbb{R}$. Determine um valor aproximado à décima de radiano da amplitude do ângulo formado pelas retas r e s.

2. Num plano munido de um referencial ortonormado, considere os pontos $A(-2,5)$ e $B(3,-1)$.
   2.1. Determine uma equação da mediatriz de $[AB]$.
   2.2. Considere a circunferência de centro $C(1,1)$ que passa por A. Determine a equação reduzida da reta tangente a essa circunferência no ponto A.

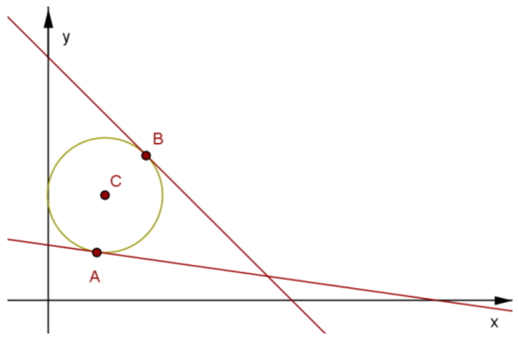
3. Na figura estão representadas duas retas u e t num plano munido de um referencial ortonormado. A reta t tem inclinação de 30°, interseta Ox no ponto C e é perpendicular à reta u num ponto B. Sabe-se ainda que a reta u interseta o eixo Ox no ponto $A(5,0)$.
   3.1. Determine a equação reduzida da reta u.
   3.2. Sabendo que B tem abcissa 4, determine a abcissa do ponto C.



4.*Na figura estão representadas, num plano munido de um referencial ortonormado Oxy, duas retas r e s tangentes a uma circunferência de centro C nos pontos $A(1,1)$ e $B(2,3)$. Sabendo que as retas têm por equação

$$r: x+y=5 \quad \text{e} \quad s: x+7y=8,$$

determine as coordenadas do ponto C.



4.3

1. Determine uma equação cartesiana do plano α que passa na origem do referencial $Oxyz$ e é perpendicular à reta de equações $x = 1 \wedge y = 0$.

2. Fixado um referencial ortonormado no espaço, considere os pontos $A(1,1,1), B(2,-1,0)$ e $C(0,2,-3)$.
   2.1. Determine uma equação cartesiana do plano mediador de $[AB]$.
   2.2. Prove que os pontos A, B e C não são colineares e determine uma equação do plano δ por eles definido.

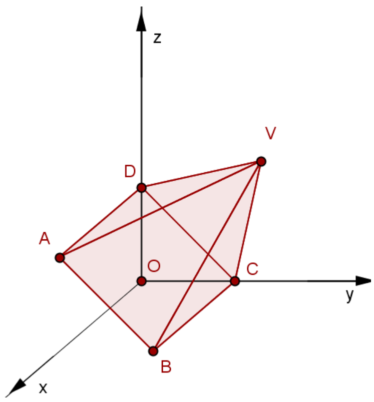
3. Fixado um referencial ortonormado no espaço, considere a superfície esférica de equação $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$.
   3.1. *A interseção do plano α com a superfície esférica é uma circunferência de raio $\sqrt{3}$. Indique três possíveis equações para esse plano.
   3.2. **Determine uma equação cartesiana de um plano tangente à superfície esférica e paralelo ao plano $\alpha: x + y = 0$.

4.4

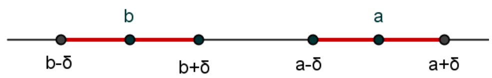
1. Fixado um referencial ortonormado no espaço, considere os pontos $A(1,-1,3)$ e $B(0,-1,4)$.
   1.1. Escreva equações paramétricas da reta AB.
   1.2. Escreva uma equação vetorial da reta s paralela ao eixo Oz e que passa por B.

2. Fixado um referencial ortonormado no espaço, considere a reta s de equação vetorial $s: (x, y, z) = (0,5,0) + t(-2,2,1),\ t \in \mathbb{R}$.
   2.1. Averigue se os pontos $A(-3,1,4)$ e $B(2,3,-1)$ pertencem à reta s.
   2.2. Determine o ponto de interseção da reta s com o plano xOz.
   2.3. Indique uma equação vetorial da reta r, paralela a s e que passa pela origem do referencial.
   2.4. Indique uma equação vetorial da reta t perpendicular a s e que passa pelo ponto B.

3. Fixado um referencial ortonormado no espaço, considere $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular de vértice V e base $[ABCD]$.
   Sabe-se que $C(0,2,0)$, $D(0,0,2)$ e que a reta BC é paralela ao eixo Ox.
   3.1. Determine as coordenadas dos pontos A e B.
   3.2. Escreva equações paramétricas da reta AC.
   3.3. *Designando o centro da base da pirâmide por E, determine uma equação vetorial da reta EV.
   3.4. *Determine as coordenadas de V sabendo que a altura da pirâmide mede $3\sqrt{2}$.



Descritor	Texto de Apoio
3.3	1. Prove, por indução matemática, que as seguintes propriedades são verdadeiras: 1.1. $\forall n \in \mathbb{N}, 3^n \times 5^n = (3 \times 5)^n$. 1.2. Dado $n \in \mathbb{N}$, a soma dos n primeiros termos da sucessão dos números ímpares é igual a $S_n = n^2$. 1.3. *$\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+h)^n \geq 1 + nh$. (onde $h > 0$). 2. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão definida por $u_1 = 5$ e $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. 2.1. Mostre, por indução, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. 2.2. Deduza da alínea anterior que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente. 3. **Mostre que $9^n - 1$ é, para todo o número natural n, um múltiplo de 8. 4. **Use o método de indução em n para mostrar que, sendo a e n números naturais, $a^n - 1$ é múltiplo de $a - 1$.
4.2	1. Considere a sucessão (u_n) definida por $u_1 = 4$ e $u_{n+1} = u_n + 3$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Prove, utilizando o princípio de indução, que $u_n = 4 + (n-1) \times 3$. 2. Considere, dados números reais a e r, a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $u_1 = a$ e $u_{n+1} = u_n + r$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. 2.1 Mostre que $u_2 = a + r$, $u_3 = a + 2r$ e $u_4 = a + 3r$. 2.2 Determine, justificando, uma expressão para o termo geral u_n.
4.4	1. Considere a sucessão (u_n) definida por $u_1 = 7 \ \wedge \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$. Prove, utilizando o princípio de indução, que $u_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. 2. Considere, dados números reais a e r, a sucessão (u_n) definida por $u_1 = a$ e $u_{n+1} = u_n \times r$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. 2.1 Mostre que $u_2 = a \times r$, $u_3 = a \times r^2$ e $u_4 = a \times r^3$. 2.2 Determine, justificando, uma expressão para o termo geral u_n.
5.2	1. Considere a soma S dos 20 primeiros termos da progressão aritmética de primeiro termo 5 e de razão 2, ou seja, $S = 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + \cdots + 39 + 41 + 43$. 1.1. Forme pares com os termos desta soma, de tal modo que a soma dos elementos de cada par seja igual a $5 + 43 = 48$. Quantos pares deste tipo se podem formar? Deduza o valor de S. 1.2. Utilize o método sugerido na alínea anterior para determinar a soma dos cem primeiros números naturais. 2. *Dados números reais a e r, considere a sucessão aritmética (u_n) de primeiro termo a e de razão r. Para $p \in \mathbb{N}$, proponha, tendo em conta o método proposto no exercício anterior, uma expressão para o valor de $$S = \sum_{n=1}^{p} u_n.$$

	3. *Dados números reais a e r, considere a sucessão aritmética (u_n) de primeiro termo a e de razão r. Prove por indução que para todo o $p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} u_n = p\frac{u_1 + u_p}{2}.$
5.3	1. Considere a soma $S = 1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{10}$. Calcule, começando por utilizar a propriedade distributiva, o produto $S \times (3-1)$, e deduza o valor de S. 2. *Dados números reais a e $r \neq 1$, considere a sucessão geométrica (u_n) de primeiro termo a e de razão r. Para $p \in \mathbb{N}$, proponha, tendo em conta o método proposto no exercício anterior, uma expressão para o valor de $\displaystyle S = \sum_{n=1}^{p} u_n.$ 3. *Dados números reais a e $r \neq 1$, considere a sucessão geométrica (u_n) de primeiro termo a e de razão r. Prove por indução que para todo o $p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} u_n = a\frac{1 - r^p}{1 - r}.$
6.2	1. Suponha que uma dada sucessão (u_n) é convergente e admite dois limites distintos, a e b. 1.1 Calcule, em função de a e de b, um valor para $\delta > 0$ tal que as vizinhanças $V_a =]a-\delta, a+\delta[$ e $V_b =]b-\delta, b+\delta[$ sejam disjuntas.  1.2 Tendo em conta que $\lim u_n = a$, justifique que existe, no máximo, um número finito de índices n tais que $u_n \notin V_a$. 1.3 Tire uma conclusão análoga à da alínea anterior para a vizinhança V_b e conclua que uma sucessão não pode admitir mais do que um limite.
6.3	1. Considere uma sucessão (u_n) convergente e monótona, de limite $l \in \mathbb{R}$. Mostre que (u_n) é limitada, exibindo um majorante e um minorante dessa sucessão. 2. *Considere uma sucessão (u_n) convergente, de limite $l \in \mathbb{R}$. Justifique que: 2.1. existe apenas um número finito de termos da sucessão (u_n) que não verificam a condição $\|u_n - l\| < 1$. 2.2. O conjunto de termos que não verifica a condição $\|u_n - l\| < 1$ é limitado. 2.3. (u_n) é limitada, indicando como se pode identificar um majorante e um minorante dessa sucessão.
6.8	1. **Considere sucessões (u_n) e (v_n) tais que a primeira é limitada e a segunda tem limite nulo. 1.1 Justifique a existência de $M > 0$ tal que para todo o número natural n, $\|u_n\| \leq M$. 1.2 Deduza da alínea anterior que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|u_n v_n\| \leq M\|v_n\|$. 1.3 Justifique, dado $\varepsilon > 0$, a existência de uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o número natural $n \geq p$, $\|v_n\| < \frac{\varepsilon}{M}$ e conclua quanto à convergência da sucessão de termo geral $u_n v_n$.

6.9	1. Prove, por definição de limite, as seguintes afirmações: 1.1 $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-3)=+\infty$; 1.2 $\lim\limits_{n\to+\infty}(-4n+6)=-\infty$; 1.3 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n+3}=0$; 1.4 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n+5}{2n-2}=2$.
6.11 6.12 6.13 6.14 6.15 6.16 6.17 6.19 6.20 6.21 6.23 6.24 6.25	**Comentário** Estes descritores dizem respeito a um conjunto de resultados relativos a operações com limites que os alunos devem conhecer e saber aplicar convenientemente. Nas Metas Curriculares foram selecionadas algumas demonstrações que os alunos devem também saber efetuar (relativas às propriedades enunciadas nos descritores 7.11 e 7.16) e que resumem algumas das técnicas base que permitem demonstrar todas as outras. O estudo exaustivo destas restantes demonstrações, embora nem sempre seja mais complexo, fica ao critério do professor. 1. Considere sucessões (u_n) e (v_n) tais que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a\in\mathbb{R}$ e $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=b\in\mathbb{R}$. 1.1. Seja $\delta>0$. Justifique a existência de $p_1\in\mathbb{N}$ (respetivamente de $p_2\in\mathbb{N}$) tal que $n\geq p_1\Longrightarrow\lvert u_n-a\rvert<\delta$ (respetivamente tal que $n\geq p_2\Longrightarrow\lvert v_n-b\rvert<\delta$). 1.2. Mostre que a partir de uma certa ordem, que deverá explicitar, se tem $a+b-2\delta<u_n+v_n<a+b+2\delta$. 1.3. Conclua que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=a+b$. 2. **Considere sucessões (u_n) e (v_n) tais que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a$ e $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=b$. 2.1 Mostre que existe $M>0$ tal que $\forall n\in\mathbb{N}, \lvert u_n\rvert\leq M$. 2.2 Começando por observar, para $n\in\mathbb{N}$, que $u_nv_n-ab=u_n(v_n-b)+b(u_n-a)$, mostre que $\lvert u_nv_n-ab\rvert\leq M\lvert v_n-b\rvert+b\lvert u_n-a\rvert$. 2.3 Conclua, da alínea anterior, que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_nv_n=ab$. 3. Considere sucessões $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l\in\mathbb{R}$ e $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$. 3.1 Justifique a existência de $p_1\in\mathbb{N}$ tal que para todo o número natural $n\geq p_1$, $u_n\geq l-1$. 3.2 Fixado $L\geq 0$, justifique a existência de $p_2\in\mathbb{N}$ tal que para todo o número natural $n\geq p_2,\ v_n\geq L-l+1$. 3.3 Mostre que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=+\infty$. 4. Considere sucessões (u_n) e (v_n)tais que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l\in\mathbb{R}^-$ e $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=-\infty$. 4.1 Seja $a\in]l,0[$. Justifique a existência de $p_1\in\mathbb{N}$ tal que para todo o número natural $n\geq p_1,\ u_n\leq a$. 4.2 Fixado $L\geq 0$, justifique a existência de $p_2\in\mathbb{N}$ tal que para todo o número natural $n\geq p_2,\ v_n\leq\frac{L}{a}$. 4.3 Mostre que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_nv_n)=+\infty$.

6.18	1. Considere as sucessões (u_n), (v_n), (w_n) e (z_n) de termos gerais, respetivamente, $u_n = n^2 + 4n$, $v_n = 5 - 4n$, $w_n = -3n^2$ e $z_n = 7 - n^2 - 4n$. Justifique que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ e que: 1.1 $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$. 1.2 $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + w_n) = -\infty$. 1.3 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = -\infty$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + z_n) = 7$.
6.22	1. Considere as sucessões (u_n), (v_n), (w_n) e (z_n) de termos gerais, respetivamente, $u_n = n^3 + 4n$, $v_n = 5 + 4n$, $w_n = 3n^2$ e $z_n = \frac{2}{n^2+1}$. Justifique que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$ e que: 1.1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times z_n) = +\infty$. 1.2. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n \times z_n) = 0$. 1.3. $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} (w_n \times z_n) = 6$.
6.26	1. Considere as sucessões (u_n), (v_n), (w_n) e (z_n) de termos gerais, respetivamente, $u_n = n^2 + 4n$, $v_n = 5 - 4n$, $w_n = -n^3 + 1$ e $z_n = 2 - 3n^2$. 1.1. Justifique que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ e que: 1.1.1 $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = -\infty$. 1.1.2 $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{w_n} = 0$. 1.1.3 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = -\infty$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{z_n} = -\frac{1}{3}$. 1.2. Considere as sucessões de termo geral $a_n = \frac{1}{u_n}$, $b_n = \frac{1}{v_n}$ e $c_n = \frac{1}{z_n}$. 1.2.1 Mostre que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$. 1.2.2 Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n}$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{c_n}{a_n}$.
6.29 6.30	**Comentário** A desigualdade $(1+h)^n \geq 1 + nh$, para $h > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, pode ser demonstrada rigorosamente por indução (como é pedido no texto de apoio ao descritor 3.3, exemplo 3.1). De forma um pouco mais informal, os alunos poderão observar que ao desenvolver o produto $$(1+h)^n = (1+h) \times (1+h) \times \ldots \times (1+h)$$ irá formar-se uma parcela igual a $1^n = 1$ e n parcelas iguais a h, resultantes de multiplicar o h presente em cada um dos n fatores pela parcela igual a 1 de cada um dos restantes fatores; concluímos então que o produto terá pelo menos uma parcela igual a 1 e n parcelas iguais a h, cuja soma é igual a nh. Como os restantes termos são positivos, obtém-se assim a desigualdade pretendida. Com este resultado é possível verificar as propriedades enunciadas nos descritores 6.29 e 6.30 :

	1. Sabe-se que se $h > 0$, $(1+h)^n \geq 1 + nh$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. 1.1. Justifique que, se $a > 1$, existe um número real h tal que $a = 1 + h$ com $h > 0$ e conclua que $\lim a^n = +\infty$. 1.2. Calcule, para $0 < a < 1$, o limite $\lim_n a^n$. (sugestão: considere $b = \frac{1}{a}$). 2. Fixado $a \geq 1$, deduza que $1 \leq a \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ e que $\lim_n \sqrt[n]{a} = 1$. O valor do limite mantém-se se $0 \leq a < 1$? [*Sugestão: comece por observar que para* $h > 0$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *se tem* $(1+h)^n \geq nh$.]
7.1.	1. Considere a sucessão de termo geral por $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$. Mostre que (u_n) é uma sucessão crescente. 2. Estude, quanto à monotonia, a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1-5n}{n+3}$. 3. Justifique que a sucessão de termo geral $u_n = (-1)^n + n$ não é monótona. 4. *Sabe-se acerca de uma sucessão (v_n) que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \frac{5}{(2n-11)(2n+3)}$. 4.1. O que pode concluir acerca da monotonia da sucessão? 4.2. Indique o valor lógico da afirmação: "v_6 é um dos minorantes da sucessão." 5. Uma sucessão (w_n) de termos positivos é tal que para todo o número natural n, $\frac{3}{w_n} \geq 4$. Justifique que a sucessão é limitada. 6. Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{n+1}{1-2n}$. Mostre que existe um número real positivo L, tal que $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq L$. 7. Considere a sucessão de termo geral $u_n = 5 + \frac{1}{n}$. 7.1. Determine uma ordem p tal que $u_p < 5 + 0{,}01$. 7.2. Determine, para $\varepsilon > 0$, uma ordem p tal que $u_p < 5 + \varepsilon$. 7.3. **Justifique que 5 é o maior minorante da sucessão de termo geral $u_n = 5 + \frac{1}{n}$ (5 diz-se o «ínfimo» da sucessão).
7.2	1. Determine uma expressão algébrica para o termo geral de uma progressão aritmética de razão 2 e cujo primeiro termo é -3. 2. Determine uma expressão do termo geral da progressão aritmética (u_n) sabendo-se que $u_5 = 20$ e que $u_{25} = 70$. 3. Prove que a sucessão de termo geral $v_n = \frac{5-2n}{7}$ é uma progressão aritmética e indique a respetiva razão. 4. *Prove que a soma de duas progressões aritméticas é ainda uma progressão aritmética de razão igual à soma das razões das progressões iniciais. 5. *Mostre que as sucessões definidas por um termo geral da forma $u_n = an + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ são progressões aritméticas de razão a.

6. *Três termos consecutivos de uma progressão aritmética são dados, para um determinado valor de x, respetivamente, por $x-1, x^2$ e $x+5$.
   6.1. Determine esses três termos.
   6.2. Supondo que o quinto termo é igual a 4, determine o termo geral da sucessão.

7. *A soma dos primeiros n termos de uma progressão aritmética de razão $\frac{5}{2}$ é igual a 3760, sendo o primeiro termo igual a -20. Determine n.

8. *Calcule a soma dos múltiplos de 3 compreendidos entre 60 e 246.

9. Calcule a soma dos 50 primeiros termos da progressão $u_n = 1 - n$.

10. *Calcule a soma de todos os números pares compreendidos entre 110 e 250 (inclusive).

11. As três medidas dos lados de um triângulo retângulo estão em progressão aritmética e o perímetro do triângulo mede $24\ cm$. Determine a medida dos lados do triângulo.

12. **As medidas de amplitude dos ângulos internos de um pentágono convexo estão em progressão aritmética. Determine a medida de amplitude do ângulo mediano.

13. Determine uma expressão algébrica para o termo geral de uma progressão geométrica de razão 2 e cujo primeiro termo é -3.

14. Determine uma expressão do termo geral da progressão geométrica monótona (u_n) sabendo-se que $u_5 = 125$ e $u_{11} = \frac{1}{125}$.

15. Prove que a sucessão de termo geral $v_n = 4 \times 3^{-n+2}$ é uma progressão geométrica e indique a razão.

16. **Sabe-se que (u_n) é uma progressão aritmética de razão 3. Justifique que a sucessão definida por $w_n = 2^{-3u_n}$ é uma progressão geométrica e indique a razão.

17. *Prove que o produto de duas progressões geométricas é ainda uma progressão geométrica de razão igual ao produto das respetivas razões.

18. *Prove que as sucessões definidas por um termo geral do tipo $u_n = a \times b^{cn+d}$, $n \in \mathbb{N}$, $a, b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $d \in \mathbb{R}$ são progressões geométricas de razão b^c.

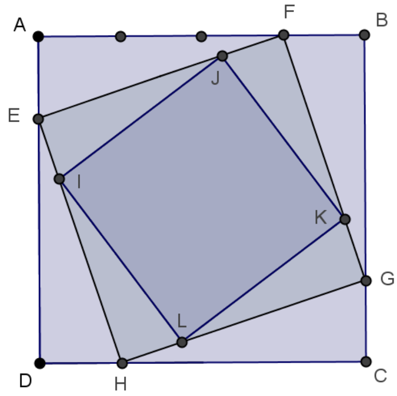
19. *Três termos consecutivos de uma progressão geométrica são dados, para um determinado valor real de x, respetivamente, por $x-2$, $x+1$ e $x+7$. Determine o termo geral dessa sucessão.

20. *Calcule a soma das potências de 2 compreendidas entre 64 e 16384 (inclusive).

21. Determine uma expressão da soma dos n primeiros termos da sucessão definida por $u_n = \frac{2}{3^n}$.

22. . Em 2010 a população de uma certa cidade era de um milhão e duzentos mil habitantes e desde aí tem crescido à taxa anual de 2,1%. Se se mantiver esta taxa de crescimento qual será a população em 2040?

23. Na figura seguinte está representado um quadrado $[ABCD]$ cuja medida do lado mede 16 unidades.
Os quadrados que se construíram a partir deste, obtiveram-se, tal como a figura sugere, dividindo cada lado em quatro partes iguais.



23.1. Indique a medida do lado de cada um dos quadrados desenhados.

23.2. Considere a sucessão (A_n) das medidas dos lados dos quadrados que se podem formar utilizando este processo repetidamente.

a) Prove que esta sucessão é uma progressão geométrica e indique a respetiva razão.

b) *Prove que para todo o número natural n, $A_n = 2^{\frac{11-3n}{2}} \times 5^{\frac{n-1}{2}}$.

23.3. *Averigue se existe um quadrado com lado $\frac{25}{4}$.

23.4. *Considere a sucessão (B_n) das áreas destes quadrados. Justifique que se trata de uma progressão geométrica, indicando a razão e escrevendo uma expressão para o termo geral.

24. *Considere uma sequência $(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ de n termos em progressão geométrica. Mostre que para todo número natural p tal que $0 \le p \le n-1$, $u_{1+p} \times u_{n-p} = u_1 \times u_n$.

7.3

1. Calcule o limite das sucessões cujo termo geral se indica, identificando as indeterminações encontradas.

1.1. $u_n = \frac{n+5}{2n+1}$ 1.2. $u_n = \frac{n^2+5}{2n+1}$ 1.3. $u_n = \frac{n+5}{2n^3+1}$

1.1. $u_n = \frac{3n^3+4n-5}{2n^3-5n^2+1}$ 1.5. $u_n = \sqrt{\frac{9n+2}{4n-3}}$ 1.6. $u_n = \frac{\sqrt{n^2+5}}{2n+1}$

1.7. $u_n = \frac{1-n}{\sqrt{2n+1}}$ 1.8. * $u_n = \frac{n+5}{\sqrt{2n^2+1}+3n}$ 1.9. $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{n}$

1.12. $u_n = \frac{2^{n+1}}{5^n}$ 1.13. $u_n = \frac{5^n+3^{n+1}}{\pi^{n+2}}$ 1.14. $u_n = 3^{n+2} - 5^n$

1.15. $* \, u_n = \frac{n^2+\cos n}{3n^2+\sin n}$ 1.16.* $u_n = 3\sqrt{n^2+1} - 5n$ 1.17** $u_n = \frac{n^3}{5^n}$.

7.4

1. Considere a sucessão definida por $\begin{cases} u_1 = 0{,}2 \\ u_n = 0{,}1 \times u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$

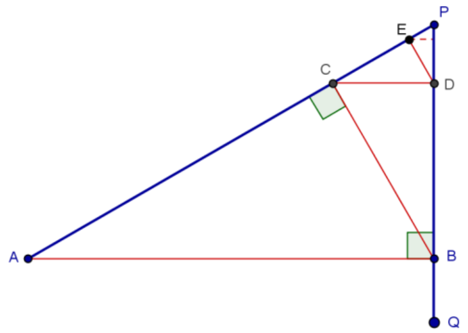
1.1. Justifique que se trata de uma progressão geométrica e indique a respetiva razão.

1.2. Para $p \in \mathbb{N}$, determine uma expressão algébrica para a soma S_p dos p primeiros termos desta successão.

1.3. Determine $\lim S_n$ e interprete o valor obtido.

2. Determine o limite da sucessão de termo geral : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{2^n}$.

3. Na figura estão representados dois segmentos $[AP]$ e $[PQ]$. Com origem em A, desenhou-se uma linha poligonal em que os segmentos são alternadamente perpendiculares a PQ e a AP. Sabe-se que as medidas, respetivamente do primeiro e do segundo desses segmentos, são, numa dada unidade, $\overline{AB} = 2$ e $\overline{BC} = 1$.



3.1. Justifique que os triângulos $[ACB]$ e $[BDC]$ são semelhantes e indique a respetiva razão de semelhança.
3.2. *Justifique que a sucessão dos comprimentos dos segmentos desta linha poligonal é uma progressão geométrica e determine o comprimento da linha poligonal caso esta tenha 8 segmentos.
3.3. *Determine o limite, quando n tende para $+\infty$, da medida de comprimento da linha poligonal constituída por n segmentos de reta assim obtidos e interprete-o geometricamente.

4. Considere a sucessão (u_n) definida por recorrência $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$.

4.1. Prove que:

4.1.1. (u_n) está bem definida, mostrando, em particular, por indução matemática que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.

4.1.2. (u_n) é monótona decrescente.

4.2. Justifique que (u_n) é convergente e calcule $\lim u_n$.

5. **Considere a sucessão de primeiro termo u_1 tal que, para todo o número natural n, $3u_{n+1} = 2u_n + 1$.
5.1. Mostre que existe um valor de u_1 para o qual a sucessão é constante.
5.2. Considere que $u_1 = 2$. Determine $h \in \mathbb{R}$ tal que a sucessão de termo geral $v_n = u_n - h$ seja geométrica.
5.3. Calcule uma expressão algébrica para o termo geral das sucessões $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5.4. Calcule, para $p \in \mathbb{N}$, $S_p = \sum_{n=1}^{p} u_n$, $S'_p = \sum_{n=1}^{p} v_n$ e os respetivos limites quando p tende para $+\infty$.

6. Considere a sucessão definida por $u_1 = 2$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$.
6.1. *Considere a sucessão de termo geral $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$. Mostre que para todo o $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n^2$.
6.2.** Calcule v_1 e utilize o resultado da alínea anterior para provar que $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n-1}}$
6.3. Determine uma expressão algébrica para o termo geral de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6.4. Calcule os limites das sucessões $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Descritor	Texto de Apoio
1.1 1.2	**Comentário** São essencialmente duas as opções que classicamente se consideram para a definição de limite num ponto a real, no que diz respeito ao domínio em que se tomam as sucessões a tender para a, para o efeito de testar a existência do referido limite. A opção privilegiada desde há bastante tempo no ensino secundário em Portugal tem sido a que consiste em considerar, de entre as sequências no domínio da função, apenas aquelas que nunca tomam o valor a. Ou seja, tem-se optado pelo que vulgarmente se designa por "limite por valores diferentes de a". No presente programa optou-se pela versão alternativa que consiste em admitir, com o mesmo objetivo, sucessões podendo tomar o valor a; considera-se, com efeito, que esta opção apresenta diversas vantagens. Em primeiro lugar por ser mais simples de formular e permitir também uma formulação mais simples da noção de continuidade e em segundo porque a própria noção de "limite por valores diferentes" (como outras afins como a de "limite à esquerda" e "à direita") passa a poder ser encarada como limite da restrição da função inicial a determinado conjunto. É de notar também que esta é a abordagem seguida em grande número de cursos e manuais universitários e que a definição até agora mais usual no ensino secundário obriga a cuidados suplementares para que se evitem erros no enunciado de determinadas propriedades, os quais por vezes se podem detetar, mesmo em boas obras de referência.
2.9	**Comentário** A justificação da continuidade das funções trigonométricas, embora não seja requerida, poderá ser abordada invocando propriedades geométricas, como é sugerido no Caderno de Apoio ao 12.º ano, a propósito da diferenciabilidade destas mesmas funções (cf. TRI12-2).
2.10	**Comentário** Atendendo à definição de limite e de função contínua, este resultado é uma consequência imediata do descritor 1.11.
4.1	1. Determine os zeros e estude o sinal de cada uma das funções cuja expressão analítica se indica: 1.1. $f(x)=\frac{x^2-2x-3}{4x-x^2}$ 1.2. $g(x)=\frac{4}{2-2x}-\frac{5}{x^2-1}$ 1.3. $h(x)=\frac{4}{x-3}+\frac{5}{x^2-3x}-\frac{3}{5x}$ 1.4. $j(x)=\frac{3x-6}{10-2x}\times\frac{x^2-5x}{4-x^2}$ 1.5. $p(x)=\frac{x^3+x^2-9x-9}{x^2-4x+3}$ 1.6. $r(x)=\frac{16x-x^5}{5-x^2}$ 2. Três torneiras podem ser utilizadas para encher determinado recipiente. Com uma delas consegue-se encher o recipiente em 8 horas, com uma segunda em 4 horas e com a terceira em t horas. 2.1. *Se a três torneiras funcionarem simultaneamente, prove que a expressão do número de horas h necessárias para que o recipiente fique cheio é dado por $h(t)=\frac{8t}{3t+8}$, $t>0$. 2.2. Determine t de modo que o tempo necessário ao enchimento do recipiente seja de 1h e 30min.

4.2

1. Calcule os seguintes limites, começando por identificar, caso exista, o tipo de indeterminação.

   1.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2+3x-1)$

   1.2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x^2-3x)$

   1.3. $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x^3-3x)$

   1.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{5x+3}$

   1.5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+5x-1}{2x+1}$

   1.6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+5x-1}{5x^3+x^2-4}$

   1.7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+5}}{\frac{3}{4-x}}$

   1.8. * $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|5x-2x^2|}{5x+3}$

   1.9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{2x+1}\times(x^2-7x+1)\right)$

   1.10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-1}\right)$

   1.11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-1}}{3x+2}\right)$

   1.12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2}}$

   1.13. * $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2}}$

   1.14. * $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}$

2. Calcule os seguintes limites, começando por identificar, caso exista, o tipo de indeterminação.

   2.1. $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{5}{x^2-1}$

   2.2. $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{5}{x^2-1}$

   2.3. $\lim\limits_{x\to2^-}\left(\frac{5}{x^2-4}-\frac{3}{x-2}\right)$

   2.4. $\lim\limits_{x\to1}\frac{5x-5}{1-x^2}$

   2.5. $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2+6x-8}{x^2-4x+3}$

   2.6. $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2-4x+2}{x^3-7x+6}$

   2.7. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^2+6x}{x^3-4x^2}$

   2.8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x}}{x^3}$

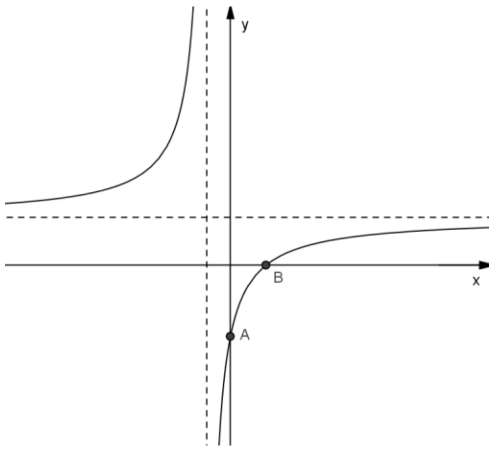
	2.9. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-3}}{x^2-9}$ 2.10. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x-5}{\sqrt{x^2-1}}$ 2.11. $*\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{\sqrt{3x+2}-\sqrt{x+2}}$ 2.12. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-5x+6}}$ 2.13. $*\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\|2x-1\|}{\sqrt{2x^2-5x+2}}$ 2.14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{x-\sqrt{x}}$
4.3	1. Determine o valor de k de modo que a função f real de variável real definida por $f(x)=\begin{cases}\frac{3x^2-3}{x+1} & se\ x<-1\\ 3x-k & se\ x\geq -1\end{cases}$ seja contínua em $x=-1$. 2. Averigúe se a função g definida por $g(x)=\begin{cases}\frac{x^2+7x+12}{3x+9} & se\ x>-3\\ \frac{x^2+5x+6}{x^2+3x} & se\ x\leq -3\end{cases}$ é contínua em $x=-3$ 3. Mostre que a função h definida por $h(x)=\begin{cases}\sin x\sin\frac{1}{x} & se\ x\neq 0\\ 0 & se\ x=0\end{cases}$ é contínua em $\mathbb{R}$. **Comentário** O método de cálculo de limites por vezes designado por «mudança de variável» é na verdade uma aplicação direta do resultado enunciado no descritor 1.11. Este resultado tem como caso particular a continuidade da composta de funções contínuas, como foi observado a propósito do descritor 2.10. 4. Calcule $\lim\limits_{x\to 2^+}\tan\frac{\pi}{x}$ recorrendo a uma mudança de variável. 5. Justifique a continuidade da função $f(x)=\cos(\sin(x))$.
4.4	1. Determine, caso existam, as assíntotas ao gráfico das funções definidas por cada uma das expressões seguintes: 1.1. $f(x)=\frac{3x-1}{x-2}$ 1.2. $g(x)=\frac{1}{2x+1}$ 1.3. $h(x)=\frac{4x+3}{2x-1}$ 1.4. $j(x)=\frac{\|2x-3\|}{x+4}$

2. O gráfico junto representa uma função racional f do tipo $f(x) = \frac{ax+b}{cx+2}, c \neq 0$.

   Sabe-se que as retas $y = 2$ e $x = -1$ são assíntotas do gráfico e que este interseta o eixo Oy no ponto $A(0, -3)$.

   2.1. Determine os valores de $a, b\ e\ c$.

   2.2. Determina as coordenadas do ponto B.



4.5

1. Determine, caso existam, as assíntotas ao gráfico das funções definidas por cada uma das expressões seguintes:

   1.1. $f(x) = \frac{3x+6}{(x+2)^2}$ 1.2. $g(x) = \frac{2x^3+x}{x^2+1}$ 1.3. $h(x) = \frac{2x^2+4x+3}{x^2-1}$ 1.4. $j(x) = \frac{2x^2+3}{x+3}$

   1.5. $*p(x) = \frac{\sqrt{9x^2+5x}}{x+1}$ 1.6. $r(x) = \sqrt{4x^2+1}$ 1.7. $*s(x) = \frac{x^2-3}{|5-x|}$

2. *Acerca de uma função f real de variável real, sabe-se que é contínua no seu domínio e que

   - $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$;
   - $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to3} f(x)$;
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$;
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = 1$.

   Identifique as assíntotas ao gráfico de f.

7.10

Comentário

O resultado expresso no descritor 7.10 poderia demonstrar-se utilizando o binómio de Newton. No entanto, para provar o resultado expresso neste descritor, bastará observar um resultado um pouco menos preciso: dado $n \in \mathbb{N}$ e $x, h \in \mathbb{R}$,

$$(x+h)^n = (x+h) \times \ldots \times (x+h) = x^n + nhx^{n-1} + h^2P(x,h),$$

onde $P(x,h)$ é um polinómio. Esta decomposição pode ser justificada de forma intuitiva e simples utilizando a propriedade distributiva, pois uma das parcelas da forma reduzida do polinómio $(x+h)^n$ é sem dúvida x^n, produto da todas as parcelas iguais a x dos n fatores, para cada um dos n factores haverá uma parcela hx^{n-1} obtida pelo produto da parcela h desse fator pelas parcelas iguais a x nos restantes $n-1$ fatores , obtendo-se nhx^{n-1} para soma destas n parcelas iguais e as restantes parcelas da forma reduzida têm todas um fator h^2 que pode assim ser posto em evidência. Assim:

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - nhx^{n-1} = \frac{h^2P(x,h)}{h} = hP(x,h)$$

e é óbvio que a função de h no último membro desta cadeia de igualdades tende para 0, pelo que, por definição, a função x^n é diferenciável em todos os pontos e tem derivada nx^{n-1}. O caso $n \leq 0$ pode obter-se aplicando a regra de derivação da função composta à composição de $\frac{1}{x}$ com uma função potência de expoente natural.

7.11

Comentário

A demonstração da fórmula para a derivação da função raiz de índice n é muitas vezes apresentada como consequência do teorema de derivação de uma função inversa. No entanto é possível justificar a referida fórmula utilizando uma identidade algébrica já invocada a propósito da racionalização de denominadores (*cf*. Texto de apoio ao descritor ALG10-1.11) e que neste nível de escolaridade já poderia ser demonstrada por indução matemática:

$$A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1}).$$

Temos assim, tomando $A = \sqrt[n]{x+h}$ e $B = \sqrt[n]{x}$:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{h} &= \frac{1}{h}\,\frac{x+h-x}{A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1}} \\ &= \frac{1}{A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1}},\end{aligned}$$

cujo limite quando h tende para 0 é obviamente igual a $\frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$.

7.13

1. Determine a expressão da função derivada de cada uma das funções definidas pelas seguintes expressões:
   1.1. $f(x) = 6x$
   1.2. $g(x) = (7x-8) - (5x+1)$
   1.3. $h(x) = (2x-3)(3x+4)$
   1.4. $j(x) = (5-2x) \times \frac{3}{x}$
   1.5. $p(x) = \frac{3x+4}{5-7x}$
   1.6. $r(x) = x^4 - x^2 + 1$
   1.7. $s(x) = \sqrt{3x+1}$
   1.8. $t(x) = 4x.\sqrt{x}$
   1.9. $v(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{3x+4}$
   1.10 *$w(x) = \frac{2+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{\sqrt{x}}}$

2. Considere as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ e tais que $f(x) = x^2$, $g(a) = 3$ e $g'(a) = 4$. Determine
   2.1. $(fog)'(a)$.
   2.2. $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)$, em função de $f(a)$ e de $f'(a)$.

	3. *Considere as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ e tais que $f(x) = 3x^2$ e $g(x) = \frac{4}{1+x^2}$. Determine, de duas formas distintas, utilizando ou não a fórmula de diferenciação da função composta, uma expressão analítica da função derivada de: 3.1. gof. 3.2. fog. 3.3. fof.
8.2	**Informação Complementar para o Professor** O Teorema de Lagrange, no caso em que $f(a) = f(b)$ (também conhecido por «Teorema de Rolle») pode facilmente ser demonstrado a partir do resultado enunciado no descritor 8.1. Com efeito, seja uma função f diferenciável num intervalo $]a, b[$, contínua em $[a, b]$ e tal que $f(a) = f(b)$. Se f for constante, então a respetiva derivada anula-se em qualquer ponto de $]a, b[$. Se f não for constante, atendendo a que $f(a) = f(b)$, ou o máximo ou o mínimo absoluto de f (que existe, pelo teorema de Weierstrass, ver descritor FRVR12-2.2) é atingido num ponto de $]a, b[$, sendo portanto a derivada de f nula nesse ponto. Para demonstrar o Teorema de Lagrange na sua generalidade, basta aplicar este resultado à função que se obtém de f subtraindo-lhe a função g cujo gráfico é a reta que passa pelos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$. Embora estas demonstrações não sejam requeridas aos alunos, estes deverão conhecer estes resultados e a respetiva interpretação geométrica: existe um ponto de $]a, b[$ tal que a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto é paralela a AB. O exemplo seguinte ilustra esta situação: 1. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^3 - x$. 1.1. Determine o declive da reta secante ao gráfico de f nos pontos A e B de abcissa, respetivamente, -2 e 1. 1.2. Verifique a existência de pelo menos um ponto C do gráfico de f, com abcissa compreendida entre -2 e 1, em que a reta tangente tem declive igual ao da reta AB, determinando a abcissa de C.
9.1	1. Considere as funções f e g definidas por $f(x) = 4x^3$ e $g(x) = \frac{a}{x}, a > 0$. 1.1. Determine a equação reduzida da reta s tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = -\sqrt{2}$. 1.2. A reta r é tangente ao gráfico de f e paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares. Determine uma equação de r. 1.3. *Determine para que valor de a os gráficos de f e g se intersetam num ponto do primeiro quadrante em que as retas tangentes aos gráficos são perpendiculares.
9.2	1. Um ponto P move-se numa reta de tal forma que, em cada instante t (em segundos), a distância d (em cm) à origem O é dada pela expressão $d(t) = t^2 - 19t + 60$. 1.1. No instante inicial, qual a distância do ponto P à origem? 1.2. Determine a velocidade média do ponto P nos três primeiros segundos. 1.3. Determine a velocidade no instante $t = 4$ e indique a distância à origem nesse instante. 1.4. Determine a expressão da velocidade em cada instante t e indique em que instante a velocidade é nula.

2. Um projétil foi lançado verticalmente e a respetiva altura a (medida em metros da altura do projétil acima do solo) é dada, em função de t, (medida em segundos do tempo decorrido após o instante inicial $t = 0$) por $a(t) = -4{,}9t^2 + 39{,}2t + 1{,}6$.
   2.1. Qual a altura do projétil no instante em que foi lançado?
   2.2. Determine a velocidade média nos dois primeiros segundos.
   2.3. Determine a velocidade no instante $t = 3$.
   2.4. Qual a altura máxima atingida pelo projétil?

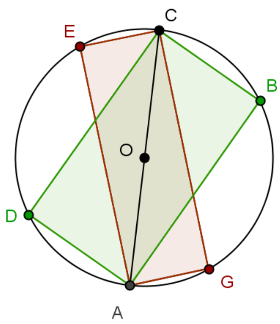
9.3

1. Determine os intervalos de monotonia de cada uma das seguintes funções e identifique os extremos relativos e absolutos, caso existam.
   1.1. $f(x) = 4x^2 - 16x + 3$ em $\mathbb{R}$
   1.2. $g(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 1$ em $\mathbb{R}$
   1.3. $h(x) = 2x + \frac{4}{x}$ em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$
   1.4. $j(x) = \frac{2x}{x+5}$ em $\mathbb{R}_0^+$
   1.5. $p(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ em $\mathbb{R}$
   1.6. $r(x) = \frac{4}{x^2+1}$ em $\mathbb{R}$

2. De todos os retângulos de perímetro 40cm, determine as dimensões do que tem área máxima.

3. Pretende-se construir um recipiente cilíndrico com a capacidade de 12 litros gastando a menor quantidade possível de um dado material. Considerando desprezável a espessura do material, determine qual deverá ser a medida do raio da base do recipiente.

4. *Considere os retângulos que se podem inscrever numa circunferência com diâmetro $\overline{AC} = 10$.
   Determine qual desses retângulos tem área máxima.



Descritor	Texto de Apoio
1.3	1. Considere um referencial ortogonal do plano e os pontos $A(2,3), B(4,5)$ e $C(6,4)$ e as amostras $\underset{\sim}{x} = (2,4,6)$ e $\underset{\sim}{y} = (3,5,4)$. 1.1. Determine as médias de $\underset{\sim}{x}$ e de $\underset{\sim}{y}$. 1.2. Escreva a expressão $f(a) = \sum_{i=1}^{3}(y_i - ax_i - b)^2$, onde $b = \bar{y} - a\bar{x}$, sem utilizar o símbolo de somatório. 1.3. Determine $f'(a)$. 1.4. Determine o valor de a para o qual a função f atinge um mínimo absoluto e designe-o por m. 1.5. Verifique que $m = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i y_i - 3\bar{x}\bar{y}}{SS_x}$. 1.6. Represente os pontos A, B e C e esboce a reta de mínimos quadrados desta sequência de pontos. 2. ** Considere um número natural n, um referencial ortogonal do plano e os pontos $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$. 2.1. Considere a função $f(a) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$, onde $b = \bar{y} - a\bar{x}$, e determine $f'(a)$. 2.2. Determine o valor de a para o qual a função f atinge um mínimo absoluto e verifique que é igual a $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{SS_x}$
2.1 2.2 2.3	1. Considere os pontos $A(1; 2{,}1), B(2; 2{,}5), C(3; 4{,}1)$ e $D(4; 4{,}8)$ e a reta r de equação $y = 1{,}2x + 0{,}3$. 1.1. Determina o desvio vertical de cada um dos pontos em relação à reta r. 1.2. Determine a soma dos desvios. 2. Na tabela junta estão registados dados relativos à idade (em meses) e à altura (em centímetros) de 12 crianças de uma comunidade.

Idade	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
altura	74,9	76,2	77,0	78,4	78,1	79,3	79,9	81,7	80,9	81,3	82,1	86,5

Considere a variável idade como explicativa e a variável altura como resposta.
Utilize uma calculadora gráfica ou uma folha de cálculo para responder às seguintes questões (utilize aproximações às centésimas):

2.1. Determine a média das idades e a média das alturas destas crianças.
2.2. Represente num referencial cartesiano a nuvem de pontos $P_i(x_i, y_i)$ e a reta t cuja equação, com aproximação dos coeficientes às centésimas, é dada por $y = 0{,}82x + 60{,}41$.
2.3. Verifique que o ponto $Q(\bar{x}, \bar{y})$ pertence à reta t, utilizando aproximações às centésimas.
2.4. Determine o desvio vertical e_i de cada um dos pontos P_i em relação à reta t.
2.5. Calcule a soma de todos os desvios calculados em 1.3. e verifique que é nula.
2.6. Determine o valor da expressão $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{SS_x}$ e verifique que é igual ao declive da reta t, com aproximação às centésimas.

3. Numa zona agrícola com um determinado declive foi realizado um estudo acerca da influência da taxa do fluxo das águas (em litros por segundo) na erosão dos solos através da quantidade de massa de solo transportado (em quilogramas). Assim, foram feitas cinco medições das quais resultaram os dados da tabela junta.

Taxa de fluxo	0,31	0,85	1,26	2,47	3,75
Solo erodido	0,82	1,95	2,18	3,01	6,07

3.1. Qual deve ser a variável explicativa e a variável resposta?
3.2. Utilize uma calculadora gráfica ou uma folha de cálculo para resolver as seguintes questões:
3.2.1. Considerando a taxa de fluxo como variável explicativa e o solo erodido como variável resposta, represente a nuvem de pontos num referencial ortogonal.
3.2.2. Determine a média dos valores de cada uma das amostras representadas.
3.2.3. Determine o declive da reta dos mínimos quadrados que se ajusta a esta nuvem de pontos.

4. O Sr. Silva aquece a sua casa com gás natural. A quantidade de gás utilizada depende da temperatura exterior e o Sr. Silva pretende fazer um estudo dos gastos durante os 9 meses em que se observam menores temperaturas, para poder estabelecer uma previsão para os gastos em função da temperatura exterior. Na tabela junta estão registadas as temperaturas médias observadas em cada um dos meses (em graus Celsius) e o respetivo volume de gás despendido pelo Sr. Silva (em metros cúbicos).

mês	out	nov	dez	jan	fev	mar	abr	mai	jun
temperatura	16,1	12,4	10,3	8,9	10,1	12,8	13,2	15,9	16,4
Volume de gás	0,01	0.10	0,24	0,26	0,19	0,09	0,05	0,03	0,01

4.1. Qual deve ser a variável explicativa e a variável resposta?
4.2. Utilize uma folha de cálculo ou uma calculadora gráfica para responder às seguintes questões:
4.2.1.Represente os dados num referencial ortogonal e diga se é razoável a existência de uma relação linear entre estas duas variáveis.
4.2.2. Determine a média dos valores de cada uma das amostras representadas. Apresente os resultados com arredondamento às décimas.
4.2.3. Determine o declive da reta dos mínimos quadrados que se ajusta a esta nuvem de pontos. Apresente o resultado com arredondamento às décimas.
4.2.4. Determine a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados.
4.2.5. Utilizando a equação obtida em 4.2.4. determine qual o consumo esperado para um mês em que a temperatura média seja de 7°C.

5. Nos gráficos estão representadas três nuvens de pontos. Faça corresponder a cada gráfico um dos coeficientes de correlação indicados $r_1 = -0{,}25$, $r_2 = 0{,}76$ e $r_3 = -0{,}84$ e justifique.