METAS CURRICULARES PARA O ENSINO SECUNDÁRIO – MATEMÁTICA A

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Caderno de Apoio

10.º ANO

António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira, Luísa Loura, Maria Clementina Timóteo

INTRODUÇÃO

Este Caderno de Apoio constitui um complemento ao documento Metas Curriculares de Matemática do Ensino Secundário – Matemática A. Na elaboração das Metas Curriculares utilizou-se um formato preciso e sucinto, não tendo sido incluídos exemplos ilustrativos dos descritores. Neste documento apresentam-se várias sugestões de exercícios e de problemas, comentários relativos a algumas opções tomadas no documento principal e informações complementares para os professores.

Procurou-se realçar os descritores que se relacionam com conteúdos e capacidades atualmente menos trabalhados no Ensino Secundário embora se tenham incluído também outros de modo a dar uma coerência global às abordagens propostas. Estas escolhas não significam, porém, que se considerem menos relevantes os descritores não contemplados. Longe de se tratar de uma lista de tarefas a cumprir, as atividades propostas têm um caráter indicativo, podendo os professores optar por alternativas que conduzam igualmente ao cumprimento dos objetivos específicos estabelecidos nas metas. Aos exemplos apresentados estão associados três níveis de desempenho. Os que não se encontram assinalados com asteriscos correspondem a um nível de desempenho regular, identificando-se com um ou dois asteriscos os exemplos que correspondem a níveis de desempenho progressivamente mais avançados.

Para além das sugestões de exercícios e problemas a propor aos alunos entendeu-se incluir também textos de apoio para os professores. Destinam-se a esclarecer questões de índole científica que fundamentam os conteúdos do Programa e que poderão ajudar à seleção das metodologias mais adequadas à lecionação.

Descritor	Texto de Apoio
1.3 1.4 1.5 1.6 1.7 1.8	**Comentário**

Nos descritores 1.3 e 1.8 introduzem-se a equivalência e a implicação como "operações binárias", cada uma delas transformando um par de proposições numa nova proposição, a exemplo do que noutros descritores (1.6 e 1.7) sucede com a conjunção e a disjunção e, de modo análogo, com a negação (*cf.* 1.4), neste caso aplicada apenas a uma proposição ("operação unária"). Todas essas operações são definidas de tal modo que é sempre possível determinar o valor lógico do resultado conhecendo o valor lógico dos operandos; em particular, não considerando agora o caso mais trivial da negação, a caracterização de cada uma delas permite sempre construir uma tabela de dupla entrada (caso particular de «tabela de verdade»), com duas linhas e duas colunas, na qual se pode ler o valor lógico do resultado de aplicar a operação a um par de proposições em que o primeiro elemento tem o valor lógico indicado na linha e o segundo o valor lógico indicado na coluna.

Conjunção $p \wedge q$

$p \backslash q$	V	F
V	V	F
F	F	F

Disjunção $p \vee q$

$p \backslash q$	V	F
V	V	V
F	V	F

Equivalência $p \Leftrightarrow q$

$p \backslash q$	V	F
V	V	F
F	F	V

Implicação $p \Rightarrow q$

$p \backslash q$	V	F
V	V	F
F	V	V

Utilizando propriedades simples das diversas operações (*cf.*, por exemplo, os descritores 1.5, 1.10, 1.11 e 1.13) conclui-se que qualquer delas pode ser substituída, sem que se altere o valor lógico do resultado, por aplicação sucessiva de operações de negação e de disjunção, ou, em alternativa, de negação e de conjunção, ou ainda de negação e de implicação; ou seja, no que respeita aos valores lógicos dos resultados, poderíamos restringir as operações apenas à negação e a uma das três operações de conjunção, disjunção ou implicação. Por exemplo, em função da negação e da conjunção, dadas proposições p e q,

- $p \vee q$ é equivalente a $\sim(\sim p \wedge \sim q)$;
- $p \Rightarrow q$ é equivalente a $\sim(p \wedge \sim q)$;
- $p \Leftrightarrow q$ é equivalente a $\sim(p \wedge \sim q) \wedge \sim(q \wedge \sim p)$.

Fica assim patente que, do ponto de vista estritamente lógico, não haveria razão para distinguir as operações de equivalência e implicação das restantes, no que diz respeito ao uso dos respetivos símbolos na linguagem matemática corrente. No entanto, começando pela equivalência, é de notar que a caracterização desta operação é particularmente simples, resumindo-se a estabelecer que o resultado é uma proposição verdadeira ou falsa consoante as proposições operandas tenham ou não o mesmo valor lógico; assim, afirmar a veracidade de uma equivalência é outro modo de exprimir a identidade dos valores lógicos das proposições operandas. Como uma afirmação deste tipo ocorre frequentemente em Matemática, torna-se particularmente útil abreviar a respetiva escrita; por esse motivo convenciona-se que a afirmação de que determinada equivalência é verdadeira pode ser expressa escrevendo muito simplesmente essa equivalência, quando fique claro, do modo como a frase está redigida, que

	não há outra interpretação possível. Desta forma, é comum, dadas proposições p e q, escrever-se simplesmente «$p \Leftrightarrow q$» para significar que «a proposição $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira», ou seja, que «p e q têm o mesmo valor lógico», e exprime-se esse facto dizendo-se que «p é equivalente a q» ou «p e q são equivalentes». O "abuso de linguagem" consiste em substituir uma afirmação acerca de proposições formais, entendidas como objetos matemáticos que pretendem modelar aspetos do nosso discurso (no quadro de uma teoria matemática que pode ser designada por "Cálculo Proposicional") ou seja, uma afirmação em linguagem corrente acerca de determinados objetos matemáticos (neste caso, por exemplo, «as proposições p e q têm o mesmo valor lógico»), por um desses objetos (neste caso, $p \Leftrightarrow q$), porque esse objeto--proposição é interpretado intuitivamente como uma "afirmação" do nosso discurso, que por isso mesmo se considera verdadeira ao ser simplesmente enunciada; por outras palavras: mistura-se linguagem matemática, neste caso interna ao Cálculo Proposicional, com "meta--linguagem". Na redação dos descritores 1.5, 1.12, 1.13, e 1.14, por exemplo, utilizou-se esta convenção. No caso da implicação, a caracterização é uma vez mais muito simples, pois uma implicação só é falsa se o antecedente for verdadeiro e o consequente falso. Assim, a veracidade de uma implicação significa que a situação anterior não tem lugar, ou seja, que não se tem simultaneamente o antecedente verdadeiro e o consequente falso. Na prática, a implicação é muitas vezes utilizada em situações em que se desconhecem à partida os valores lógicos do antecedente e do consequente; nesses casos, a informação de que a implicação é verdadeira permite prever que, se estabelecermos a veracidade do antecedente, ficaremos automaticamente com a certeza da veracidade do consequente, mas a veracidade da implicação em conjunto com a afirmação da falsidade do antecedente, só por si, nada permite dizer acerca do valor lógico do consequente, já que uma implicação de antecedente falso tanto é verdadeira se o consequente for verdadeiro como se for falso. Esta descrição do papel da implicação revela que esta operação lógica traduz o que em linguagem corrente também se pode exprimir na forma «se…., então…», nos referidos casos em que não se pressupõe o conhecimento dos valores lógicos do antecedente e do consequente. Afirmações deste tipo também têm um papel crucial em Matemática, o que evidencia a utilidade de se usar a própria implicação, sem mais, para, integrada em determinado discurso, indicar a respetiva veracidade. Trata-se, de novo, de um abuso de linguagem no sentido já referido, utilizado por exemplo no descritor 1.8. O estudo destas operações é uma oportunidade para rever a abordagem iniciada no Ensino Básico da noção de condição necessária e condição suficiente e do uso do símbolo de implicação (*cf.* Programa e Metas Curriculares - Ensino Básico – Matemática, GM9-1.5).
1.10 1.11 1.12 1.13 1.14 1.15	**Comentário** Os resultados expressos neste conjunto de descritores podem ser demonstrados recorrendo a técnicas muito semelhantes, elaborando, por exemplo, tabelas de verdade, embora também se possam utilizar argumentos que envolvam apenas diretamente as caracterizações apresentadas das operações, ou ainda, em certos casos, recorrendo a propriedades já verificadas previamente. Não será pois necessário trabalhar exaustivamente as provas associadas a cada um destes descritores, devendo-se no entanto garantir que os alunos conhecem estes resultados bem como as técnicas base que levam à respetiva justificação. As tabelas de verdade a utilizar em situações envolvendo mais do que duas proposições poderão consistir em quadros com uma coluna para cada proposição e, em seguida, uma coluna para cada uma das operações sucessivamente a efectuar com as proposições, até se chegar à expressão final que pretendemos testar ou até ser possível, por inspeção, concluir a equivalência, em todos os

	casos, de determinadas proposições; tais tabelas deverão ter tantas linhas quantas as necessárias para contemplar todas as possibilidades de sequências de valores lógicos para as proposições operandas (portanto 2^n linhas, sendo n o número de proposições operandas). Por exemplo, para estabelecer a propriedade distributiva da conjunção relativamente à disjunção podemos utilizar a seguinte tabela:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Para preencher cada coluna relativa a uma operação limitámo-nos a utilizar o conhecimento da tabela de verdade dessa operação e os valores lógicos das proposições operandas constantes, nessa mesma linha, das colunas anteriores que lhes correspondem. A identidade dos valores lógicos representados em cada linha nas quinta e oitava colunas revela que as proposições $p \wedge (q \vee r)$ e $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ têm sempre o mesmo valor lógico, ou seja, são sempre equivalentes. Não é assim necessário completar a tabela com uma coluna relativa à proposição $\big(p \wedge (q \vee r)\big) \Leftrightarrow \big((p \wedge q) \vee (p \wedge r)\big)$; tal coluna seria, evidentemente, inteiramente preenchida com o símbolo «V», ou seja, a expressão a que se refere é o que se chama uma «tautologia», por ser verdadeira independentemente dos valores lógicos das proposições p, q e r.

Em lugar de utilizarmos a tabela de verdade, para demonstrarmos esta propriedade poderíamos argumentar de modo mais discursivo, fazendo notar, por exemplo, que a proposição $p \wedge (q \vee r)$, tratando-se de uma conjunção, é verdadeira se e somente se p e $q \vee r$ forem ambas verdadeiras. Basta-nos então verificar que o mesmo se passa com a proposição $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$; ora, por um lado, esta proposição é obviamente verdadeira se p e $q \vee r$ o forem ambas, pois, nesse caso, ou q é verdadeira e portanto $p \wedge q$ também o é, ou, caso contrário, r é verdadeira (já que $q \vee r$ o é) e então $p \wedge r$ é verdadeira. Assim pelo menos uma das proposições $p \wedge q$ ou $p \wedge r$ tem de ser verdadeira, ou seja, $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ é verdadeira. Reciprocamente, se $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ for verdadeira, uma pelo menos das conjunções $p \wedge q$ ou $p \wedge r$ é verdadeira; assim, em qualquer caso, p é verdadeira (é operanda de ambas as conjunções) e uma das proposições q ou r também tem de o ser (cada uma delas é operanda numa das conjunções). Mas nesse caso é verdadeira também a disjunção $q \vee r$. Assim, como pretendíamos, a proposição $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ é verdadeira se e somente se p e $q \vee r$ o forem ambas, tal como a proposição $p \wedge (q \vee r)$; trata-se assim de proposições equivalentes.

1.16	1. Considere proposições p e q tais que p é falsa e $p \vee q$ é verdadeira. Indique o valor lógico de cada uma das seguintes proposições: 1.1. q 1.2. $p \wedge q$ 1.3. $\sim p \vee q$ 1.4. $\sim(p \vee q)$ 1.5. $\sim(\sim p \wedge q)$ 1.6. $p \Longrightarrow \sim q$ 1.7. $\sim p \Leftrightarrow q$

	2. Considere proposições p e q. Simplifique as seguintes expressões que definem proposições e indique, sempre que possível, o respetivo valor lógico. 2.1. $\sim p \wedge (p \wedge q)$ 2.2. $\sim p \vee (p \vee q)$ 2.3. $\sim p \wedge (p \vee q)$ 2.4. * $[\sim p \wedge (p \vee q)] \wedge \sim q$ 2.5. * $[p \vee (\sim p \wedge q)] \vee \sim q$ 3. *Determine o valor lógico das proposições p, q e r sabendo que a proposição: 3.1 $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ é falsa. 3.2 $\sim(p \Rightarrow q) \wedge r$ é verdadeira. 4. *Sabe-se que $(p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \Rightarrow q) \wedge p$ é uma proposição verdadeira. Qual o valor lógico de p, de q e de r?
2.1	**Informação Complementar para o professor** As condições mais primitivas que permitem a construção dos conjuntos básicos que intervêm nas teorias matemáticas envolvem variáveis representadas por letras e que, intuitivamente, representam objetos genéricos da Matemática os quais não constituem, à partida, um conjunto. Desta forma, nesses casos, as variáveis podem ser substituídas por quaisquer “termos” (expressões representando objetos matemáticos), sem que se limite à partida essa substituição a elementos de um conjunto pré-fixado, e tal substituição conduz sempre a uma expressão admissível, trate-se ou não de uma proposição verdadeira. Por exemplo, a condição $\sim(x = x)$, negação da condição $x = x$, permite definir o chamado conjunto vazio (no sentido expresso no descritor 2.10) e, sendo já dados dois conjuntos A e B, a condição $x \in A \vee x \in B$ permite definir o conjunto união de A e B. A possibilidade de construir um conjunto através de uma dada condição com uma variável fica regulada pelos axiomas utilizados para a Teoria dos Conjuntos, sendo certo que nem todas as condições admissíveis permitem definir um conjunto no sentido acima referido (*cf.* o Comentário aos descritores 2.10 e 2.11). À medida que se vão definindo conjuntos através de condições progressivamente mais elaboradas e introduzindo as habituais abreviaturas da linguagem matemática é depois usual utilizar condições em cuja formulação fica explícito ou implícito que todos os objetos que a transformam numa proposição verdadeira, por substituição da variável por um termo representando um desses objetos, pertencem a determinado conjunto já definido; uma tal condição pode assim considerar-se associada a determinado conjunto que pode ser designado por “universo” dessa condição e que se sabe *a priori* conter todos os objetos que satisfazem a referida condição. Do mesmo modo, nas condições utilizadas na linguagem comum, habitualmente considera-se implícita ou explicitamente que a variável representa um objecto genérico de determinado domínio de variação que se supõe fixado.
2.2 2.4	**Comentário** Como notações alternativas para os quantificadores, utilizam-se também, por exemplo, as seguintes: $\forall x\ p(x)$ e $\exists x\ p(x)$ $(\forall x)\ p(x)$ e $(\exists x)\ p(x)$ $\forall_x\ p(x)$ e $\exists_x\ p(x)$

	Uma variante também por vezes utilizada desta última notação consiste em colocar o x diretamente abaixo do símbolo de quantificador, em vez de o colocar em índice. Quando se utilizam as duas primeiras notações é também usual colocar entre parêntesis a expressão que se pretende quantificar, como por exemplo em $\forall x\ (x \in A\ \Rightarrow\ x \in B)$, ou seja, não se considera a prioridade das operações lógicas relativamente aos quantificadores que está implícita na notação utilizada nos descritores deste objetivo geral. O facto de se introduzirem símbolos para os quantificadores não significa, evidentemente, que em textos de Matemática se abuse da utilização desses símbolos ou dos símbolos das operações lógicas. Em muitos casos deverá utilizar-se a linguagem comum para exprimir da maneira mais clara possível os conteúdos matemáticos que se pretende transmitir.
2.3 2.5	1. Considere as condições «$x = x$», «$x \neq x$», «$x \in \mathbb{N}$», «$x \notin \mathbb{R}$», «$x \in \emptyset$» e «$x \notin \emptyset$». 1.1. Indique as que são universais, as que são possíveis e as que são impossíveis. 1.2. *Tendo em conta a alínea anterior, para cada uma das seguintes condições, indique se é possível, impossível ou universal: 1.2.1. $x \neq x\ \wedge x \in \mathbb{N}$ 1.2.2. $x = x\ \vee\ x \in \emptyset$ 1.2.3. $x \in \mathbb{N}\ \vee x \in \emptyset$ 1.2.4. $x \notin \emptyset \vee x \in \mathbb{N}$ 1.2.5. $x \in \mathbb{N}\ \vee x \notin \mathbb{R}$ 2. *Mostre que a disjunção de qualquer condição com uma condição universal é uma condição universal, que a disjunção de qualquer condição com uma condição possível é uma condição possível e que a conjunção de qualquer condição com uma condição impossível é uma condição impossível.
2. 6	**Comentário** Neste descritor indica-se, sem à partida se exigir qualquer justificação, como se relacionam os quantificadores universal e existencial através da negação. No entanto estas relações traduzem propriedades intuitivas que podem ser motivadas pela análise de exemplos concretos de utilização dos quantificadores na linguagem corrente (*cf.* exemplos no texto de apoio ao descritor 2.9). Qualquer destas equivalências pode também informalmente justificar-se interpretando a proposição que resulta de aplicar o quantificador universal (respetivamente existencial) a uma condição $p(x)$ como o resultado de se unir por conjunções (respetivamente disjunções) todas as proposições $p(a)$ (a um objeto arbitrário), notando que pela comutatividade e associatividade da conjunção (respetivamente da disjunção), podemos intuitivamente atribuir significado a estas "operações generalizadas" sobre proposições. Deste modo as referidas equivalências podem ser interpretadas como extensões das primeiras Leis de De Morgan a estas "conjunções e disjunções generalizadas". Embora tal não seja requerido, é fácil concluir que uma das propriedades pode ser deduzida da outra, ou seja, admitindo, por exemplo, que, dada uma condição $p(x)$, $\sim\big(\forall x, p(x)\big) \Leftrightarrow \big(\exists x{:} \sim p(x)\big)$ podemos provar que, dada uma condição $p(x)$, $\sim\big(\exists x{:}\, p(x)\big) \Leftrightarrow \big(\forall x, \sim p(x)\big)$, e, reciprocamente, admitindo esta propriedade podemos provar a primeira. Para provar que é verdadeira a segunda equivalência, dada uma condição $p(x)$, basta aplicar a primeira equivalência à condição $\sim p(x)$ e em seguida o facto de uma equivalência entre duas proposições ser verdadeira quando e apenas quando as proposições têm o mesmo valor lógico, para além de se utilizar o princípio da dupla negação. Obtemos assim sucessivamente:

	$\sim(\forall x, \sim p(x)) \Leftrightarrow (\exists x: \sim(\sim p(x)))$, que é equivalente a $(\forall x, \sim p(x)) \Leftrightarrow \sim(\exists x: \sim(\sim p(x)))$ e portanto a $(\forall x, \sim p(x)) \Leftrightarrow \sim(\exists x: p(x))$, também equivalente, obviamente, a $\sim(\exists x: p(x)) \Leftrightarrow (\forall x, \sim p(x))$, como pretendíamos. A recíproca pode ser provada de modo idêntico. Uma formalização plena do tratamento dos quantificadores fica fora do âmbito deste estudo introdutório da Lógica, mas a aceitação sem demonstração de uma das equivalências expressas neste descritor corresponde a tomá-la como axioma.
2.7 2.8	**Comentário** O quantificador universal é frequentemente utilizado em Matemática em conjunto com as operações de implicação e de equivalência, por exemplo a propósito da resolução de equações e inequações. Muitas vezes pretende-se estabelecer uma cadeia de implicações ou de equivalências entre condições provando-se que cada uma dessas implicações ou equivalências é uma condição universal em determinado conjunto, partindo-se da condição que exprime a equação ou inequação a resolver até se chegar a uma que se considera como suficientemente simples para a partir dela se poderem tirar conclusões acerca das soluções da inicial. Por exemplo, no conjunto $U = \mathbb{R}$, cada uma das seguintes equivalências é uma condição universal: $x^2 > 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) > 0$ $\Leftrightarrow (x - 2 > 0 \land x + 2 > 0) \lor (x - 2 < 0 \land x + 2 < 0)$ $\Leftrightarrow (x > 2 \land x > -2) \lor (x < 2 \land x < -2)$ $\Leftrightarrow x > 2 \lor x < -2$ pretendendo-se, com esta apresentação, indicar a conjunção de todas as equivalências representadas. Pode utilizar-se a mesma convenção com conjunções de implicações ou mesmo de equivalências e implicações. Em primeiro lugar há que notar que se se tratar de uma cadeia de implicações apenas poderemos concluir que as soluções da equação ou inequação inicial são soluções também da última, ou seja o conjunto-solução da primeira está contido no conjunto-solução da última (*cf.* o descritor 2.15). Este processo apenas circunscreve o conjunto no qual deveremos ainda procurar as soluções pretendidas, testando-se, para o efeito, por algum processo (uma a uma, por exemplo, se se tratar de um conjunto finito), quais são efetivamente soluções da equação ou inequação inicial (é o caso de algumas equações com radicais). Se se tratar de uma cadeia de equivalências, já poderemos garantir que os conjuntos-solução da primeira e última condições são iguais (*cf.* o descritor 2.11) e a última condição é então o que muitas vezes se designa por "solução" da equação ou inequação inicial, de acordo com o que é requerido para cada tipo de problema. Por vezes comete-se o abuso de linguagem que consiste em omitir o quantificador universal quando se pretende exprimir que uma implicação ou equivalência entre duas condições é universal em determinado conjunto, o que é admissível se não houver perigo de ambiguidade com este procedimento. Ou seja, estando entendido, por exemplo, que estamos a considerar x como número real, escreve-se por vezes apenas: $x^2 > 4 \Leftrightarrow x > 2 \lor x < -2$ com o significado de: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 4 \Leftrightarrow x > 2 \lor x < -2$

	É de salientar a importância do uso correto da implicação e da equivalência, em conjunto com o quantificador universal, no contexto da resolução de equações e inequações. Apresenta-se em seguida um exemplo que pode ser utilizado como ilustração. 1. Complete com $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ e $\Leftarrow$ as seguintes condições (substituindo as reticências por um destes símbolos), de modo que sejam universais em $\mathbb{R}$: 1.1 $x > 2 \ldots x^2 > 4$ 1.2 $(x-1)(x-2) = 0 \ldots x = 1$ 1.3 $x = 3 \ldots x^4 = 81$ 1.4 $x > 3 \ldots x^3 > 27$ 1.5 $\lvert x+3 \rvert < 2 \ldots x + 3 < 2$ **Comentário** As propriedades das operações de conjunção e disjunção relativas a condições universais, possíveis e impossíveis referidas nos descritores 2.3, 2.5 e 2.6 estendem-se, *mutatis mutandis,* ao caso de condições universais, possíveis e impossíveis num dado conjunto U (*cf.* texto de apoio ao descritor 2.9, exemplos 4 e 5). Apresenta-se, em seguida, um exemplo de aplicação dessas propriedades. 2. Para cada uma das condições «$x^2 = -2$», «$x^2 > -2$» e «$x^2 \geq 4$» indique se é universal, possível ou impossível em $\mathbb{R}$ e o que daí pode concluir, a esse mesmo respeito, acerca das condições: 2.1 $x^2 = -2 \wedge x^2 \geq 4$ 2.2 $x^2 = -2 \vee x^2 \geq 4$ 2.3 $x^2 = -2 \wedge x^2 > -2$ 2.4 $x^2 \geq -2$
2.9	1. Escreva afirmações equivalentes à negação das seguintes proposições, utilizando as segundas leis de De Morgan: 1.1 «Existe um colega na minha turma que não tem irmãos»; 1.2 «Todas as pessoas que estão nesta sala estão a usar um chapéu». 2. Considere o conjunto $A = \{2,3,4,5\}$ e seja $p(x)$ a condição «x é número primo» e $q(x)$ a condição «x é múltiplo de 6». 2.1 Indique o valor lógico de cada uma das proposições: «$\forall x \in A, p(x)$», «$\exists x \in A: q(x)$». 2.2 Para cada uma das proposições consideradas na alínea anterior, escreva uma proposição, começando com um quantificador, equivalente à respetiva negação, traduzindo-a também em linguagem corrente. 2.3 Quanto a cada uma das condições $p(x), q(x), \sim p(x)$ e $\sim q(x)$ indique se é possível, impossível ou universal em A. 3. Mostre que as seguintes afirmações são falsas, apresentando um contra-exemplo: 3.1 Todos os quadriláteros do plano têm diagonais iguais. 3.2 Todos os números ímpares são primos. 3.3 Todos os números primos formados por dois algarismos têm os algarismos distintos.

	4. *Dado um conjunto U e uma proposição $p(x)$, escreva, na forma de uma implicação quantificada, a proposição $\forall x \in U, p(x)$ e utilize as segundas Leis de De Morgan para determinar uma proposição equivalente à respetiva negação, escrevendo-a também na forma abreviada. 5. *Dado um conjunto U e uma proposição $p(x)$, mostre que se $p(x)$ for uma proposição universal em U, então $\sim p(x)$ é uma condição impossível em U e se $p(x)$ for uma proposição impossível em U, então $\sim p(x)$ é uma condição universal em U. 6. **Dado um conjunto U mostre que a disjunção de qualquer condição com uma condição universal em U é uma condição universal em U, que a disjunção de qualquer condição com uma condição possível em U é uma condição possível em U e que a conjunção de qualquer condição com uma condição impossível em U é uma condição impossível em U.
2.10 2.11	**Informação Complementar para o professor** O descritor 2.11 exprime a ideia intuitiva de que "dois conjuntos são iguais quando e apenas quando têm os mesmos elementos", estabelecendo assim o princípio essencial para o uso dos símbolos de igualdade («=») e de pertença (« $\in$ »), que representam as duas relações básicas da Matemática; deste modo, a notação $\{x : p(x)\}$ introduzida em 2.10 fica associada a um conjunto A bem determinado, no sentido em que se existir um conjunto A tal que $\forall x, x \in A \Leftrightarrow p(x)$ então qualquer conjunto A' tal que $\forall x, x \in A' \Leftrightarrow p(x)$ será igual a A. A relação $A = A'$ traduz a ideia intuitiva de que os símbolos «A» e «A'» representam o mesmo objeto, e é nesse sentido que podemos dizer que A fica "bem determinado" pela condição (em A) $\forall x, x \in A \Leftrightarrow p(x)$. Resulta deste princípio que a igualdade de dois conjuntos A e B definidos em compreensão respetivamente pelas condições $p(x)$ e $q(x)$ significa que é universal a condição $p(x) \Leftrightarrow q(x)$. No enunciado do descritor 2.10 não se pressupõe que, fixada uma condição $p(x)$, exista sempre um conjunto A com a propriedade nele referida. Com efeito, embora não se pretenda aqui desenvolver aspetos mais delicados dos fundamentos da Teoria do Conjuntos, há que ter em conta que, em formalizações habituais desta teoria surgem condições $p(x)$ para as quais não existe nenhum conjunto A tal que $\forall x, x \in A \Leftrightarrow p(x)$, ou seja, nesses casos não existe o conjunto $\{x : p(x)\}$: diz-se nesta situação que a condição $p(x)$ «não é coletivizante». Um exemplo famoso é a condição $x \notin x$, que dá origem ao chamado «Paradoxo de Russel», enunciado por Bertrand Russel no início do século XX e que pôs em causa os fundamentos apresentados por Gottlob Frege para a Teoria dos Conjuntos; com efeito, se existisse um conjunto $A = \{x : \sim(x \in x)\}$ teríamos $\forall x, x \in A \Leftrightarrow \sim(x \in x)$, pelo que teria de ser verdadeira, em particular, a proposição que resulta de substituir x por A em $x \in A \Leftrightarrow \sim(x \in x)$, ou seja, teria de ser verdadeira a proposição $A \in A \Leftrightarrow \sim(A \in A)$, o que não é possível, pois uma proposição e a respetiva negação não podem ter o mesmo valor lógico. No entanto, em tudo o que se segue, sempre que for definido um conjunto através de uma condição, pressupor-se-á, evidentemente, que tal conjunto existe, no sentido em que, numa formalização adequada da Teoria dos Conjuntos, essa existência poderia ser provada (ou, em particular, seria um axioma).
2.12	**Comentário** Neste descritor fixa-se a nomenclatura habitual («a é um elemento do conjunto A») para referir um objeto a quando se pretende indicar que se verifica a relação $a \in A$ e introduz-se a notação corrente ($\{a_1, \dots, a_k\}$) para representar «em extensão» um conjunto A cujos

	elementos sejam exatamente determinados objetos $a_1, \dots, a_k$, ou seja, quando A pode ser definido pela condição $x = a_1 \vee x = a_2 \vee \dots \vee x = a_k$. É importante notar que desta definição resulta imediatamente que o conjunto $\{a_1, \dots, a_k\}$, ao contrário da sequência $(a_1, \dots, a_k)$, não depende da ordem pela qual os respetivos elementos são indicados nem do número de vezes que um dado elemento do conjunto aparece nesta notação; assim por exemplo temos: $$\{1,2,3\} = \{3,1,2\} = \{2,2,1,3,3,1,3\},$$ Embora, evidentemente, as sequências $(1,2,3), (3,1,2)$ e $(2,2,1,3,3,1,3)$ sejam, duas a duas, distintas.
2.19 2.20	**Informação Complementar para o professor** No 9.º ano abordaram-se algumas noções acerca da axiomatização das teorias matemáticas, que podem ser revistas a propósito destes tópicos do programa do 10.º ano (*cf.* Metas Curriculares do Ensino Básico de Matemática, GM9, objetivo geral 1). Introduziram-se nessa altura alguns termos usuais nesse contexto, como «teorema», «hipótese», «tese», «demonstração», bem como o símbolo de implicação e as noções de «condição necessária» e de «condição suficiente». Em muitos casos a demonstração de um teorema pode ser entendida como a verificação de que determinada implicação é “verdadeira” ou, mais propriamente, que é uma condição universal, o que pode ser traduzido indicando que determinada condição é suficiente para uma outra ou que esta é condição necessária para a primeira; noutros casos trata-se de verificar que uma implicação é “falsa” ou, mais propriamente, que não é uma condição universal. Nestes descritores apresentam-se determinadas equivalências envolvendo implicações quantificadas e exploram-se os processos de demonstração de certos teoremas que delas resultam, introduzindo-se designações adequadas para esses processos. Muitas vezes designa-se por «demonstração por absurdo» uma dada demonstração por contra-recíproco, pois podemos verificar que $\forall x, \sim q(x) \Rightarrow \sim p(x)$ provando que, para um x genérico, é falsa a proposição $p(x) \wedge \sim q(x)$ (equivalente à negação da implicação inicial) e por vezes esta conclusão resulta de se poder deduzir a negação de algum teorema já conhecido supondo que é verdadeira uma das proposições $p(a) \wedge \sim q(a)$, o que se traduz dizendo-se que “se chegou a um absurdo”. Ou seja, pressupondo que certo a satisfaz a condição $p(x)$ (hipótese do teorema) e a negação da condição $q(x)$ (tese do teorema), o que é equivalente à negação da proposição que se pretende demonstrar, “chega-se a um absurdo”, porque desse pressuposto se deduz uma proposição que sabemos ser falsa. No entanto, em certo sentido, este processo de «demonstração por absurdo» é formalmente distinto do método dito de «contra-recíproco», pois, de facto, consiste em considerar a Teoria que se obtém acrescentando a negação da proposição a demonstrar aos axiomas da Teoria em que se insere e mostrando que essa nova teoria é contraditória, deduzindo da nova axiomática um determinado teorema e a respetiva negação. 1. Justifique que as seguintes proposições são falsas: 1.1. Qualquer número natural que seja múltiplo de 5 é múltiplo de 10; 1.2. Qualquer quadrilátero que tenha os quatro lados iguais é um quadrado; 1.3. Qualquer quadrilátero que tenha os ângulos iguais também tem os lados iguais. 2. Escreva os contra-recíprocos das proposições indicadas no exercício anterior. 3. Demonstre por contra-recíproco que se o quadrado de um dado número natural n é ímpar, n é ímpar.

	4. Demonstre por contra-recíproco que se, em dado plano, uma reta r é paralela a outras duas retas s e t, então s e t são paralelas entre si. 5. *Considere condições $p(x)$ e $q(x)$. Utilizando as segundas Leis de De Morgan, mostre que são equivalentes as proposições $\sim\left(\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)\right)$ e $\exists x : p(x) \wedge \sim q(x)$. 6. Considere condições $p(x)$ e $q(x)$. Mostre que são equivalentes as proposições $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ e $\forall x, \sim q(x) \Rightarrow \sim p(x)$.
3.1	1. Indique o valor lógico das seguintes proposições: 1.1 7 é um número primo e 2 não é um número primo; 1.2 Tanto $\sqrt{49}$ como π são números irracionais; 1.3 70 é múltiplo de 7 e de 5; 1.4 28 é múltiplo de 7 ou de 8; 1.5 111 é um número primo ou 19 é múltiplo de 9. 2. Indique o valor lógico de cada uma das seguintes proposições: 2.1. π é igual a 3,14 ou a 3,1416; 2.2. 12 é um número múltiplo de 4 ou de 7; 2.3. $\frac{\pi}{4} < \frac{2}{3} \vee \frac{\pi}{4} < \frac{4}{5}$ 2.4. 17 é um número primo e par; 2.5. $\sqrt{\frac{9}{4}}$ é um número irracional maior que 1; 2.6. $\sqrt{5} < \sqrt{2} + \sqrt{3} \wedge \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{\pi}$; 3. Considere as proposições a: $\sqrt{7}$ é um número irracional; b: $\sqrt{7} > 3$; c: $1 - \sqrt{7} < -2$. 3.1. Indique o valor lógico de cada uma delas. 3.2. Traduza em linguagem corrente, sem utilizar a palavra «não», as seguintes proposições e indique o respetivo valor lógico: 3.2.1. $a \wedge \sim b$ 3.2.2. $\sim a \vee b$ 3.2.3. $\sim b \Rightarrow \sim c$ 4. Identifique as operações lógicas e as proposições elementares envolvidas em cada uma das seguintes proposições e escreva-as em linguagem simbólica. (por exemplo, «Se $\sqrt{11} < 4$ então ou $\left(\sqrt{11}\right)^2 < 4^2$ ou $\left(\sqrt{11}\right)^2 > 4^2$ » pode traduzir-se simbolicamente por $a \Longrightarrow (b \vee c)$ sendo a: $\sqrt{11} < 4$, b: $\left(\sqrt{11}\right)^2 < 4^2$ e c: $\left(\sqrt{11}\right)^2 > 4^2$). 4.1. 5163 é múltiplo de 3 se e só se a soma do valor dos algarismos desse número for um múltiplo de 3. 4.2. *Nem 102 é um número ímpar nem $\sqrt{11}$ é um número racional. 4.3. * Como 3400 termina por dois zeros então é múltiplo de 2, de 5 e de 4.

5. ** Considere as proposições

a: «Está a chover»;
b: «O Carlos sai de casa»;
c: «O Carlos tem aulas».

Utilizando operações lógicas entre a, b e c, escreva a seguinte proposição em linguagem simbólica:
«O Carlos não sai de casa quando está a chover, a menos que tenha aulas».

6. ** Considere uma operação $\dot{\vee}$, dita «ou exclusivo» ou «disjunção exclusiva», tal que, dadas proposições p e q, $p \dot{\vee} q$ é verdadeira quando e apenas quando p e q têm valores lógicos distintos e resolva as seguintes questões:
   6.1 Dadas proposições p e q, construa uma proposição equivalente a $p \dot{\vee} q$ partindo de p e q e utilizando apenas as operações $\wedge$, $\vee$ e $\sim$.
   6.2 Indique, justificando, se, dadas proposições p e q, algumas das seguintes proposições é sempre verdadeira:
      a. $\sim(p \dot{\vee} q) \Leftrightarrow p \wedge q$
      b. $\sim(p \dot{\vee} q) \Leftrightarrow p \vee q$
      c. $\sim(p \dot{\vee} q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
      d. $\sim(p \dot{\vee} q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

3.2

1. Considere as seguintes condições definidas em $\mathbb{N}$:

$a(n)$: n é um número primo
$b(n)$: n é múltiplo de 3
$c(n)$: n é divisor de 18
$d(n)$: n é inferior a 10

Defina em extensão cada um dos seguintes conjuntos:

$P = \{n : a(n) \wedge d(n)\}$
$Q = \{n : b(n) \wedge c(n)\}$
$R = \{n : c(n) \vee d(n)\}$
$S = \{n: \sim c(n) \wedge d(n)\}$

2. Considere os seguintes conjuntos de números reais:

$E = \{x \in \mathbb{R} : x < 4\}$, $F = \left\{x \in \mathbb{R} : x \leq -\sqrt{2}\right\}$ e $G = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{3}{2}\right\}$.

Defina, sob a forma de intervalo, ou de união de intervalos disjuntos, os seguintes conjuntos, considerados como subconjuntos de $\mathbb{R}$:

2.1 $E \cup F$ 2.2. $F \cup G$
2.3. $E \cap F$ 2.4. $E \cap G$
2.5. $E \cap (F \cap G)$ 2.6. $\bar{E}$
2.7. $\bar{G}$ 2.8. $E \setminus F$
2.9. $E \setminus (F \cap G)$

3. Considere os seguintes conjuntos:

$A = \{n \in \mathbb{N} : 2n - 5 < 10 \wedge n \text{ é ímpar}\}$,
$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 8 = 2x\}$
$C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 4\}$;

Defina em extensão os conjuntos $A, B, C, A \setminus C$ e $B \cap C$.

4. Indique se, para qualquer concretização das variáveis no conjunto U, se obtêm, das seguintes condições, implicações verdadeiras, e escreva as respetivas contra-recíprocas.
    4.1 $x < 2 \Longrightarrow x < 5$ $(U = \mathbb{R})$.
    4.2 x é múltiplo de $6 \Longrightarrow x$ é par $(U = \mathbb{N})$.
    4.3 $x > 1 \Longrightarrow x > 5$ $(U = \mathbb{R})$.
    4.4 Se um triângulo é retângulo então não é equilátero (U é o conjunto dos triângulos de um dado plano).
    4.5 Se um triângulo é isósceles então não tem ângulos internos retos (U é o conjunto dos triângulos de um dado plano).
    4.6 Se um losango tem as diagonais iguais então é um quadrado (U é o conjunto dos losangos de um dado plano).
    4.7 Um triângulo tem um ângulo externo agudo quando é obtusângulo (U é o conjunto dos triângulos de um dado plano).
    4.8 $x = -1 \Longrightarrow x^2 = 1$ $(U = \mathbb{R})$.
    4.9 $x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1$ $(U = \mathbb{R})$.

5. Demonstre, por contra-recíproco que se um número natural n não é divisível por 3, então não é divisível por 15.

Descritor	Texto de Apoio
1.1 1.2	1. Sendo a e b dois números reais tais que $0 \leq a < b$, 1.1 Prove que $a^2 < b^2$ e que $a^3 < b^3$. 1.2 *Prove que se para um dado $n \in \mathbb{N}$ se tem $a^n < b^n$, então $a^{n+1} < b^{n+1}$. Observação: O método de indução será tratado no 11.º ano. Contudo, este tipo de atividade em que se demonstra que a propriedade é "hereditária", pode constituir uma introdução a esse método de raciocínio. 2.*Sabe-se que dados números x e y reais tais que $0 \leq x < y$ e um número natural n, se tem $x^n < y^n$. Mostre que se $a < b < 0$, $a^n < b^n$ se n for ímpar e $a^n > b^n$ se n for par. [Sugestão: considere os números positivos – a e – b.]
1.4	1. Seja n um número natural par e a e b números reais positivos tais que $b^n = a$. 1.1 Prove que $(-b)^n = a$. 1.2 *Mostre que, para além de $-b$ e de b, não existem outras soluções da equação $x^n = a$. [Sugestão: *Comece por observar que qualquer solução c terá o mesmo sinal que uma das duas soluções já conhecidas, seja ela s, e, nesse caso, justifique que c não pode ser menor nem maior do que s*.]
1.6 1.7	**Comentário** Os reconhecimentos pedidos na parte final dos descritores, uma vez que ainda não se dispõe do método de indução, podem consistir na observação de que a propriedade $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$, quando $a = b$, dá origem a $\left(\sqrt[n]{a}\right)^2 = \sqrt[n]{a^2}$ e que, multiplicando ambos os membros desta equação repetidas vezes por $\sqrt[n]{a}$, vamos obtendo sucessivamente $\left(\sqrt[n]{a}\right)^3 = \sqrt[n]{a^3}$, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^4 = \sqrt[n]{a^4}$, etc.. Estas observações, não consistindo propriamente numa demonstração formal, preparam a utilização do método de indução matemática que será introduzido no 11.º ano. A exemplo do que foi sugerido no texto de apoio aos descritores 1.1 e 1.2 pode elaborar-se um exercício em que se peça aos alunos que demonstrem que a propriedade que se pretende provar é hereditária.
1.11	**Comentário** Embora o processo a que se refere este decritor se designe habitualmente por "racionalização de denominadores" o que se pretende, mais propriamente, dada uma fração (no sentido geral de representação do quociente de dois números reais), é transformá-la numa equivalente com denominador natural e numerador dado pelo produto do numerador original por uma soma em que cada parcela ou é inteira ou é dada pelo produto de um número inteiro por um produto de raízes de números inteiros. Ou seja, pretende exprimir-se a divisão original (pelo número representado no denominador) de uma forma que, para além da divisão por um número natural, se reduza a multiplicar o numerador original por uma expressão envolvendo apenas somas cujas parcelas são raízes de números inteiros multiplicadas por números inteiros. Esta "racionalização de denominadores" facilita em muitos casos obter mentalmente valores aproximados adequados de determinados números reais, conduzindo portanto a uma forma mais útil de os representar, e pode ter interesse teórico em situações em que se pretende efectuar determinado tipo de estimativas.

Para além dos casos mais usuais de racionalização de denominadores (considerados neste descritor), é possível considerar, mais geralmente, frações com denominadores da forma $a\sqrt[k]{b}+c\sqrt[j]{d}$ $(a,c\in\mathbb{Z}, b,d,k,j\in\mathbb{N}, k>1$ e $j>1)$. Podem reduzir-se facilmente, utilizando as propriedades algébricas das potências e raízes, ao caso $\sqrt[k]{a}\pm\sqrt[k]{b}$. Esses casos podem ser tratados, utilizando uma identidade algébrica que é só por si interessante (*cf*. Texto de apoio ao descritor FRVR11-7.11, onde se apresenta outra aplicação deste resultado):

$$A^n-B^n=(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+A^{n-3}B^2+\cdots+AB^{n-2}+B^{n-1}).$$

Esta fórmula generaliza um dos chamados "casos notáveis da multiplicação" (caso $n=2$) e pode começar por ser verificada para $n=3$ e $n=4$, o que permite facilmente conjeturar o resultado geral, que poderia ser demonstrado por indução e pode ser justificado analisando as parcelas que resultam da aplicação da propriedade distributiva no segundo membro da igualdade.

A título de ilustração, apresenta-se o seguinte exemplo de aplicação:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2+\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4},$$

onde se utilizou a identidade acima referida com $A=\sqrt[3]{3},\ B=\sqrt[3]{2}$ e $n=3$.

Note-se que esta igualdade permite, por exemplo, obter facilmente o enquadramento

$$4<\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}<7,$$

que é, à partida, pouco evidente. Este cálculo, como é sugerido no exercício seguinte, corresponde naturalmente a um nível de desempenho muito elevado, não estando contemplado no descritor 1.11, embora possa ser proposto a alunos particularmente motivados.

Quando o índice da raiz é uma potência de 2 (como na alínea 1.7 abaixo), o processo pode simplificar-se, bastando utilizar sucessivas vezes o acima referido caso notável da multiplicação (dito "diferença de quadrados").

1. Racionalize os denominadores das seguintes frações:

   1.1. $\frac{5}{\sqrt{2}}$;

   1.2. $\frac{1}{2\sqrt[4]{3}}$;

   1.3. $\frac{4}{2+3\sqrt{7}}$;

   1.4. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}+2\sqrt{3}}$;

   1.5. *$\frac{2-3a}{\sqrt{a+2}+2\sqrt{a}}$, $a\in\mathbb{N}$;

   1.6. * $\frac{1}{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}}$, $a,b,c,d\in\mathbb{N}$;

   1.7. ** $\frac{2}{\sqrt[4]{2}-1}$.

   1.8 **$\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$.

2.1	**Comentário** Reconhecer esta propriedade é crucial, para que, no descritor seguinte, se possa definir adequadamente a potência de expoente racional $q = \frac{m}{n}$. De facto, a definição, para $a > 0$, $a^q = \sqrt[n]{a^m}$ só faz sentido se se souber a $priori$ que para uma outra representação $q = \frac{m'}{n'}$, se tem $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n']{a^{m'}}$. 1. Mostre que $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^4}$, para qualquer número real positivo a. 2. *Prove que, sendo a um número real positivo e n, m, n' e m' números naturais tais que $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$, se tem $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n']{a^{m'}}$.
2.2	1. Considere um número não negativo a. Pretende-se dar uma definição de potência de base a e expoente racional positivo por forma a estender o conceito de potência de base a e expoente natural e que permaneça válida a propriedade $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$ para b e c racionais positivos. Admitindo que tal definição pode ser dada de modo coerente, ou seja, de modo que o valor obtido seja independente da fração que representa o número racional no expoente, resolva as seguintes questões: 1.1 Qual deve ser necessariamente o valor de $x = 8^{\frac{1}{3}}$? (*Sugestão: Calcule* x^3 *utilizando a propriedade acima referida*.) 1.2 Qual deve ser, mais geralmente, o valor de: 1.2.1 $a^{\frac{1}{3}}$? 1.2.2 $a^{\frac{1}{n}}$, para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$? [*Sugestão: No caso em que* n *é par verifique também que* $a^{\frac{1}{n}}$ *tem de ser um valor não negativo, observando que a propriedade* $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$ *garante que* $a^{\frac{1}{n}}$ *pode sempre ser escrito como o quadrado de um número.*] 1.3 Qual deve ser necessariamente o valor de $x = 8^{\frac{2}{3}}$? [*Sugestão: utilize 1.2 e a propriedade acima referida com* $a = 8$, $b = 2$ *e* $c = \frac{1}{3}$*.*] 1.4 Qual deve ser, mais geralmente, o valor de: 1.4.1 $a^{\frac{2}{3}}$? 1.4.2 $a^{\frac{m}{n}}$, para $m, n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$? 2. **Justifique que, dado um número real $a \geq 0$ e um número racional não negativo q ($q \neq 0$ se $a = 0$), a^q pode ser definido de modo coerente como $\sqrt[n]{a^m}$ onde m e n são quaisquer números inteiros tais que $m \geq 0, n \geq 2$ e $q = \frac{m}{n}$, sendo a definição também coerente com a já conhecida no caso em que q é 0 ou um número natural, e que esta é a única extensão possível a expoentes racionais positivos da definição de potência de expoente natural e base não negativa, que permite obter, para quaisquer a, q nas condições acima a^q de tal modo que continue a valer, para expoentes racionais positivos, a propriedade $(a^p)^r = a^{pr}$.
2.3	1. Seja $q = \frac{m}{n}$ (m, n números naturais) e a um número real positivo. Já vimos que a^q se encontra definido de modo coerente como sendo igual a $\sqrt[n]{a^m}$. Qual deve ser a definição de a^{-q} se se pretender que a propriedade $a^p a^q = a^{p+q}$ tenha lugar para todos os racionais p e q? (*Sugestão: Considere* $p = -q$ *na igualdade anterior*.)

2.4	1. Sejam a e b números reais positivos. Mostre, utilizando as propriedades estudadas das operações com radicais e a definição de potência de expoente racional, que 1.1 $a^{\frac{4}{5}} \times a^{\frac{3}{5}} = a^{\frac{7}{5}}$ 1.2 $a^{\frac{4}{5}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{13}{10}}$ 1.3 *$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{k}{p}} = a^{\frac{mp+nk}{np}}$, k, m, n e p números naturais 1.4 $\left(a^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{8}{15}}$ 1.5 $a^{\frac{3}{4}} \times b^{\frac{3}{4}} = (ab)^{\frac{3}{4}}$ 1.6 $\frac{2^{1,3}}{5^{1,3}} = 0{,}4^{1,3}$ 1.7 $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}} = a^{\frac{1}{2}}$
2.5	1. Simplifique as seguintes expressões: 1.1 $3\sqrt[4]{3} - 2\sqrt[4]{48}$ 1.2 $\sqrt[6]{567} \times \sqrt[3]{3} - \frac{\sqrt[6]{7}}{2}$ 1.3 $\left(1-\sqrt{3}\right)^2 - \left(2\sqrt{3}-5\right)^2$ 1.4 $5\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{16}$ 1.5 $\sqrt{\sqrt{5}} + 2\sqrt[4]{80}$ 1.6 $\sqrt[6]{6} \times \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} - \frac{\sqrt[6]{3}}{2}$ 1.7 $\frac{\sqrt[3]{4}\times\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}} - \left(2-\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$ 1.8 $\frac{a^{\frac{3}{2}}\times a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{5}{6}}} + \frac{\left(a^{\frac{1}{6}}\right)^4}{a^{-2}}$, onde $a \in \mathbb{R}^+$ 1.9 * $\sqrt[3]{2\sqrt{3}} \times \sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} - \left(\sqrt[3]{2}-1\right)^2$ 2. *Justifique cada uma das seguintes igualdades: 2.1 $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$ 2.2 $\sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{5}+2$ 3. **Escreva cada uma das seguintes expressões na forma: $a + b\sqrt{c}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $c \in \mathbb{N}$. 3.1 $\sqrt{29+12\sqrt{5}}$ 3.2 $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$ 4. **Simplifique a expressão $\sqrt{14-6\sqrt{5}} - \sqrt{21-8\sqrt{5}}$, verificando que se trata de um número inteiro .

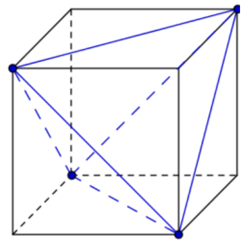
5. Escreva na forma de potência de base 2 a seguinte expressão $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}}$.

3.1

Apresentam-se alguns problemas relacionando radicais com conteúdos geométricos estudados no ensino básico. O professor poderá utilizar alguns destes exemplos como ilustração das propriedades dos radicais estudadas neste domínio de conteúdos.

1. Um quadrado está inscrito numa circunferência de raio 3 unidades. Determine a medida do lado do quadrado e apresente o resultado final na forma $a\sqrt{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$.

2. *Um tetraedro regular está inscrito num cubo tal como sugere a figura. Sabendo que a aresta do cubo mede a unidades, prove que a área de cada face do tetraedro é igual a $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$ unidades quadradas.



3. Fixada uma unidade de comprimento, considere um cubo de aresta a e de volume V.
   3.1. Exprima a em função de V.
   3.2. Exprima a medida da área da superfície do cubo na forma nV^q, onde n é um número natural e q um número racional.

4. Considere um prisma quadrangular regular reto em que a área da base mede $b\ cm^2$ e a altura é igual ao quádruplo da medida do comprimento da aresta da base.
   4.1. Exprima a medida do volume do prisma na forma nb^q, onde n é um número natural e q um número racional.
   4.2. Determine o valor de b sabendo que o volume do prisma é igual a 32 cm^3.

5. Uma esfera está inscrita num cubo de volume V. Exprima, em função de V:
   5.1. o raio da esfera.
   5.2. o volume da esfera.

6. **Um cubo está inscrito numa superfície esférica de volume V. Exprima, em função de V, a medida da aresta do cubo.

7. *Num trapézio isósceles $[ABCD]$ a base menor é igual aos lados não paralelos e mede $\sqrt{2}\ cm$. Um dos lados não paralelos forma com a base maior um ângulo de 60° de amplitude. Prove que o perímetro do trapézio é igual a $5\sqrt{2}\ cm$ e a área igual a $\frac{3\sqrt{3}}{2}\ cm^2$.

8. Verifique que os números:
   8.1. $x_1 = 1 - \sqrt{3}$ e $x_2 = 1 + \sqrt{3}$ são raízes da equação $x^2 - 2x - 2 = 0$.
   8.2. $x_1 = \sqrt[6]{5}$ e $x_2 = -\sqrt[6]{\frac{5}{4}}$ são soluções da equação $2x^6 - \sqrt{5}x^3 - 5 = 0$.

9. *Considere, dado um número natural $n \geq 2$ e para $x > 0$, $y > 0$, a expressão $A = \frac{2\sqrt{x}\sqrt[3]{y}}{\sqrt[n]{xy^2}}$. Determine para que valor de n se tem que $A = 2\sqrt[3]{x}$, independentemente dos valores de x e de y.

4.2	1. Considere os polinómios $A(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ e $B(x) = 4x^5 - x + 1$. 1.1. Determine, na forma reduzida, o polinómio $A(x) \times B(x)$, indicando o respetivo grau. 1.2. Qual o grau do polinómio $A(x) \times B(x)$, se se tiver agora $A(x) = x^n + 3x^2 - 2$ e $B(x) = 4x^m - x + 1$, onde $n > 2$ e $m > 1$? Qual a relação entre o grau de $A(x)$, o grau de $B(x)$ e o grau de $A(x) \times B(x)$? 2. *Dados números inteiros não negativos n e m, considere os polinómios $A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} +_{\dots} + a_1 x^1 + a_0$ e $B(x) = b_m x^m + b_{\mathrm{m}-1}x^{m-1} +_{\dots} + b_1 x^1 + b_0$, com $a_i \in \mathbb{R}$ $(i \in \mathbb{N}_0, i \leq n)$ e $b_j \in \mathbb{R}$ $(j \in \mathbb{N}_0, j \leq m)$, $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$. Ao efetuar o produto de polinómios $A(x) \times B(x)$, quantas parcelas da forma $a_i x^i \times b_j x^j$ irão aparecer formalmente após uma primeira aplicação da propriedade distributiva? Qual destes monómios tem maior grau? Justifique que o grau de $A(x) \times B(x)$ é igual à soma dos graus de $A(x)$ e de $B(x)$.
4.5	1. Considere os polinómios $A(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e $B(x) = x - 1$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Verifique que os polinómios obtidos aplicando a regra de Ruffini a estes polinómios são de facto o quociente e o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$. 2. *Considere os polinómios $B(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} +_{\dots} + b_1 x^1 + b_0$ e $A(x) = x - a$, onde $m \in \mathbb{N}$, $b_0, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Verifique que os polinómios obtidos aplicando a regra de Ruffini a estes polinómios são de facto o quociente e o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$.
4.11	1. Considere o polinómio $A(x) = x^6 - x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 13x^2 + 13x - 6$. Sabendo que o polinómio $A(x)$ admite as raízes $-3, 1$ e 2, eventualmente com diferentes ordens de multiplicidade, determine o polinómio $B(x)$ sem zeros tal que $A(x) = (x-1)^m (x-2)^n (x+3)^p B(x)$, identificando os valores de m, n e p. 2. *Considere que os números reais x_1, x_2 e x_3, distintos entre si, são as únicas raízes de um polinómio de sétimo grau $A(x)$. Sabe-se ainda que x_1 tem multiplicidade 2 e x_2 tem multiplicidade 3. 2.1. Justifique que x_3 não pode ter multiplicidade superior a 2. 2.2. Indique, justificando, qual a multiplicidade de x_3. 3. Seja $P(x)$ um polinómio de grau $n \in \mathbb{N}$. 3.1 **Prove que $P(x)$ admite uma fatorização da forma $P(x) = (x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \dots (x - x_k)^{n_k} Q(x)$, onde $x_i \in \mathbb{R}$, $n_i \in \mathbb{N}$, $(1 \leq i \leq k)$ e $Q(x)$ não tem raízes. 3.2 Justifique que $n_1 + n_2 + \cdots + n_k \leq n$ e que os números x_i, $1 \leq i \leq k$, são as únicas raízes de P.
5.1	1. Utilizando o algoritmo da divisão inteira de polinómios, determine o quociente e o resto da divisão de $A(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 3$ por $B(x) = x^2 + 2$.

2. Utilizando a regra de Ruffini determine o quociente e o resto da divisão de $A(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3$ por cada um dos seguintes polinómos:
   2.1. $B(x) = x + 2$.
   2.2. $B(x) = x$.
   2.3. $B(x) = 3x - 6$.
   2.4. $B(x) = 2x + 1$.
   2.5. **$B(x) = x^2 - 1$.

3. Determine, utilizando o teorema do resto, o resto da divisão de $A(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 3$ por $B(x) = x + 1$.

4. Determine o polinómio $P(x)$ de quarto grau que admite os zeros simples $-4, -1, \frac{1}{2}$ e 3 e cujo resto da divisão por $x + 2$ é igual a 1.

5. Sabe-se que $P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 25x - 14$ é divisível por $2x - 7$. Determine as raízes de $P(x)$ e escreva-o na forma $P(x) = a(x - b)(x - c)(x - d)$.

6. *Determine para que valores reais de a e b o polinómio $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 1$ é divisível por $x - 1$ e o resto da divisão por $x + 1$ é igual a -10.

7. *Prove que o polinómio $x^n + a^n$ é divisível por $x + a$ se n for ímpar.

8. Considere o polinómio $P(x) = x^{2n+1} - x^{2n} - x + 1$, onde $n \in \mathbb{N}$.
   8.1. *Prove que para todo $a > 0$ se tem $P(a) + P(-a) = 2 - 2a^{2n}$.
   8.2. **Prove que $P(x) = (x - 1)(x^n - 1)(x^n + 1)$, justifique que -1 e 1 são zeros de P e calcule o grau de multiplicidade de 1.

5.2
5.3

1. Considere os polinómios $A(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ e $B(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$
   1.1. Verifique que 1 é uma das raízes de $A(x)$.
   1.2. Determine as outras raízes de $A(x)$ e fatorize este polinómio.
   1.3. Resolva a inequação $A(x) < 0$.
   1.4. Fatorize o polinómio $B(x)$ e resolva a inequação $B(x) > 0$.

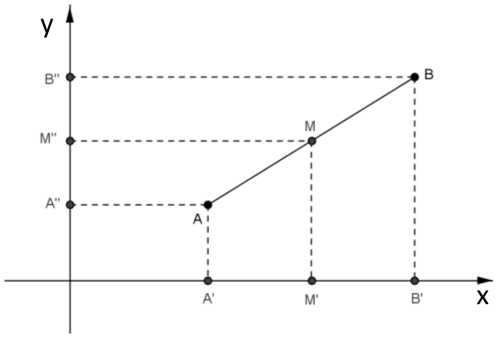
2. Considere a equação $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.
   2.1. Tendo em conta que $x^4 = (x^2)^2$, substitua na equação x^2 por y e resolva a equação do segundo grau assim obtida.
   2.2. Determine os valores de x que satisfazem a equação dada.

3. *Resolva a equação «biquadrada» $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$.

4. *Sabe-se que $B(x)$ é um polinómio de terceiro grau tal que $\forall x \in \mathbb{R},\ B(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]2, +\infty[$. Resolva cada uma das seguintes condições:
   4.1. $(3x - 7)B(x) \leq 0$;
   4.2. $(-x^2 - 1)B(x) > 0$;
   4.3. $(x^2 - 5x + 6)B(x) < 0$.

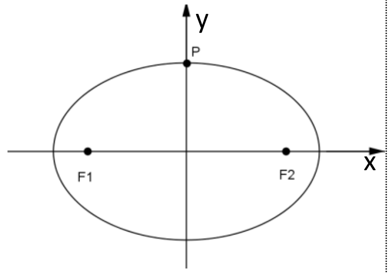
Descritor	Texto de Apoio
1.2	1. Considere, num referencial ortonormado do plano, os pontos $A(3,-2)$ e $B(-1{,}1)$. 1.1. Represente os pontos A e B e trace as retas paralelas aos eixos coordenados que contêm A ou B, por forma a construir um retângulo do qual $[AB]$ é uma diagonal. 1.2. Determine a distância entre os pontos A e B utilizando o teorema de Pitágoras. 2. *Considere, num plano munido de um referencial ortonormado, os pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$. 2.1. Designe por A_1 e B_1 as projeções ortogonais no eixo das abcissas respetivamente dos pontos A e B. Exprima, em função de a_1 e de b_1, a medida d_1 da distância entre A_1 e B_1. 2.2. Designe por A_2 e B_2 as projeções ortogonais no eixo das ordenadas, respetivamente, dos pontos A e B. Exprima, em função de a_2 e de b_2, a medida d_2 da distância entre A_2 e B_2. 2.3. Exprima a medida da distância entre A e B em função de d_1 e de d_2 e justifique que é igual a $\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$. 3. **Demonstre, dado um plano munido de um referencial ortonormado e pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ pertencentes a esse plano, que a medida da distância entre A e B, $d(A,B)$, é igual a $\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$, tomando por unidade de comprimento a unidade comum dos eixos coordenados.
1.3	1. Considere, na reta numérica, os pontos A, B e M de abcissas, respetivamente, a, b e $\frac{a+b}{2}$. Prove que $\overline{AM} = \overline{MB}$. 2. *Considere, na reta numérica, os pontos A e B de abcissas, respetivamente, a e b. 2.1. Indique, utilizando a e b, uma expressão da medida da distância entre A e B. 2.2. Seja M o ponto médio de $[AB]$. Apresente, utilizando a e b, uma expressão da medida da distância entre A e M. 2.3. Apresente, utilizando a e b, uma expressão para a abcissa de M sem recorrer ao símbolo de valor absoluto. **Nota:** Este segundo exercício foi identificado como tendo um nível de desempenho superior uma vez que não pressupõe, contrariamente ao que é indicado no descritor, o conhecimento prévio da expressão da abcissa do ponto médio de $[AB]$.
1.4	1. Considere, num plano munido de um referencial cartesiano, os pontos de coordenadas $A(1{,}1)$, $B(4{,}6)$ e $C(4{,}1)$. 1.1 Determine as coordenadas do ponto médio D do segmento de reta $[AC]$. 1.2 Considere a reta paralela ao eixo das ordenadas que passa pelo ponto D e a respetiva interseção M com o segmento de reta $[AB]$. Justifique, utilizando o Teorema de Tales, que M é o ponto médio de $[AB]$ e indique a abcissa de M. 1.3 Calcule a ordenada de M.

2. *Considere um referencial ortonormado em dado plano e três pontos A, B e M desse plano, bem como as respetivas projeções ortogonais, respetivamente A', B', M', no eixo dos xx, e A'', B'', M'', no eixo dos yy.
   2.1. Sabe-se que M é o ponto médio de $[AB]$. Prove que os pontos M' e M'' são, respetivamente, os pontos médios dos segmentos de reta $[A'B']$ e $[A''B'']$.
   2.2. Sabendo que $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$, determine as coordenadas de M.



1.9

1. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado e dado $c > 0$, a elipse de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ e de eixo maior $2a$ $(a > c > 0)$. Seja P o ponto de interseção da elipse com o semi-eixo positivo das ordenadas.
   1.1. Justifique que $\overline{F_1P} = \overline{F_2P}$.
   1.2. Indique, justificando, a medida comum de $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$.
   1.3. Conclua que $\overline{OP} = \sqrt{a^2 - c^2}$.



2. *Dada uma elipse de focos A e B e de eixo maior $2a$ em determinado plano, resolva as seguintes questões:
   2.1 Prove que a mediatriz de $[AB]$ interseta a elipse exatamente em dois pontos C e D situados em semiplanos opostos de fronteira AB e interseta a reta AB no ponto médio do segmento $[CD]$, que coincide com o centro O da elipse.
   2.2 Prove que tomando $b = \frac{1}{2}\,\overline{CD}$ se tem $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, onde $c = \frac{\overline{AB}}{2}$.

1.10

1. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado, os pontos $F_1(-4,0)$ e $F_2(4,0)$.
   1.1. Qual o valor que deve tomar o número real d por forma que um ponto $P(x, y)$ pertença à elipse de focos F_1 e F_2 e semieixo maior a, $(a > 4)$ quando e apenas quando $d = \sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$?
   1.2. *Considere que $a = 5$.
   Mostre que um ponto $P(x, y)$ pertence à elipse referida na alínea anterior quando e apenas quando $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.
   1.3. Tendo em conta a alínea 1.2, calcule as coordenadas dos pontos A_1 e A_2 em que a elipse interseta o eixo das abcissas, as coordenadas dos pontos B_1 e B_2 em que a elipse interseta o eixo das ordenadas e o eixo menor $b = \overline{B_1B_2}$.
   1.4. Verifique, neste exemplo, que $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, onde $c = \frac{1}{2}\overline{F_1F_2}$ é a semidistância focal.

2. **Considere num plano munido de um referencial ortonormado, dois números reais a e c $(a > c > 0)$ e os pontos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.
   2.1. Justifique que a equação $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ é a equação da elipse de focos F_1 e F_2 e de semieixo maior a.
   2.2. Mostre que a equação da alínea anterior é equivalente a $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$.
   2.3. Escreva a equação da alínea anterior utilizando no primeiro membro apenas as constantes a e b, onde b representa o semieixo menor da elipse.

1.11 1.12	**Informação Complementar para o professor** O tratamento adequado dos semiplanos em Geometria analítica plana pressupõe, como é evidente, que se dispõe de uma definição de semiplano. Essa definição pode pressupor que está fixado um dado plano, ainda que esta hipótese seja dispensável no caso da Geometria a mais de duas dimensões. Embora nestes descritores apenas se pretenda um reconhecimento a nível elementar, recorrendo à intuição geométrica, descreve-se em seguida como se poderiam justificar as propriedades neles expressas com base numa possível definição de semiplano. Dada uma reta r e um ponto P fora de r, podemos definir o «semiplano aberto de fronteira r determinado pelo ponto P» como *o conjunto constituído por P e pelos pontos X do plano π que contém a reta r e o ponto P, tais que o segmento de reta $[PX]$ não interseta r* e o «semiplano fechado de fronteira r determinado pelo ponto P» como *a união com r do acima referido semiplano aberto*. Estas definições introduzem um critério simples para verificar se um dado ponto de um plano π está ou não em certo semiplano (aberto ou fechado) de π de fronteira r e determinado por um ponto de π não pertencente a r. Note-se, no entanto, que carece de demonstração a afirmação segundo a qual um semiplano (aberto ou fechado) de fronteira r fica determinado por qualquer um dos seus pontos, o que, como veremos, resulta de se poder encarar os semiplanos abertos com dada fronteira como classes de equivalência; uma vez estabelecido esse facto, torna-se fácil concluir, por processos análogos, que existem exatamente dois semiplanos (abertos ou fechados) num plano π com uma dada fronteira r. Vejamos então, mais precisamente, como da definição dada se pode deduzir que existem exatamente dois semiplanos abertos de fronteira r no plano π, que esse semiplanos são disjuntos e que a respetiva união coincide com $\pi\backslash r$; para o efeito podemos começar por verificar que é de equivalência a relação binária $\mathcal{R}$ definida para pontos P, Q de $\pi\backslash r$ por $P\mathcal{R}Q$ se P e Q coincidirem ou se o segmento de reta $[PQ]$ não intersetar r. A reflexividade e simetria são imediatas e a transitividade, no caso em que os pontos P, Q e R não são colineares, único não trivial, pode ser considerada uma das formas do axioma de Pasch, pois o que se pretende provar é que, se P, Q e R são pontos de π não colineares que não pertencem a r e $[PQ]$ e $[QR]$ não intersetam r, então $[PR]$ também não interseta r; ora o contra-recíproco desta propriedade é equivalente à afirmação de que se a reta r interseta o lado $[PR]$ do triângulo $[PQR]$ e não interseta nenhum dos respetivos vértices, então tem de intersetar um dos outros dois lados do triângulo, o que é uma das formas mais usuais do axioma de Pasch. Este axioma, ou outro semelhante, é indispensável a uma formalização adequada da Geometria elementar (euclidiana ou não), o que só foi detetado por Pasch em finais do século XIX, embora fosse implicitamente admitido até então em diversas demonstrações de Geometria euclidiana ou mesmo não euclidiana, sem que tivesse sido antes observada a impossibilidade de ser deduzido dos restantes postulados. Sendo $\mathcal{R}$ relação de equivalência é agora fácil concluir que o semiplano aberto de π de fronteira r determinado por um ponto P de $\pi\backslash r$ não é mais do que a classe de equivalência de P para a relação $\mathcal{R}$; em particular, um dado semiplano de fronteira r fica determinado por

qualquer dos seus pontos, pelo que podemos designá-lo, sem ambiguidade, por «semiplano (aberto ou fechado) do plano π de fronteira r contendo o ponto P». A forma como $\mathcal{R}$ está definida permite também concluir que existem no máximo duas classes de equivalência, pois fixado um ponto P em $\pi\backslash r$, dados dois pontos Q e R de $\pi\backslash r$ que não são equivalentes a P é fácil concluir que são equivalentes entre si, pelo que no máximo existirá mais uma classe de equivalência para a relação $\mathcal{R}$, contendo todos os eventuais pontos não equivalentes a P. Provemos então, nesta situação, que $Q\ \mathcal{R}\ R$, ou seja, que r não interseta $[QR]$; por definição de $\mathcal{R}$, $[PQ]$ e $[PR]$ intersetam ambas r, já que, por hipótese, Q e R não são equivalentes a P; a única situação que merece ser analisada é aquela em que P, Q e R não são colineares, já que a outra é trivial (um ponto não pode estar simultaneamente estritamente situado entre quaisquer dois de três pontos colineares, pelo que r não pode também intersetar $[QR]$). Nesse caso r interseta dois dos lados do triângulo $[PQR]$, não intersetando os respetivos vértices, pelo que não pode intersetar o terceiro (propriedade cuja demonstração também envolve o axioma de Pasch), o que significa que não interseta $[QR]$, ou seja $Q\ \mathcal{R}\ R$, como pretendíamos provar.

A existência de pelo menos dois pontos não $\mathcal{R}$-equivalentes e portanto exatamente de dois semiplanos abertos de fronteira r resulta simplesmente do facto de que dado um ponto P de $\pi\backslash r$ (que existe sempre, já que o plano não se reduz a uma reta) e um ponto A de r existe sempre um ponto Q distinto de A tal que A fica situado no segmento de reta $[PQ]$ ("o segmento $[PA]$ pode prolongar-se em qualquer dos sentidos"). Esta propriedade resulta de qualquer axiomática da Geometria euclidiana e garante portanto a existência de um ponto Q de $\pi\backslash r$ não $\mathcal{R}$-equivalente a P, ou seja, fora do semiplano de fronteira r contendo P.

Como acima foi referido, o reconhecimento que é pedido neste descritor e no seguinte pode ser feito, a nível elementar, apenas recorrendo à intuição geométrica, mas, correspondendo a um nível de desempenho elevado, poderia ser levado a cabo com base na definição de semiplano acima indicada. Para o efeito há que dispor também de um critério claro para identificar analiticamente os pontos de um segmento de reta $[PQ]$, dados $P(a_1, a_2)$, $Q(b_1, b_2)$ distintos num plano munido de um referencial ortonormado. Sendo já conhecida a equação da reta PQ, resta identificar o domínio de variação para as abcissas (ou para as ordenadas, no caso de uma reta vertical) que corresponde aos pontos do segmento $[PQ]$. Ora não é difícil concluir que as abcissas dos pontos de $[PQ]$ variam entre a_1 e b_1 e as ordenadas entre a_2 e b_2; para o efeito basta notar que as retas paralelas aos eixos que intersetam o segmento $[PQ]$ intersetam os eixos a que não são paralelas em pontos dos segmentos de extremos respetivamente de abcissas (no eixo respetivo) a_1, b_1 e a_2, b_2. Este facto resulta da seguinte propriedade geométrica:

«dadas duas retas paralelas e dois segmentos de reta, cada um deles com uma extremidade em cada uma das duas retas, então se uma terceira reta é paralela às outras duas e interseta um dos segmentos de reta tem de intersetar também o outro»;

a demonstração deste resultado pode ser obtida muito simplesmente aplicando uma ou duas vezes o axioma de Pasch (consoante os segmentos partilhem ou não uma das extremidades).

Dos resultados expressos neste descritor e no seguinte, ou seja, da identificação analítica de dois conjuntos de pontos que constituindo semiplanos de fronteira dada por uma reta da qual se conhece a equação e determinados por qualquer dos respetivos pontos, resulta imediatamente que, fixada uma reta num dado plano, existem exatamente dois semiplanos abertos nesse plano com fronteira coincidente com essa reta, para além de que são obviamente conjuntos disjuntos e com união igual ao complementar da reta no plano. Ou seja, o que acima foi justificado com argumentos geométricos acaba por deduzir-se da caracterização analítica referida destes descritores. É claro que o axioma de Pasch, acima utilizado, acaba por estar explícita ou implicitamente na base da introdução rigorosa das técnicas de Geometria analítica de que aqui se tira partido.

Apresentam-se em seguida duas atividades em que se exploram analiticamente as propriedades geométricas, características dos semiplanos, acima descritas. Embora o exemplo esteja redigido para conduzir à justificação da inequação cartesiana dos semiplanos, de acordo com a definição geométrica acima apresentada, podem utilizar-se apenas algumas alíneas para ilustrar uma ou outra propriedade que se pretenda focar, de modo mais informal.

I

Seja r a reta de equação $y = 2x + 1$ num dado plano munido de um referencial ortonormado. Considere os conjuntos

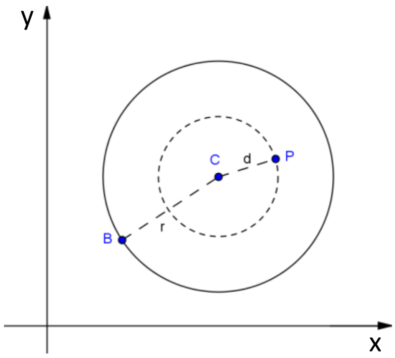
$$A = \{X(x,y) : y > 2x + 1\} \text{ e } B = \{X(x,y): y < 2x + 1\}.$$

a. *Seja $P(1,7)$ e $Q(2,6)$. Verifique que $P \in A$ e que $Q \in A$. Calcule as coordenadas do ponto de interseção das retas r e PQ e conclua que o segmento de reta $[PQ]$ não interseta r.*
b. *Seja $R(3,1)$. Verifique que $R \in B$ e que o segmento de reta $[PR]$ interseta r.*
c. *Considere dois pontos $P_1(a, y_1)$ e $P_2(a, y_2)$; mostre que se pertencerem ambos a A ou ambos a B então o segmento de reta $[P_1P_2]$ não interseta r mas que se um deles pertencer a A e o outro a B então o segmento de reta $[P_1P_2]$ interseta r e determine as coordenadas do ponto de interseção.*
d. *Considere dois pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ tais que $x_1 \neq x_2$ e seja $P(x, y)$ um ponto do segmento de reta $[P_1P_2]$:*
   - *d1. Utilizando a equação da reta P_1P_2 ou, diretamente, o teorema de Tales, mostre que $x = x_1 + s(x_2 - x_1)$ e $y = y_1 + s(y_2 - y_1)$ para determinado $s \in [0,1]$.*
   - *d2. Deduza da alínea anterior que $x = (1-t)x_1 + tx_2$ e $y = (1-t)y_1 + ty_2$ para determinado $t \in [0,1]$ e conclua que se P_1 e P_2 pertencerem ambos a A (respetivamente a B) então $P \in A$ (respetivamente $P \in B$) e portanto o segmento de reta $[P_1P_2]$ está contido em A (respetivamente em B), logo não interseta r.*
   - *d3. Utilizando 1.4.1. conclua que se $P_1 \in A$ e $P_2 \in B$ então o segmento de reta $[P_1P_2]$ interseta r, determinando o valor de s correspondente ao ponto de interseção.*
e. *Conclua das alíneas anteriores que A e B são exatamente os semiplanos abertos de fronteira r do plano dado.*

II

Seja $c \in \mathbb{R}$ e r a reta de equação $x = c$. Considere os conjuntos $A = \{X(x,y): x > c\}$ e $B = \{X(x,y): x < c\}$.

a. *Dados dois pontos P e Q de A (ou de B), justifique que o segmento de reta $[PQ]$ não interseta a reta r.*
b. *Dados dois pontos $R \in A$ e $S \in B$, mostre que o segmento de reta $[RS]$ interseta r.*
c. *Conclua que A e B são os dois semiplanos definidos pela reta r.*

1.13	1. Considere um plano munido de um referencial ortonormado e uma circunferência de raio $r > 0$ e de centro $C(a,b)$. Considere ainda um ponto $P(x,y)$ do plano. 1.1. Exprima a medida da distância $d = \overline{CP}$ em função de x, y, a e b. 1.2. Justifique que P pertence à parte interna da circunferência quando e apenas quando $(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$. 1.3. Justifique que o círculo de centro $C(a,b)$ e raio r se define pela condição $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$. 
2.1	1. Represente geometricamente cada um dos conjuntos de pontos do plano determinados pelas seguintes condições. 1.1. $y > 2x$; 1.2. $y \leq -2$; 1.3. $2x - y < 4$; 1.4. $3 - x \geq 0$; 1.5. $y \leq -2 \wedge x > 1$; 1.6. $y > 2x \vee y < 3$; 1.7. $2x - y < 4 \wedge x > -4 \wedge 2 - y > 0$; 1.8. * $xy < 0$; 1.9. * $x^2 - y^2 = 0$; 1.10. ** $x^2 - 4y^2 > 0$. 2. Identifique as figuras geométricas planas definidas pelas seguintes condições: 2.1. $(x+2)^2 + y^2 = 2$ 2.2. $(x-1)^2 + (y+3)^2 \leq 1$ 2.3. * $x^2 + y^2 + 5x + 8y = 2{,}75$ 2.4. * $4x^2 + 4y^2 + 12x + 8y = 11$ 2.5. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 2.6. * $5x^2 + 16y^2 = 80$ 2.7. * $9\,x^2 + 4\,y^2 = 36$ 2.8. $1 \leq (x-3)^2 + (y+1)^2 \leq 4$ 2.9. $(x+2)^2 + y^2 > 1 \wedge (x+3)^2 + y^2 < 4$ 2.10. $(x+2)^2 + y^2 < 4 \ \wedge \lvert x \rvert < 3$ 3. Identifique e defina analiticamente, utilizando equações e inequações cartesianas, os seguintes conjuntos de pontos do plano: 3.1. Pontos que distam igualmente dos pontos $A(-3{,}5)$ e $B(1{,}1)$. 3.2. Pontos cuja distância ao ponto $C(2,-3)$ não excede 4 unidades. 3.3. *Pontos cuja medida da distância ao ponto $D(-5{,}4)$ é o dobro da medida da distância ao ponto $E(1{,}4)$. 3.4. Pontos cuja soma das medidas das distâncias aos pontos $A(-2{,}0)$ e $B(2{,}0)$ é igual a 7. 3.5. Pontos que distam duas unidades da reta de equação $y = -1$.

3.6. *Pontos que distam igualmente da origem do referencial e do ponto $G(-3,-3)$ e que pertencem à circunferência centrada em G e tangente aos eixos coordenados.

3.7. Pontos médios dos segmentos de reta cujos extremos são:

3.7.1. o ponto $O(0,0)$ e cada um dos pontos da circunferência centrada em O e de raio 2.

3.7.2 **o ponto $H(1,3)$ e cada um dos pontos da reta $x+y=5$.

4. *Num referencial ortonormado do plano, os pontos A, B e C são vértices de um triângulo equilátero. Sabendo que $A(-5,1)$ e $B(-3,1+2\sqrt{3})$, determine a ordenada de C sabendo que a abcissa é -1.

5. Sabe-se que o ponto $P(3,y)$ é equidistante dos pontos $A(-3,1)$ e $B(1,2)$. Determine o valor de y.

3.1
3.2
3.3
3.4

Informação Complementar para o professor

Diversas propriedades da relação de equipolência entre segmentos orientados de um plano foram introduzidas no 8.º ano, mas não foi dada uma definição formal de relação binária nem de vetor, tendo-se apenas indicado que um vetor, objeto indefinido, fica associado ao conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a um dado segmento orientado (ou seja, com o mesmo comprimento, direção e sentido que esse segmento orientado) e que se consideravam distintos vetores associados a segmentos orientados não equipolentes (*cf.* Programa de Matemática do Ensino Básico, homologado em 17/7/2013, e Metas Curriculares do Ensino Básico de Matemática, NO6-3 e GM8-3). Como foi referido no Caderno de Apoio do 3.º ciclo é possível interpretar a noção de vetor como classe de equivalência para a relação de equipolência, ficando assim provada a possibilidade de definir um objeto matemático com as propriedades que se requeriam aos vetores na introdução feita no 8.º ano. Para uma revisão destes conceitos, aplicações, propriedades, e respetivas justificações geométricas podem consultar-se as referidas Metas curriculares e os Cadernos de Apoio do 2.º ciclo, NO6-3, e do 3.º ciclo, GM8-3.5 a 3.18 e o Texto Complementar de Geometria do 3.º ciclo, 8.º ano, 3.1 a 3.16. Em particular importa ter presente o critério de equipolência de segmentos orientados, de acordo com o qual dois segmentos orientados não nulos $[A,B]$ e $[C,D]$, tais que $[AB]$ e $[CD]$ não têm a mesma reta suporte, são equipolentes se e somente se $[ABDC]$ for um paralelogramo. No caso de terem a mesma reta suporte, podemos estudar a propriedade de equipolência utilizando uma mesma reta numérica que os contenha e a equipolência traduz-se na igualdade da diferença entre as abcissas da extremidade e da origem dos segmentos orientados.

Por outro lado, também se associou um vetor a uma translação, entendida como aplicação de um plano em si próprio. Entendendo um vetor como classe de equivalência é possível comparar os dois objetos, ou seja, um vetor $\vec{v}$ e a translação $T_{\vec{v}}$ por ele definida. Das definições conclui-se que o gráfico de $T_{\vec{v}}$ não é mais do que o conjunto dos pares ordenados (A,B) tais que $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$, ou seja, tais que o segmento orientado $[A,B]$ está na classe de equivalência que constitui o vetor $\vec{v}$. Note-se que no Ensino Básico também não foi dada uma definição formal de segmento orientado, noção introduzida no 6.º ano, dizendo-se apenas que o segmento orientado $[A,B]$ fica definido quando no segmento de reta $[AB]$ se fixa um dos extremos para origem e o outro para extremidade, ou seja, no fundo, quando se ordenam os extremos; essa noção foi alargada no 8.º ano ao caso em que A e B coincidem. Como é fácil perceber, uma possível definição formal de segmento orientado pode consistir muito simplesmente em identificar $[A, B]$ com o par ordenado (A, B), uma vez que os pontos A e B determinam o segmento de reta que os tem por extremos, e, reciprocamente, um segmento de reta determina os respetivos extremos, e podemos fixar a origem e a extremidade escolhendo o primeiro elemento do par para origem e o segundo para extremidade. Com esta definição conclui-se então que $\vec{v}$ e o gráfico de $T_{\vec{v}}$ são exatamente o mesmo objeto matemático; se identificarmos a translação com o respetivo gráfico, o que é natural para uma aplicação com domínio e conjunto de chegada coincidentes com o plano todo, podemos então também dizer mais simplesmente que os vetores são exatamente as translações.

No 8.º ano (GM8-3.10 a 3.17) introduziu-se a soma de vetores num plano e as respetivas propriedades básicas, geométricas e algébricas, que é conveniente agora recordar. Começou-se por definir o que é a soma $P + \vec{v}$ de um ponto P com um vetor $\vec{v}$: trata-se muito simplesmente do único ponto Q do plano tal que $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$. No caso em que $\vec{v} \neq \vec{0}$, este ponto Q pode ser construído a partir do ponto P e de qualquer segmento orientado $[A, B]$ representante de $\vec{v}$ (ou seja, tal que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$), utilizando, por exemplo, o critério do paralelogramo para a equipolência de segmentos, ou seja, construindo o vértice Q desconhecido do paralelogramo $[ABQP]$; note-se que se pode sempre supor, sem perda de generalidade, que o ponto P não está na reta AB, construindo em primeiro lugar, se necessário, pelo mesmo processo, um segmento orientado equipolente a $[A, B]$ com outra reta suporte.

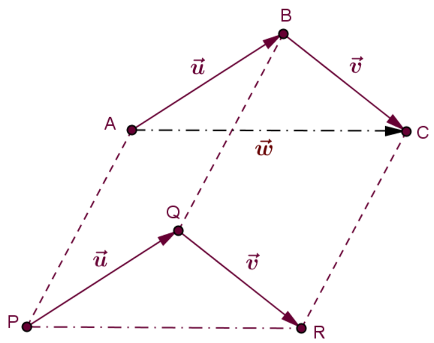
Definiu-se em seguida a translação $T_{\vec{v}}$ como a aplicação do plano em si próprio que associa a cada ponto P do plano o ponto $T_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v}$.
Finalmente, definiu-se a soma de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como o vetor $\vec{w}$ tal que $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{w}}$, ou seja, tal que $(P + \vec{u}) + \vec{v} = P + \vec{w}$, para qualquer ponto P do plano, mostrando-se que $\vec{w}$ pode ser obtido a partir de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ através da "regra do triângulo" ou, no caso de se tratar de vetores não colineares, através da regra do paralelogramo; em particular tem-se, para quaisquer pontos A, B e C do plano,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC},$$

sendo esta igualdade por vezes referida como «identidade de Chasles».

Como tem sido referido, a propósito de outros conteúdos, para uma revisão destes conceitos e propriedades pode consultar-se, para além dos acima referidos descritores das Metas curriculares do 8.º ano, o Caderno de Apoio do 3º ciclo, GM8-3.10 a 3.18 e o Texto Complementar de Geometria, 8.º ano, 3.10 a 3.16. Limitemo-nos aqui a recordar como fica estabelecida a coerência da definição de soma de vetores, através da verificação de que a composição de translações é uma translação. Da própria definição de translação e de composição de aplicações resulta que, se $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$ for uma translação, terá de ser determinada por um vetor $\vec{w}$ que pode ser obtido de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pela regra do triângulo; com efeito, fixado um ponto A do plano, e sendo $C = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}(A) = T_{\vec{v}}\big(T_{\vec{u}}(A)\big) = (A + \vec{u}) + \vec{v}$, se $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$ for uma translação de certo vetor $\vec{w}$, terá de ser $C = A + \vec{w}$, ou seja, $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$.

Resta então apenas provar que, para qualquer ponto P do plano, $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}(P) = P + \vec{w}$, o que pode ser justificado utilizando a construção geométrica ao lado (ilustra-se o caso em que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares e o ponto P não está na reta AB, onde $B = A + \vec{u}$, nem na reta AC, podendo os restantes casos ser tratados de modo análogo). Pelo critério do paralelogramo para a equipolência de segmentos orientados sabemos que $[ABQP]$ e $[BCRQ]$ são paralelogramos e pretendemos provar que $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{AC} = \vec{w}$, ou seja, que $[ACRP]$ também é um paralelogramo.



Ora, o facto de $[ABQP]$ e $[BCRQ]$ serem paralelogramos tem também como consequência que $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{QB}$ e $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{RC}$, pelo que $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{RC}$ e portanto $[PACR]$ é um paralelogramo, tratando-se do mesmo quadrilátero que $[ACRP]$, que é, portanto, de facto, um paralelogramo e assim, como pretendíamos provar, $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{AC} = \vec{w}$.

Outro conceito básico introduzido no 8.º ano (GM8-3.9) foi o de vetor simétrico de um dado vetor; o simétrico $-\vec{v}$ de um vetor $\vec{v}$ é o vetor que tem o mesmo comprimento e direção que $\vec{v}$ mas sentido oposto (em particular, para quaisquer pontos A e B do plano, $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$) e, para além das propriedades comutativa e associativa da adição de vetores, também se verificou que $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$, consequência imediata de $\overrightarrow{AB} + \left(-\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$, para quaisquer pontos A e B do plano.

No presente objetivo geral introduzem-se novas operações com vetores, nomeadamente o produto de um vetor por um escalar e a subtração de vetores. Na definição de produto de um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ não nulo por um escalar $\lambda \neq 0$, para além de se definir sem qualquer ambiguidade a direção e sentido do vetor produto (direção igual e sentido igual ou oposto ao do vetor $\vec{v}$, consoante λ é positivo ou negativo), a respetiva norma é dada, à partida, para uma unidade de medida de comprimento pré-fixada. No entanto, facilmente se conclui que o vetor produto não depende da unidade de comprimento escolhida, pois a definição é dada de tal modo que $|\lambda|$ é igual ao quociente entre a norma do vetor produto e a norma do vetor $\vec{v}$; ora as normas são, por definição, medidas de comprimento de segmentos de reta e como o quociente de duas medidas de comprimento não depende da unidade de medida comum (*cf.* GM7-7.2), se um dado vetor produto tiver norma com a propriedade enunciada na definição, para uma dada unidade de medida (equivalente ao quociente pela norma de $\vec{v}$ ser igual a $|\lambda|$), o mesmo se passará para qualquer unidade de medida. Por outras palavras, os "vetores produto" obtidos considerando-se, na respetiva definição, diferentes unidades de comprimento, e que têm à partida direção e sentido bem determinados, têm todos também o mesmo comprimento, ou seja, trata-se sempre do mesmo vetor.

Outro modo de justificar a coerência da definição de produto $\lambda\vec{v} = \lambda\overrightarrow{AB}$ de um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ não nulo por um escalar λ, é começar por notar que o vetor produto pode ser "materializado" (através de um dos seus representantes) na reta numérica AB, tomando $\dot{A}B$ para semirreta dos números não negativos e $\overline{AB}$ para unidade de comprimento; sendo P o ponto dessa reta numérica de abcissa λ, é imediato, a partir da definição de $\lambda\vec{v}$ (para esta unidade de medida de comprimento) que este vetor deve identificar-se com $\overrightarrow{AP}$. Fixada qualquer outra unidade de comprimento e sendo m a medida do comprimento do segmento $[AB]$ nessa nova unidade, uma vez que o quociente das medidas de comprimento de dois dados segmentos é independente da unidade de medida comum (*cf.* mais uma vez GM7-7.2) sabemos que o comprimento de $[AP]$ na nova unidade será igual a $|\lambda|m$, ou seja, a norma de $\lambda\vec{v}$ será dada por $|\lambda|\|\vec{v}\|$, qualquer que seja a unidade de comprimento fixada para o cálculo das normas. Assim, o vetor $\lambda\vec{v}$ não depende, de facto, da escolha da unidade de comprimento.

A definição de produto de um vetor por um escalar, no caso de se tratar do escalar -1, conduz, obviamente, ao simétrico do vetor, já que, por definição de produto por um escalar, é o vetor com a mesma norma e direção mas sentido contrário ao vetor dado, o que é também a definição de vetor simétrico.

A propriedade expressa no descritor 3.3 pode ser facilmente justificada. Por um lado, é imediato, a partir da definição do produto de um vetor por um escalar, que $\lambda\vec{v}$ é colinear a $\vec{v}$. Reciprocamente, considerando um vetor $\vec{u}$ colinear a $\vec{v}$, se existir um número real λ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, temos $\|\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{v}\| \Leftrightarrow |\lambda| = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}$, pelo que, considerando o único número real λ de módulo $\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}$ (valor independente da unidade de comprimento fixada para o cálculo das normas, como acima ficou estabelecido) que é positivo se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tiverem o mesmo sentido, negativo se tiverem sentidos opostos e nulo se $\vec{u}$ for nulo, tem-se, por definição de produto de vetor por escalar, $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ e este λ é o único escalar para o qual tem lugar esta igualdade, já que, quando não é nulo, tem módulo e sinal bem determinados.

O escalar λ pode ainda ser materializado utilizando segmentos orientados com extremos numa mesma reta numérica e origens coincidentes com a origem dessa reta numérica e que representem os dois vetores colineares dados. Com efeito, Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem colineares ($\vec{v} \neq 0$), fixemos um ponto arbitrário O para origem da reta numérica e o ponto $A = O + \vec{v}$, para ponto de abcissa 1; então, sendo $P = O + \vec{u}$, P é um ponto da reta OA, já que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção (e portanto as retas OA e OP, não podendo ser retas paralelas distintas, têm de coincidir). e Então, como atrás se concluiu a propósito da coerência da definição de produto de um vetor por um escalar, sendo λ a abcissa de P, teremos $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

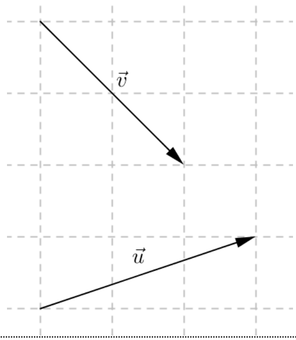
Quanto à subtração, a definição do vetor diferença $\vec{u} - \vec{v}$ de determinados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ reproduz a definição habitual de diferença quando em dado conjunto está definida uma operação de adição comutativa. Dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, é fácil, neste caso, justificar a existência de um e apenas um vetor $\vec{w}$ tal que $\vec{w} + \vec{v} = \vec{u}$, pois, a existir um tal vetor, adicionando $-\vec{v}$ a ambos os membros desta igualdade obtemos:

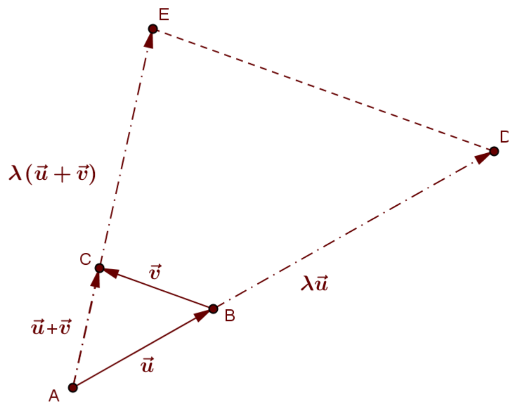
$$\vec{u} + (-\vec{v}) = (\vec{w} + \vec{v}) + (-\vec{v}) = \vec{w} + \left(\vec{v} + (-\vec{v})\right) = \vec{w} + \vec{0} = \vec{w}$$

Ou seja, o único vetor $\vec{w}$ que pode satisfazer à igualdade requerida é o vetor $\vec{u} + (-\vec{v})$ e é fácil verificar que, de facto, a respetiva soma com $\vec{v}$ é igual a $\vec{u}$, utilizando mais uma vez a propriedade associativa da adição de vetores e a propriedade algébrica característica do simétrico. Assim, a diferença de vetores está sempre bem definida e é igual à soma do aditivo com o simétrico do subtrativo, tal como para números reais: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

Para além desta justificação algébrica, poderá aproveitar-se a ocasião para rever os conceitos acima referidos, construindo geometricamente a diferença de vetores em casos concretos ou num caso geral e comparando com a construção da soma de um vetor com o simétrico de outro. Apresentam-se abaixo dois possíveis exercícios com esses objetivos.

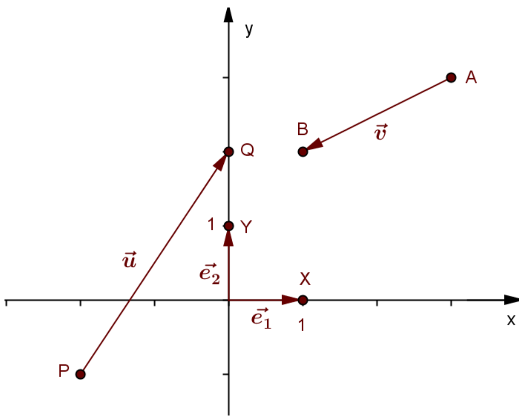
1. Na ilustração figuram dois segmentos orientados que representam vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
   1.1. Reproduza, no caderno, dois segmentos orientados com a mesma origem P que representem, respetivamente, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e, utilizando a regra do paralelogramo ou a regra do triângulo, construa o vetor $\vec{w}$ tal que $\vec{v} + \vec{w} = \vec{u}$.
   1.2. Construa o vetor soma de $\vec{u}$ com $-\vec{v}$ e justifique que é igual a $\vec{w}$.



	2. **Dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, prove, recorrendo a uma construção geométrica e utilizando diretamente as definições de diferença e de soma de vetores, bem como ~~e~~ a de simétrico de um vetor, que $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.
3.5	Esta propriedade é trivial se $\vec{v} = 0$ e pode ser facilmente justificada se $\vec{v} \neq 0$, por exemplo, recorrendo mais uma vez a uma reta numérica de origem O qualquer e o ponto de abcissa 1 coincidente com $O + \vec{v}$. Sabemos então (*cf.* texto de apoio ao descritor 5.2) que $O + \lambda\vec{v}$, $O + \mu\vec{v}$ e $O + (\lambda + \mu)\vec{v}$ são respetivamente os pontos dessa reta numérica de abcissas λ, μ e $\lambda + \mu$ e, efetuando a adição dos vetores $\lambda\vec{v}$ e $\mu\vec{v}$, aplicando a "regra do triângulo" a partir do ponto O, o ponto P que se obtém para extremidade do segmento orientado de origem O que representa o vetor soma é exactamente o que tem abcissa $\lambda + \mu$, pela definição geométrica conhecida de adição de números representados numa reta numérica (*cf.* Metas Curriculares do ensino básico, NO6-3.3 e NO8-2.7).
3.6	1. *Considere dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não colineares e $\lambda > 0$; pretendemos provar que $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$. Para o efeito, fixado um ponto A do plano, seja $B = A + \vec{u}$, $C = B + \vec{v}$ e $D = A + \lambda\vec{u}$, como se ilustra na figura junta.  1.1. Justifique que $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$. 1.2. Sendo $E = A + \lambda(\vec{u} + \vec{v})$ e utilizando o Teorema de Tales, justifique que as retas BC e DE são paralelas. 1.3. Conclua da alínea anterior que $\overline{DE} = \lambda\overline{BC}$. 1.4. Justifique que as semirretas $\dot{B}C$ e $\dot{D}E$ têm o mesmo sentido e conclua, utilizando também as alíneas anteriores, que $\overrightarrow{DE} = \lambda\overrightarrow{BC} = \lambda\vec{v}$. [Sugestão: para comparar os sentidos das referidas semirretas note que, por construção, os pontos C e E estão numa mesma semirreta de origem no ponto A da reta BD.] 1.5. Conclua finalmente que $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$. 2. **Utilizando uma construção idêntica à do exercício anterior, prove que, dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não colineares e $\lambda < 0$, $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$. 3. *Considere vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ colineares, $\vec{u} \neq \vec{0}$; fixando um ponto O do plano, e sendo $A = O + \vec{u}$, $B = O + \vec{v}$, considere uma reta numérica OA de origem O. 3.1. Justifique que B é um ponto da reta OA. 3.2. Demonstre a igualdade $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ traduzindo-a numa equação envolvendo as abcissas dos pontos A e B na referida reta numérica. 4. Considere um vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$ e números reais λ e μ; prove que $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$, comparando as normas, direcções e sentidos dos dois vetores, a partir da definição de produto de um vetor por um escalar.

<table>
<tr>
<td>4.1
4.2</td>
<td>

1. Na figura junta representa-se um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e dois segmentos orientados $[A,B]$ e $[P,Q]$ onde $A(3,3)$, $B(1,2)$, $P(-2,-1)$ e $Q(0,2)$. Considere os pontos $X(1,0)$, $Y(0,1)$ e os vetores (da base canónica do espaço vetorial dos vetores do plano) $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OX}$ e $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OY}$.



   1.1. Sendo $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, determine, utilizando uma construção geométrica, um vetor $\vec{v}_1$ com a direção de $\vec{e}_1$ e um vetor $\vec{v}_2$ com a direção de $\vec{e}_2$ tais que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.
   1.2. Quantas soluções diferentes existem para a alínea anterior? Justifique.
   1.3. Conclua que existe um e somente um par ordenado de números reais (v_1, v_2) tais que $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$, designando este par como «coordenadas do vetor $\vec{v}$», e determine-o.
   1.4. Sendo $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$, resolva uma exercício idêntico ao das alíneas anteriores, substituindo $\vec{v}$ por $\vec{u}$.
   1.5. Sendo $P'(-2,3)$ e $\vec{w} = \overrightarrow{P'P}$, resolva uma exercício idêntico ao das alíneas 1.1 a 1.3, substituindo $\vec{v}$ por $\vec{w}$.
   1.6. Justifique que as coordenadas dos pontos $O + \vec{v}$, $O + \vec{u}$ e $O + \vec{w}$ e têm de ser iguais às coordenadas respectivamente dos vetores $\vec{v}$, $\vec{u}$ e $\vec{w}$ (ditos «vetores posição» dos referidos pontos) e represente estes vetores através de segmentos orientados de origem O.

2. *Considere um plano munido de um referencial ortonormado de origem O, os pontos $X(1,0)$, $Y(0,1)$, os vetores (da base canónica do espaço vetorial dos vetores do plano) $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OX}$ e $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OY}$ e um vetor $\vec{v}$ desse plano.
   2.1. Fixado um ponto A nesse plano e sendo $B = A + \vec{v}$ mostre, utilizando a regra do triângulo, que existe um e somente um ponto C tal que se $\vec{v}$ for igual à soma de um vetor $\vec{v}_1$ com a direção de $\vec{e}_1$ com um vetor $\vec{v}_2$ com a direção de $\vec{e}_2$ então $\vec{v}_1 = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{v}_2 = \overrightarrow{CB}$.
   2.2. Conclua da alínea anterior que existe um e somente um par ordenado de números reais (v_1, v_2) tal que $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$, designando este par por «coordenadas do vetor $\vec{v}$».
   2.3. Justifique que as coordenadas do ponto $P = O + \vec{v}$ são iguais às coordenadas do vetor $\vec{v}$ (dito «vetor posição» do ponto P).

</td>
</tr>
<tr>
<td>4.3
4.4
4.5
4.6</td>
<td>

1. Considere um plano munido de um referencial ortonormado, vetores $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$, um número real λ, os pontos $X(1,0)$, $Y(0,1)$ e os vetores (da base canónica do espaço vetorial dos vetores do plano) $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OX}$ e $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OY}$.
   1.1. Justifique que $\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2$ e que $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$.
   1.2. Utilizando as propriedades algébricas conhecidas das operações com vetores, conclua que o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ (respetivamente $\vec{u} - \vec{v}$) tem coordenadas $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ (respetivamente $(u_1 - v_1, u_2 - v_2)$), que o vetor $\lambda\vec{u}$ tem coordenadas $(\lambda u_1, \lambda u_2)$ e que o vetor simétrico do vetor $\vec{u}(u_1, u_2)$ tem coordenadas $(-u_1, -u_2)$, começando por determinar expressões para estes vetores como combinações lineares dos vetores da base canónica.

</td>
</tr>
</table>

1.3. Suponha que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são nulos e justifique que são colineares se e somente se as respetivas coordendadas forem todas não nulas e os quocientes das coordenadas correspondentes forem iguais, ou as primeiras ou segundas coordenadas de ambos os vetores forem nulas.

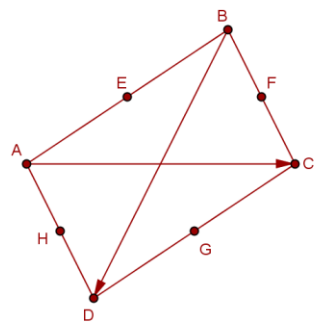
2. Considere um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ desse plano.
   2.1. Justifique que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.
   2.2. Atendendo à alínea anterior e ao que se sabe acerca das coordenadas do vetor posição de um ponto e das coordenadas da diferença de dois vetores, justifique que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.
   2.3. Dado um vetor $\vec{v}(v_1, v_2)$ e utilizando a alínea anterior mostre que o ponto $P = A + \vec{v}$ tem coordenadas $(a_1 + v_1, a_2 + v_2)$, começando por designar essas coordenadas por (x_1, x_2) e notando que, por definição, $\vec{v} = \overrightarrow{AP}$.

3. Fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dado um vetor $\vec{v}(v_1, v_2)$ tomando por unidade de comprimento a unidade comum dos eixos coordenados, mostre que $\|\vec{v}\| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}$, utilizando o Teorema de Pitágoras.

6.1

1. Considere, fixado um plano munido de um referencial cartesiano, os vetores $\vec{u}(-3,4)$ e $\vec{v}(2,5)$. Determine as coordenadas do vetor
   1.1. $\vec{w} = 2\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v}$.
   1.2. $\vec{y}$ tal que $\frac{1}{3}\vec{u} = 2\vec{y} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

2. Na figura está representado um paralelogramo $[ABCD]$, os pontos médios E, F, G e H dos lados $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ e $[DA]$ respetivamente e os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$. Sabe-se, fixado um certo referencial ortonormado, que $H(\frac{3}{2}, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (4,0)$ e $\overrightarrow{BD} = (-2,-4)$.

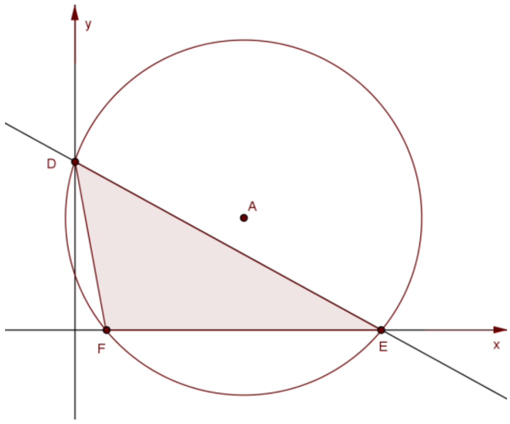
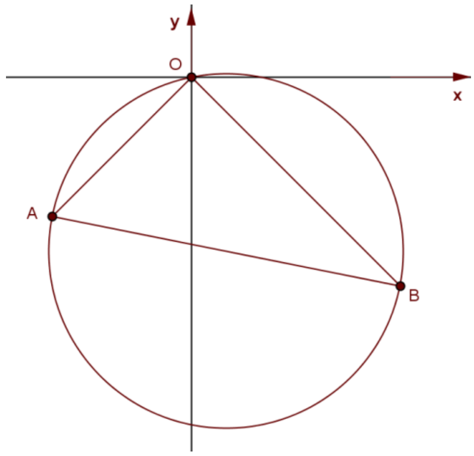


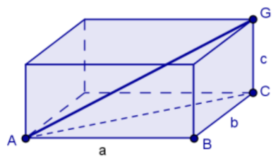
   2.1. Justifique que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{HG}$ e indique as coordenadas de $\overrightarrow{HG}$.
   2.2. *Determine as coordenadas dos pontos G, F e E.
   2.3. *Justifique que $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{BC}$ e determine as coordenadas dos vértices do paralelogramo $[ABCD]$.

3. Num plano munido de um referencial cartesiano os pontos $A(0,3)$ e $B(5,4)$ são vértices consecutivos de um losango e o ponto $C(2,1)$ é o ponto de interseção das respetivas diagonais. Determine as coordenadas dos outros dois vértices.

4. *Considere, num plano munido de um referencial cartesiano, três pontos não colineares $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ e $C(c_1, c_2)$.
   Seja M o ponto médio do segmento de reta $[BC]$. Relembrando que o baricentro G do triângulo $[ABC]$ é o ponto G do segmento de reta $[AM]$ tal que $\overline{AG} = 2\overline{GM}$, verifique que o baricentro coincide com a intersecção das mediatrizes do triângulo determinando sucessivamente:
   4.1. as coordenadas de M;
   4.2. as coordenadas de $\overrightarrow{AM}$;
   4.3. as coordenadas de $\overrightarrow{AG}$;
   4.4. as coordenadas de G.

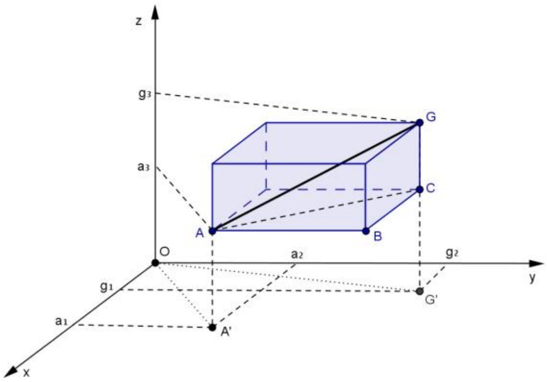
6.2	1. Num plano munido de um referencial cartesiano, sabe-se que os pontos $A(-3,-2)$, $B(-1,2)$ e $C(4,1)$ são vértices de um paralelogramo. Determine as possíveis coordenadas do quarto vértice do paralelogramo. 2. Num plano munido de um referencial cartesiano, determine, se existir, um número real k tal que os vetores $\vec{u}(1, k+1)$ e $\vec{v}(2k+1, 6)$ sejam colineares e com o mesmo sentido. 3. Considere um plano munido de um referencial ortonormado e o vetor $\vec{u}(-3,4)$. Determine as coordenadas do vetor colinear a $\vec{u}$, de sentido contrário e de norma 15. 4. Num plano munido de um referencial ortonormado, os pontos $A(2,1)$, $B(6,4)$ e $C(8,7)$ são vértices de um trapézio, cujas bases são os segmentos de reta $[AB]$ e $[CD]$. 4.1. *Determine todas as coordenadas possíveis do vértice D sabendo que $\overline{CD} = 2\overline{AB}$. 4.2. *Considere $D(0,1)$. Prove que o quadrilátero definido pelos pontos médios dos lados do trapézio $[ABCD]$ é um paralelogramo.
6.3	1. Considere, num plano munido de um referencial cartesiano, as retas r, s e p definidas respetivamente por $2x+3y+1=0$, $(x,y)=(1,5)+t(6,4), t \in \mathbb{R}$ e $\begin{cases} x = \lambda \\ 3y = 1 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ 1.1. Determine os pontos em que a reta r interseta os eixos coordenados. 1.2. Determine a ordenada do ponto da reta s que tem abcissa 3. 1.3. Justifique que o ponto $(-2,-1)$ pertence à reta p. 1.4. Indique, para cada uma das retas, um vetor diretor. 1.5. Escreva a equação reduzida da reta s. 1.6. Indique, de entre r, s e t, eventuais pares de retas paralelas. 2. Considere, num referencial cartesiano do plano, a reta m definida por $(x,y)=t(-5,4), t \in \mathbb{R}$. Determine a equação reduzida da reta n, paralela a m, que interseta o eixo Ox no mesmo ponto que a reta p de equação $6x-y-1=0$. 3. *Determine para que valores reais de k o ponto $P(k,k^2)$ pertence à reta de equação $y=-5x-6$. 4. **Num referencial ortonormado do plano as retas $r: 4y=3x-1$ e $s: 4x-3y+2=0$ contêm dois lados iguais de um triângulo que medem 10 unidades. Determine as possíveis coordenadas dos vértices desse triângulo. 5. **Considere, num plano munido de um referencial cartesiano, a circunferência definida pela equação $x^2+y^2=10$ e o ponto $P(0,-10)$. Determine a equação reduzida de cada uma das retas que, passando por P, são tangentes à circunferência.

	6. Considere, num plano munido de um referencial cartesiano, um ponto A, a circunferência de centro A definida pela equação $(x-3)^2+(y-2)^2=10$, os pontos E e F de interseção da circunferência com o eixo Ox e o ponto D de interseção da circunferência com o eixo Oy e de ordenada superior à do ponto A. 6.1. Determine as coordenadas de D, E e F. 6.2. Determine a equação reduzida da reta DF. 6.3. Calcule a área do triângulo $[DEF]$.  7. Considere, num plano munido de um referencial cartesiano, a circunferência que passa nos pontos A, O e B tais que $[OA]$ está contido na bissetriz dos quadrantes ímpares e $[OB]$ está contido na bissetriz dos quadrantes pares. Sabe-se ainda que a ordenada de B é igual a $\frac{3}{2}$ da ordenada de A. 7.1. *Determine as coordenadas de A e de B sabendo que a área do triângulo $[AOB]$ é igual a 12 unidades de área. 7.2. Justifique que $[AB]$ é um diâmetro da circunferência e escreva uma equação dessa circunferência. 7.3. Escreva uma equação cartesiana da reta AB. 
7.3	**Comentário** Ao abordar-se a Geometria Analítica plana no Ensino Básico definiram-se referenciais cartesianos gerais, ou seja, não necessariamente ortogonais nem monométricos (*cf.* Metas Curriculares para o Ensino Básico, OTD5-1.1); nesse contexto, cada coordenada de um dado ponto é obtida através da interseção com um dos eixos da reta paralela ao outro eixo que passa pelo ponto (*cf. ibid*. OTD5-1.2). Verifica-se facilmente que, no caso em que o referencial é ortogonal (e apenas neste caso), o mesmo resultado pode ser obtido considerando as projeções ortogonais do ponto em cada um dos eixos coordenados. Na generalização que aqui é feita ao espaço da noção de referencial cartesiano, uma vez que apenas se consideram referenciais ortogonais, é esta caracterização que se adota para estender ao espaço a noção de coordenadas de um ponto relativamente a um referencial dessa natureza; com efeito, essa opção permite simplificar o estudo destes referenciais, por facultar uma utilização mais direta das propriedades geométricas conhecidas da noção de perpendicularidade. No entanto, para referenciais cartesianos no espaço mais gerais, nomeadamente se os eixos não forem dois a dois perpendiculares mas simplesmente não complanares, as cooordenadas de um ponto P poderiam ser definidas, analogamente ao que foi feito no caso do plano, começando por considerar a interseção de cada eixo com o plano contendo o ponto P e paralelo ao plano determinado pelos outros dois eixos; as abcissas desses pontos no respetivo

	eixo seriam exatamente as coordenadas de P nesse referencial. Provar-se-ia depois facilmente que as coordenadas poderiam ser obtidas começando por considerar a interseção da reta passando por P e paralela a um dos eixos, com o plano determinado pelos restantes dois eixos; as coordenadas do ponto assim obtido num dos planos coordenados, relativamente ao referencial constituído pelos eixos que determinam esse plano, seriam exactamente duas das coordenadas do ponto no referencial espacial inicialmente fixado.
7.5	1. *Considere um referencial ortonormado do espaço e um terno ordenado de números reais (a, b, c). 1.1. Justifique que o conjunto dos pontos do espaço cuja projeção ortogonal sobre o eixo Ox é um dado ponto P é o plano perpendicular a Ox e que passa em P. 1.2. Considere o plano α perpendicular ao eixo Ox e que contém o ponto $A(a, 0,0)$ e o plano β perpendicular ao eixo Oy e que contém o ponto $B(0, b, 0)$. Justifique que α e β são perpendiculares e caracterize, através das abcissas e ordenadas, os pontos da respetiva reta interseção. 1.3. Considere o plano γ perpendicular ao eixo Oz e que contém o ponto $C(0,0, c)$. Justifique que o plano γ interseta a reta r num único ponto e que esse é o único ponto do espaço de coordenadas (a, b, c).
7.6	1. * Considere um referencial ortonormado e um ponto $P(a, b, c)$, $c \neq 0$, de projeção ortogonal P' no plano xOy. 1.1. Considere o ponto P'', projeção ortogonal do ponto P no eixo Ox. Justifique que o plano definido pelos pontos P, P' e P'' é perpendicular ao eixo Ox. 1.2. Justifique que a reta $P''P'$ é perpendicular ao eixo Ox e conclua que a abcissa de P' é igual a a. 1.3. Utilizando um raciocínio análogo ao utilizado em 1.1. e 1.2., conclua que a ordenada do ponto P' é igual a b, que as coordenadas de P' são $(a, b, 0)$ e que, no plano xOy, P' tem coordenadas (a, b).
8.3	1. Considere um paralelepípedo retângulo como o que está representado na figura e tal que numa dada unidade, $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ e $\overline{CG} = c$. 1.1. Determine, utilizando o teorema de Pitágoras, uma expressão para a medida de $\overline{AC}$, em função de a e de b. 1.2. Justifique que GC é perpendicular a AC e prove que $\overline{AG} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. 

1.3. *Definiu-se um referencial ortonormado do espaço, tal que o eixo Ox é paralelo BC, o eixo Oy é paralelo a AB e o eixo Oz é paralelo a CG.

Tem-se ainda $A(a_1, a_2, a_3)$ e G (g_1, g_2, g_3), tal como representa a figura junta.



1.3.1. Justifique que: $a = |g_2 - a_2|$, $b = |g_1 - a_1|$ e $c = |g_3 - a_3|$.

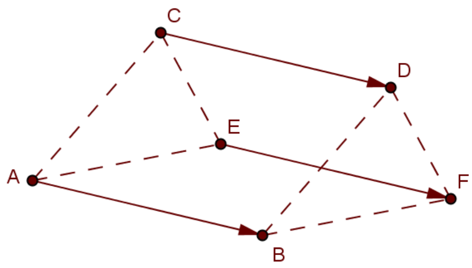
1.3.2. Conclua que a distância entre os pontos A e G é dada por:

$$\overline{AG} = \sqrt{(g_1 - a_1)^2 + (g_2 - a_2)^2 + (g_3 - a_3)^2}$$

9.1
9.2

Informação Complementar para o professor

A extensão ao espaço da definição da relação de equipolência entre segmentos orientados não oferece dificuldade, uma vez que dois segmentos orientados equipolentes, por definição, estão associados a segmentos de reta pertencentes a um mesmo plano e serem equipolentes no espaço significa serem equipolentes no plano determinado por esses segmentos de reta.



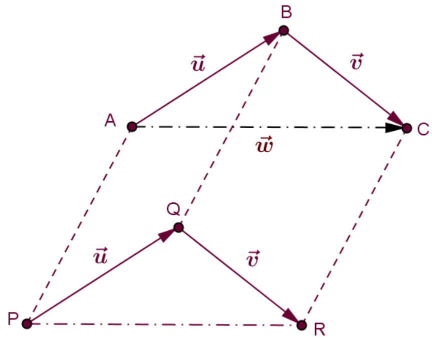
No descritor 9.2 exprime-se de modo informal o facto de se identificar um vetor do espaço com a classe de equivalência de um dado segmento orientado para a relação de equipolência, analogamente ao que foi feito no Ensino Básico para a noção de vetor no plano.

Para se verificar que a relação de equipolência é de equivalência, a única propriedade que carece de nova demonstração, para além do que já era conhecido num plano, é a transitividade, no caso de três segmentos orientados não complanares. Assim, basta demonstrar que se forem dados três segmentos orientados $[A, B]$, $[C, D]$ e $[E, F]$ tais que são paralelogramos os quadriláteros $[ABDC]$ e $[CDFE]$ então também é paralelogramo o quadrilátero $[ABFE]$. Ora, que as retas AB e EF são paralelas resulta imediatamente da transitividade do paralelismo, já que por um lado AB e CD e por outro CD e EF são paralelas por hipótese. Por outro lado, que AE e BF são paralelas resulta do paralelismo dos planos ACE e BDF (são paralelos porque as retas concorrentes AC e CE do primeiro plano são respetivamente paralelas às retas concorrentes BD e DF do segundo, por hipótese); com efeito, as retas AE e BF são paralelas porque resultam da interseção desses dois planos paralelos com o plano ABE, já que os pontos A e E são obviamente pontos da interseção dos planos ACE e ABE, o ponto B está na interseção do plano BDF com o plano ABE e o ponto F, por um lado está obviamente no plano BDF e por outro também tem de estar no plano ABE, já que pertence à única paralela à reta AB que passa pelo ponto E.

Definida esta relação de equivalência entre segmentos orientados do espaço, é agora fácil estender ao espaço a noção de vetor, simplesmente identificando os vetores do espaço com as classes de equivalência para a relação de equipolência, o que, com acima foi referido, fica expresso de modo informal no descritor 9.2.

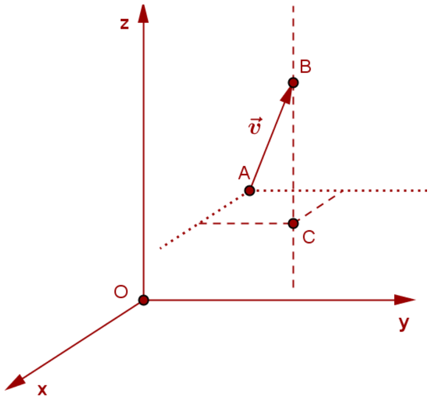
Também é fácil agora estender do plano ao espaço a definição de norma de um vetor (fixada uma unidade de comprimento), de adição de um ponto com um vetor, de translação de um dado vetor e as operações de subtração de dois pontos, de adição e subtração de vetores, de multiplicação de um vetor por um escalar e as respetivas propriedades geométricas e algébricas.

Por exemplo, a coerência da definição de soma de dois vetores pode ser justificada exatamente com os mesmos argumentos utilizados, para o caso de vetores de um plano, no comentário acima aos descritores 3.1 a 3.4, utilizando a mesma figura (reproduzida ao lado), onde agora os segmentos orientados $[A,B]$, $[B,C]$, $[P,Q]$ e $[Q,R]$ não são necessariamente complanares.



10.1
10.2

1. Considere um referencial ortonormado de origem O no espaço, os pontos $X(1,0,0)$, $Y(0,1,0)$, $Z(0,0,1)$ os vetores (da base canónica do espaço vetorial dos vetores do espaço) $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OX}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OY}$ e $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OZ}$ e um vetor $\vec{v}$.



   1.1 *Como exemplificado na figura junta, considere um ponto A do espaço, e seja $B = A + \vec{v}$. Suponha que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$, onde $\vec{v}_1$ tem a direção de $\vec{e}_1$, $\vec{v}_2$ tem a direção de $\vec{e}_2$ e $\vec{v}_3$ tem a direção de $\vec{e}_3$.
   Utilizando a regra do triângulo para a soma de $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ com $\vec{v}_3$, mostre que sendo C um ponto tal que $\vec{v}_3 = \overrightarrow{CB}$ então C tem de pertencer à reta r paralela ao eixo Oz que passa no ponto B.
   1.2 **Com as notações da alínea anterior e utilizando a regra do paralelogramo para a soma $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ e a regra do triângulo para a soma de $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ com $\vec{v}_3$ mostre que sendo C um ponto tal que $\vec{v}_3 = \overrightarrow{CB}$ e $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \overrightarrow{AC}$, então C está na interseção da reta r com o plano normal à reta r que passa pelo ponto A, ou seja, C é a projeção ortogonal do ponto B no plano paralelo ao plano xOy que passa no ponto A.
   1.3 *Conclua da alínea anterior que existe um e somente um terno ordenado de números reais (v_1, v_2, v_3) tal que $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$, designando este terno por «coordenadas do vetor $\vec{v}$».
   1.4 Justifique que as coordenadas do ponto $P = O + \vec{v}$ são iguais às coordenadas do vetor $\vec{v}$ (dito «vetor posição» do ponto P).

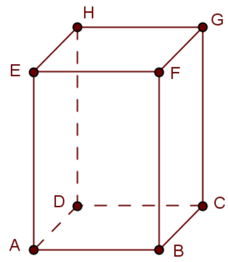
11.1

1. Fixado um referencial ortonormado do espaço, os pontos $A(2,0,0)$, $B(2,2,0)$ e $C(0,2,0)$ são três dos vértices de uma das bases de um prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$ de altura 6.

   1.1. Indique as coordenadas do ponto D, quarto vértice da base.

	1.2. Defina analiticamente: 1.2.1. O plano que contém a base $[EFGH]$ do prisma. 1.2.2. O plano mediador da aresta $[BC]$. 1.2.3. A reta EA sabendo que o vértice E tem a mesma abcissa e ordenada de A. 1.2.4. O plano mediador de $[EA]$. 1.2.5. A aresta $[EF]$ sabendo que B é a projeção ortogonal do vértice F no plano xOy. 1.2.6. O conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto B é igual a 2. 1.3. Determine o volume do prisma. 2. Considere, fixado um referencial cartesiano do espaço, a superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2-4x+2y-8z+12=0$ 2.1. Indique o centro C e o raio da superfície esférica. 2.2. Determine expressões analíticas que definam a interseção da superfície esférica com cada um dos seguintes conjuntos de pontos: 2.2.1. O eixo Ox. 2.2.2. O plano de equação $z=4$. 2.2.3. O plano de equação $y=-4$. 2.3. Prove que o ponto $A(0,0,2)$ pertence à superfície esférica e determine a inequação reduzida da esfera de centro A e raio $\overline{AC}$. 3. Considere, fixado um referencial cartesiano do espaço, os pontos $A(-5,1,2)$ e $B(2,0,-1)$. Determine: 3.1. as coordenadas do ponto $C(x,y,z)$ tal que B é o ponto médio $[AC]$. 3.2. a inequação reduzida da esfera de diâmetro $[AB]$. 4. Considere, fixado um referencial cartesiano do espaço, a superfície esférica S de equação $(x+3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=5$. 4.1. Determine uma expressão analítica para a interseção da superfície esférica S com o plano $y=3$. 4.2. Determine analiticamente para que valores reais de a o plano de equação $z=a$ tem interseção não vazia com a superfície esférica S. 4.3. *Determine para que valores reais de b a interseção de S com o plano $x=b$ é uma circunferência de raio $\sqrt{5}$. 5. *Fixado um referencial ortonormado do espaço considere os pontos $A(2,-3,4)$, $B(2,3,4)$ e $C(-2,-3,4)$. Identifique analiticamente o conjunto dos pontos do espaço equidistantes de A, B e C.
11.2	1. Considere, fixado um referencial ortonormado do espaço, os pontos $A(-3,2,1)$ e $B(1,1,-2)$ e o vetor $\vec{u}(8,0,-6)$. Determine as coordenadas de: 1.1. $A+3\vec{u}$ 1.2. $\overrightarrow{AB}+2(-5\vec{u})$ 1.3. $4\overrightarrow{AB}-\frac{5}{2}\vec{u}$ 1.4. $B-3\left(\overrightarrow{AB}+\vec{u}\right)$ 1.5. um vetor $\vec{v}$ colinear a $\vec{u}$ e de norma 2. 1.6. $\vec{x}$ sabendo que $\overrightarrow{AB}=\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{u}$.

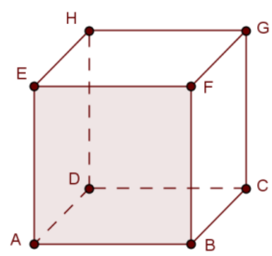
2. Considere, fixado um referencial cartesiano do espaço, um prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$ tal que os vértices $A(2{,}0{,}0), B(0{,}2{,}0)$ e $C(-2{,}0{,}0)$ pertencem a uma das bases e o vértice $F(0{,}2{,}4)$ pertence à outra base, como ilustra a figura junta.



   2.1. Seja M o ponto médio da aresta $[BF]$. Determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{DM}$.
   2.2. *Determine os números reais a, b e c tais que $\overrightarrow{DM} = a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{BF}$.
   2.3. Determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{GB}$.
   2.4. Escreva as equações paramétricas da reta que passa em F e é paralela ao eixo Oy.

3. Considere, fixado um referencial ortonormado do espaço, o ponto $A(2,-1{,}0)$ e o vetor $\vec{v}(1{,}1,-2)$.
   3.1. Escreva as equações paramétricas da reta r que tem a direção de $\vec{v}$ e passa no ponto A.
   3.2. Mostre que o ponto $B(0,-3{,}4)$ pertence à reta r.
   3.3. Utilizando as equações obtida em 3.1., determine as coordenadas do ponto P, interseção da reta r com o plano xOz.
   3.4. Os pontos A e $D = A + 2\vec{v}$ são as extremidades de um diâmetro de uma esfera de centro C. Determine as coordenadas de C e o raio dessa esfera.
   3.5. Indique as coordenadas de um ponto Q que não seja colinear com P e D.

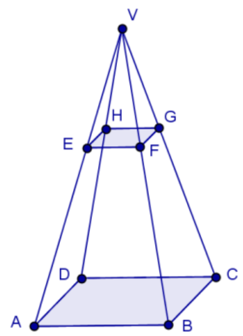
4. Fixado um referencial ortonormado do espaço considere os pontos $A(3{,}0{,}2)$, $B(4{,}3{,}2)$, $D(0{,}1{,}2)$ e $E(3{,}0{,}2+\sqrt{10})$ vértices do cubo $[ABCDEFGH]$ ilustrado na figura junta.



   4.1. Justifique que o tetraedro $[BDEG]$ tem as arestas todas iguais (ou seja, que é um "tetraedro regular").
   4.2. Determine as coordenadas dos restantes vértices do cubo.
   4.3. Determine equações paramétricas da reta EC.
   4.4. Defina analiticamente o segmento de reta $[EG]$.

5. *Fixado um referencial ortonormado do espaço e para um dado valor real de k, os vetores $\vec{u}(1, k+1, k^2-1)$ e $\vec{v}(2k+1{,}6{,}0)$ são colineares. Determine k.

6. Fixado um referencial ortonormado do espaço foi representada uma pirâmide quadrangular regular de vértice $V(1{,}1{,}10)$ e base $[ABCD]$. Um plano paralelo à base interseta a pirâmide definindo o quadrado $[EFGH]$. Sabe-se ainda que $\overrightarrow{VE}(1,-1,-3), \overrightarrow{VG}(-1{,}1,-3)$ e $\overrightarrow{EF}(0{,}2{,}0)$.



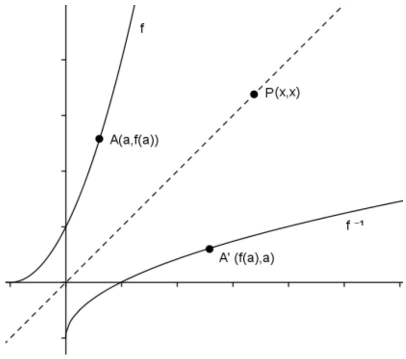
   6.1. Determine as coordenadas dos vértices F e G e do vetor $\overrightarrow{VH}$.
   6.2. *Sabendo que a área da base da pirâmide é igual a 36 unidades quadradas, determine as coordenadas de $\overrightarrow{VB}$ e do ponto D.

Descritor	Texto de Apoio
1.1 1.2	**Comentário** No Ensino Básico introduz-se a noção de função de um dado conjunto A em dado conjunto B sem se explicitar de que objeto matemático, de facto, se trata, mas impondo-se que uma função f fica bem determinada quando, para além dos conjuntos A e B se indica, para cada elemento x de A qual o elemento (único) de B que lhe fica associado, o qual se representa por $f(x)$. Introduziram-se algumas noções básicas relativas a este conceito, em particular a de par ordenado e a de gráfico. É pois de toda a conveniência efetuar a revisão destes conceitos a propósito deste objetivo geral (*cf.* Metas Curriculares do Ensino Básico, FSS7-1.1 a 1.7). Resulta da caracterização dada no ensino básico de função e de gráfico que uma função $f : A \to B$ fica determinada pelos conjuntos A e B e pelo respetivo gráfico e que um conjunto de pares ordenados (x, y) com $x \in A$ e $y \in B$ (ou seja, como agora podemos escrever, $(x, y) \in A \times B$) é gráfico de uma função de A em B se e somente se para todo o $a \in A$ existir um e somente um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in G$. Assim, embora tal não seja requerido, poderíamos identificar uma função $f : A \to B$ de gráfico G_f como o terno ordenado $\left(A, B, G_f\right)$ o que estaria de acordo com as propriedades impostas no Ensino Básico à noção de função.
1.11 1.12 1.13	1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5x + 2$. 1.1. Justifique que f é bijetiva e apresente uma expressão para $f^{-1}(x), x \in \mathbb{R}$. 1.2. Mostre que para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1} \circ f(x) = x$ e $f \circ f^{-1}(x) = x$. 2. *Considere a função bijetiva $f : A \to B$. Calcule, utilizando a definição de f^{-1}, $(f^{-1} \circ f)(a)$ e $(fof^{-1})(b)$ para $a \in A$ e $b \in B$ e justifique que $f^{-1}of = Id_A$ e que $fof^{-1} = Id_B$. 3. *Sejam $f : A \to B$, $g : B \to A$ funções: 3.1. Suponha que $\forall (x, y) \in A \times B, y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$; prove que: 3.1.1. f é bijetiva e $g = f^{-1}$. 3.1.2. $gof = Id_A$ e $fog = Id_B$. 3.2. Suponha que $gof = Id_A$ e $fog = Id_B$; prove que: 3.2.1. $\forall (x, y) \in A \times B, y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$. 3.2.2. f é bijetiva e $g = f^{-1}$
2. 6	**Comentário** Convém recordar a convenção introduzida no Ensino Básico (Metas curriculares de Matemática para o Ensino Básico, FSS7-1.9) de acordo com a qual se designa também apenas por «gráfico de f», quando esta designação não for ambígua, um gráfico cartesiano de uma função real de variável real f, ou seja, o conjunto dos pontos de um plano munido de um referencial cartesiano, cujas coordenadas são exatamente os pares ordenados elementos do gráfico de f propriamente dito, ou seja, os pares $(x, f(x))$ com x em D_f.

	1. Considere a função f definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = x^2 - 1$ e o respetivo gráfico representado num plano munido de um referencial ortogonal. 1.1. Seja $a \in D_f$. Indique as coordenadas dos seguintes pontos do gráfico de f: - o ponto P de abcissa a; - o ponto Q de abcissa $-a$. 1.2. Prove que o ponto médio de $[PQ]$ pertence ao eixo das ordenadas. 1.3. Justifique que o eixo das ordenadas é perpendicular ao segmento de reta $[PQ]$. 1.4. Conclua que o eixo das ordenadas é eixo de simetria do gráfico de f. 2. *Considere uma função f par definida em $D_f \subset \mathbb{R}$ e o respetivo gráfico representado num plano munido de um referencial ortogonal. 2.1. Seja $a \in D_f$ e $P(a, f(a))$ um ponto do gráfico de f. Indique as coordenadas do ponto Q do gráfico de f de abcissa $-a$. 2.2. Mostre que qualquer ponto do eixo das ordenadas é equidistante de P e de Q. 2.3. Conclua que o eixo das ordenadas é eixo de simetria do gráfico de f. 3. *Considere uma função de variável real $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico, num plano munido de um referencial ortogonal, é simétrico relativamente ao eixo das ordenadas. Mostre que f é par.
2. 7	1. Considere a função definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = x^3 - x$ e o respetivo gráfico representado num plano munido de um referencial cartesiano. 1.1 Mostre que f é uma função ímpar. 1.2 Mostre que os pontos do gráfico de f de abcissas respetivamente iguais a 2 e a -2 são simétricos relativamente à origem do referencial. 1.3 *Mostre que o gráfico de f é simétrico relativamente à origem do referencial. 2. *Considere uma função f ímpar definida em $D_f \subset \mathbb{R}$ e o respetivo gráfico representado num referencial ortogonal. 2.1 Seja $a \in D_f$ e $P(a, f(a))$ um ponto do gráfico de f. Indique as coordenadas do ponto Q do gráfico de f de abcissa $-a$. 2.2 Prove que o ponto médio de $[PQ]$ é o ponto O, origem do referencial. 2.3 Conclua que a imagem do gráfico de f pela reflexão central de centro O coincide com o próprio gráfico. 3. *Considere uma função de variável real $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico G, num plano munido de um referencial cartesiano, é simétrico relativamente à origem O, isto é, a imagem de G pela reflexão central de centro O coincide com G. Mostre que f é impar.
2. 8	1. Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 5$. 1.1. Justifique que f é uma função bijetiva e determine uma expressão analítica para $f^{-1}(x), x \in \mathbb{R}$. Represente, num plano munido de um referencial ortonormado, os gráficos das funções f e f^{-1}. 1.2. Determine a imagem dos pontos A e B do gráfico de f de abcissas respetivamente iguais a -3 e 1 pela reflexão axial de eixo de equação $y = x$ e verifique que se trata de pontos do gráfico de f^{-1}. 1.3. *Mostre que a imagem do gráfico de f pela reflexão de eixo de equação $y = x$ é o gráfico de f^{-1}.

2. **Considere uma função $f: [-1, +\infty[\to [0, +\infty[$ bijetiva e um ponto $A(a, f(a))$, $a \geq -1$. Considere ainda a função $f^{-1}: [0, +\infty[\to [-1, +\infty[$, inversa de f, e A' o ponto do gráfico de f^{-1} que tem por abcissa $f(a)$.

   Prove que qualquer ponto P da reta $y = x$ é equidistante de A e de A' e conclua que os gráficos de f e de f^{-1} são simétricos relativamente à bissetriz dos quadrantes impares.



3.** Fixado um plano munido de um referencial cartesiano, mostre que a imagem de um ponto $A(a, b)$ pela reflexão de eixo de equação $y = x$ é o ponto $B(b, a)$ e conclua, dada uma função bijetiva f, que os gráficos de f e de f^{-1} são simétricos relativamente a esse eixo.

2.9

Comentário

Esta questão foi abordada no ensino básico (*cf.* Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico, FSS8-1.2), pelo que pode consultar-se, a este propósito, o texto no Caderno de Apoio ao 3.º ciclo relativo ao referido descritor.

1. Considere as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^2 + 3$. Considere ainda, num plano munido de um referencial cartesiano, os gráficos destas duas funções e o ponto P do gráfico de f de abcissa 4.
   1.1. Determine as coordenadas do ponto Q, imagem de P pela translação de vetor $\vec{u} = (0,3)$ e justifique que Q pertence ao gráfico de g.
   1.2. Justifique que a imagem de qualquer ponto do gráfico de f pela translação referida na alínea anterior é um ponto do gráfico de g.
   1.3. Inversamente, justifique que todo o ponto do gráfico de g é a imagem de um ponto do gráfico de f pela translação referida na alínea 1.1.

2. Considere duas funções reais f e g definidas em $D = D_g = D_f$ e tais que para todo o $x \in D$, $g(x) = f(x) + c$, onde $c \in \mathbb{R}$. Considere ainda, num plano munido de um referencial cartesiano, os gráficos destas duas funções e o ponto P do gráfico de f de abcissa $a \in D$.
   2.1. Determine as coordenadas do ponto Q, imagem de P pela translação de vetor $\vec{u} = (0, c)$ e justifique que Q pertence ao gráfico de g.
   2.2. Considere um ponto R do gráfico de g. Prove que é a imagem de um ponto do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}$.

2. 10

1. Considere a função definida por $f(x) = \sqrt{x}$.
   1.1 Qual o domínio da função g definida pela expressão $g(x) = \sqrt{x-3}$?
   1.2 Justifique que o ponto $A(4,2)$ pertence ao gráfico de f. Qual a imagem de A pela translação de vetor $\vec{u} = (3,0)$? Mostre que se trata de um ponto do gráfico de g.
   1.3 *Mostre que a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}$ é o gráfico de g.

	2. *Considere duas funções reais f e g definidas, respetivamente, em D_f e $D_g = \{x: x - c \in D_f\}$, onde $c \in \mathbb{R}$, e tais que, para todo o $x \in D_g$, $g(x) = f(x - c)$. Considere ainda, num referencial cartesiano, os gráficos destas duas funções e o ponto P do gráfico de f de abcissa $a \in D_f$. 2.1. Determine as coordenadas do ponto Q, imagem de P pela translação de vetor $\vec{u} = (c, 0)$ e justifique que Q pertence ao gráfico de g. 2.2. Considere um ponto R do gráfico de g. Prove que é a imagem de um ponto do gráfico de f pela translação referida na alínea anterior.
2.11 2.12	**Comentário** O estudo das transformações geométricas de gráficos cartesianos associadas a translações e homotetias nas variáveis dependente e independente de uma dada função pode ser ilustrado com recurso à calculadora gráfica ou outros meios tecnológicos para obter representações gráficas de funções. Além disso, especialmente no caso das homotetias (cf 2.11, 2.12, 2.13 e 2.14), é interessante recorrer a funções com domínios finitos, como no exemplo seguinte, o que pode também facilitar a compreensão do resultado geral. 1. Seja $G_f = \{(-2.4), (-1,2), (0,2), (1,3), (4,2)\}$ o gráfico de uma dada função f. 1.1. Represente G_f num referencial ortogonal. 1.2. Represente as imagens dos pontos do gráfico cartesiano de f pela transformação ϕ que ao ponto $P(x, y)$ do plano associa o ponto $P'(x, 2y)$. 1.3. Considere a função g, de domínio $\{-2, -1,0,1, 4\}$ definida por por $g(x) = 2f(x)$. Relacione o gráfico cartesiano de g com a transformação ϕ e com o gráfico cartesiano de f. 1.4. Represente de novo o gráfico cartesiano de f e as imagens dos respetivos pontos pela transformação ψ que ao ponto $P(x, y)$ do plano associa o ponto $P'(x, \frac{1}{2}y)$. 1.5. Obtenha uma expressão analítica para função h cujo gráfico cartesiano é a imagem do gráfico cartesiano de f pela transformação ψ.
2.13 2.14	1. Seja $G_f = \{(-3.4), (0,2), (1,3), (3,1), (6,2)\}$ o gráfico de uma dada função f. 1.1 Represente G_f num referencial ortogonal. 1.2 Represente as imagens dos pontos do gráfico cartesiano de f pela transformação ϕ que ao ponto $P(x, y)$ do plano associa o ponto $P'\left(\frac{1}{3}x, y\right)$ 1.3 Considere a função g, de domínio $\left\{-1,0,\frac{1}{3},1,2\right\}$ definida por $g(x) = f(3x)$. Relacione o gráfico cartesiano de g com a transformação ϕ e com o gráfico cartesiano de f. 1.4 Represente de novo o gráfico cartesiano de f e as imagens dos respetivos pontos pela transformação ψ que ao ponto $P(x, y)$ do plano associa o ponto $P'(3x, y)$. 1.5 Obtenha o domínio e uma expressão analítica para função h cujo gráfico cartesiano é a imagem do gráfico cartesiano de f pela transformação ψ.

4.6	**Informação Complementar para o professor**

A propriedade expressa neste descritor pode ser demonstrada considerando três pontos arbitrários $P(x_P, y_P)$ $Q(x_Q, y_Q)$ e $R(x_R, y_R)$ do gráfico cartesiano de uma função real de variável real f definida num dado intervalo e tais que $x_P < x_Q < x_R$ e notando que se pretende estudar o sentido da concavidade do gráfico de f comparando as ordenadas de Q e do ponto $Q'(x_{Q'}, y_{Q'})$ do segmento de reta $[PR]$ tal que $x_{Q'} = x_Q$. Comecemos então por calcular $y_{Q'}$; atendendo às equações paramétricas do segmento de reta $[PR]$ temos:

$$\begin{cases} x_{Q'} = x_P + t(x_R - x_P) \\ y_{Q'} = y_P + t(y_R - y_P) \end{cases}, t \in [0,1],$$

Mas $x_P + t(x_R - x_P) = x_{Q'} = x_Q$, pelo que $t = \frac{x_Q - x_P}{x_R - x_P}$, tendo-se, de facto, $t \in [0,1]$, atendendo à hipótese $x_P < x_Q < x_R$. Então:

$$y_{Q'} = y_P + t(y_R - y_P) = y_P + \frac{x_Q - x_P}{x_R - x_P}(y_R - y_P);$$

portanto a desigualdade $y_Q < y_{Q'}$ é equivalente a:

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} < \frac{y_R - y_P}{x_R - x_P},$$

ou seja, designando por d_{AB} o declive de uma reta AB:

$$d_{PQ} < d_{PR}.$$

A equivalência que acabámos de estabelecer pode ser expressa informalmente dizendo que "partindo de determinado ponto do plano e percorrendo da esquerda para a direita uma reta não vertical, quanto maior for o respetivo declive maior será a ordenada do ponto atingido com determinada abcissa pré-fixada, e reciprocamente". É finalmente, portanto, esta última desigualdade, verificada para quaisquer pontos P, Q e R nas condições acima, que pretendemos provar que é equivalente ao gráfico de f ter a concavidade virada para cima.
Ora esta última condição exprime-se através da desigualdade:

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} < \frac{y_R - y_Q}{x_R - x_Q},$$

ou seja:

$$d_{PQ} < d_{QR}.$$

Provemos então que, para quaisquer pontos P, Q e R nas condições inicialmente estabelecidas, $d_{PR} = \frac{y_R - y_P}{x_R - x_P}$ pode ser escrito como uma "média pesada" de $d_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$ e $d_{QR} = \frac{y_R - y_Q}{x_R - x_Q}$, ou, dito de outra forma, no triângulo $[PQR]$ o declive de PR é uma média pesada dos declives de PQ e QR. Para isso basta notar que:

$$\frac{y_R - y_P}{x_R - x_P} = \frac{y_R - y_Q + y_Q - y_P}{x_R - x_P} = \frac{y_R - y_Q}{x_R - x_P} + \frac{y_Q - y_P}{x_R - x_P} = \frac{y_R - y_Q}{x_R - x_Q}\frac{x_R - x_Q}{x_R - x_P} + \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}\frac{x_Q - x_P}{x_R - x_P},$$

Onde $\frac{x_R - x_Q}{x_R - x_P}, \frac{x_Q - x_P}{x_R - x_P} \in]0,1[$, atendendo a que $x_P < x_Q < x_R$, e $\frac{x_R - x_Q}{x_R - x_P} + \frac{x_Q - x_P}{x_R - x_P} = 1$.

	Acabámos então de provar que: $$d_{PR} = t\,d_{PQ} + (1-t)d_{QR}$$ (para certo $t \in]0,1[$) e pretendemos demonstrar a equivalência, para quaisquer P, Q e R nas condições acima, entre $d_{PQ} < d_{PR}$ e $d_{PQ} < d_{QR}$, o que é geometricamente óbvio (já que d_{PR} está sempre no intervalo de extremos d_{PQ} e d_{QR}) e resulta imediatamente da equação acima: $$d_{PQ} < d_{PR} \ \wedge d_{PR} = t\,d_{PQ} + (1-t)d_{QR} \Rightarrow d_{PQ} < t\,d_{PQ} + (1-t)d_{QR} \Rightarrow d_{PQ} < d_{QR}\,,$$ e: $$d_{PQ} < d_{QR} \ \wedge d_{PR} = t\,d_{PQ} + (1-t)d_{QR} \Rightarrow d_{PR} > t\,d_{PQ} + (1-t)d_{PQ} \Rightarrow d_{PR} > d_{PQ}.$$ Para se obter o resultado relativo aos gráficos de funções f quanto à propriedade de terem a concavidade voltada para baixo, basta aplicar o resultado anterior às funções $-f$.
4.8	1. Considere a função definida em $\mathbb{R}$ pela expressão $f(x) = 7x^2$. 1.1 Calcule as ordenadas dos pontos P, Q e R do gráfico de f, sabendo que as respetivas abcissas são 0, 2 e 5. 1.2 Compare o declive das retas PQ e QR. 1.3 Repita o exercício da alínea anterior escolhendo três pontos arbitrários P, Q e R do gráfico de f, de abcissas respetivamente $x_P < x_Q < x_R$ e conclua quanto ao sentido da concavidade do gráfico de f. 2. *Considere a função f definida, em $\mathbb{R}$, pela expressão $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$. Considere ainda pontos P, Q e R pertencentes ao gráfico de f ~~e~~ tais que, num referencial cartesiano, as respetivas abcissas verificam a condição: $x_P < x_Q < x_R$. 2.1 Exprima em função das abcissas de P e de Q o declive da reta PQ. 2.2 Exprima em função das abcissas de Q e de R o declive da reta QR. 2.3 Considere $a > 0$ e compare os declives das retas PQ e QR. 2.4 Considere $a < 0$ e compare os declives das retas PQ e QR. 2.5 Conclua qual a relação entre o sinal de a e o sentido da concavidade do gráfico de f.
6.1	1. Represente sob a forma de intervalos ou uniões de intervalos os conjuntos-solução das seguintes condições em $\mathbb{R}$: 1.1. $x^2 \leq 4$ 1.2. $x^2 - 6x - 1 > 15$ 1.3. $(x-2)^2 - 6x \geq -24$ 1.4. $2x^2 + x + 1 < 0$ 1.5. $4x^2 + 4x + 1 > 0$ 1.6. $\lvert x-3 \rvert < 6$ 1.7. $\lvert 2x-1 \rvert = 3$ 1.8. $\lvert 4x+1 \rvert \geq 2$ 1.9. $\lvert 2x-1 \rvert \leq 3$ 1.10. $\lvert x \rvert + 4 < 1$ 1.11. $\lvert 2x \rvert + 5 > 3$ 1.12. $\lvert x-3 \rvert > \lvert x-5 \rvert$ 1.13. $* \lvert x^2 - 5x \rvert \leq 6.$

2. Para cada valor real de $a \neq 0$ e de k, a expressão $f(x) = a(x-3)^2 + k$ define uma função quadrática.
    2.1. Considere $a = -1$ e $k = -2$ e determine o contradomínio de f.
    2.2. *Para que valores reais de a e de k o contradomínio da função g definida por $g(x) = |f(x)|$ é diferente de $[0, +\infty[$?

3. Para cada valor real de c a expressão $f(x) = -3x^2 + 4x + c$ define uma uma função f.
    3.1. *Indique, justificando, o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:
        (I) $f(2) < f\left(\frac{2}{3}\right)$;
        (II) Se $c = 1$, o contradomínio de f é $]-\infty.2]$;
        (III) Se $x < \frac{2}{3}$ então $f(x) < f\left(\frac{2}{3}\right)$.
    3.2. Determine para que valores reais de c a equação $f(x) = 0$ é impossível em $\mathbb{R}$.

4. *Existe uma única reta paralela à reta de equação $y = 2x$ que interseta a parábola de equação $y = x^2 - 4x$ num único ponto. Determine as coordenadas desse ponto.

5. *Determine para que valores reais de m a reta de equação $y = mx + 4$ interseta a parábola de equação $y = (x-2)^2 + 1$ num único ponto e, para cada valor de m, determine as coordenadas do ponto de interseção da reta com a parábola.

6.2

1. Resolva as seguintes equações, simplificando tanto quanto possível as expressões que representam as respetivas soluções:
    1.1. $\sqrt{x-2} = 4$;
    1.2. $\sqrt{2x+1} = x$;
    1.3. $\sqrt{x-2} = x - 4$;
    1.4. $\sqrt{x-5} + \sqrt{x} = x - 6$;
    1.5. $\sqrt[3]{x+1} = 2$.

2. Represente sob a forma de intervalos ou uniões de intervalos os conjuntos-solução das seguintes condições:
    2.1. $\sqrt{x+3} < 2$;
    2.2. $\sqrt{x-1} \leq 3$;
    2.3. * $\sqrt{x} + \sqrt{x-3} < 3$.

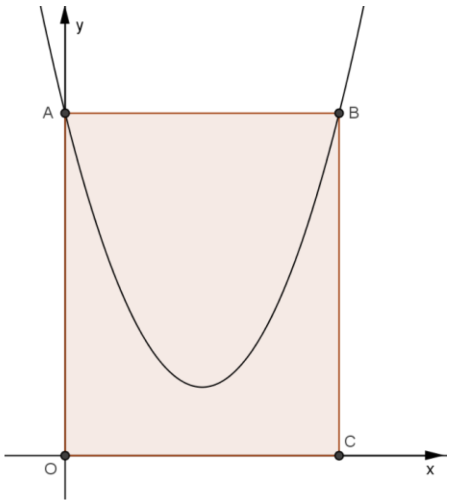
6.3

1. Averigue se as funções definidas no maior domínio possível pelas seguintes expressões são pares ou ímpares.
    1.1. $|2x| - 1$;
    1.2. $2x^3 - 3x$;
    1.3. $x|5x|$;
    1.4. $5\sqrt[3]{x}$;
    1.5. $5x^2 - 3x^4$;
    1.6. $1 + \sqrt{16 - x^2}$.

2. O gráfico de uma função afim f interseta o eixo Ox em $x = 2$ e o eixo Oy no ponto de ordenada 3.
    2.1 Determine:
        2.1.1 a forma canónica de f;
        2.1.2 os zeros da função g definida por $g(x) = -f(x+1)$;
        2.1.3 o contradomínio da função h definida por $h(x) = -|f(x)| + 2$;
    2.2 Esboce o gráfico da função j definida por $j(x) = 2f(-x) - 1$.

3. Considere uma função f de domínio $\mathbb{R}$ e de contradomínio $[-2,3]$. Indique o contradomínio das funções definidas pelas seguintes expressões:
    3.1. $g(x) = f(x) - 3$;
    3.2. $h(x) = -f(x) + 1$;
    3.3. $j(x) = 2f(x)$;
    3.4. $j(x) = |f(x)|$.

4. Considere a função f definida por $f(x) = (x-2)^2 + 1$ e representada na figura num referencial cartesiano.
O quadrilátero $[OABC]$ é um retângulo, sendo A o ponto interseção do gráfico de f com o eixo Oy, B um ponto do gráfico de f e C um ponto do eixo Ox.



    4.1. Determine as coordenadas dos vértices A, B e C.
    4.2. Determine a área do retângulo $[ABCO]$.
    4.3. Considere a função g tal que $g(x) = f(2x)$.
        4.3.1. Determine o ponto de interseção do gráfico de g com o eixo Oy e designe-o por D.
        4.3.2. Construa o retângulo $[ODEF]$ de forma análoga ao construído na figura e calcule a respetiva área.
        4.3.3. Compare as áreas dos retângulos $[ABCO]$ e $[ODEF]$ e relacione a conclusão com a contração que transforma o gráfico de f no gráfico de g.
    4.4. Considere a função h tal que $h(x) = \frac{1}{2}f(x)$.
        4.4.1. Determine o ponto de interseção do gráfico de h com o eixo Oy, designe-o por G, construa o retângulo $[OGHI]$ de forma análoga ao construído na figura e determine a respetiva área.
        4.4.2. Compare as áreas dos retângulos $[ABCO]$ e $[OGHI]$ e relacione a conclusão com a contração que transforma o gráfico de f no gráfico de h.
    4.5. *Considere a função j definida por $j(x) = 3f\left(\frac{x}{2}\right)$. A partir do gráfico de j e, de forma análoga ao das alíneas anteriores, construa um retângulo $[OJKL]$. Indique a área do retângulo e identifique as transformações no gráfico de f que justificam o valor obtido para a área.

6.4

1. Considere as funções f e g definidas por $f(x) = 5x - 1$ e $g(x) = \sqrt{2x-1}$.
    1.1. Defina as funções $f \circ g$ e $g \circ f$, indicando os respetivos domínios e uma expressão analítica tanto quanto possível simplificada para cada uma das funções.
    1.2. Tendo em conta a alínea anterior, o que pode afirmar acerca da comutatividade da composição de funções?

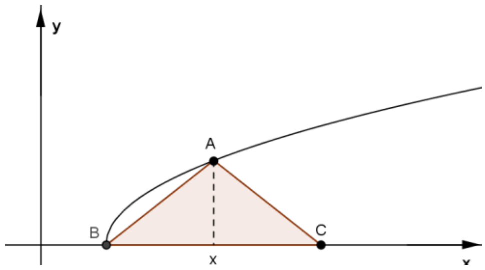
2. Diz-se que duas funções f e g são permutáveis quando $f \circ g = g \circ f$.
    2.1. Mostre que as funções definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = -x + 2$ são permutáveis.
    2.2. * Dê exemplo de duas funções afins f e g cujos gráficos se intersetem num ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares. Mostre que f e g são permutáveis.

3. *Considere a função afim f que, para dados valores reais $m \neq 0$ e b, é definida por $f(x) = mx + b$. Determine a expressão analítica da função inversa de f e indique em que condições se tem $f = f^{-1}$. Interprete geometricamente esta igualdade.

4. *Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, considere a função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$.
   4.1 Mostre que f admite um único extremo absoluto.
   4.2 Prove que, se a função tiver dois zeros, a abcissa do vértice da parábola (isto é, o ponto do gráfico de f que corresponde ao respetivo extremo absoluto) de equação $y = f(x)$ é igual à média aritmética dos zeros.

5. Um cone reto tem altura igual ao triplo do raio da base e volume $V\ cm^3$.
   5.1. Designando por r o raio da base, exprima r em função de V.
   5.2. Determine para que valor de V, a área da base é igual a $2\pi\ cm^2$.

6. *Na figura está representada, num referencial ortonormado, parte do gráfico da função f definida por $f(x) = \sqrt{x-1}$ e que interseta o eixo Ox no ponto B.
   O ponto A pertence ao gráfico da função e C é um ponto do eixo Ox tal que $\overline{AC} = \overline{AB}$ e de abcissa superior à abcissa de A.



   Representando a abcissa do ponto A por x, exprima em função de x a área do triângulo $[ABC]$ e determine para que valor de x a área do triângulo é igual a 27.

7. Considere a função f definida por:
$$f(x) = \begin{cases} -2x^3 - 2 & se\ \ x < 0 \\ x^2 - 3 & se\ \ x \geq 0 \end{cases}$$
   7.1. Calcule $f(-\sqrt[3]{2}) + f(5^{\frac{3}{2}})$.
   7.2. Averigue se a função f tem zeros.

8. Um projétil é lançado verticalmente e a respetiva altura a (em metros acima do solo) é dada, em função de t, (em segundos após o instante inicial $t = 0$) por $a(t) = -4{,}9t^2 + 39{,}2t + 1{,}6$.
   8.1. Qual a altura do projétil no instante em que foi lançado?
   8.2. Qual a altura máxima atingida pelo projétil?
   8.3. Quanto tempo esteve o projétil a uma altura superior a 35,9 metros?
   8.4. Ao fim de quanto tempo o projétil atingiu o solo? Indique o resultado em segundos arredondados às décimas.

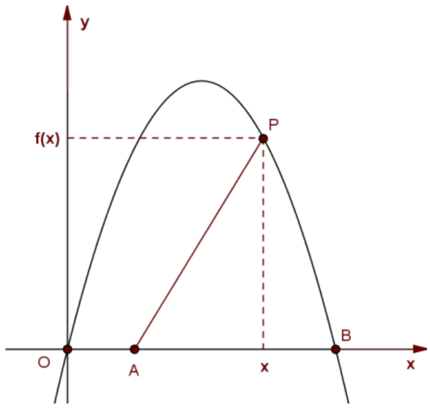
9. Considere as funções f e g definidas, respetivamente, por $f(x) = 3 - \sqrt{x+2}$ em $[-2, +\infty[$ e $g(x) = x^2 - 4x$ em $\mathbb{R}$.
   9.1. Esboce o gráfico das funções f e g.
   9.2. Determine os zeros de f.
   9.3. Utilizando a calculadora gráfica, determine valores aproximados às décimas das soluções da equação $f(x) = g(x)$, justificando por que razão existem exatamente duas soluções.

10. O raio R de uma superfície esférica de área x é definido pela expressão $R(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{\pi}}$.
   Utilizando esta expressão,
   10.1. Determine o raio de uma superfície esférica de área igual a $4\pi\sqrt{3}$.

10.2. Mostre que o volume da esfera de raio $R(x)$ pode ser definido pela expressão $V(x) = \frac{x}{6}\sqrt{\frac{x}{\pi}}$.

10.3. Determine para que valor de x o volume da esfera é igual a metade da área da respetiva superfície esférica.

11. Na figura junta está representada, num plano munido de um referencial ortonormado, parte do gráfico da função f definida por $f(x) = -x^2 + 4x$ e o ponto A de coordenadas $(1,0)$.
Considere a função g que associa a cada x a distância entre A e o ponto do gráfico de f de abcissa x.



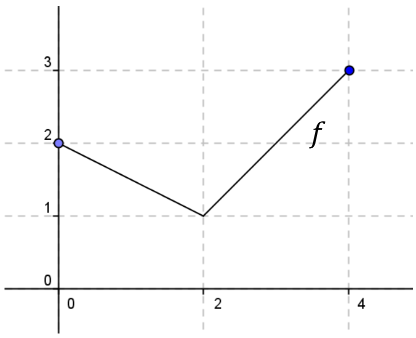
11.1. Prove que para todo x,
$$g(x) = \sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1}.$$

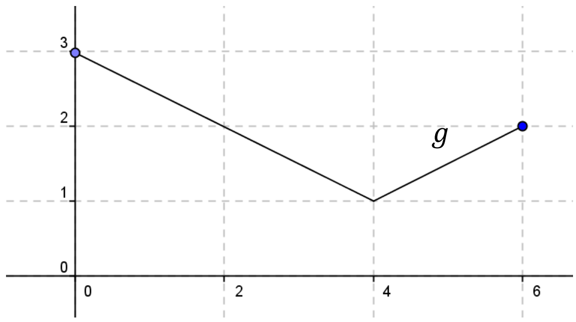
11.2. Sabendo que existem exatamente dois pontos do gráfico de f que distam uma unidade de A, indique o valor exato da abcissa de um deles e utilize a calculadora gráfica para obter um valor aproximado às décimas da abcissa do outro, explicando o procedimento utilizado.

11.3. Existe um ponto em que os gráficos de f e de g se intersetam. Determine-o por métodos analíticos e interprete geometricamente o resultado obtido.

6.5

1. Nas figuras estão representadas duas funções f e g.





1.1. Indique o domínio de cada uma das funções.

1.2. Indique o domínio da função $f + g$ e calcule $(f+g)(4)$.

1.3. Indique o domínio de $f \times g$ e calcule $(f \times g)(0)$.

2. Considere as funções f e g definidas por $f(x) = \sqrt{9-2x}$ e $g(x) = \sqrt{3x+1} + 2$

2.1. Determine o domínio de cada uma das funções f e g.

2.2. Determine o domínio da função $h = f - g$ e determine os zeros de h.

2.3. Determine $(fg)(4) + \left(\frac{f}{g}\right)(1)$.

3. Considere as funções f e g definidas por $f(x) = \sqrt{x+1}$ e $g(x) = \sqrt{x} - 2$.
Determine o domínio da função $\frac{f}{g}$.

Descritor	Texto de Apoio
1.1 1.2 1.3 1.4	**Comentário** A inclusão destes descritores como preâmbulo ao bloco de estatística do 10.º ano tem como objetivo, nomeadamente, dar agilidade aos alunos na manipulação de somatórios para que lhes venha a ser mais fácil demonstrar as principais propriedades da média e do desvio padrão de uma amostra. 1. Proponha uma expressão analítica para o termo geral da sequência (6, 9, 12, 15, 18, 21, 24) e, utilizando o símbolo de somatório, represente a soma dos respetivos termos. 2. Sabendo que $\sum_{i=1}^{n} x_i = A$, exprima em função de A e de n o valor de $\sum_{i=1}^{n} (3x_i - 5)$.
2.1	**Comentário** Após nove anos de contacto com o tópico de organização e tratamento de dados, a classificação de uma variável estatística como sendo de tipo quantitativo ou qualitativo é, no 10.º ano, um conhecimento que se considera como adquirido. As variáveis de tipo quantitativo (de contagem, de medição, financeiras, ou outras) são as que permitem um mais elevado nível de complexidade na modelação e análise estatística e, por isso, se dedica, no programa de 10.º ano, uma especial atenção a este tipo de variáveis.
2.2	**Comentário** O resultado do processo de recolha de uma amostra A, de dimensão n, de uma certa população e registo do valor observado da variável estatística x de interesse em cada unidade estatística de A, pode ser formalizado matematicamente, como um conjunto onde os elementos são pares ordenados cujas coordenadas são a unidade estatística e o respetivo valor da variável de interesse. No entanto, de modo a normalizar uma notação que permita apresentar fórmulas de cálculo para as diversas características amostrais que irão ser trabalhadas neste tópico da Estatística, começa-se por numerar as unidades estatísticas (de 1 a n) representando-se em seguida por x_i o valor da variável x no i-ésimo elemento de A. Obtém-se assim o conjunto de dados $\{(1, x_1), (2, x_2), \dots, (n, x_n)\}$ que, matematicamente se pode identificar com a sequência $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e que aqui se representará por $\underset{\sim}{x}$. Designa-se então $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ por «amostra da variável estatística x» ou, simplesmente por «amostra», sempre que não houver ambiguidade.
2.3 2.4	**Comentário** Os descritores 2.3 e 2.4 têm por objetivo a fixação de notação no que se refere à fórmula de cálculo da média. No caso de dados organizados em tabelas de frequência (dados agrupados) situação comum quando se está perante dados de contagem, o conjunto dos valores que surgem na amostra é representado por $\tilde{x}$. Note-se que no conjunto dos valores da amostra não surgem elementos repetidos. Por exemplo, o conjunto dos valores da amostra $(5, 7, 7, 5, 9, 5)$ é

$\{5, 7, 9\}$. Os elementos de $\tilde{x}$ são denotados por $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m$, onde m é o total de valores da amostra, e a frequência absoluta de $\tilde{x}_i$ é denotada por n_i. No exemplo dado poderemos escrever $\tilde{x}_1 = 5$, $\tilde{x}_2 = 7, \tilde{x}_3 = 9$ e $n_1 = 3\,, n_2 = 2, n_3 = 1$.

2.5
2.6

Comentário

O descritor 2.6 tem por objetivo ilustrar de forma rápida quão pouco resistente é a média como estatística de localização. A interpretação física da média como o centro de gravidade de um objeto simbólico constituído por um segmento da reta real com pesos nas localizações de cada um dos valores distintos da amostra, sendo a massa desses pesos igual à frequência de cada um desses valores, permite criar uma imagem visual da localização da média e dar exemplos de como um único valor muito maior (menor) que todos os restantes consegue "arrastar" a média de modo a que a esta seja superior (inferior) a todos os valores da amostra menos um.

Com esta representação física ilustra-se ainda a seguinte propriedade:
«a média situa-se sempre entre o máximo e o mínimo da amostra e não pode ser igual ao mínimo sem ser também igual ao máximo, o que acontece se e somente se a amostra for constante».

1. * Considere a amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e seja $x_{(1)} = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e $x_{(n)} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
   1.1. Justifique que $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sum_{i=1}^{n} x_{(1)} = n x_{(1)}$ e que $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_{(n)} = n x_{(n)}$
   1.2. Conclua que se tem $x_{(1)} \leq \bar{x} \leq x_{(n)}$.
   1.3. Mostre que se $\bar{x} = x_{(1)}$ ou $\bar{x} = x_{(n)}$ então a amostra é constante.
   1.4. Conclua da alínea anterior que se algum valor da amostra for superior a $x_{(1)}$ então $\bar{x} > x_{(1)}$ pelo que só se tem $\bar{x} = x_{(1)}$ se a amostra for constante.

3.1

Comentário

O desvio de cada valor da amostra relativamente à média é elemento nuclear na definição do mais importante indicador estatístico de dispersão dos valores da amostra, o desvio-padrão. A demonstração de que é nula a soma desses desvios recorre unicamente a uma manipulação simples dos somatórios e pode por isso considerar-se como exercício.

3.2

Comentário

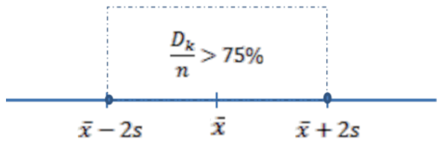
Nas ciências experimentais das áreas da biologia e da saúde, uma das mais utilizadas metodologias estatísticas de comparação de resultados de experiências, realizadas em condições de aplicação diferentes, é a chamada Análise de Variância ou simplesmente ANOVA. Esta metodologia foi formalmente apresentada pela primeira vez por Sir Ronald Fisher em 1918 mas só ficou mais largamente conhecida depois da publicação, em 1925, do seu livro "Statistical Methods for Research Workers". Ora, a Análise de Variância recorre

	fundamentalmente a propriedades das somas dos quadrados dos desvios em relação à média pelo que, dado que muitos alunos irão certamente utilizá-la ao prosseguirem estudos no ensino superior e uma vez que é a partir dessas somas de quadrados que se define a variância, incluiu-se este descritor onde se fixa notação e se estabelece uma fórmula de cálculo equivalente e de mais fácil manipulação.
3.3	**Comentário** Este descritor tem por objetivo dar a conhecer uma importante propriedade de SS_x que se traduz, essencialmente, em dizer que somente $n-1$ das suas parcelas são independentes pois a parcela restante fica determinada pelo facto de ser nula a soma dos desvios em relação à média (ver descritor 3.1). Note-se que, além disso, menos do que $n-1$ parcelas de SS_x não determinam o valor das restantes. 1. Para uma certa amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_6)$, conhecem-se os desvios $d_i = x_i - \bar{x}$ para $i = 1,2,\dots,5:\ d_1 = 3,\ d_2 = -2,\ d_3 = 5, d_4 = -1, d_5 = 2$ 1.1. Determine o valor de d_6 . 1.2. Calcule a soma dos quadrados dos desvios, SS_x . 1.3. Sabendo que $x_1 = 10$, identifique a amostra $\underset{\sim}{x}$ e calcule o valor da respetiva média. 2. Justifique as sucessivas passagens na seguinte sequência de igualdades: $SS_x = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{x} + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$.
3.5	1. Registou-se a altura, em *cm*, de 5 raparigas e obteve-se a seguinte amostra: $\underset{\sim}{x} = (160, 172, 158, 165, 166)$. Seja $\underset{\sim}{y}$ a amostra das alturas das *5* raparigas, convertidas para metros. Calcule SS_x e SS_y e verifique que SS_x = 10000 SS_y. 2. *Dado um número real a , considere as amostras $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\underset{\sim}{y} = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$. Utilizando a fórmula de cálculo de SS_y e propriedades dos somatórios, mostre que $SS_y = a^2 SS_x$. 3. Uma certa balança tem um desvio positivo sistemático de $5g$. Pesaram-se nessa balança 4 laranjas, uma de cada vez e registou-se o seu peso em gramas. Obteve-se a amostra $\underset{\sim}{x} = (210, 182, 205, 198)$. Seja $\underset{\sim}{y}$ a amostra dos verdadeiros pesos de cada uma das 4 laranjas. Calcule SS_x e SS_y e mostre que SS_x = SS_y 4. *Considere as amostras $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\underset{\sim}{y} = (x_1 + h, x_2 + h, \dots, x_n + h)$ onde h é um número real. Utilize a fórmula de cálculo de SS_y e propriedades dos somatórios para mostrar que $SS_y = SS_x$.

	Comentário Dado que a soma dos quadrados dos desvios em relação à média é tanto menor quanto mais próximos da média estiverem os valores da amostra, a soma dos quadrados dos desvios em relação à média fornece, por isso, uma medida da dispersão ou variabilidade da amostra. Como propriedades da soma dos quadrados dos desvios em relação à média, destaca-se o facto de só ser nula se todos os valores da amostra forem iguais entre si, não se alterar perante translações e alterar-se perante uma mudança de escala ou de unidade de medida.
3.6	1. Considere a amostra $\underset{\sim}{x}(1,1,2,3,4,1,2,1,3,1,1,3,4,4,5)$. 1.1. Calcule SS_x utilizando a definição. 1.2. Organize os dados numa tabela de frequências e verifique que, sendo n_j as frequências de cada um dos 5 valores da amostra, $SS_x = \sum_{j=1}^{5}(\tilde{x}_j - \bar{x})^2 n_j$. 2. Considere uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de dimensão n e $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m$ os m valores da amostra $\underset{\sim}{x}$. Justifique que $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^{m}(\tilde{x}_j - \bar{x})^2 m_j$
3.9	**Comentário** Como já foi referido, a soma dos quadrados dos desvios em relação à média fornece uma medida da dispersão da amostra mas, por ir aumentando à medida que se incluem novos elementos, não é um bom indicador da variabilidade existente nos valores da variável estatística de interesse na população de onde se recolheu a amostra.
3.11	**Comentário** Independentemente da dimensão da amostra $\underset{\sim}{x}$, o par $(\bar{x}, s_x)$ dá uma informação relevante acerca da distribuição da amostra. Mais precisamente, fornece-nos uma estimativa (por excesso) da percentagem de unidades estatísticas que têm valores da variável de interesse x fora de intervalos fechados centrados na média da amostra. De facto, decorre de um resultado devido a Chebycheff (1867) que, sendo C_k o número de unidades estatísticas cujos valores da variável de interesse x estão fora do intervalo $[\bar{x} - ks_x, \bar{x} + ks_x]$, então $\frac{C_k}{n}$ é sempre inferior a $\frac{1}{k^2}$. De igual modo, sendo D_k o número de unidades estatísticas cujos valores da variável x pertencem ao intervalo $[\bar{x} - ks_x, \bar{x} + ks_x]$, então $\frac{D_k}{n}$ é sempre superior a $1 - \frac{1}{k^2}$.

Exemplo:

De uma certa população recolheu-se a amostra A de unidades estatísticas e registou-se os valores da variável x de interesse. Obteve-se como média da correspondente amostra $\underset{\sim}{x}$ o valor $\bar{x} = 10$ e como desvio padrão $s = 2.5$. Fazendo $k = 2$ no resultado apresentado neste descritor, estas duas características amostrais permitem-nos dizer que não há mais de 25% das unidades estatísticas de A com valores fora do intervalo $[5, 15]$. Assim, 25% é uma estimativa, por excesso, da percentagem de unidades estatísticas que têm valores fora do intervalo $[5, 15]$. Podemos também dizer que é igual a 75% uma estimativa, por defeito, da percentagem de unidades estatísticas de A cujos valores pertencem ao intervalo $[5, 15]$.



Embora não se estude o referido teorema de Chebycheff, no exemplo seguinte apresenta-se uma demonstração direta do resultado expresso neste descritor.

1. ** De uma certa população recolheu-se a amostra A, de dimensão n, de unidades estatísticas e registou-se os valores da variável x de interesse. Sem perda de generalidade, admita que numera as unidades estatísticas de modo a que sejam atribuídos os números de 1 a r aquelas cujos valores da variável x estão fora do intervalo $[\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s]$, onde s é o desvio padrão da amostra.
   - 1.1. Justifique que, para $i = 1, 2, \ldots, r$, se tem $|x_i - \bar{x}| > 2s$, pelo que, também, $(x_i - \bar{x})^2 > 4s^2$.
   - 1.2. Conclua da alínea anterior que $\sum_{i=1}^{r}(x_i - \bar{x})^2 > 4rs^2$.
   - 1.3. Justifique que também se tem $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 > 4rs^2$, onde n é a dimensão da amostra.
   - 1.4. Tendo em conta a fórmula de cálculo da variância, conclua que a desigualdade anterior é equivalente a $(n-1){s_x}^2 > 4rs^2$, pelo que também se tem $ns^2 > 4rs^2$, ou seja, $r < 0{,}25\,n$ desde que s não seja nulo.
   - 1.5. Considere agora o intervalo na forma geral $[\bar{x} - ks, \bar{x} + ks]$ e deduza que, nesse caso, a última desigualdade passa a ter a forma $r < \frac{1}{k^2}n$.

4.1

Comentário

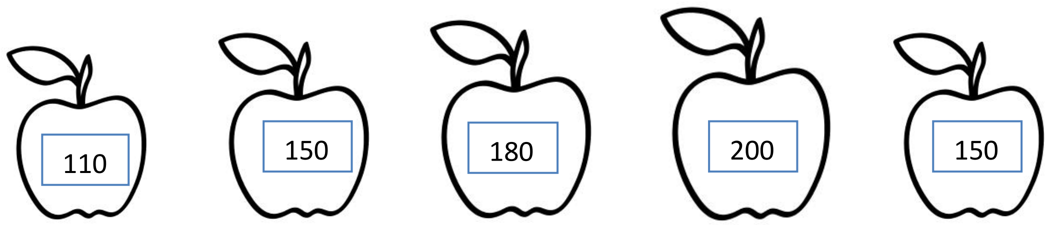
No ensino básico os alunos já tiveram de recorrer à ordenação de conjuntos de dados, nomeadamente para calcular as respetivas mediana e quartis. Este descritor fixa a notação para os termos de uma amostra ordenada.

Por exemplo, dada a amostra $\underset{\sim}{x} = (15, 12, 10, 15, 8, 10, 15)$ a amostra ordenada é $(8, 10, 10, 12, 15, 15, 15)$ onde, por exemplo, $x_{(2)} = x_{(3)} = 10$ e $x_{(5)} = x_{(6)} = x_{(7)} = 15$.

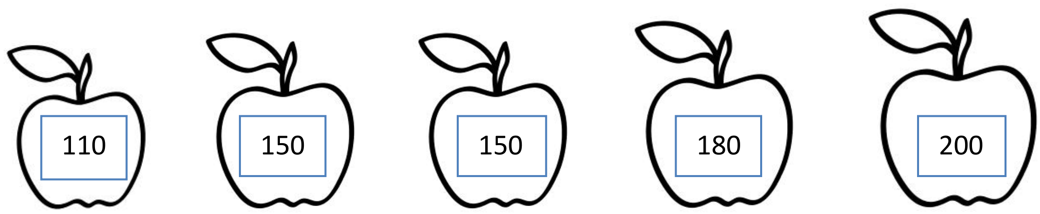
4.2
4.3

Comentário

Tome-se, a título de exemplo, a amostra $\underset{\sim}{x} = (110, 150, 180, 200, 150)$ referente aos pesos, em gramas, de 5 maçãs. Como foi anteriormente referido, a ordem por que surgem os valores na sequência pressupõe que de alguma forma foi escolhida uma primeira maçã para ser pesada e registado o respetivo peso, em seguida ter-se-á escolhido uma segunda maçã que, mais uma vez, foi pesada e registado o seu peso e, assim sucessivamente, até estarem pesadas todas as maçãs e registados todos os pesos.



Ordenando as maçãs pelo peso respetivo, obtém-se a amostra de maçãs (unidades estatísticas) ordenada de acordo com os valores da variável de interesse (o peso).



Por sua vez, no que respeita à variável peso, a amostra ordenada é $(110, 150, 150, 180, 200)$.

De modo a clarificar a noção de percentil, considere-se o caso concreto do percentil 30. De acordo com a definição, uma vez que $\frac{5\times 30}{100} = 1{,}5$, o percentil 30 é o valor de ordem $[1{,}5] + 1$ da amostra ordenada, ou seja, $P_{30} = x_{(2)} = 150$ (gramas). Já o percentil 80, por exemplo, uma vez que $\frac{5\times 80}{100} = 4$ (inteiro), é dado por $P_{80} = \frac{x_{(4)}+x_{(5)}}{2} = \frac{180+200}{2} = 190$ gramas.

Note-se que o percentil não tem, obrigatoriamente, de ser um dos valores da amostra. É, no entanto, um valor que verifica o seguinte:

«Dada uma amostra A de uma certa população e uma variável estatística x de interesse, a percentagem de unidades estatísticas de A que têm valores inferiores ou iguais a P_k é, pelo menos $k\%$ e a percentagem de unidades estatísticas que têm valores superiores a P_k é, quando muito, $(100 - k)\%$».

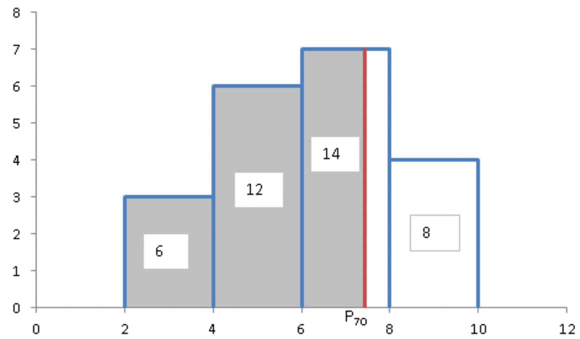
No exemplo dado, podemos então dizer que, pelo menos 80% das maçãs têm pesos inferiores ou iguais ao percentil 80 (190 gramas) e que, no máximo, 20% das maçãs têm pesos superiores ao percentil 80. Como facilmente se confirma, tem-se, neste caso, exatamente 80% das maçãs com peso inferior ou igual a 190 gramas (4 maçãs em 5) e temos exatamente 20% com peso superior a 190 gramas (1 maçã em 5). No entanto, se analisarmos o caso do percentil 30, as afirmações, sendo verdadeiras, estão longe de fornecer limiares precisos. De facto, é verdade que pelo menos 30% das maçãs têm peso inferior ou igual a 150 gramas, no entanto a percentagem das que verificam esta condição é 60% (3 maçãs em 5). Também é verdade que, no máximo, 70% das maçãs pesam mais do que 150 gramas, mas este caso concreto mostra que essa percentagem é, apenas, de 40% (2 maçãs em 5). Discrepâncias desta natureza nos limiares dados pelos percentis ocorrem em amostras onde haja duas ou mais unidades estatísticas com valores idênticos e, por esse motivo, a descrição de uma amostra através de percentis é especialmente apropriada no caso das variáveis de natureza contínua (como é o caso da altura e peso de bebés, onde a referência aos percentis já é de uso comum).

4.4 A definição de percentil para dados organizados em classes pode ter como suporte visual o histograma. Recorde-se que o histograma é um diagrama de áreas para o qual há uma relação de proporcionalidade direta entre a área de cada retângulo e a frequência (absoluta ou relativa) da respetiva classe. Quando uma amostra de dimensão n está organizada em classes de igual amplitude $h > 0$ consegue-se esse objetivo tomando para altura do retângulo, ou a frequência absoluta n_j, ou a frequência relativa $\frac{n_j}{n}$. Quando as classes têm diferentes amplitudes, a altura de cada retângulo tem de ser "corrigida" adequadamente dividindo a frequência (absoluta ou relativa) pela amplitude da respetiva base.

O descritor 4.4 apresenta uma forma de se obter o percentil de ordem k para dados organizados em classes que corresponde a determinar o ponto do eixo das abcissas para o qual a área acumulada é igual a $k\%$ da área total. Admite-se apenas o caso de organização em classes de igual amplitude mas a abordagem é facilmente generalizável a casos em que as classes tenham amplitudes diferentes.

Observe-se que, no caso em que as classes têm igual amplitude e em que se toma como altura de classe a frequência absoluta, a área total do histograma é nh. Pretende-se então encontrar o ponto x tal que a área do histograma, desde o limite inferior do primeiro intervalo de classe até esse ponto x, seja igual a $\frac{knh}{100}$.

A figura seguinte ilustra a localização do percentil 70. De facto, tendo em conta que as classes têm igual amplitude e que a área de cada retângulo é a assinalada nas etiquetas respetivas, podemos concluir que a área total é igual a 40, pelo que a área correspondente ao percentil 70 é 28. Acumulando sucessivamente as áreas dos retângulos a partir do primeiro, verifica-se que a soma das áreas dos dois primeiros retângulos é estritamente inferior a 28 mas que ao adicionar a área do terceiro retângulo esse valor é excedido. Assim, o percentil 70 localiza-se no intervalo $[6,8[$, mais precisamente, de modo a verificar-se a igualdade $(P_{70} - 6) \times 7 = 28 - (6 + 12)$. Resolvendo esta equação obtém-se $P_{70} = \frac{10+42}{7}$, ou seja, $P_{70} = 7{,}43$.



5.1	1. Contou-se o número de folhas em cada uma de 150 plantas do tabaco (Havano). Os resultados estão registados na Tabela a seguir apresentada.

Número de Folhas	Número de Plantas
17	3
18	22
19	44
20	42
21	22
22	10
23	6
24	1

Calcule a média, a soma dos quadrados dos desvios em relação à média, a variância e o desvio padrão do número de folhas destas plantas.

2. Num estudo sobre a resistência individual ao esforço físico, submeteram-se dois grupos de indivíduos a dois aparelhos diferentes (bicicleta-ergómetro e passadeira rolante), medindo-se o tempo (em minutos) até ao consumo máximo de oxigénio. Os resultados foram os seguintes:

   Bicicleta : amostra $\underset{\sim}{x} = (7.5,\ 8.7,\ 9.2,\ 9.8,\ 10.9,\ 11.1,\ 11.2,\ 12.8,\ 13.5)$

   Passadeira: amostra $\underset{\sim}{y} = (8.7,\ 13.2,\ 13.8,\ 14.7,\ 15.5,\ 16.2,\ 16.2,\ 17.8)$

   2.1 Calcule $\bar{x}$ e $\bar{y}$ e, com base nestes valores e na dimensão das duas amostras, calcule a média da amostra conjunta $\underset{\sim}{z}$.

   2.2 Calcule SS_x , SS_y e SS_z , indique os respetivos graus de liberdade e verifique que $SS_z = SS_x + SS_y + (\bar{x} - \bar{z})^2 + (\bar{y} - \bar{z})^2$.

   2.3 Para qual dos aparelhos foi observada uma maior variabilidade nos tempos até ao consumo máximo de oxigénio?

3. *Considere uma amostra $\underset{\sim}{x}$ ordenada, $\left(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}\right)$, e admita que se substitui o máximo da amostra por um valor $y = x_{(n)} + h$ com $h > 0$. Determine o menor valor de h que faz com que a média da nova amostra fique superior a $x_{(n-1)}$. Considera que neste caso a média traduz bem a localização central da amostra? Justifique.

4. De acordo com dados históricos, a amostra das temperaturas mínimas diárias em Lisboa durante os meses de janeiro dos anos 2000 a 2010 tem uma média igual a 10° e um desvio padrão igual a 3°. Indique um limite superior para a percentagem de dias em que a temperatura mínima foi inferior a 0°.

Comentário

As seguintes atividades permitem ilustrar junto dos alunos, de uma forma heurística, duas importantes propriedades da média enquanto estimativa do correspondente parâmetro da população. Quando se está interessado em conhecer a média dos valores que uma certa variável estatística x assume quando se considera a totalidade das unidades estatísticas de uma população P (média populacional) partindo, para tal, de uma amostra A e dos respetivos valores na variável x, é importante ter-se a noção de quais os fatores que condicionam a maior ou menor aproximação da média amostral à média populacional.

Para ilustrar que a média amostral converge, em certo sentido, para a média populacional à medida que aumenta da dimensão da amostra, basta recorrer a uma lista de números pseudo--aleatórios e a uma regra de correspondência entre cada um destes números e cada uma das unidades estatísticas da População. Desta forma será possível conduzir a seguinte experiência:

- Selecionam-se ao acaso m amostras de dimensão n_1, calcula-se a média de cada uma delas e representa-se graficamente num diagrama de pontos.
- Repete-se o procedimento, considerando agora uma dimensão $n_2 > n_1$ para qualquer das m amostras , calculam-se as médias e representam-se no mesmo gráfico em que se representou as médias do passo anterior. As médias do grupo de amostras de maior dimensão irão localizar-se tendencialmente mais perto umas das outras e também mais perto da média populacional, o que significa que a média ganha precisão à medida que a dimensão da amostra aumenta.

Para se mostrar empiricamente o impacto da dispersão populacional, mais precisamente, do valor do desvio-padrão obtido a partir dos valores da variável estatística em todas as unidades estatísticas da população, é necessário partir-se de duas populações para as quais faça sentido medir (na mesma unidade) alguma variável estatística de interesse comum e que tenham valores dos respetivos desvios-padrão suficientemente diferentes. De cada uma das populações selecionam-se m amostras de uma mesma dimensão n e representam-se graficamente as respetivas médias. Ilustrar-se-á assim uma outra propriedade da média segundo a qual ela é tão mais precisa quanto menor for o desvio padrão populacional.

5. Dê um número de 1 a N a cada aluno da sua turma (N é o total de alunos) e registe numa lista a altura de cada um deles.
   5.1. Utilizando a calculadora, selecione aleatoriamente 5 alunos da turma e calcule a média das alturas respetivas. Repita o procedimento 10 vezes e represente num diagrama de pontos cada uma das médias obtidas e também a média das alturas de todos os alunos da turma.
   5.2. Aumente a dimensão das amostras recolhidas para 12 e, tal como no item anterior, repita o procedimento 10 vezes calculando em cada passo a média das alturas dos alunos selecionados. Compare o novo diagrama de pontos com o anterior e tire conclusões.

6. Fez-se um estudo acerca do peso de 50 bébés do sexo masculino no momento do nascimento e obtiveram-se os seguintes dados:

3,217	3,337	3,510	3,404	3,568
3,986	3,235	3,643	3,187	3,991
2,822	3,088	4,061	3,006	3,770
3,465	3,473	2,861	3,473	3,219
4,075	3,537	4,075	3,730	3,754
3,749	3,238	3,434	3,229	3,558
4,083	3,446	2,876	3,696	2,117
3,383	3,601	3,478	3,130	3,185
3,683	3,223	3,766	3,822	2,806
3,262	2,641	3,173	2,649	3,608

   6.1. Registe estes dados numa folha de cálculo e atribua-lhes um número de ordem.
   6.2. Determine a média populacional e o desvio-padrão.

	6.3. Utilizando os números de ordem atribuidos em 6.1., selecione uma amostra aleatória de 10 dados, determine a média amostral e o desvio-padrão amostral e compare-os com a média e desvio padrão da população. *(A folha de cálculo Excel tem uma função "$= ALEATORIOENTRE(a; b)$" que permite gerar aleatoriamente números compreendidos entre dois números dados a e b. (a=1 e b=10). Se arrastar a célula onde obteve o primeiro número, para outras linhas ou colunas, obtém mais valores.)* 6.4. Selecione agora aleatoriamente uma amostra de 20 dados, determine a média amostral e o desvio-padrão amostral e compare estes valores com os obtidos na alínea anterior e com os relativos à população.
5.2	1. Os seguintes dados referem-se à duração, em minutos, do percurso casa-escola realizado num dado dia por uma amostra aleatória de 32 alunos de uma escola secundária. 12 7 44 16 22 12 11 5 9 32 20 62 18 29 35 13 23 21 8 41 36 15 49 17 45 7 19 37 65 6 18 44 1.1. Ordene os dados da amostra e determine os percentis 50, 25 e 75. 1.2. Determine, dos 30% percursos com maior duração, aquele que tem menor duração. 1.3. A que percentil pertence o percurso com 36 minutos? 2. Na seguinte tabela estão representados dados relativos ao peso (kg) de 60 crianças do sexo masculino com 20 meses de idade e acompanhadas num determinado centro de saúde. 8,3 15,7 15,1 8,9 14,4 11,9 13,0 11,4 9,1 15,7 10,2 12,6 10,1 12,9 15,3 14,7 9,5 11,6 12,1 9,6 9,2 9,9 14,5 10,3 12,7 15,1 10,4 16,2 11,6 8,1 12,1 10,9 14,8 9,9 15,0 2.1 Agrupe os dados em classes de amplitude 2. 2.2 Construa o respetivo histograma. 2.3 Utilizando o histograma, determine os percentis de ordem 10, 15, 50, 75 e 85. 2.4 Identifique a que percentil pertence o dado 11,4. 2.5 Quantas crianças deste estudo têm peso inferior ao percentil 75? 2.6 Qual a criança com peso mais elevado do conjunto das que têm os pesos 20% mais baixos? 2.7 Compare os valores obtidos com os valores estabelecidos pela organização mundial de saúde em 2006 e indicados na tabela junta.

percentil	0,1	3	5	10	15	50	85	97	99,9
Peso (kg)	8,0	9,2	9,4	9,8	10,1	11,3	12,7	14,0	16,0