ÍNDICE

1 - INTRODUÇÃO

O processo de ensino-aprendizagem da Matemática assume características próprias conforme o nível etário dos alunos e o tipo de escola em que decorre. Não faz sentido ensinar Matemática de maneira semelhante a crianças de 6 ou 7 anos, que entram no 1º ciclo, ou a jovens de 16 ou 17 anos, que já terminaram o ensino obrigatório. Não se pode ensinar Matemática da mesma forma a alunos de cursos que visam prosseguir para o ensino superior e a alunos de escolas profissionais, cujo objectivo imediato é a obtenção de um diploma que lhes permita a rápida integração no mercado de trabalho. E muito menos é possível pensar em ensinar hoje Matemática aos jovens de qualquer destas idades do mesmo modo que há 40 ou há 400 anos.

Existe presentemente, em Portugal, uma reflexão significativa sobre questões de Didáctica da Matemática que surge publicada em artigos de revistas, actas de encontros, teses e monografias de investigação. Trata-se de uma reflexão que se encontra dispersa e que, na sua maior parte, tem um carácter geral ou se orienta, sobretudo, para o ensino básico. Daí a necessidade desta publicação, especificamente concebida para proporcionar uma sistematização de questões de Didáctica da Matemática no ensino secundário.

Consideramos, em primeiro lugar, questões da Filosofia da Matemática, que consideramos essenciais para a compreensão da natureza desta ciência e do processo de ensino-aprendizagem da disciplina de Matemática. Na verdade, o entendimento que se tem desta ciência tem importantes reflexos na prática de ensino. Assim, retomamos aqui problemas clássicos como o da verdade e da certeza em Matemática, a origem das ideias matemáticas e a sua forma de desenvolvimento. Analisamos a Matemática segundo diversas perspectivas, incluindo o seu carácter histórico, social e cultural.

Abordamos, de seguida, questões relativas ao currículo propriamente dito. Fazemos uma breve perspectiva histórica sobre a evolução recente das orientações e conteúdos de ensino, referimos as influências fundamentais no processo de evolução curricular, discutimos as finalidades do ensino da Matemática no ensino secundário e consideramos os principais vectores de mudança neste domínio.

Em terceiro lugar, analisamos a dinâmica do processo de ensino-aprendizagem neste nível de escolaridade. Consideramos questões como a relação entre tarefa e actividade, as diferentes formas que pode assumir a comunicação e o discurso na sala de aula, o processo de negociação de significados matemáticos, o ambiente de trabalho e a cultura da sala de aula e os diferentes modos de trabalho dos alunos. Fazemos, igualmente, referência à utilização de diversos tipos de materiais, em especial, calculadoras e computadores.

Finalmente, dedicamos a nossa atenção à avaliação das aprendizagens no ensino secundário. Perspectivamos diversos princípios fundamentais e procuramos dar sugestões de utilização de instrumentos e métodos de avaliação adequados ao ensino secundário.

Esta publicação, que tem como referência o programa ajustado de Matemática do ensino secundário a vigorar a partir do ano lectivo de 1997/98, foi feita com o grande objectivo de constituir um instrumento de trabalho para os professores. Para tornar o texto de mais fácil leitura restringimos o mais possível o emprego de citações e evitámos o uso de uma linguagem académica. Procurámos ilustrar algumas das ideias mais importantes com transcrições de autores que representam diversas comunidades profissionais e escolas de pensamento e com exemplos retirados de projectos de investigação que dedicaram a sua atenção à sala de aula.

O trabalho que apresentamos tem por base estudos publicados no âmbito da educação matemática, tanto nacionais como internacionais, trabalhos de investigação realizados no nosso país que se debruçam mais especificamente sobre o ensino secundário e a nossa própria experiência na sala de aula e na formação de professores. A sua dimensão não possibilita um tratamento mais pormenorizado dos diversos assuntos, pelo que o professor interessado em aprofundar as ideias aqui apresentadas poderá fazê-lo através das leituras recomendadas ou recorrendo à bibliografia geral, utilizada na elaboração da presente publicação.

João Pedro da Ponte, *Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa*
Ana Maria Boavida, *Escola Superior de Educação de Setúbal*
Margarida Graça, *Escola Secundária José Gomes Ferreira, Lisboa*
Paulo Abrantes, *Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa*

2 - A NATUREZA DA MATEMÁTICA

A questão do que é hoje um bom ensino da Matemática não é uma questão pacífica. Tem diversas respostas dependendo das finalidades da educação privilegiadas, que variam consoante os contextos sociais, políticos e culturais onde a questão é colocada, que se relacionam com as perspectivas psicológicas e sociológicas sobre a aprendizagem em que nos situarmos. No entanto, diversos matemáticos, filósofos e educadores salientam, cada vez mais, que a concepção que se sustenta sobre a Matemática influencia profundamente o que se considera ser desejável relativamente ao seu ensino e aprendizagem. Assim sendo, como Hersh escreve num artigo publicado em 1986, a questão não é então qual a melhor maneira de a ensinar, mas o que é realmente a Matemática.

Ao pretender fazer-se um cômputo geral da Matemática que revele os seus factores essenciais e explique como é que os seres humanos são capazes de a fazer, torna-se difícil organizar os diversos aspectos num todo coerente. De facto, a simples pergunta “afinal o que é a Matemática” tem sido, ao longo dos tempos, objecto de diversas tentativas de resposta. E os problemas acentuam-se quando se pretende identificar os objectos das suas teorias. A Matemática é o conhecimento de quê? Esta questão filosófica, apesar de ser tão antiga quanto esta ciência, tem gerado, desde sempre, inúmeras controvérsias.

Constitui, pois, um desafio conceber um balanço que abarque a complexidade e o carácter multifacetado da Matemática enquanto actividade e corpo de conhecimentos. Este desafio é acrescido se se tiver em conta que ela não tem permanecido igual a si própria ao longo dos tempos. Pelo contrário, tem sofrido um processo de evolução constante no qual se detectam mudanças profundas nalguns dos seus aspectos mais essenciais. Sistema organizado, linguagem, instrumento, actividade, são diversas perspectivas segundo as quais a Matemática tem sido encarada. Axiomatização, formalização, dedução, são o essencial para alguns e apenas uma parte, nem sequer a mais importante, para outros.

Tradicionalmente, a epistemologia da Matemática procura responder a questões relacionadas com a lógica interna de produção do saber, adquirindo as respostas, frequentemente, um carácter prescritivo. Procura-se garantir a certeza do saber matemático e discute-se a natureza e os fundamentos desta ciência. No entanto, uma reflexão limitada a estas questões falha em localizá-la num contexto mais amplo do pensamento humano e da história.

Se a Matemática for descrita em termos dos seus conceitos, características, história e práticas, abre-se espaço para que a filosofia da Matemática, para além de reflectir sobre questões internas relativas ao conhecimento matemático, sua existência e justificação, se debruce também sobre questões externas relacionadas, nomeadamente, com a origem histórica e os contextos sociais de produção desse conhecimento. A actividade matemática poderá, assim, ser discutida como parte integrante da cultura humana em geral.

Neste capítulo reflecte-se sobre a natureza da Matemática, procurando enquadrar esta dualidade relativa a aspectos internos e externos da produção do saber. Numa primeira secção, abordam-se questões relacionadas com a natureza dos objectos matemáticos e discute-se o papel da experiência e da razão na génese e desenvolvimento da Matemática. Tendo por contexto uma perspectiva histórica, refere-se, numa segunda secção, a origem da Matemática e questiona-se a intemporalidade e o carácter absoluto atribuídos, frequentemente, à verdade, certeza e rigor matemáticos. A terceira secção incide sobre um período recente, particularmente importante para a filosofia da Matemática, caracterizado pela pesquisa de fundamentos seguros. Na quarta secção consideram-se direcções actuais da filosofia da Matemática e analisam-se aspectos da actividade matemática enquanto fenómeno social e cultural. Este capítulo termina com uma quinta secção, dedicada à experiência matemática, onde se referem algumas vertentes do processo de criação desta ciência, nomeadamente, a sua face extra-lógica e o contributo do computador para produção do saber matemático.

2.1 - Génese e natureza do saber matemático

2.1.1 - Natureza dos objectos matemáticos

Qual a natureza dos entes matemáticos, ou seja, a Matemática estuda o quê? Esta questão é abordada através de dois prismas de análise. Um, relacionado com a imaterialidade dos objectos matemáticos. Outro, que procura olhar estes objectos na sua relação com o sujeito que os conhece ou procura conhecer.

Imaterialidade dos objectos matemáticos

Os textos antigos, provenientes das primeiras civilizações orientais do Egipto e Babilónia, são demasiado fragmentários para permitir seguir, ao pormenor, o processo de constituição de uma aritmética e de uma geometria. No entanto, mostram claramente que os conceitos que aí intervêm "dizem respeito apenas a objectos *concretos:* enumeração de objectos de um amontoado, medida de grandezas susceptíveis de adição e subtracção, como comprimento, área, volume, peso, ângulo, para cada uma das quais se toma uma unidade e muitas vezes os seus múltiplos ou submúltiplos"[1].

Mais tarde, a partir do século V, surgem, com os pensadores gregos, as primeiras demonstrações e com elas a necessidade de precisar noções como figura, posição, grandeza, quantidade e medida. Platão mostra claramente que estas palavras não designam noções da experiência sensível, referindo que os matemáticos se servem de figuras visíveis para estabelecerem raciocínios, pensando, contudo, não nelas mas naquilo com que se parecem. Aristóteles não deixa de apoiar a ideia da imaterialidade dos objectos matemáticos, referindo, em particular, que as investigações dos matemáticos incidem sobre coisas atingidas por abstracção, de que são eliminadas todas as qualidades sensíveis como o peso, leveza ou dureza. Também Euclides, em quem vemos pela primeira vez desenvolvidas, segundo o método dedutivo, as propriedades dos objectos matemáticos concebidos por Platão e Aristóteles, não deixa qualquer dúvida quando ao facto de ter atribuído a ponto, recta, ângulo, círculo e polígono, o carácter de objectos de pensamento.

Constata-se assim que, pelo menos desde Platão, os matemáticos têm consciência de que os objectos sobre os quais raciocinam, embora tendo nomes idênticos aos que intervêm em cálculos práticos (números, figuras geométricas, grandezas) são seres completamente diferentes, seres imateriais obtidos por abstracção, a partir de objectos acessíveis aos sentidos, mas de que deles são apenas "imagens". Esta foi, aliás, uma das grandes ideias originais dos gregos: a atribuição às noções matemáticas do carácter de objectos de pensamento.

Até ao século XVIII, os matemáticos, apesar de reconhecerem a imaterialidade e o carácter ideal dos seres com que trabalhavam, tinham deles imagens acessíveis aos sentidos. No entanto, a partir dessa altura, para conseguirem novos progressos, necessitaram de introduzir novos objectos matemáticos que deixaram de apoiar-se em "imagens" sensíveis. Aos poucos vai-se delineando uma ideia que será aprofundada no século XX: a ideia de estrutura na base de uma teoria matemática. Esta ideia relaciona-se com a constatação de que numa teoria matemática mais importante do que a natureza dos objectos que aí figuram, são as relações entre esses objectos, podendo acontecer que em teorias diferentes haja relações que se exprimam da mesma maneira.

A discussão da existência de objectos matemáticos no mundo físico pode proporcionar, como evidencia Sebastião e Silva (ver página seguinte), um contexto favorável ao debate, na sala de aula, de um dos aspectos fundamentais da Matemática — o das suas relações com a natureza.

Matemática: Descoberta ou invenção?

A existência de objectos matemáticos é ou não independente do sujeito que os estuda? Para responder a esta questão contrastam-se, tradicionalmente, duas concepções: concepções idealistas e concepções realistas.

O *idealismo*, enquanto perspectiva filosófica, insiste em que toda a realidade matemática é condicionada pelas construções dos matemáticos que inventam essa realidade. Neste âmbito, os objectos matemáticos são livres invenções do espírito humano, que não existem autonomamente e que possuem, apenas, as propriedades que o pensamento puder determinar.

O *realismo* supõe a realidade de um universo matemático autónomo. Os objectos têm propriedades próprias que existem independentemente do sujeito. O homem não inventa esta realidade objectiva que lhe é exterior. Limita-se a descobri-la.

O realismo, enquanto perspectiva filosófica, tem por base a doutrina de Platão, sendo frequente, no âmbito da filosofia da Matemática, considerar sinónimos os termos realismo e platonismo. Para o platonismo os objectos matemáticos são reais, embora não sejam objectos físicos ou materiais. A sua existência é um facto objectivo, totalmente independente do nosso conhecimento. Existem fora do espaço e do tempo, são imutáveis, não foram criados e não mudarão nem desaparecerão. Assim, a Matemática tem uma existência autónoma, obedecendo a uma lógica e leis internas. A actividade de fazer Matemática consiste na descrição e descoberta desses objectos, bem como das relações que os unem. Quer uns, quer outras, uma vez que são pré-existentes, podem ser descobertos pelo espírito, mas não inventados por este.

O platonismo e o idealismo, embora se situem em posições extremas quanto à questão da existência e realidade dos objectos matemáticos, estão muitas vezes presentes, em simultâneo, no pensamento dos professores de Matemática. Por um lado, a Matemática é vista como uma revelação, como uma passagem do concreto ao abstracto, mas, por outro lado, o professor espanta-se com a sua aplicabilidade à interpretação do mundo físico. Fica perplexo com o facto de especulações puramente abstractas se aplicarem de um modo que parece tão “miraculoso” ao concreto.

Diálogo sobre a existência de entes geométricos no mundo físico

Pergunta dirigida aos alunos:

Afinal o que é um ponto, o que é uma recta, o que é um plano - na verdadeira acepção destes termos?

Na melhor das hipóteses obtém-se a resposta cómoda habitual (...):

Trata-se aí de termos primitivos, isto é de termos que não são definidos logicamente a partir de outros.

Mas o professor não deve de modo nenhum contentar-se com esta resposta. Deve sim voltar à carga:

Também os termos "gato", "rosa", etc. são termos primitivos, no mesmo sentido, e no entanto todos sabem reconhecer um gato, uma rosa etc. Ora quem é que já viu um ponto, uma recta ou um plano?

Os alunos terão de admitir que <u>ninguém</u> viu tais coisas. Mas há que lembrar-lhes:

Também ninguém viu ou espera ver centauros, sereias ou dragões. Todos sabem que não existem seres vivos com os atributos que estes nomes invocam: trata-se de meras criações da fantasia humana. Pois serão as figuras geométricas, como os centauros e as sereias, nada mais do que produtos da nossa imaginação?

Os alunos hão-de talvez dizer que não se trata da mesma coisa. É preciso encorajá-los nesse sentido e observar:

A cada passo chamamos "pontos", "segmentos de recta", "esferas", etc. a certos entes do mundo físico, tais como o sinal deixado pela ponta de um lápis sobre o papel, um fio bem esticado, uma bola de bilhar, etc.

Mas haverá logo quem repare:

Pois, sim, mas toda a gente sabe que essas coisas não são pontos, não são segmentos de recta, não são esferas.

Ao que o professor dirá:

Todavia essas coisas seriam pontos, segmentos de recta, esferas, etc. se verificassem determinadas condições que são os axiomas e as definições da Geometria de Euclides.

E perguntará logo de seguida:

Esses objectos do mundo físico não verificam as referidas condições?

Se adoptarmos a lógica bivalente a resposta só poderá ser "verificam" ou "não verificam". O aluno escolhe provavelmente a segunda (a primeira é demasiado vulnerável). Logo:

Se essas coisas não verificam as referidas condições, a geometria é inaplicável ao mundo físico, não é verdade?

Mais uma vez a resposta terá que ser "sim" ou "não" e o aluno optará provavelmente pela negativa (a primeira é incompatível com a anterior resposta). Mas o professor deverá por novamente os alunos perante a realidade:

No entanto, se medirmos os três ângulos internos de um triângulo, verificamos que a soma dos três é igual a 180^0 (...) A cada passo vemos confirmadas as previsões teóricas da geometria euclidiana, cujas aplicações são fundamentais na ciência e na técnica (...) Parece pois, que chegamos a uma conclusão absurda, desconcertante:

A GEOMETRIA É E NÃO É APLICÁVEL AO MUNDO FÍSICO.

Como poderá ser isto?

José Sebastião e Silva, 1964

Guia para a Utilização do Compêndio de Matemática

Qual é então a natureza dos objectos matemáticos? Onde devemos procurá-la? Na realidade experimental como o fizeram os primeiros matemáticos? Na actividade do indivíduo, como sustentam os idealistas? Num mundo que não se situa no espaço-tempo, como advogam os platonistas?

Estas questões embora tenham sido discutidas desde há muito por inúmeros matemáticos e filósofos permanecem actuais. O problema é, que seja qual for o nível de análise que se adopte, clarificam-se alguns aspectos mas outros permanecem envoltos em mistério. Com efeito, se se procurar a natureza dos objectos matemáticos na realidade experimental, poderá compreender-se que uma vez daí extraídos, através de uma série de abstracções cada vez mais requintadas, continuem a estar de acordo com essa realidade. Mas já não se compreenderá tão bem que eles a excedam e que possam obter-se construções dedutivas, bem mais rigorosas do que as observações e sem nenhuma comparação com elas, quanto ao processo de demonstração.

Platonismo e ensino da Matemática

O ensino clássico da Matemática assenta numa epistemologia e numa ontologia platonistas: as ideias matemáticas têm em si mesmas uma realidade. Nesta concepção, uma vez desvendada, a verdade matemática é *dada* a quem a sabe ver, a quem tem poder de abstracção suficiente. O papel do professor de Matemática consiste em levar o aluno a partilhar dessa visão a que ele próprio já teve acesso, a virar o espírito do aluno — “o olhar da alma” como dizia Platão — em direcção ao mundo matemático (...) São diversas as consequências pedagógicas da epistemologia e ontologia subjacentes à aprendizagem tradicional da Matemática. O matemático desvenda as verdades e o ensino deve virar o olhar da alma do aluno para estas verdades. Desde logo, o que o professor retém da actividade do matemático, não é esta actividade, que a maior parte das vezes ignora ou sobre a qual passa em silêncio, mas os seus resultados, teoremas, definições, demonstrações, axiomas. Além disso, o professor é conduzido a sobrevalorizar a forma pela qual estes resultados são apresentados. Se se pensar na actividade do matemático, esta sobrevalorização da forma é paradoxal: não é a forma que dá sentido aos resultados, uma vez que ela é apenas determinada *a posteriori,* quando os resultados foram adquiridos por outras vias bastante mais caóticas (...) Esta ruptura entre a actividade matemática e os seus resultados, entre os problemas e os conceitos, origina um insucesso escolar importante, particularmente em alunos de famílias populares que, no seu meio, não estão habituados a manipular uma linguagem explícita, formalizada e codificada.

R. Bkouche, B. Charlot, N. Rouche, 1991
Faire des mathématiques: le plaisir du sens

Por outro lado, se se considerar a actividade do sujeito, pode entender-se o rigor dos desenvolvimentos dedutivos e sua fecundidade, mas coloca-se o problema do acordo com o real, sobretudo o da antecipação de resultados. Não se entende, nomeadamente, como é que apenas através de desenvolvimentos matemáticos, se podem obter resultados importantes para a compreensão do mundo físico, que se vêm a revelar úteis, por vezes muitos anos mais tarde, como aconteceu, por exemplo, com os estudos sobre cónicas feitos por Apollonius de Perga há mais de 2000 anos.

Cónicas e órbitas dos planetas

O geómetra grego Apollonius de Perga escreveu, no ano 200 a. C. um tratado sobre secções cónicas em que descrevia de forma sistemática todas as propriedades destas curvas. Este estudo foi um exercício de Matemática pura e muito poucas aplicações das cónicas foram feitas na antiguidade clássica. Muito mais tarde, em 1604, isto é cerca de 1800 anos depois, Kepler contactou com estes trabalhos e estudou as suas aplicações no domínio da óptica. Em 1609, recorrendo a estes trabalhos afirmou que as órbitas dos planetas deveriam ser descritas como elipses e não como círculos e epiciclos, lançando, assim, as bases para a teoria da gravitação de Newton.

Felix Browder e Saunders Mac Lane, 1988
A relevância da Matemática

Considerando a possibilidade de os objectos matemáticos se situarem para lá do sujeito e da realidade experimental, num mundo de ideias existente por si mesmo, resta o problema de explicar como é que os seres humanos são capazes de tomar contacto com esse mundo; ficam sem resposta os problemas relativos tanto ao acordo com essa realidade, como à adequação do sujeito aos instrumentos dedutivos.

Assim, qualquer uma destas perspectivas sobre a natureza dos objectos matemáticos é bastante razoável e, ao mesmo tempo, todas elas encontram sérias dificuldades.

2.1.2 - Experiência e razão na génese e desenvolvimento da Matemática

Uma vertente de análise que poderá contribuir para aprofundar a temática da natureza dos objectos matemáticos prende-se com o papel da experiência e da razão na génese e formação da Matemática. Neste âmbito distinguem-se, comummente, duas perspectivas, o racionalismo e o empiricismo, cuja síntese foi tentada por Kant.

Racionalismo e empiricismo

Os racionalistas entre os quais se encontram, por exemplo, Espinosa, Descartes e Leibnitz, viam, tal como Platão, a razão como um traço inerente à mente humana, através do qual as verdades podiam ser conhecidas independentemente da observação. A razão era a faculdade que permitia ao homem conhecer o Bem e o Divino e, para os racionalistas, esta faculdade era mais facilmente visível na Matemática. Afinal, esta ciência, diziam, partia de verdades auto-evidentes, os axiomas, e, através de raciocínios estabelecidos pela razão, conseguia descobrir e chegar a conclusões não evidentes, e por vezes, inesperadas. Assim, a existência da Matemática constituía, para os racionalistas, o melhor argumento para confirmar a sua visão sobre o mundo.

O racionalismo foi posteriormente questionado pelo *materialismo* e pelo *empiricismo*. O progresso das ciências da natureza, com base no método experimental, fez triunfar o empiricismo que afirmava que todo o conhecimento tinha por base a observação. O conhecimento matemático era, porém, a excepção que confirmava esta regra.

No contexto do empiricismo, os trabalhos de David Hume desempenharam um papel de relevo. Este filósofo defendia que não conhecemos nem o espírito, nem a matéria, e que não deveríamos sequer admitir a existência de outras substâncias, senão daquelas de que temos experiência imediata; esta experiência reduz-se a um conjunto de sensações. Duvidava da existência da matéria, interrogando-se sobre quem poderia garantir a existência de um mundo de objectos sólidos subsistindo em permanência se tudo o que sabemos provém das nossas próprias sensações provenientes de um tal mundo. Relativamente à Matemática, Hume não rejeitou os axiomas relativos a números e figuras geométricas, mas optou por os desvalorizar, tal como fez com os resultados que deles derivavam, considerando que, quer uns, quer outros, provinham de sensações respeitantes ao presumível mundo físico.

Mais tarde, em meados do século XIX, Stuart Mill, chegou a propor uma teoria empiricista sobre o conhecimento matemático, sustentando que as afirmações matemáticas são generalizações indutivas feitas a partir das nossas experiências ou observações. Assim, a Matemática seria uma ciência natural que em nada diferia das outras. Esta teoria, que não punha em causa a certeza do conhecimento matemático pois Mill supunha a certeza da indução, não teve aceitação nos meios filósofos e matemáticos chegando a ser fortemente contestada, e mesmo ridicularizada, por Frege[2].

A filosofia de Hume não só pôs em causa a existência de leis científicas relativas a um mundo físico, objectivo e permanente, como depreciou os esforços e resultados da ciência e da Matemática e, mais que isso, desafiou “o valor da própria razão”[3]. Ora, este facto causou indignação na maior parte dos intelectuais do século XVIII, que consideraram que a filosofia de Hume devia ser refutada. Kant empreendeu esta tarefa, tendo as suas reflexões procurado unificar as duas tradições contraditórias do racionalismo e do empiricismo.

Kant e a Matemática

Kant distingue o *conhecimento a priori* do *conhecimento a posteriori*, e o *conhecimento analítico* do *conhecimento sintético*. O conhecimento *a priori* é o conhecimento universal, necessário e intemporal, que se fundamenta na razão e é independente da experiência.

Pelo contrário, o conhecimento *a posteriori*, ou empírico, consiste em proposições fundamentadas na experiência, isto é, nas observações do mundo físico. Por sua vez, o conhecimento analítico é o conhecimento explicativo. Em particular, o conhecimento *a priori* analítico é o que sabemos ser verdadeiro por análise lógica, pelo próprio significado dos termos usados. Um exemplo do conhecimento *a priori* analítico é a afirmação "os solteiros não são casados". Diferentemente, o conhecimento sintético é aquele que acrescenta algo de novo ao conhecimento que já se possui. Afirmar que "um segmento de recta é a distância mais curta entre dois pontos", constitui, para Kant, um exemplo de conhecimento sintético *a priori*.

A grande questão filosófica de Kant é saber como é possível o conhecimento sintético *a priori* e, em particular, como é possível a existência de conhecimento matemático. A resposta que dá a esta questão é a de que o nosso espírito dispõe de formas puras de espaço e de tempo (a que Kant chama intuições) através das quais percebe, organiza e compreende a experiência. Assim, Kant embora glorificando a razão a que atribui a tarefa de explorar as formas do espírito humano, não nega o valor da experiência e dos dados provenientes da observação. Estes dados contribuem para estimular o poder organizador do espírito.

A Matemática representa, para Kant, a prova suprema da existência de conhecimento *a priori*. A argumentação que propõe é a de que uma vez que a intuição do espaço tem a sua origem no espírito, este reconhece de imediato algumas propriedades desse espaço. Estas propriedades são sistematizadas na geometria (entendida como geometria euclidiana, a única que Kant conhecia). Simultaneamente, considera que como os números inteiros derivam da intuição do tempo, o conhecimento do tempo é sistematizado na aritmética. Logo, para Kant, as proposições matemáticas são objectivas, necessárias, universalmente válidas, independentes da experiência, e impõem-se-nos pela maneira como a nossa mente funciona.

Esta breve passagem pela filosofia de Kant permite destacar que este filósofo, ao colocar a fonte da Matemática no poder organizador do espírito, concedeu a esta ciência um estatuto especial, um carácter de necessidade e uma marca de certeza intemporal e incontestável, que se manteve durante bem até ao século XX. As escolas fundacionistas que no início deste século tentaram encontrar fundamentos seguros para a Matemática, no fundo, "ambicionavam todas manter a Matemática na posição especial que Kant lhe tinha concedido"[4].

Actualmente, quer o questionamento da natureza *a priori* do conhecimento matemático, quer os argumentos a favor de bases empíricas para este conhecimento estão de novo a ganhar terreno. Não se trata, contudo, de um retorno ao empiricismo de Mill. Trata-se, antes, de uma aproximação da Matemática às ciências naturais que admite, tal como acontece nestas ciências, o carácter *a posteriori* e falível do conhecimento. Trata-se de uma perspectiva *quasi-empírica* sobre a Matemática, apresentada na secção 4 deste capítulo, que questiona ser esta ciência um corpo de saber imutável e infalível.

2.2 - Verdade e certeza matemáticas: Perspectiva histórica

Tendo por fio condutor uma perspectiva histórica, nesta secção procura-se reflectir sobre a intemporalidade e o carácter absoluto frequentemente atribuídos à verdade, certeza e rigor matemáticos, a partir da análise do significado que estas noções foram tendo na evolução desta ciência.

2.2.1 - Origem das verdades matemáticas

Embora as nossas principais concepções de número e forma datem de tempos tão remotos como os do paleolítico, a linha principal da actividade matemática ocidental, enquanto actividade sistemática, tem a sua origem nas civilizações orientais do Egipto e da Mesopotâmia. As Matemáticas orientais constituíram-se através da acumulação de um conjunto de factos, regras e processos, sem nunca se emancipar verdadeiramente da influência milenar dos problemas práticos e administrativos para cuja resolução tinham sido criadas. Embora constituindo um conjunto considerável de conhecimentos, não dispunham de nenhuma metodologia específica. Desenvolveram-se de uma forma não dedutiva, em que as regras e procedimentos foram descobertos, a partir da observação e experimentação, e através de processos de tentativa e erro. Foi esta perspectiva empírica e instrumentalista que serviu de prelúdio aos trabalhos matemáticos desenvolvidos pela civilização grega.

Os primeiros estudos de Matemática grega tinham por objectivo principal compreender o lugar do Homem no Universo de acordo com um esquema racional. A Matemática ajudava a encontrar a ordem no caos, a ordenar as ideias em sequências lógicas, a encontrar princípios fundamentais. Começou, assim, a tomar corpo uma nova Matemática desenvolvida mais no espírito da compreensão do que no da utilidade imediata. Esta Matemática colocava não só a antiga questão do *como* mas também a moderna questão científica do *porquê*.

Os pitagóricos sentiam-se impressionados pelo facto de fenómenos muito diversos, de um ponto de vista qualitativo, poderem exibir propriedades matemáticas idênti-cas. Foram, assim, despertando para a ideia de que estas propriedades podiam constituir a essência destes fenómenos e que o Universo estava matematicamente ordenado.

Consequentemente, a Matemática começou a surgir como um modelo explicativo e inteligível, uma chave por meio da qual o homem podia penetrar na ordem da Natureza e dissipar o mistério e o caos que aí pareciam reinar.

No processo de explicação da Natureza o número, entendido como ponto ou partícula, desempenhava um papel fundamental. Os pitagóricos investigavam as suas propriedades e colocavam-no “no centro de uma filosofia cósmica que tentava reduzir todas as relações fundamentais a relações numéricas”[5]. Porém, os únicos números que reconheciam como tal, eram os inteiros ou os fraccionários. Assim, a descoberta de que havia relações entre estes números que não podiam ser expressas através deles (como é o caso, por exemplo, da razão entre a diagonal e o lado de um quadrado), pôs em causa a harmonia entre a aritmética e a geometria e originou perturbações nos meios filosóficos e matemáticos.

Esta descoberta, associada aos paradoxos de Zenão, que entravam em conflito com algumas concepções antigas e intuitivas sobre o infinitamente pequeno e o infinitamente grande, levou os matemáticos da época a questionarem-se sobre se a Matemática era possível como ciência exacta. O problema foi resolvido no espírito do novo período social da história da Grécia. Neste período, de supremacia aristo-crática, as classes dirigentes tinham a sua subsistência assegurada pela escravatura e o trabalho manual era menosprezado. Foi neste contexto que surgiu e tomou forma a escola mais influente, depois dos pitagóricos, na exposição e propagação da tese relativa à estrutura Matemática da Natureza — a Academia de Platão.

Zenão, paradoxos, Aquiles e a tartaruga

Acreditou-se sempre que a soma de um número infinito de quantidades se podia tornar tão grande quanto se quisesse, mesmo que cada quantidade fosse extremamente pequena e também que a soma de um número finito ou infinito de quantidades de dimensão zero era zero. O criticismo de Zenão desafiou estas concepções e os seus quatro paradoxos criaram uma agitação cujos efeitos ainda podem ser observados actualmente. Os paradoxos foram retomados por Aristóteles e são conhecidos pelos nomes *Aquiles*, *seta*, *dicotomia* e *estádio*.

Aquiles: Aquiles e uma tartaruga movem-se na mesma direcção, ao longo de uma linha recta. Aquiles é mais veloz que a tartaruga, mas para alcançar a tartaruga, ele tem que passar primeiro pelo ponto P, do qual a tartaruga partiu. Quando chega a P, a tartaruga já avançou para o ponto P_1, mas a tartaruga avançou para um novo ponto P_2. Quando Aquiles estiver em P_2, a tartaruga estará em P_3, etc. Por isso Aquiles nunca poderá alcançar a tartaruga.

Dirk J. Struik, 1989
História concisa das Matemáticas

Os platonistas distinguiam o mundo das coisas do mundo das ideias. O mundo das coisas, mundo material, contém objectos e relações imperfeitas. É no mundo das ideias que se encontravam as verdades absolutas e imutáveis e todo o saber que lhes diz respeito que é certo, seguro e indestrutível.

É neste mundo de ideias que Platão coloca os objectos matemáticos. Assim, para este filósofo, as leis matemáticas não eram apenas a essência da realidade, mas uma essência verdadeira, eterna e imutável. Se com Pitágoras eram os números que "governavam" o mundo, com Platão são as ideias geométricas que o governam. A frase *Deus geometriza eternamente* escrita por este filósofo na *República*, ilustra bem esta perspectiva.

Na sua função de perscrutar a Natureza, a Matemática, para Platão, podia substituir a própria investigação física. Sustentava que a razão humana tinha a capacidade de intuir verdades fundamentais graças à qual podia proceder de maneira autónoma e indignava-se profundamente com alguns dos seus contemporâneos (como por exemplo, com Plutarco, Eudoxo, Arquitas) que recorriam a raciocínios mecânicos para provar resultados matemáticos.

Em suma, no âmbito da Matemática, um dos aspectos mais inovadores do pensamento grego, foi a sua concepção de um Cosmos que funcionava de acordo com leis matemáticas verdadeiras, passíveis de serem descobertas pelo pensamento humano, e o desejo de conhecer estas leis. Colocava-se contudo a questão de como o fazer e ter a certeza de que as leis descobertas eram, efectivamente, verdadeiras.

Um dos passos dados pelos gregos, para poder raciocinar sobre conceitos matemáticos abstractos, foi estabelecer axiomas, verdades de uma tal auto-evidência que ninguém poderia negar. Estes axiomas diziam respeito ao espaço e aos números inteiros.

O segundo passo foi garantir a correcção das conclusões obtidas a partir dos axiomas. Para tal, usaram raciocínio dedutivo, que consideravam como o único que garantia a correcção das conclusões. Assim, uma vez que se partia de axiomas, verdades sobre o espaço e os números inteiros consideradas auto-evidentes, este raciocínio poderia ser um veículo para encontrar as verdades eternas sobre a Natureza que eles ansiavam descobrir. Pode apontar-se, ainda, uma razão de natureza social para explicar a preferência pela forma dedutiva. As actividades matemáticas, bem como as filosóficas e as artísticas, eram praticadas por classes abastadas que menosprezavam o trabalho manual e as actividades comerciais. Platão e Aristóteles, ao sustentarem, respectivamente, que a actividade comercial constituía uma degradação para o homem livre, que devia ser punida como crime, e que nenhum cidadão devia praticar arte mecânica, ilustram bem, neste domínio, a atmosfera intelectual reinante na época.

Assim, não é de estranhar a opção pela dedução. Com efeito, a experimentação e observação teriam aparecido como estranhas ao modo de pensar grego.

No período helenístico, o avanço da civilização grega pelas regiões do mundo oriental (Egipto, Mesopotâmia, parte da Índia) possibilitou que a Matemática grega, embora conservando muitas das suas características tradicionais, sentisse a influência dos problemas de administração e astronomia que o Oriente tinha para resolver. Surgiram os cientistas profissionais e, neste grupo, muitos dos mais importantes viviam em Alexandria.

Entre os primeiros sábios associados a este centro intelectual e económico, destaca-se Euclides, cuja formação se desenrolou na Academia de Platão. A sua obra constitui uma organização ampla e sistemática, apresentada numa forma axiomática-dedutiva, de descobertas diversas de vários pensadores gregos do período clássico. Através das suas formulações axiomáticas, consideradas rigorosas, os trabalhos desenvolvidos pela Academia de Platão e, muito especialmente, os de Euclides, possibilitaram a resolução da "crise" relativa ao aparecimento dos números irracionais e aos paradoxos de Zenão.

Os textos mais difundidos de Euclides são os treze livros que constituem os *Elementos*, que são "a seguir à Bíblia, provavelmente, o livro mais reproduzido e estudado na história do mundo ocidental (…) [e cuja] estrutura lógica influenciou o pensamento científico talvez mais do que qualquer outro texto do mundo"[6].

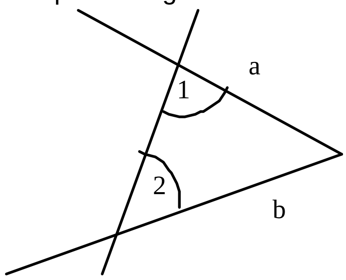
Os *Elementos* de Euclides representam a primeira axiomatização da história da Matemática. Até ao século XIX, foram considerados o modelo da verdade, rigor e certeza, tendo-se transformado, durante vários séculos, no próprio paradigma da ciência. Nomeadamente, Newton não hesita em considerá-los como modelo para a construção de toda a teoria científica que se queira rigorosa e os seus *Principia* inspiram-se neles.

2.2.3 - Da certeza da verdade à procura da certeza

Nos séculos XVII e XVIII, a geometria euclidiana era ainda objecto de grande admiração, não só porque tinha sido a primeira área da Matemática a ser estabelecida dedutivamente, mas também porque durante mais de dois mil anos, os seus teoremas continuavam a revelar-se verdadeiros quando comparados com a realidade física. Todavia, nem todos os axiomas de Euclides eram igualmente evidentes. O axioma das paralelas, ou o quinto postulado, como é frequentemente designado, tinha sido objecto de numerosas discussões já desde a Antiguidade. Aparentemente, nem o próprio Euclides gostava muito da sua formulação, uma vez que só se serviu dele depois de ter provado, sem o utilizar, tantos teoremas quantos foi capaz.

Quinto postulado de Euclides

Se uma recta que encontra duas outras rectas forma ângulos interiores do mesmo lado mais pequenos que dois rectos, as duas rectas quando infinitamente prolongadas encontram-se do mesmo lado em que os ângulos são mais pequenos que os dois rectos.



Morris Kline, 1980
Mathematics: The loss of certainty

Ao longo dos séculos foram feitas inúmeras tentativas para resolver os problemas relacionados com este axioma. Umas tentavam substituí-lo por um enunciado aparentemente mais evidente; outras procuravam deduzi-lo dos outros nove apresentados por Euclides. No entanto, todas estas tentativas se revelaram vãs. Pelo contrário, evidenciaram que, adoptando um axioma que fosse essencialmente diferente do axioma das paralelas, não só não se chegava a nenhuma contradição mas, mais do que isso, mostraram que havia lugar para a existência de várias outras geometrias, diferentes da de Euclides, mas com estruturas lógicas igualmente válidas. Estava aberto o caminho para o desenvolvimento das geometrias não euclidianas.

Relativamente às geometrias não euclidianas, Kline refere que um dos factos mais significativos é que podem ser utilizadas para descrever as propriedades do espaço físico de maneira tão precisa como o fazia a geometria euclidiana. Ora esta ideia estava em completa oposição com as opiniões cultivadas nos meios intelectuais da época e, assim, a aceitação das geometrias não euclidianas pela comunidade matemática não foi fácil, nem linear. Afinal, o que estava em causa era não só a antiga crença grega da verdade matemática como chave para conhecer o Universo, mas o próprio poder da razão para aceder ao conhecimento verdadeiro.

Geometrias não euclidianas: Contributo de Gauss

Gauss estava perfeitamente consciente da fragilidade dos esforços que consistiam em tentar estabelecer [o axioma das paralelas de Euclides], o que se tinha já tornado um lugar comum em Göttingen. Por volta de 1813, Gauss desenvolveu a sua geometria não euclidiana que inicialmente designou por geometria antieuclidiana, depois por geometria astral e finalmente por geometria não euclidiana. Estava convencido de que ela era

> logicamente consistente e que poderia encontrar uma aplicação. Numa carta ao seu amigo Franz Adolf Taurinus, datada de 8 de Novembro de 1824, Gauss escreveu: “Admitir que a soma dos ângulos (de um triângulo) é inferior a 180^0, conduz a uma geometria curiosa, diferente da nossa (euclidiana), mas inteiramente coerente e desenvolvida para minha inteira satisfação. Os teoremas desta geometria parecem paradoxais e absurdos para um neófito, mas uma reflexão calma e séria revela que eles não contêm nada de impossível”.
>
> Morris Kline, 1980
> *Mathematics: The loss of certainty*

A partir de 1820, começa a afirmar-se a ideia de que, na base da Matemática clássica devem colocar-se, não as noções geométricas dos gregos, mas o conceito de número inteiro. Este movimento foi designado por *aritmetização da Matemática*. No entanto, o aparecimento de números tridimensionais (os quaterniões de Hamilton[7]), que não gozam da propriedade comutativa da multiplicação como acontecia com os outros números conhecidos até então, e a criação de novas álgebras com propriedades cada vez mais estranhas, lançou a dúvida sobre a verdade da aritmética e da álgebra usuais. E os matemáticos foram levados a descobrir que se podem introduzir na aritmética operações diferentes das que nos são familiares e criar uma aritmética igualmente aplicável. Assim, a aritmética como o corpo de verdades necessariamente aplicável aos fenómenos do mundo físico, estava também posta em causa. “A triste conclusão que os matemáticos foram obrigados a tirar de tudo isto é que não existe nenhuma verdade em Matemática, se se entender por verdade, leis respeitantes ao mundo real”[8].

Em suma, a tentativa empreendida pelos gregos de tentar garantir a verdade matemática partindo de verdades evidentes e utilizando somente raciocínios dedutivos, tinha-se revelado vã. Este facto foi muito difícil de admitir, tendo numerosos matemáticos continuado a desenvolver grandes esforços no sentido de recuperarem a segurança que pensavam ter perdido. E em lugar da verdade surgia a noção de consistência lógica. Ou, por outras palavras, a *certeza da verdade* dava agora lugar à *procura da certeza*.

2.2.4 - Relatividade do rigor e da verdade matemática

Uma das revelações obtidas com os trabalhos desenvolvidos sobre a geometria euclidiana foi o facto de que esta geometria, que durante mais de 2000 anos tinha sido considerada o paradigma do rigor, apresentava sérias dificuldades de um ponto de vista lógico. Além disso, os matemáticos ao reexaminarem as bases lógicas da aritmética e álgebra dos números reais e complexos, verificaram que este campo se tinha igualmente desenvolvido de uma forma ilógica.

Afinal, o que se constatava era que a Matemática não tinha sido o paradigma da razão que tinha reputação de ser. Em lugar dos seus resultados terem sido demonstrados lógica e rigorosamente, ao longo dos séculos, tinha-se recorrido a intuições baseadas em desenhos geométricos, argumentos físicos, raciocínios indutivos, princípios *ad hoc* e manipulações formais de expressões simbólicas.

Foi então empreendida a tarefa de encontrar fundamentos sólidos para a Matemática. Para isso, foi reconhecida a necessidade de termos não definidos, da utilização de definições formuladas de forma precisa (eliminando delas todos os termos que pudessem ser considerados vagos ou contestáveis), da explicitação, de uma forma exaustiva, do conjunto de axiomas que serviam de ponto de partida para as teorias, e da demonstração explícita de todos os resultados matemáticos por mais intuitivamente evidentes que pudessem parecer. E assim surgia um novo significado para a expressão *rigor matemático*.

Durante o final do século XIX, os matemáticos empreenderam uma intensa actividade axiomática, entrelaçando cuidadosamente os teoremas de modo a tentar garantir a solidez de toda a estrutura matemática. A verdade matemática absoluta, oriunda da civilização grega, começava a ser substituída por uma *verdade relativa* dos teoremas relativamente aos postulados, definições e correcção de raciocínio. Assim, embora a Matemática tivesse perdido o seu enraizamento na realidade, a crise parecia estar resolvida.

No entanto, a descoberta de paradoxos na teoria de conjuntos e a tomada de consciência de que poderiam existir paradoxos semelhantes, embora ainda não detectados, noutros ramos da Matemática clássica, levaram os matemáticos a tomar muito a sério o problema da consistência e a interrogar-se sobre como deveria constituir-se esta ciência de modo a eliminar os paradoxos e assegurar que novas contradições não pudessem aparecer. Não puderam, contudo, pôr-se de acordo. Tinha-se entrado numa nova crise — a *crise dos fundamentos*.

2.3 - A busca de fundamentos

A crise dos fundamentos foi, no fundo, a manifestação de uma antiga discrepância entre o *mito de Euclides*[9] e as práticas matemáticas reais. O mito de Euclides é a crença segundo a qual os livros deste autor contêm verdades acerca do universo que são claras e indubitáveis, uma vez que chegam ao conhecimento certo, objectivo e eterno a partir de factos evidentes por si próprios e procedendo através de demonstrações rigorosas.

A inquestionabilidade deste mito, que prevaleceu até ao século XIX, foi fortemente abalada quando Russel, que pesquisava fundamentos para a Matemática na teoria de conjuntos, começou a ser confrontado com contradições, eufemisticamente designadas por paradoxos, que ilustraram que, seguindo as regras da lógica intuitiva, podemos ser levados a resultados contraditórios de um modo nunca visto anteriormente nem em aritmética nem em geometria.

Paradoxo de Russel

Para enunciar o paradoxo de Russel definimos um "conjunto R" como "um conjunto que se contém a si próprio" (um exemplo é o "um conjunto de todos os objectos descritos com exactamente treze palavras em português"). Consideremos agora um outro conjunto M: o conjunto de todos os conjuntos possíveis, excepto os conjuntos R. M é um conjunto R? Não. Por outro lado, também é falso afirmar que M não é um conjunto-R. Moral: a definição de M, que parecia inofensiva, embora um pouco retorcida, é contraditória em si própria".

Philip Davis e Reuben Hersh, 1988
Da certeza à falibilidade

Foram três as escolas de pensamento que tentaram encontrar bases seguras para a Matemática — *logicismo*, o *construtivismo* e o *formalismo* — mas, como se verá em seguida, embora oferecendo a certeza a um certo preço, nem mesmo assim a conseguiram garantir.

2.3.1 - Logicismo

O logicismo iniciou-se perto de 1884 com o filósofo, matemático e lógico alemão Frege continuando, mais tarde, com Bertrand Russel. A sua finalidade consistia em provar que a Matemática clássica era parte da lógica. Para levar a cabo este programa Russel e Whitehead criaram a obra *Principia Mathematica*, publicada em 1910, que pode considerar-se uma teoria formal de conjuntos, embora a formalização não estivesse ainda concluída. Estes matemáticos planeavam mostrar que todos os axiomas dos *Principia* pertenciam à lógica e, se o tivessem conseguido, os fundamentos da Matemática seriam os axiomas da lógica. Questões como "porque é que a Matemática está livre de contradições"' transformar-se-iam, assim, em "porque é que a lógica está livre de contradições" Havia, no entanto, axiomas que não eram proposições lógicas no sentido do logicismo[10] e assim este programa, embora tendo uma enorme importância para o desenvolvimento da moderna lógica matemática, foi um fracasso do ponto de vista da sua intenção inicial. Como salienta Dias Agudo, o sistema não se revelou satisfatório para uma fundamentação incontroversa da Matemática.

2.3.2 - Construtivismo e intuicionismo

Os construtivistas abordaram o problema dos fundamentos da Matemática de uma forma radicalmente diferente da dos logicistas. Enquanto estes consideravam que nada havia de errado com a Matemática clássica, sendo os paradoxos originados por erros dos matemáticos mas não causados por imperfeições da ciência matemática, os construtivistas viam estas contradições como indicações claras de que a Matemática clássica estava longe de ser perfeita.

A forma de construtivismo mais conhecida é o intuicionismo iniciado por Brouwer em 1908. Para Brouwer não é a experiência nem a lógica que determina a coerência e aceitabilidade das ideias, mas sim a intuição. Profundamente influenciado pela teoria de Kant relativa à intuição de tempo, sustenta que os números naturais nos são dados por uma intuição fundamental que é o ponto de partida de toda a Matemática. Concebe o pensamento matemático como um processo de construção mental que, partindo dos números naturais, prossegue através de um número finito de passos e é independente da experiência.

Com o intuicionismo sobressai a ideia de que a Matemática é uma ciência que tem a sua origem no espírito e aí se exerce: a Matemática não possui nenhuma existência fora do espírito humano. As palavras e relações verbais constituem uma estrutura “imperfeita” para comunicar as ideias matemáticas que são criadas pela actividade do espírito.

Os intuicionistas, em virtude dos princípios de raciocínio que admitiam, rejeitarem muitos dos teoremas da Matemática clássica. Por exemplo, Brouwer apresentou um número real do qual somos incapazes de demonstrar construtivamente, se é positivo, negativo ou nulo, o que mostra que a propriedade tricotómica é falsa. E assim, também o programa intuicionista não foi bem sucedido na sua tentativa de encontrar fundamentos consistentes para aquela Matemática. Além disso, os matemáticos intuicionistas estabeleceram resultados considerados falsos por matemáticos que o não eram e apresentaram provas para certos teoremas classificadas como longas e menos elegantes do que outras elaboradas por métodos não construtivistas.

Por tudo isto, a comunidade matemática considerou, quase universalmente, o programa intuicionista pouco razoável e algo fanático. O programa formalista pode, em particular, ser visto como uma tentativa de defender a Matemática do que Hilbert considerava mutilações e deformações provocadas pelo intuicionismo.

2.3.3 - Formalismo

A escola formalista, criada por volta de 1910 por David Hilbert, tinha por grande objectivo encontrar uma técnica matemática por meio da qual se pudesse demonstrar, de uma vez por todas, que a Matemática estava livre de contradições. Hilbert propunha-se construir uma demonstração matemática da consistência da Matemática clássica, utilizando argumentos puramente finitários que Brouwer não pudesse rejeitar. Com este objectivo, (a) introduziu uma linguagem formal e regras formais de inferência em número suficiente para que toda a "demonstração correcta" de um teorema clássico pudesse ser representado por uma dedução formal com cada passo mecanicamente verificável; (b) desenvolveu uma teoria das propriedades combinatórias desta linguagem formal; (c) e propôs-se demonstrar que dentro deste sistema não podiam deduzir-se contradições. Deste modo, Hilbert pretendeu estabelecer o que designava por demonstrações objectivas, ou seja, um encadeamento de fórmulas deduzidas através de implicações a partir de símbolos, axiomas ou conclusões previamente estabelecidas.

Com o formalismo a Matemática torna-se um sistema formal que partindo dos axiomas e dos termos iniciais, se desenvolve numa cadeia ordenada de fórmulas, mediadas por teoremas, sem nunca sair de si mesma. Torna-se nem mais nem menos, do que "um jogo linguístico" fundado exclusivamente nas próprias regras do jogo, como acontece, por exemplo, com o jogo do xadrez. Neste contexto, fazer Matemática consiste em manipular símbolos sem significado de acordo com regras sintácticas explícitas.

Em 1930, Gödel enunciou o teorema da incompletude evidenciando que nunca se poderia encontrar em Matemática uma certeza completa por meio de qualquer método baseado na lógica tradicional, uma vez que "qualquer sistema formal consistente suficientemente forte para conter a aritmética elementar seria incapaz de demonstrar a sua própria consistência"[11]. Os resultados alcançados por Gödel mostraram que o projecto de Hilbert era irrealizável e, assim, o programa formalista também não conseguiu provar a certeza dos métodos matemáticos.

Formalismo e Matemática moderna

O formalismo faz uma distinção entre a geometria como uma estrutura dedutiva e a geometria como uma ciência descritiva. Somente a primeira é considerada Matemática. A utilização de figuras, diagramas, ou mesmo de imagens mentais, tudo é não-matemático. Em princípio deveriam ser desnecessários. Consequantemente, considera-os inadequados num texto matemático, e talvez também numa aula de Matemática (...) Do ponto de vista formalista não começamos realmente a fazer Matemática antes de enunciar algumas hipóteses e começar uma demonstração. Após termos chegado às nossas conclusões, a Matemática acabou (...) O exemplo mais influente do formalismo como estilo de exposição matemática foi a obra do grupo chamado colectivamente de

> Nicolas Bourbaki. Sob este pseudónimo, foi produzida uma série de textos básicos, a nível de pós-graduação, sobre a teoria de conjuntos, a álgebra e a análise que tiveram uma enorme influência em todo o mundo nas décadas de 50 e 60. O estilo formalista penetrou gradualmente no ensino da Matemática em níveis mais elementares e, finalmente, sob o nome de *Matemática moderna* invadiu até o jardim de infância com textos de teoria de conjuntos para a idade pré-escolar.
>
> Philip Davis e Reuben Hersh, 1988
> *Da certeza à falibilidade*

2.3.4 - A perda da certeza em Matemática

Se se analisar um pouco de perto o processo pelo qual o logicismo, o intuicionismo e o formalismo visavam garantir a certeza, constata-se que este processo continha em si mesmo elementos que poderiam causar dificuldades ao objectivo pretendido.

De facto, estas escolas aceitaram sem demonstração um conjunto de afirmações básicas a partir das quais deduziram logicamente os seus resultados. Ora, por um lado, o conjunto de afirmações básicas não pode ser eliminado de uma teoria matemática. Por outro lado, a lógica dedutiva não introduz verdade nos raciocínios e afirmações. Quando muito poderia transmiti-la. A partir do momento em que as três escolas aceitam princípios não demonstrados, esses princípios ficam abertos ao desafio, à dúvida e à incorrecção. Como salienta Ernest[12], "a pesquisa da certeza em Matemática conduz, inevitavelmente, a um círculo vicioso. Todo o sistema matemático depende de um conjunto de afirmações, e tentar estabelecer a sua certeza demonstrando-as conduz a uma regressão infinita". Assim, o problema de assegurar a certeza em Matemática parece ser insolúvel.

Actualmente não se está mais perto de fundamentos seguros para a Matemática do que se estava há um século atrás. No entanto, as controvérsias sobre os fundamentos já não têm o impacto de outrora. Conduzem a círculos que parecem cada vez mais distantes das preocupações matemáticas e filosóficas dos nossos dias. É nesta conjuntura que se acentua, cada vez mais, a importância de olhar a Matemática sem a preocupação dominante da pesquisa de fundamentos, procurando-se novas direcções na filosofia da Matemática.

2.4 - Matemática: Uma ciência a par das outras

Uma alternativa radicalmente diferente à da procura de bases indubitáveis para a Matemática foi a apresentada por Imre Lakatos. Este filósofo, matematicamente esclarecido, segue a teoria do conhecimento científico enunciada por Popper que advoga que o conhecimento científico é hipotético, falível, e que a ciência progride, a partir de problemas, pelo jogo entre factos, conjecturas e refutações.

2.4.1 - Falibilismo

No âmbito da filosofia da Matemática, a obra fundamental de Lakatos é *Provas e Refutações* iniciada em 1957 e publicada pela primeira vez em livro em 1976. Este trabalho constitui um ensaio sobre a lógica da descoberta em Matemática, onde se reconhece ao erro um valor insubstituível no processo de produção do conhecimento. O ponto de partida é saber se existirá uma relação entre o número de vértices V, o número de arestas A e o número de faces F de um poliedro. A resolução deste problema gera um diálogo que mostra uma Matemática que cresce através de um conjunto de explicações, justificações, elaborações, que não estabelecem a verdade das conjecturas, mas antes as tornam mais plausíveis, convincentes, detalhadas e exactas pela pressão exercida pelos contra-exemplos. A intenção deste diálogo é dar conta de uma espécie de reconstrução racional da história.

Provas e Refutações em Matemática

Este livro está estruturado sob a forma de um diálogo que ocorre numa sala de aula imaginária. Depois de muitas tentativas e erros os alunos constatam que para todos os poliedros regulares V-A+F=2. Um aluno conjectura que esta relação se pode aplicar a todos os poliedros. Outros tentam refutar esta conjectura sem o conseguirem. É nesta altura que o professor entra na sala e apresenta uma prova em três etapas. O extracto que se segue é uma parte do diálogo que se estabelece imediatamente após a apresentação desta prova.

Professor: (...) Assim provámos a nossa conjectura[1]

Aluno Delta: Agora pode falar de *teorema*. Não há no caso mais nada de conjectural[2].

Aluno Alfa: Admiro-me. Vejo que esta experiência pode ser realizada com um cubo, ou com um tetraedro, mas como posso eu saber se ela pode ser realizada com *todo* o poliedro? O senhor tem a certeza, por exemplo, *que qualquer poliedro, depois de lhe retirarmos uma das faces, pode ser esticado no plano do quadro*? Tenho dúvidas relativamente à sua primeira etapa.

Aluno Beta: Tem a certeza que *ao triangular o mapa teremos sempre uma nova face para cada nova aresta*? Tenho dúvidas quanto à sua segunda etapa.

Aluno Gama: O senhor tem a certeza que *quando se retiram os triângulos um por um há apenas dois casos possíveis: retirar uma só aresta ou então retirar duas arestas e um vértice?* O senhor tem mesmo a certeza *que no final desse processo apenas fica um triângulo?* Tenho dúvidas sobre a sua terceira etapa[3].
Professor: É claro que não tenho certezas.
Alfa: Mas então a nossa situação é pior que antes! Em lugar de uma conjectura, neste momento temos pelo menos três! E é a isso que o senhor chama "prova"!
Professor: Admito que para esta experiência mental, o termo tradicional 'prova' possa ser de facto considerado um pouco enganador. Não penso que ela estabeleça a verdade da conjectura (...).

1 - A ideia da prova apresentada pelo professor remonta a Cauchy (1813)
2 - O ponto de vista de Delta segundo o qual esta prova estabelece sem nenhuma dúvida o "teorema" foi partilhado por numerosos matemáticos do século XIX como por exemplo Crelle ([1826-1827], pp. 668-71), Matthiessen ([1863], p. 449), Jonquières ([1890a] e [1890b]). Citando um exemplo representativo: "Depois desta demonstração de Cauchy, está absolutamente fora de dúvida que a elegante relação V+F = A+2 se aplica aos poliedros de todos os tipos, tal como Euler afirmou em 1752 e toda a indecisão deve ter desaparecido desde 1811". (de Jonquières [1890a], pp. 111-12).
3 - Os alunos desta classe são muito dotados. Em Cauchy, Poinsot e muitos outros matemáticos do século XIX, não se encontram traços destas objecções.

Imre Lakatos, 1993
Proofs and refutations - The logic of mathematical discovery

Na introdução Lakatos escreve que "a história real soará em notas de fim de página, cuja maior parte devem ser consideradas como fazendo organicamente parte do ensaio"[13]. Ele chama a atenção para que a Matemática não está tão longe da ciência natural como anteriormente se pensava e inclui-a nas teorias quasi-empíricas considerando o conhecimento matemático intrinsecamente conjuntural e falível. Sugere que a Matemática não se desenvolve por um crescimento contínuo de teoremas indubitavelmente estabelecidos, mas pela correcção de teorias, pelo melhoramento constante de conjecturas graças à especulação e à crítica, graças à lógica de provas e refutações. Indica ainda que na produção de conhecimento matemático há uma adaptação constante de axiomas e definições, em simultâneo com uma incessante busca de conjecturas, demonstrações e refutações.

Lakatos aplica a sua análise epistemológica à Matemática informal, ou seja, à Matemática encarada como um processo de crescimento e descoberta. Deixa, contudo, sem resposta a questão de quais os objectos das teorias matemáticas informais, indicando apenas que ela poderá ser iluminada por estudos de caso históricos.

A perspectiva filosófica de Lakatos é, frequentemente, designada por *falibilismo*. No centro desta perspectiva está uma teoria da génese do conhecimento matemático, cujo foco não é psicológico (uma vez que Lakatos não se pronuncia sobre a origem dos axiomas, definições e conjecturas na mente dos indivíduos) mas, antes, o processo pelo qual criações matemáticas privadas se transformam em saber matemático publicamente aceite. Este processo envolve discussão crítica, conjecturas e refutações e, neste sentido, a filosofia proposta por Lakatos para a Matemática assemelha-se à filosofia da ciência proposta por Popper.

2.4.2 - Abordagem quasi-empiricista

Actualmente, os ventos do pós-modernismo acentuam a ideia de que se queremos compreender o que é a ciência e os processos de produção do saber científico, importa debruçarmo-nos sobre as práticas reais dos cientistas, tanto as actuais como as passadas, e encontrarmos uma filosofia que enquadre e descreva essas práticas, em lugar de uma filosofia que prescreva o que elas devem ser.

Neste sentido, diversos matemáticos, filósofos e historiadores (Davis, Hersh, Ernest, Kline, Tymoczko, Putnam e muitos outros), inspirando-se no falibilismo de Lakatos, propõem uma nova abordagem para a filosofia da Matemática frequentemente designada por *quasi-empiricismo*[14]. Esta abordagem procura descrever e (re)caracterizar a Matemática a partir da análise das práticas reais dos matemáticos.

Observando estas práticas ver-se-á que há aí factores importantes que os fundacionistas negligenciaram: provas informais, desenvolvimentos históricos, possibilidade de erro matemático, explicações matemáticas (em contraste com provas), comunicação entre os matemáticos, a utilização de computadores e muitos outros. Constatar-se-á que em cada época há normas culturais que determinam o que é uma demonstração aceitável em Matemática, acontecendo que o que constitui uma demonstração para uma geração pode não satisfazer os padrões de aceitação e de rigor da geração seguinte. Observar-se-á que a Matemática cresce por meio de uma série de grandes avanços intuitivos, que são posteriormente estabelecidos, não numa etapa, mas através de uma série de correcções, de esquecimentos e de erros; nenhuma prova é definitiva e novos contra-exemplos deitam por terra provas antigas.

Hersh[15], apoiando-se na experiência diária dos que estudam Matemática, sugere que: “(1) Os objectos matemáticos são inventados ou criados pelos seres humanos; (2) São criados, não arbitrariamente, mas emanam da actividade desenvolvida a partir de outros objectos matemáticos já existentes e de necessidades da ciência e da vida diária; (3) Uma vez criados, os objectos têm propriedades bem determinadas, que poderemos ter grande dificuldade em descobrir, mas que possuem independentemente do nosso conhecimento acerca delas”. Conclui dizendo que a Matemática é um mundo de ideias criado pelos seres humanos, que existe na consciência partilhada destes seres. Tal como os objectos materiais têm as suas próprias propriedades, também essas ideias têm propriedades objectivamente suas. O método para as descobrir é a construção de demonstrações e contra-exemplos.

Considerar desta forma os objectos matemáticos tem várias consequências filosóficas. Em primeiro lugar, afirmar que os objectos matemáticos são inventados ou criados pelo homem é distingui-los de objectos materiais como água, rochas ou gatos. Contudo, tal não significa que sejam objectos intemporais como as ideias matemáticas do platonismo. Pode dizer-se, por exemplo, que as geometrias não euclidianas são objectos matemáticos de invenção mais recente do que a geometria euclidiana.

Em segundo lugar, referir que os objectos matemáticos são produzidos como resposta a desafios colocados tanto por teorias e conceitos matemáticos já existentes, como pelas outras ciências e pelo mundo real, evidencia a complementaridade do que vulgarmente se designa por Matemática pura e por Matemática aplicada. Com efeito, ao longo dos tempos tem-se constatado que a Matemática se desenvolve a partir de um movimento simultaneamente interno e externo. A abstracção, a axiomatização e a generalização, três tipos de actividades incluídas na designada Matemática pura, têm-se revelado tão vitais para a Matemática como a construção de modelos inteligíveis de fenómenos naturais complexos, e aparentemente impenetráveis. Parece ser através da interacção entre a abstracção e os problemas concretos que a vida proporciona, que se produz e vai construindo uma Matemática viva, significativa e possibilitadora do aumento do poder humano de intervenção no mundo.

Em terceiro lugar, admitir que objectos matemáticos uma vez criados, têm propriedades suas que podemos ser, ou não, capazes de descobrir, permite destacar a simultaneidade da descoberta e da invenção em Matemática. Esta ideia, paradoxal quando rejeitamos o realismo em Matemática e admitimos apenas a existência do sujeito individual e de um mundo exterior a ele, ganha sentido quando consideramos uma espécie de terceira realidade, uma realidade cultural, onde se situaria a Matemática. Nesta linha, Wilder, inspirando-se nas práticas matemáticas reais, descreve a Matemática como um sistema cultural em evolução, algo que criamos e possuímos colectivamente, que é externo ao sujeito enquanto indivíduo, mas é interno à sociedade, como um todo. Fazendo os objectos matemáticos parte da cultura humana, as suas propriedades são também propriedades de ideias partilhadas.

O quasi-empiricismo, enquanto abordagem filosófica, destaca que a Matemática constitui uma actividade humana, simultaneamente individual e social, que decorre de um diálogo entre pessoas que tentam resolver problemas. Os produtos matemáticos podem necessitar de renegociação à medida que mudam os padrões de rigor ou que emergem novos desafios e significados. É pela partilha e discussão crítica de ideias relativas aos objectos matemáticos que se torna possível o reconhecimento de saberes matemáticos novos, o alargamento, correcção e rejeição de teorias.

O quasi-empiricismo não dá resposta a todos os problemas respeitantes à filosofia da Matemática. No entanto, mais importante que isso, permite levantar questões fundamentais: Como são inventados os objectos matemáticos? Como explicar o sucesso das aplicações da Matemática na compreensão do mundo físico e de outras ciências?

Quasi-empiricismo e ensino da Matemática

Uma perspectiva social sobre a Matemática, em que se inclui o quasi-empiricismo, tem importantes implicações para a pedagogia e a didáctica da Matemática. Dá suporte a abordagens pedagógicas baseadas na formulação e resolução de problemas, semelhantes aos processos pelos quais é gerado o conhecimento matemático. Permite pôr em causa perspectivas educativas rigidamente hierarquizadas sobre a Matemática e a aprendizagem. Tem ressonâncias com objectivos que visam formar pessoas capazes de problematizar e avaliar criticamente os usos sociais da Matemática.

Paul Ernest, 1994
The philosophy of mathematics and the didactics of mathematics

Que balanço fazer quanto às diferenças entre os produtos matemáticos e outros produtos culturais? O grau de constrangimento da criatividade matemática é superior ao da criatividade artística? Como é que a demonstração matemática se torna mais refinada e subtil à medida que são descobertas novas fontes de erro? Como se articula a produção individual de saber matemático com o produção social deste saber? Quais as normas e convenções actualmente partilhadas pelos membros da comunidade matemática?

Estas são algumas das muitas questões que poderão ajudar a compreender melhor o que é, e como progride, a Matemática. A sua análise em profundidade constitui um dos grandes desafios que hoje se colocam, não só à filosofia da Matemática, mas também à história, à antropologia, à sociologia e à psicologia da cognição.

2.4.3 - Matemática: Objecto cultural e social

Presentemente, diversos investigadores pesquisam a história da Matemática e realizam estudos de carácter sociológico e antropológico com o objectivo de alargarem a compreensão de como se produz o conhecimento matemático. Alguns destes estudos têm feito sobressair a influência das condições e doutrinas sociais na produção matemática, bem como a natureza cultural dos objectos matemáticos. Em particular, Barbin salienta que a modificação dos objectos e dos saberes matemáticos que ocorreu no século XVII, resultou do contexto científico, social e filosófico da época, onde imperava a vontade de compreender os fenómenos técnicos. Esta cultura conduziu à modificação do conceito de parábola, como consequência do estudo dos movimentos, e à introdução de novas concepções de curva que viriam a estar nos fundamentos do cálculo infinitesimal. Bento de Jesus Caraça, já em 1951, ao escrever *Os conceitos fundamentais de Matemática*, sublinhou também que a Matemática, tal como toda a construção humana, depende do conjunto de condições sociais em que é produzida.

O conceito de variável e a Grécia pós-socrática

Como poderia um tal conceito [de variável] surgir na Grécia póst-socrática, dominada por uma doutrina filosófica que (...) rejeitava a *contradição*, o *devir* e procurava, em tudo, *aquilo que guarda permanentemente a sua identidade?* Não! A *variável*, porque o é, *não guarda a sua identidade*, ultrapassa o lago tranquilo mas estéril da *permanência*. Daqui resulta imediatamente a incapacidade da ciência grega para construir o conceito de função (...) E aqui tem o leitor um exemplo, possivelmente o mais importante de todos, de como a Matemática, do mesmo modo que toda a construção humana, depende do conjunto de condições sociais em que os seus instrumentos têm que actuar. Subordinação que não a humilha, antes a engrandece.

Bento de Jesus Caraça, 1989
Conceitos fundamentais de Matemática

Restivo[16], numa posição mais radical, afirma que "as notações e símbolos são instrumentos, materiais, e em geral recursos que são socialmente construídos em torno de interesses sociais e orientados por objectivos sociais". Defende que os mundos matemáticos são mundos sociais e que os objectos matemáticos são e devem ser tratados como "objectos, *coisas* que são produzidas e manufacturadas por seres sociais" não havendo razão para que "um objecto como um teorema deva ser tratado diferentemente de uma escultura".

2.5 - A experiência matemática

Uma vez admitida a ideia de que a filosofia da Matemática deve ter em conta as práticas matemáticas reais, torna-se pertinente reflectir sobre alguns aspectos da experiência matemática. Nesta secção aborda-se o que Papert[17] designa por face extra-lógica da Matemática e o papel do computador na produção da Matemática.

2.5.1 - Face extra-lógica da Matemática

A Matemática é vulgarmente olhada por um ângulo que privilegia o seu lado lógico. No entanto, tal como acontece em qualquer outra actividade humana, também na actividade de produção matemática, a face extra-lógica coexiste com a face lógica.

Estética matemática e criação matemática

Encontram-se referências à face extra-lógica, nomeadamente à estética matemática, em várias descrições do processo de criação matemática, Por exemplo, Poincaré destaca que é a sensibilidade estética, e não a lógica, que constitui o traço distintivo do espírito matemático. Quando confrontado com um problema de difícil resolução este matemático realiza um trabalho que se desenvolve em três etapas. A primeira é uma fase de análise consciente e deliberada do problema. A segunda é uma fase de trabalho inconsciente. Parece um abandono provisório da tarefa. No entanto, o que se passa é que o *eu inconsciente* ou *subliminar*, explora, sistematicamente, todos os elementos que lhe foram fornecidos pela primeira etapa do trabalho. Após um certo tempo, num momento qualquer em que o espírito consciente se afasta do problema a resolver, algumas combinações desses elementos, provenientes do trabalho do inconsciente, aparecem na mente sob a forma de uma inspiração súbita. Numa terceira etapa, há uma análise consciente e rigorosa dessas ideias que poderão ser aceites, modificadas ou rejeitadas. Neste último caso, o inconsciente recomeçará de novo o seu trabalho na procura de uma nova solução.

Coloca-se, contudo, a questão de porque é que o inconsciente transmite ao consciente alguns resultados e outros não. É aqui que Poincaré vê a intervenção da sensibilidade estética. É esta sensibilidade, uma intuição especial que para ele só existe nos que nascem matemáticos criadores, que desempenha um papel de crivo e apenas deixa passar para o consciente as ideias que trazem a marca da beleza matemática. Poincaré, ao contestar que seja possível compreender o trabalho do matemático e os processos que ele utiliza exclusivamente em termos de lógica, o que, no fundo, põe em causa é a existência de uma teoria puramente cognitiva do pensamento matemático.

A descrição de Poincaré refere-se ao mais alto nível da criação matemática. Uma questão diferente é saber se o mesmo processo dinâmico está presente em níveis mais elementares de trabalho matemático. Foi sobre esta questão que se debruçou Papert[18] ao analisar o pensamento seguido por um grupo de não matemáticos a quem foi pedido para construir a demonstração do teorema que indica que a raiz quadrada de dois é um número irracional.

Ao longo do processo de resolução do problema, Papert constata a existência, no grupo, de sinais diversos de satisfação e entusiasmo, traços de prazer vários, que o levam a questionar-se se a Matemática não estará mais próxima do humor e dos sonhos do que aquilo que geralmente se crê. Tudo isto leva-o a colocar uma série de dúvidas sobre as razões para acreditar, como o faz Poincaré, que a faculdade de sentir beleza matemática é algo de inato e independente de outras componentes do espírito. Sugere, pois, a possibilidade destes factores entrarem em linha de conta e virem a influenciar, em cada pessoa, a percepção da Matemática como bela ou não, levando-a a aprovar ou a rejeitar "esta" ou "aquela" Matemática.

Estética matemática e criação matemática

Tornar-se matemático inclui o desenvolvimento da estética matemática, uma predilecção por analisar e compreender, por perceber a estrutura e as relações estruturais, por ver como as coisas se ajustam.

Alain Schoenfeld, 1990
Problem solving in context(s)

O que há de comum na estética de todas as artes e na Matemática, é o desaparecimento de informações parasitas, de barulhos de fundo, numa palavra a diminuição da entropia. A comparação de um belo raciocínio com a dança em que cada movimento termina o precedente e inicia o seguinte, não é destituída de sentido.

André Revuz, 1988
Est-il impossible d'enseigner les mathématiques?

Intuição e Matemática

A intuição matemática é outra das componentes que Papert inclui na face extra-lógica da Matemática. A sua importância no processo de produção desta ciência é destacada por inúmeros matemáticos, alguns dos quais chegam a afirmar que a criação matemática é, sem dúvida e antes de mais, a obra de homens notáveis pela sua poderosa intuição, mais do que pela sua capacidade de realizar demonstrações rigorosas.

No âmbito da Matemática a noção de intuição é, frequentemente, um pouco vaga. Por vezes significa pouco rigoroso, embora o conceito de rigor seja apenas intuitivamente definido. Intuitivo pode também significar visual, heurístico, plausível e holístico em oposição a pormenorizado ou analítico. Apesar desta ambiguidade, é um facto que a actividade matemática, para lá de uma componente formal (que envolve axiomas, definições, teoremas e demonstrações) e de uma componente algorítmica (composta por procedimentos que apenas podem ser adquiridas através de um treino sistemático), inclui também combinar observações, seguir analogias, recorrer a imagens, formular conjecturas e adivinhar a ideia da prova antes de a fazer, ou seja, inclui também uma componente intuitiva. Esta componente não aparece nos produtos matemáticos acabados onde prevalece a forma dedutiva. Estes produtos são assegurados pelo que Pólya designa por raciocínio demonstrativo. As conjecturas são, no entanto, sustentadas por um tipo de raciocínio diferente, o raciocínio plausível, que completa o primeiro. Pólya chama ainda a atenção para que se a aprendizagem da Matemática reflecte, em algum grau, a invenção da Matemática, então deve haver aí lugar para aprender a "adivinhar", para a inferência plausível.

Criação matemática e intuição

Ciência alguma pode nascer apenas da lógica (...) para produzir Aritmética tal como para produzir Geometria ou qualquer outra ciência, é necessário algo mais que a lógica pura. Para designar essa outra coisa, não temos outra palavra senão intuição (...) a ciência da demonstração não é toda a ciência e a intuição deve conservar o seu papel como complemento, diria mesmo, como contrapeso ou antídoto da lógica (...) Tive já oportunidade de insistir no que diz respeito ao lugar que a intuição deve ter no ensino das ciências matemáticas. Sem ela, os espíritos ainda jovens não teriam meios de aceder ao entendimento da Matemática; não aprenderiam a gostar dela e vê-la-iam apenas como uma vã logomaquia. Sem a intuição sobretudo, nunca viriam a ser capazes de aplicar a Matemática (...) Assim, a lógica e a intuição têm, cada uma delas, o seu papel. Ambas são indispensáveis. A lógica, que é a única que nos pode fornecer a certeza, é o instrumento da demonstração; a intuição é o instrumento da invenção.

Henri Poincaré, 1988
Intuição e lógica em Matemática

Temos intuição matemática, não porque memorizamos mecanicamente definições e algoritmos, mas porque temos representações mentais dos objectos matemáticos. Construímos estas representações através de experiências repetidas, quer seja através da manipulação de objectos concretos, a um nível elementar, quer, num nível mais avançado, através da manipulação de imagens mentais, de experiências de resolução de problemas e da realização de descobertas.

Uma vez que a intuição matemática é uma componente fundamental e insubstituível da actividade matemática, importa ter em conta que a ênfase exclusiva, na sala de aula, em tarefas matemáticas que não estimulem os aspectos intuitivos do pensamento, para lá de constituir uma parente pobre da experiência matemática, pode funcionar, para alguns alunos, como uma barreira inibidora da construção de conhecimento matemático significativo.

2.5.2 - A prática matemática e o computador

Nos últimos anos o computador tem tido uma forte influência no desenvolvimento da Matemática. Trouxe para primeiro plano áreas anteriormente estudadas mas entretanto postas de lado, possibilitou alargar fortemente o âmbito das aplicações da Matemática, permitiu introduzir novos processos de investigação e tem sido uma fonte fecunda de problemas. O computador está, assim, a introduzir modificações importantes nas práticas matemáticas tradicionais, dando a esta ciência uma nova dimensão, tanto nos seus aspectos teóricos como práticos. Todas estas mudanças estão a levantar interessantes questões filosóficas sobre as quais importa reflectir.

Utilização do computador em Matemática

A relação do computador com a Matemática estabeleceu-se há muitas décadas. Inicialmente começou por ser usado para realizar cálculos numéricos que ocupavam um tempo excessivamente longo. Mais tarde, o seu campo de utilização diversifica-se e torna-se mais complexo. Nos anos 50, Wang programou um computador para provar diversos teoremas dos *Principia Mathematica* de Russel. Em 1969, Davis e Cerutti usaram outro computador para produzir provas de geometria elementar, tendo encontrado uma demonstração não usual para um velho teorema. Posteriormente, o computador começa a ser programado para realizar operações com símbolos que dada a complexidade das expressões envolvidas eram sérios obstáculos ao prosseguimento dos trabalhos de investigação, alargando as *fronteiras da intratabilidade*[19].

Actualmente matemáticos, engenheiros e cientistas concebem modelos computacionais de sistemas naturais, tecnológicos e sociais para revelar cenários que anteriormente só poderiam ser estudados através de protótipos e experiências demoradas, muitas vezes realizadas em condições de risco. Por seu lado, os próprios modelos computacionais geram novos problemas matemáticos que têm impulsionado linhas de investigação diversas. Em particular, na teoria dos números o computador é frequentemente usado para chegar a novas conjecturas. Gera dados que o matemático analisa de modo a formulá-las e mesmo que não as consiga provar pode recorrer de novo ao computador para gerar outros grupos de números que lhe permitam testar ou refutar as conjecturas que estabeleceu. Noutros campos, produz imagens gráficas de objectos matemáticos que não poderiam ser "visualizados" de outro modo (como acontece, por exemplo, com os objectos fractais) permitindo, assim, ampliar as fronteiras de compreensão desses objectos. Alguns tópicos de Matemática foram mesmo relegados inteiramente para a Matemática computacional tal como acontece com a procura do maior número primo ou a mais longa expressão decimal de π.

A legitimidade matemática do computador

Apesar desta aliança fecunda entre computador e Matemática, a questão da legitimidade matemática do computador permanece, contudo, uma questão controversa. Muitos matemáticos, nomeadamente os fundacionistas, negam que os computadores possam figurar em provas matemáticas entendidas no sentido restrito do termo. Esta atitude prende-se com o facto de, por vezes, as provas assistidas por computador (*computer proofs*) não poderem ser testadas pela comunidade matemática através do método canónico que consiste em lê-las e verificar se cada inferência é logicamente correcta. As cópias escritas de muitas destas provas são impossíveis de obter devido à enorme quantidade de tempo necessário para as imprimir e mesmo que se conseguisse encheriam um número tal de páginas que seriam inúteis para o matemático. Procura-se garantir que os resultados obtidos por computador estão correctos verificando se diversos computadores os confirmam, construindo diferentes programas para os verificar e avaliando a fiabilidade dos programas utilizados.

Estas evidências são, contudo, semelhantes às que obtêm os cientistas que realizam estudos experimentais no campo das ciências naturais que, tradicionalmente, têm sido consideradas significativamente diferentes da Matemática. Assim, não é de estranhar que se ponham sérias reticências em admitir em Matemática provas assistidas por computador, com o argumento de que se iria modificar o carácter fundamental desta ciência.

Este debate poderia ter permanecido para sempre no campo puramente especulativo se as provas assistidas por computador não tivessem chegado à Matemática pura, o que aconteceu em 1976 com a prova apresentada por Appel e Haken para a conjectura das quatro cores.

Conjectura das quatro cores

Em 1976 aconteceu uma coisa rara: a notícia da demonstração de um teorema de Matemática pura foi publicada nas colunas do *New York Times*. A ocasião foi a demonstração, por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, da “conjectura das quatro cores”. O acontecimento foi notícia por duas razões. Em primeiro lugar o problema era famoso. A conjectura das quatro cores era estudada há mais de cem anos. Tinha havido muitas tentativas falhadas para a resolver — agora, por fim, tinha sido demonstrada. Contudo, o próprio método de demonstração era digno de nota. Isto porque uma parte essencial da demonstração consistia em cálculos por computador. Ou seja, a demonstração publicada continha programas de computadores e resultados de cálculos desses programas. Os passos intermédios, de execução dos programas, não foram, é claro, publicados; neste sentido, as demonstrações publicadas estavam em *princípio e permanentemente* incompletas.

O problema das quatro cores consiste em demonstrar que qualquer mapa, numa superfície plana ou numa esfera, pode ser colorido sem utilizar mais de quatro cores diferentes. A única exigência é a de que quaisquer dois países com uma fronteira comum não tenham a mesma cor.

Philip Davis e Reuben Hersh, 1995
A experiência matemática

O que Appel e Haken apresentaram foi uma prova por indução que requer a análise de diversos casos. Se se excluir a intervenção do computador há na prova uma lacuna intransponível que não pode ser preenchida com passos reconstituídos pelos matemáticos. É como se um dos lemas principais da prova fosse justificado com a expressão "como diz o computador" em lugar de ser justificado pelo recurso a resultados anteriormente estabelecidos ou a regras da lógica. Logo, a única possibilidade de verificar a prova de Appel e Haken foi utilizar um outro computador independente, o que torna a prova apresentada dependente da fiabilidade da máquina e do programa. Embora muitos sintam que esta fiabilidade é suficientemente elevada para garantir a aceitação do teorema, ela apoia-se num conjunto complexo de factores empíricos, o que não acontece com as provas matemáticas tradicionais. Ou seja, a avaliação da demonstração apresentada depende, não apenas da capacidade de análise da comunidade matemática para compreender e verificar raciocínios, mas também da sua crença de que os computadores fazem correctamente o que é suposto que façam. Esta convicção aproxima o conhecimento matemático do conhecimento vulgar, podendo, assim, parecer que há uma certa degradação do grau de certeza que viola a própria natureza da Matemática.

Não é, pois, de estranhar que a publicação do trabalho de Appel e Haken tenha gerado tantas controvérsias. Afinal, a aceitação do teorema das quatro cores põe em causa o sentido de "teorema" e, mais precisamente, o sentido de demonstração que durante séculos esteve associado à Matemática.

Computador e experimentações empíricas em Matemática

Usar computadores de modo análogo ao que foi utilizado para provar o teorema das quatro cores, conduz à possibilidade de dois tipos de prova em Matemática: (a) as provas clássicas, em que todos os resultados podem ser verificados por matemáticos interessados e (b) as provas onde intervém o computador e cuja validade não pode ser estabelecida por análise lógica pois há passos que só podem ser ultrapassadas recorrendo a essa tecnologia. Admitir a legitimidade das provas do tipo (c) introduz experimentações empíricas em Matemática, aproximando esta ciência das ciências experimentais. Este facto tem algumas consequências filosóficas. Representa a aceitação de processos quasi-empíricos em Matemática[20]; abre as portas à existência de conhecimento matemático *a posteriori*; desafia a distinção absoluta entre Matemática e ciências naturais; deixa em aberto diversas questões entre as quais explicar o papel das experiências em Matemática pura, qual o estatuto das provas assistidas por computador e quais os critérios matemáticos de aceitação dessas provas.

Actualmente multiplicam-se os casos em que os computadores são usados para produzir provas matemáticas. Não há muito tempo foi publicada nos órgãos de comunicação social[21] uma notícia que indica que um novo programa de computador, desenvolvido nos Estados Unidos, demonstrou automaticamente a conjectura de Robbins. Esta conjectura foi formulada nos anos 30 e durante décadas suscitou o interesse de muitos matemáticos que foram fazendo progressos parciais sem a conseguirem provar completamente. Aqui o que se passou foi qualitativamente diferente do que aconteceu com a prova do teorema das 4 cores. Enquanto neste a estratégia de demonstração foi concebida pelo homem, limitando-se o programa a explorar um conjunto bem delimitado de possibilidades, no caso do problema de Robbins foi o próprio programa que explorou milhões de hipóteses até que encontrou uma estratégia que levou à resolução.

Ao lado desta notícia aparece um endereço electrónico que permite aceder à página da Internet onde se poderá encontrar, não apenas a demonstração do teorema de Robbins, mas também informações sobre os avanços da inteligência artificial na demonstração automática de teoremas[22].

E provável que este acesso fácil que o computador permite às redes de informação introduza alterações muito variadas nas práticas matemáticas reais, que o tempo e a investigação se encarregarão de desvendar. Facilitará, sem dúvida, a partilha de conhecimentos e o debate de ideias e nessa medida será um estímulo importante à actividade de produção matemática.

2.6 - A concluir

A constatação de que posições filosóficas sobre a Matemática influenciam, e têm influenciado, de forma significativa conceitos e princípios orientadores relacionados com o seu ensino e aprendizagem, tem vindo a ganhar cada vez mais terreno. De facto, situarmo-nos na perspectiva de ajudar quem aprende a compreender um corpo de saberes matemáticos que é o produto contingente de forças evolutivas históricas e culturais, é um problema diferente de ensinar segundo uma perspectiva que supõe a existência de um saber matemático imutável, eterno, fortemente estruturado, infalível, rigoroso e abstracto por natureza, que é exterior aos alunos, mas que estes podem receber do professor através de mecanismos de transmissão, imitação e absorção.

Na base de muitas das actuais orientações para o ensino da Matemática, está a ideia de que saber matemática é sobretudo fazer Matemática. Simultaneamente, advoga-se que para aprender Matemática de maneira significativa e útil, importa participar na actividade matemática, considerada nas suas múltiplas vertentes, e não apenas adquirir conhecimentos e competências explicitamente indicados pelo professor.

A questão do que significa fazer Matemática tem, contudo, diversas respostas consoante a perspectiva epistemológica que se adopta sobre esta ciência. E assim sendo, as controvérsias acerca do ensino da Matemática dificilmente poderão ser resolvidas sem se reflectir sobre a natureza da Matemática e dos processos de produção do saber matemático. Daí a grande importância da temática deste capítulo para o professor de Matemática.

Referências

Barbin, E. (1994). A matemática como processo histórico e como objecto cultural. Em *ProfMat 94 - Actas* (pp. 36-44). Lisboa: APM.

Bloor, D.(1991). *Knowledge and social imagery*. London: The University of Chicago Presss.

Bkoucher, R., Charlot, B. e Rouche, N. (1991). *Faire les mathématiques: Le plaisir du sens*. Paris: Armand Colin.

Browder, F., Mac Lane, S. (1988). A relevância da matemática. Em *A Natureza da Matemática, Cadernos de Educação e Matemática* 1 (pp.17-44). Lisboa: APM.

Caraça, B. J. (1989). *Conceitos fundamentais de matemática.* Lisboa: Livraria Sá da Costa.

Connes, A. (1991). O estranho mundo da matemática. Em *Público*, 8/11.

Davis, P., Hersh, R. (1988). Da certeza à falibilidade. Em *A Natureza da Matemática, Cadernos de Educação e Matemática* 1 (pp.45-72). Lisboa: APM.

Davis, P., Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Dias Agudo, F. R. (1980). *A matemática no mundo contemporâneo*. Tomo XXIII. Lisboa: Academia das Ciências de Lisboa

Dieudonné, J. (1990). *A formação da matemática contemporânea*. Lisboa: Dom Quixote.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. Hampshire: The Falmer Press.

Ernest, P. (1994). The philosophy of mathematics and the didactics of mathematics. Em R. Biehler, Roland, W. Scholz, R. SträBer, B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 335-349). London: Kluwer Academic Publishers.

Hersh, R. (1986). Some proposals for reviving the philosophy of mathematics.Em T. Tymoczko (Ed.) *New directions in the philosophy of mathematics* (pp.9-28). Boston: Birkhäuser.

Kline, M. (1989). *Mathématiques: La fin de la certitude*. Paris: Christian Bourgois Éditeur.

Lakatos, I. (1993). *Proofs and refutations - The logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lakatos, I. (1986). A Renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?. Em T. Tymoczko (Ed.) *New directions in the philosophy of mathematics* (pp.29-48). Boston: Birkhäuser.

Papert, S. (1980). *Mindstorms — Children, computers and powerful ideas*. New York: Basic Books.

Pavelle, R., Rothestein, M. e Fich, J. (1991). Álgebra por computador. Em J.P. Ponte (Org.) *O computador na Educação Matemática* (pp. 11-27). Lisboa: APM.

Poincaré, H. (1988). Intuição e lógica em matemática. Em *A Natureza da Matemática, Cadernos de Educação e Matemática* 1 (pp.7-16). Lisboa: APM

Poincaré, H. (1996). A invenção matemática. Em P. Abrantes, L. C. Leal e J. P. Ponte (Eds), *Investigar para aprender matemática* (pp. 7-13). Lisboa: APM.

Pólya, G. (1986). From the preface of induction and analogy in mathematics. Em T. Tymoczko (Ed.) *New directions in the philosophy of mathematics* (pp.99-101). Boston: Birkhäuser.

Restivo, S. (1988). The Social life of mathematics pp. 5-20. Em *Philosophica*, 42, (2).

Revuz, A. (1980). *Est-il impossible d'enseigner les mathématiques?* Paris: PUF.

Sebastião e Silva, J. (1964). *Guia para a utilização do compêndio de matemática*, 1º volume, 6º ano, Lisboa: Ministério da Educação.

Snapper, E. (1979). The three crises in mathematics: Logicism, intuitionism and formalism. Em *Mathematics Magazine* (pp. 207-216), Vol 52, (4).

Struik, D. (1989). *História concisa das matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

Schoenfeld, A. (1990). Problem solving in context(s). Em R. Charles, E. Silver (Eds.) *The Teaching and assessing of mathematical problem solving*, (pp. 82-92). Virginia: NCTM:

Tymoczko, T. (Ed.) (1986). *New directions in the philosophy of mathematics*. Boston: Birkhäuser.

Wilder, R. (1986). The cultural basis of mathematics. Em T. Tymoczko (Ed.) *New directions in the philosophy of mathematics* (pp.185-199). Boston: Birkhäuser.

Notas

[1] J. Dieudonné (1990, p. 47). As citações incluídas no texto serão identificadas em nota de fim de capítulo através da indicação do nome do autor, da data da publicação de que a citação foi extraída e da página ou páginas em que se encontra. A restante identificação da publicação será feita nas *Referências*.
[2] Muitas das ideias da teoria empiricista de Mill sobre a matemática estão incluídas no seu livro *System of logic* (1943). Bloor, no cap 5 de *Knowledge and social imagery*, intitulado *A naturalistic approach to mathematics*, apresenta uma síntese desta teoria bem como uma análise crítica dos principais argumentos propostos por Frege para a contestar.
[3] M. Kline (1989, p. 140).
[4] P. Davis e R. Hersh (1988, p. 52).
[5] D. J. Struik (1989, p. 78).
[6] D. J. Struik (1989, pp. 90-91).
[7] Números cuja forma é a+bi+cj+dk, em que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$
[8] M. Kline (1989, p. 175).
[9] A expressão *mito de Euclides* é utilizada por Davis e Hersh para destacarem a ideia de que durante séculos foi crença generalizada que os livros de Euclides continham verdades acerca do Universo que eram claras e indubitáveis.
[10] Segundo Snapper (1979) no contexto do logicismo uma proposição lógica é definida como uma proposição que tem generalidade completa e é verdadeira em virtude da sua forma em vez do seu conteúdo. Neste sentido, por exemplo, o princípio do terceiro excluído (p v ~p é sempre verdadeiro) é uma proposição lógica pois p pode ser uma proposição da matemática, da física ou outra qualquer.
[11] P. Davis e R. Hersh (1988, p. 56).
[12] P. Ernest (1991, p. 14), referindo Lakatos.
[13] I. Lakatos (1993, p. 5).
[14] A designação é proposta, nomeadamente, por Tymoczko (1986) que refere que esta abordagem tem sido objecto de uma adesão cada vez maior, embora não constitua uma representação completa da filosofia da Matemática contemporânea.
[15] R. Hersh (1986, p. 22).
[16] S. Restivo (1988, p. 18).
[17] S. Papert (1980). Papert inclui na face extra-lógica da matemática a beleza matemática, o prazer matemático e a intuição matemática. O livro *Mindstorms - Children, computers and powerful ideas,* onde Papert refere estas ideias, tem uma tradução brasileira intitulada *Logo: Computadores e educação*, publicada pela primeira vez em 1985 por Editora Brasilience São Paulo.
[18] S. Papert (1980). O teorema que indica que raiz quadrada de 2 é um número irracional foi escolhido exactamente por o matemático inglês Hardy o ter considerado como um dos mais puros exemplos de beleza matemática.
[19] Esta expressão é usada por Pavelle, Rothestein e Fitch (1991), para indicar que o computador, através da utilização de sistemas automáticos de manipulações algébricas, permite explorar expressões algébricas frequentemente incluídas em teorias científicas, que são extremamente difíceis de explorar 'à mão'.
[20] Tymoczko, T. (1986) vai mais longe, afirmando que aceitar a legitimidade do teorema das quatro cores conduz a adoptar uma teoria quasi-empírica da matemática.
[21] Ver, por exemplo, *Expresso* 15/2/97.

[22] A formulação e demonstração do teorema de Robbins, bem como as informações que foram fornecidas ao computador podem ser obtidas no endereço http://www.mcs.anl.gov/

3 - O CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DO ENSINO SECUNDÁRIO

O currículo da disciplina de Matemática em Portugal, como em muitos outros países, tem sofrido importantes mudanças, de acordo com as épocas — e isso tem acontecido no ensino secundário tanto quanto nos outros níveis de ensino. Para o comprovar basta observar, por exemplo, os manuais escolares usados no princípio do século. Os temas tratados são muito diferentes dos que se encontram nos manuais usados nos nossos dias e, mais importante, evidencia-se uma forma completamente diferente de abordar os assuntos. A evolução da Matemática e as mudanças sociais levam, periodicamente, à elaboração de novos currículos. A evolução do currículo — embora muitas vezes dramatizada por alguns dos actores sociais — é um fenómeno perfeitamente normal. Um currículo pode vigorar durante mais ou menos tempo, conforme se revele mais ou menos adequado às suas funções e ao jogo das forças políticas e sociais a que se encontra submetido. Com a transformação acelerada da sociedade, característica deste final do século XX, é natural que os currículos passem a ter uma vida útil cada vez menor.

Têm mudado os conteúdos curriculares, mas tem mudado também o que se entende por currículo. Num passado não muito distante, um currículo era essencialmente uma listagem de temas a tratar pelo professor. Depois, os currículos começaram a conter objectivos, recomendações metodológicas e sugestões para a avaliação. Hoje, volta a questionar-se o que deve ser um currículo. Deve ser um documento vinculativo de âmbito nacional, válido para todos os alunos de um mesmo nível etário? Ou deve conter uma parte fixa, comum a todos os alunos, e uma parte flexível, a ser gerida pela escola ou pelo professor? Deve o currículo estipular de modo pormenorizado os objectivos gerais e específicos, os métodos de ensino e as abordagens, os materiais, as formas de organização do trabalho na aula e os instrumentos de avaliação a usar pelo professor? Ou deve incidir sobretudo nas competências consideradas desejáveis, deixando o modo de as concretizar ao critério dos organismos encarregados da gestão pedagógica dos estabelecimentos de ensino?

Para ter uma perspectiva fundamentada sobre as actuais orientações do ensino da Matemática para o ensino secundário, é preciso conhecer o modo como se chegou à situação presente. É preciso conhecer, também, os pressupostos que fundamentam as grandes opções que informam o actual programa. Será, igualmente, indicado interrogarmo-nos sobre os principais aspectos que poderão condicionar a evolução futura dos currículos neste nível de ensino. É o que procuraremos fazer no presente capítulo.

3.1 - Do passado recente aos nossos dias

3.1.1 - O ensino da Matemática nos anos 50

Os grandes temas de Matemática ensinados aos alunos antes da sua entrada na Universidade foram, durante muito tempo, a aritmética, a geometria e a álgebra. Em meados do século XX, a aritmética era estudada, sobretudo, nos níveis de ensino mais elementares. No 2º ciclo do antigo ensino liceal (actuais 7º, 8º e 9º anos de escolaridade), fazia-se uma iniciação ao estudo da álgebra (polinómios e equações) e abordava-se a geometria de um modo muito próximo dos *Elementos* de Euclides. No 3º ciclo do ensino liceal (actuais 10º e 11º anos), continuava-se com a álgebra e estudava-se geometria analítica, trigonometria e aritmética racional.

> ***O ensino da Matemática no princípio do século***
>
> Nos princípios do século XX, a Matemática era encarada ainda como "disciplina mental", perspectiva que não só reflectia concepções antigas como estava de acordo com teorias psicológicas da época segundo as quais aptidões de carácter geral podem ser desenvolvidas em qualquer contexto e daí transferidas para outros contextos (...) O estudo da geometria, em especial, era suposto contribuir para o desenvolvimento de capacidades intelectuais desejáveis naqueles que ocupariam posições de chefia. Esta perspectiva orientava o ensino, então profundamente elitista, dirigido para uma minoria, enquanto a formação matemática para a maioria ou não existia ou limitava-se à aritmética elementar.
>
> Paulo Abrantes, 1994
> *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática*

Vejamos o que constava nos programas de Matemática do 3º ciclo do ensino liceal, aprovados em 1948. Estes programas incluíam diversos temas, a que correspondiam compêndios distintos. A álgebra, de longe o mais importante, compreendia o estudo de funções, limites, polinómios, equações (incluindo equações irracionais), análise combinatória, números complexos e derivadas. A trigonometria, envolvia o estudo das funções circulares directas e inversas, fórmulas da soma e diferença de dois ângulos, o uso de tábuas trigonométricas (naturais e logarítmicas) e a resolução de equações trigonométricas. A aritmética racional, cujos métodos de estudo eram considerados "os que mais se prestavam a criar no aluno hábitos de rigor científico"[1], incluía a teoria dos números inteiros, potenciação, sistemas de numeração, divisibilidade, números primos, divisores e múltiplos. Finalmente, existia uma breve introdução à geometria analítica plana, que o aluno teria oportunidade de estudar "mais desenvolvidamente nos cursos superiores"[2], fazendo-se o estudo da recta e de diversos lugares geométricos como a circunferência, elipse, parábola e hipérbole. Os programas eram essencialmente uma relação de conteúdos a tratar, complementados com breves notas para cada um dos diferentes ciclos. É interessante notar a importância que eles dão ao raciocínio, ao desenvolvimento da iniciativa e da confiança do aluno e a valorização que fazem da História da Matemática, tudo ideias, ainda hoje, com grande actualidade.

Mas a verdade é que a grande ênfase do ensino nesta época era, em todos os níveis, o treino das técnicas de cálculo. Ao cálculo numérico da aritmética seguia-se o cálculo com expressões algébricas, as regras de derivação e a resolução de equações trigonométricas, culminando com as laboriosas "contas" com logaritmos.

Anteriormente, a geometria sintética de Euclides tinha tido uma enorme importância neste nível de ensino (demonstrações, problemas de construção no plano e no espaço, lugares geométricos, etc.). Nesta altura, porém, viu-se relegada para o ciclo anterior, sendo substituída pela geometria analítica de Descartes e Fermat, que se prestava muito bem a exercícios de cálculo dos mais diversos (distâncias, intersecção e posições relativas de rectas, de rectas e circunferências, etc.).

Recomendações dos Programas de Matemática do 3º ciclo do Ensino Liceal

O estudo da Matemática [no ensino secundário] deve constituir para o aluno uma ginástica intelectual que lhe permita raciocinar com precisão e clareza, tanto no campo científico como no da vida prática.

Pretende-se que o aluno não só fique de posse de um certo número de princípios e teorias, em que será geralmente exigido o rigor próprio desta disciplina, mas que tenha desenvolvido a iniciativa pessoal e a faculdade de raciocínio, de modo a poder iniciar com confiança os estudos superiores (...)

Como a assimilação de uma ciência só é perfeita se a teoria e a prática se auxiliarem e completarem mutuamente, um dos tempos semanais será destinado a aula prática.

Os factos da história da Matemática relacionados com os assuntos a estudar, quando adaptados à mentalidade dos alunos, constituem um poderoso auxiliar para a boa compreensão de certas questões e, por vezes, também um incitamento ao trabalho.

Decreto Nº 37112
de 22 de Outubro de 1948

A situação do ensino da Matemática em Portugal era alvo de muitas críticas que sublinhavam a reduzida competência dos alunos ao nível do cálculo — apesar do ensino ser essencialmente orientado para o domínio do cálculo! O mesmo se passava em muitos outros países.

Entretanto, o ensino universitário tinha-se vindo a alterar progressivamente com a introdução de temas resultantes da investigação matemática mais recente, como a álgebra abstracta, topologia, teoria das probabilidades, teoria dos conjuntos e lógica matemática. Um grupo de matemáticos franceses, sob o pseudónimo de Nicolas Bourbaki, começou a elaborar um tratado que pretendia integrar de modo coerente e impecavelmente rigoroso os principais desenvolvimentos desta ciência. Os grandes êxitos científicos e tecnológicos (televisão, radar, bomba atómica, computador) e a nova ordem mundial do pós-guerra deram origem a uma atmosfera de grande euforia no mundo científico. Os cientistas ganharam um grande peso social e começaram a protestar, de modo cada vez mais audível, contra o crescente fosso entre os conhecimentos ministrados aos alunos no ensino secundário e os conhecimentos que consideravam desejáveis para o início dos estudos superiores.

Exercícios de trigonometria

Determinar, aplicando logaritmos, os valores de x que verificam a igualdade

$$\text{tg } x = \frac{\cos 220^\circ\ 15'\ 30''\ .\ \text{cotg } 470^\circ}{\text{sen } 1000^\circ\ 18'}$$

Determinar os valores de

$$\text{arc sen} \left(\frac{\text{tg } 1972^\circ\ 12'\ .\ \cos 300^\circ\ 8'\ 6''}{\text{cotg } 250^\circ} \right)$$

Resolver a equação

$$4 \text{ sen}^2 x + 2(1 - \sqrt{3}) \cos x + \sqrt{3} - 4 = 0$$

António Palma Fernandes, 1963
Exercícios de álgebra, trigonometria e geometria analítica, 11ª Edição

3.1.2 - O movimento da Matemática moderna

No final dos anos 50, especialmente com o lançamento do primeiro satélite artificial pela União Soviética, intensificou-se a pressão para a modernização do ensino da Matemática e das Ciências. A nova abordagem da Matemática escolar deveria apresentar esta disciplina de um modo unificado, recorrendo à linguagem dos conjuntos e privilegiando o papel das estruturas, muito em especial das estruturas da álgebra abstracta (grupo, anel, corpo, etc.). Argumentava-se que isso correspondia, por um lado, à própria essência da Matemática (na abordagem bourbakista...) e que, por outro lado, encontrava apoio em certas investigações psicológicas sobre o raciocínio da criança.

Matemática moderna, porquê?

O psicólogo Piaget mostrou, exaustivamente, a correspondência existente entre as estruturas algébricas e os mecanismos operatórios da inteligência de uma criança.

O matemático inglês Boole, no seu famoso livro "As leis do pensamento", pôs em evidência a existência de uma "álgebra do pensamento" que sob a forma de estruturas se exprime pela língua e se revela numa gramática. Se esta verdade não é explorada no devido tempo, fica-se com a falsa ideia de que a Matemática só deve pertencer aos adultos habituados a rigorosos pensamentos lógicos, quando na verdade é impossível conduzir os primeiros ensaios do raciocínio de uma criança, sem usar as estruturas matemáticas.´

Quando se fala na introdução da "Matemática Moderna" no ensino secundário (e até mesmo primário!) o que se pretende é propiciar o conhecimento da Matemática nesse sentido, isto é, modernizar a linguagem dos assuntos considerados imprescindíveis na formação do estudante, usando os conceitos de conjunto e de estruturas.

Folha Informativa dos Professores do 1º grupo
do Ensino Técnico Profissional, 1966

O movimento da Matemática moderna procurou, assim, (i) usar conceitos e processos unificadores para reestruturar os diversos tópicos escolares de um modo mais coerente, (ii) introduzir novos tópicos que se considerava poderem ser aprendidos pelos alunos e de valor nas novas aplicações desta ciência e (iii) eliminar alguns dos tópicos tradicionais, considerados obsoletos. Pretendia-se proporcionar aos alunos uma melhor compreensão das ideias matemáticas e, ao mesmo tempo, melhorar as suas competências de cálculo. Argumentava-se que as suas dificuldades resultavam, em grande medida, de eles não conseguirem relacionar umas coisas com as outras. O estudo das estruturas unificadoras e o uso de uma linguagem comum poderiam ter, nesta perspectiva, uma influência benéfica no próprio domínio do cálculo.

Conjuntos, relações binárias, estruturas matemáticas e lógica passaram a desempenhar um forte papel nos currículos O conceito de função numérica foi secundarizado, dando-se proeminência à noção mais geral de aplicação (com domínio num conjunto de qualquer natureza). A trigonometria deixou de ser um assunto à parte, passando a estar integrada na iniciação à análise infinitesimal e a sua abordagem deixou de ser geométrica para passar a ser algébrica. A geometria analítica praticamente desapareceu, sendo substituída pela iniciação à álgebra linear (estudo da "estrutura" de espaço vectorial). Introduziram-se noções rudimentares de estatística e de teoria das probabilidades.

A Matemática moderna não se limitou a mudanças ao nível dos conteúdos. Houve grande preocupação com os métodos a usar, sendo muito discutido o ensino "por descoberta". Pretendia-se que os alunos tivessem um papel activo, sendo, tanto quanto possível, eles próprios a redescobrir os conceitos.

Em Portugal, a Matemática moderna conheceu dois períodos distintos. Nos anos 60, teve uma fase experimental, conduzida por José Sebastião e Silva, num número progressivamente mais alargado de turmas do 3º ciclo do ensino liceal. A partir do início dos anos 70, deu-se a sua generalização aos alunos de todos os níveis de ensino, sendo elaborados novos programas e novos manuais escolares. Foram os programas dessa época, com pequenos reajustes no período pós-25 de Abril, que acabaram por vigorar até 1991.

Novos métodos de ensino

1. A modernização do ensino da matemática terá de ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino. O professor deve abandonar, tanto quanto possível, o método expositivo tradicional, em que o papel dos alunos é quase cem por cento passivo, e procurar, pelo contrário, seguir o método activo, estabelecendo diálogo com os alunos e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta.

2. A par da intuição e da imaginação criadora, há que desenvolver ao máximo no espírito dos alunos o poder de análise e o sentido crítico. Isto consegue-se, principalmente, ao tratar da definição dos conceitos e da demonstração dos teoremas, em que a participação do aluno deve ser umas vezes parcial (em diálogo com o professor) e outras vezes total (encarregando cada aluno de expor um assunto, após preparação prévia em trabalho de casa).

José Sebastião e Silva, 1964
Guia para a utilização do compêndio de Matemática

O treino do cálculo com expressões algébricas e a prática de exercícios artificiosos com limites e derivadas, nunca chegaram a perder por completo o seu lugar. Em vez de uma substituição da Matemática tradicional pela Matemática moderna, o que se verificou foi uma simbiose entre as duas. E as aplicações da Matemática, apesar das boas intenções iniciais, acabaram por desaparecer dos programas e dos manuais escolares.

Operações lógicas e com conjuntos

Simplifique as expressões

a) $\sim\sim p \wedge (p \vee \sim p)$

b) $q \wedge \sim (p \wedge q)$

Madalena Garcia, Alfredo Osório e António Ruivo, 1983
Compêndio de Matemática, 10º ano

Mostre que:

$$A \subset E \Rightarrow A \cap ((A \setminus E) \cup B) = A \cap B$$

Henrique Verol Marques, 1978
Exercícios de Matemática 1, 10º ano

Em Portugal, desde o início dos anos 80 (e mais cedo noutros países), começaram a surgir críticas aos programas da Matemática moderna. O simbolismo carregado e a ênfase em estruturas abstractas revelavam-se, afinal, de difícil compreensão para os alunos. A preocupação com o rigor de linguagem dava origem a novos tipos de exercícios, muitas vezes estéreis e irrelevantes. E, o que era pior, as competências dos alunos no raciocínio, na resolução de problemas e no domínio do cálculo não mostravam os desejados progressos.

Características da Matemática moderna

Acabamos por assistir a um ensino de Matemática orientado numa óptica essencialmente dedutiva, focando os aspectos lógicos, privilegiando o estudo dos mais diversos tipos de estruturas, desde as mais "pobres" às mais ricas. A Matemática aparece aos olhos dos jovens como ciência acabada, artificialmente criada, sem qualquer ligação com a realidade. A intuição, fundamental na criatividade, que teve um papel essencial na construção do edifício matemático, não é estimulada. Ora, se analisarmos as diversas etapas históricas da evolução da Matemática, reconhecemos que a intuição teve sempre um papel capital nas descobertas e, portanto, no progresso matemático e que a dedução, isto é, a construção do edifício da Matemática a partir de um número reduzido de axiomas e definições corresponde a uma fase posterior de síntese.

António St. Aubyn 1980
Matemática moderna em crise?

3.1.3 - O *back to basics*

No início dos anos setenta explodia um forte movimento de revolta contra a Matemática moderna, primeiro nos Estados Unidos, depois em França e noutros países. O principal porta-estandarte deste movimento era um matemático prestigiado, Morris Kline, que escreveu um livro intitulado *Why Johnny can't add: The failure of the new math*. Entre muitas outras histórias, contava-se que os alunos agora sabiam muito bem que 7 x 8 era igual a 8 x 7, pela propriedade comutativa da multiplicação, mas não sabiam quanto era 7 x 8 nem 8 x 7...

Em muitos países o formalismo e o pretensiosismo na linguagem tinham sido levados a extremos impensáveis. Perante o declínio dos resultados dos alunos nos testes de admissão à Universidade (nos Estados Unidos), começou a reclamar-se um regresso à ênfase nas competências básicas, à necessidade de estabelecer níveis de competência mínima em exames para passagem de ano e para concessão do diploma final do ensino secundário.

Em Portugal, o movimento do *back to basics* não chegou a ter uma forte expressão. É verdade que encontramos recomendações expressas no sentido do reforço do ensino das competências de cálculo em estudos sobre o desempenho dos alunos portugueses, feitos com a colaboração de técnicos suecos no antigo GEP, no final dos anos 70. Mas também é verdade que o tratamento dos temas de álgebra e análise se conservou com poucas alterações, e isso apesar da importância desproporcionada que ganhou o tema da lógica — que consumia muitas vezes uma grande parte do tempo no 10º ano. Entre

A linguagem da Matemática

A terminologia, especialmente a terminologia pretensiosa, não é substituto para a substância. Tendo em conta a ênfase dada à terminologia, é evidente que os reformadores crêem que dando nomes a coisas, automaticamente conferem poderes sobre elas. Muitos críticos consideraram que os textos de Matemática moderna não são mais do que dicionários ou estudos de linguística. Pouco se duvida que a novidade atribuída à nova Matemática resulte em grande parte da introdução de uma nova terminologia que serve bastante pior que a antiga. O que se trouxe para a Matemática moderna não é tanto a Matemática moderna quanto verbosidade e às vezes apenas a sua caricatura.

Morris Kline, 1973
Why Johnny can't add

nós não se verificaram os exageros que ocorreram noutros países e integrou-se no novo currículo muito do antigo ensino tradicional. E não havia muita razão para reclamar mais atenção às competências de cálculo porque elas nunca deixaram de estar no centro do palco, constituindo o prato forte dos exames, nomeadamente do 12º ano.

No nosso país, a generalização do currículo da Matemática moderna só ocorreu quando noutros países este movimento já há muito estava em refluxo. Quando chegou a hora de reflectir a sério sobre os seus resultados, já outros ventos corriam no panorama internacional.

3.1.4 - As tendências actuais

O movimento *back to basics* encontrou forte oposição, logo desde o seu início, da parte da comunidade educativa. É evidente que os alunos têm que adquirir diversas competências básicas — o problema é saber em que consistem e qual deve ser o seu papel no processo educativo. A análise cuidadosa das competências básicas em Matemática, mostrou que estas não se deviam limitar ao simples domínio do cálculo mas incluir outros aspectos entre os quais se destaca a resolução de problemas[3].

Os anos 80 conheceram de novo um intenso movimento de reforma do ensino da Matemática. O início desse movimento é marcado pelo surgimento de duas publicações. Uma é a *Agenda for action* do NCTM (1980), um manifesto onde se proclama que a resolução de problemas deve ser o foco da Matemática escolar. A outra é o relatório *Mathematics counts,* coordenado por W. Cockcroft (1982), onde se faz uma análise aprofundada do ensino da Matemática na Inglaterra e no País de Gales, em todos os níveis de ensino. Posteriormente, surgiram muitos outros documentos, relatórios, conferências e projectos em que a resolução de problemas ocupa, invariavelmente, um lugar de relevo[4]. De entre todos, é de destacar o influente documento *Normas para o currículo e avaliação da matemática escolar*, também do NCTM (1989/1991). Traduzido em diversas línguas, entre as quais o português, este documento salienta que o principal objectivo da Matemática escolar é levar o aluno a desenvolver o seu poder matemático *(mathematical power)*.

As novas orientações curriculares que se afirmam na década do 80 e 90 no panorama internacional valorizam sobretudo quatro ideias: (i) a natureza das competências matemáticas que merecem especial atenção no processo de ensino-aprendizagem; (ii) o impacto das novas tecnologias computacionais na Matemática e na sociedade em geral; (iii) a emergência de novos domínios na Matemática; e (iv) o aprofundamento da investigação sobre o processo de aprendizagem.

A primeira grande orientação tem origem no interior da comunidade de educação matemática. A resolução de problemas, noção teorizada por George Pólya como um aspecto essencial da actividade matemática, assumiu um papel central nas novas perspectivas curriculares. Pretendia-se proporcionar aos alunos uma experiência matemática genuína que, de algum modo, se aproximasse da actividade criativa dos matemáticos. Mais recentemente, começou a valorizar-se também a ideia da realização de investigações por parte dos alunos. Numa investigação, parte-se de uma questão

Problemas no ensino da Matemática

Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no carácter.

Um professor de Matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objectivo.

Um estudante cujo curso inclui Matemática tem, também, uma oportunidade única, que ficará evidentemente perdida se ele considerar esta matéria como uma disciplina com que precisa obter tantos créditos e a qual deverá esquecer, o mais rápido possível, assim que passar pelas provas finais. A oportunidade pode ser desperdiçada até mesmo se o estudante tiver algum talento natural para a Matemática, pois ele, como todos os outros, precisa descobrir seus talentos e seus gostos: ninguém poderá saber se gosta de torta de maçã se nunca tiver provado torta de maçã. É possível, porém, que chegue a perceber que um problema de Matemática pode ser tão divertido quanto um jogo de palavras cruzadas, ou que o intenso trabalho mental pode ser um exercício tão agradável quanto uma animada partida de ténis. Tendo experimentado prazer no estudo da Matemática, ele não a esquecerá facilmente e haverá, então, uma boa probabilidade de que ela se torne alguma coisa mais: um *hobby*, um instrumento profissional, a própria profissão ou uma grande ambição.

George Pólya, 1945
How to solve it

muito geral ou de um conjunto de dados pouco estruturados. A partir daí, procura-se formular uma questão mais precisa e sobre ela produzir diversas conjecturas. Depois, é preciso testar essas conjecturas, algumas das quais poderão ser abandonadas. As conjecturas que resistirem a vários testes vão ganhando credibilidade, estimulando a realização de uma prova que, se for conseguida, lhes conferirá validade matemática. A principal diferença entre a resolução de problemas e realização de investigações está na natureza das tarefas. Na resolução de problemas, as questões são de um modo geral bem precisas, sendo dadas pelo professor. Nas investigações, as questões são à partida mais abertas, cabendo ao próprio aluno um papel importante na sua formulação. Mas ambas as actividades apelam à imaginação e à criatividade, remetendo para capacidades que se situam para além do simples cálculo ou memorização de definições e procedimentos.

Associadas à resolução de problemas e às investigações surgem outras capacidades, genericamente designadas por capacidades de ordem superior, como a comunicação, o espírito crítico, a modelação, a capacidade de analisar dados e situações complexas e de realizar demonstrações. Igualmente destacadas surgem as capacidades de natureza metacognitiva como planear, gerir e avaliar o nosso próprio trabalho. A ênfase neste tipo de capacidades apoia-se em muitos argumentos, desde os que sublinham o seu papel formativo no desenvolvimento intelectual do indivíduo e na sua preparação para uma cidadania crítica e consciente, até aos argumentos de cunho utilitário, relacionados com as possíveis necessidades matemáticas dos empregos do futuro[5].

Uma segunda tendência muito forte nos currículos actuais resulta da progressiva afirmação das tecnologias computacionais. Estas tecnologias estão a mudar a Matemática, levando à criação de novas áreas (como a teoria dos autómatos celulares) e tornando certos tópicos mais importantes (como a análise combinatória). Depois de um período inicial em que não despertaram muito interesse na generalidade dos matemáticos, as novas tecnologias passaram a ser cada vez mais usadas em muitas áreas da investigação matemática e nos mais diversos domínios de aplicação. Estas tecnologias estão disponíveis a baixo custo. Tudo isto leva a considerar cada vez mais a pertinência do seu uso no processo de ensino-aprendizagem.

Na verdade, a calculadora e o computador mudaram os conceitos e as competências que devem receber mais ênfase na disciplina de Matemática. Deste modo, multiplicam-se as recomendações para que os temas tradicionais sejam alterados para dar lugar a

O uso de instrumentos de cálculo num ensino para todos

Duvidamos que as tábuas de logaritmos, como instrumento de trabalho, conservem por muito tempo a soberania que tiveram. Em certos ramos de aplicação da Matemática à vida corrente, a tábua de logaritmos está hoje de largo ultrapassada pela máquina de calcular (nos cálculos actuariais, por exemplo).

Cada época cria e usa os seus instrumentos de trabalho conforme o que a técnica lhe permite; a técnica do século XX é muito diferente da do século XVI, quando os logaritmos apareceram como necessários para efectuar certos cálculos.

O ensino do Liceu que é, ou deve ser, *para todos*, deve ser orientado no sentido de proporcionar *a todos* o manejo do instrumento que a técnica nova permite.

Bento Caraça, 1942
Gazeta de Matemática, *nº 11*

novos tópicos importantes. O conteúdo, a ênfase e a abordagem do ensino da álgebra, da geometria, da iniciação à análise infinitesimal e das probabilidades e estatística precisa de ser reexaminado tendo em conta as novas tecnologias[6].

A terceira tendência refere-se sobretudo aos assuntos a abordar e tem a ver principalmente com a própria evolução da Matemática. Há novos temas que emergem. A matemática discreta, a estatística, as probabilidades e as ciências da computação são agora vistas como “fundamentais” e, por isso, cada vez mais se defende que novos tópicos e técnicas destes assuntos devem ser introduzidos no currículo. Na opinião de alguns autores, a programação de computadores deve ser estudada, pelo menos, pelos alunos que se destinam ao ensino superior.

Finalmente, há a destacar uma quarta tendência no currículo, que resulta das investigações sobre o processo de aprendizagem. Reconhece-se que os alunos chegam à escola com um significativo corpo de conhecimentos acerca do mundo, incluindo muitas noções matemáticas. Parte deste conhecimento ultrapassa e parte contradiz o que é ensinado na escola. Por isso, os temas escolares precisam de ser organizados de modo a explorar as intuições e as noções informais dos alunos. A investigação tem mostrado que a maioria dos alunos realiza as tarefas matemáticas sem reflectir sobre o sentido das questões propostas. Perante um problema, é usual ver um aluno fazer a sua leitura, identificar os números relevantes e a operação a usar, executar essa operação e escrever o resultado. Se o aluno não compreende as justificações dos raciocínios do professor e não dá sentido às operações e conceitos matemáticos, pode dominar muito bem as destrezas de cálculo, mas acabará por considerar a Matemática como algo arbitrário, desinteressante e inútil. A investigação tem também mostrado que a cultura da sala de aula determina a visão da Matemática e o modo como os alunos usarão o muito ou pouco que aprenderem. Deste modo, a investigação tem procurado encontrar formas de criar na sala de aula uma atmosfera que estimule uma verdadeira experiência matemática aos alunos.

3.2 - Factores que influenciam o currículo

Na elaboração de qualquer currículo intervêm diversos factores, uns de modo explícito, outros apenas implicitamente. Um factor essencial é, naturalmente, a própria Matemática. A leitura que se faz do que é importante nesta ciência tem uma influência óbvia nos assuntos que ganham prioridade curricular e no tratamento que recebem. Isso aconteceu de modo evidente no período da Matemática moderna, em que a visão formalista da Matemática se traduziu numa forte valorização da linguagem simbólica, das estruturas algébricas, da formalização precoce dos conceitos e do rigor a todo o preço. Mas esta influência manifesta-se igualmente de formas mais subtis. A grande importância que a análise infinitesimal tem, hoje em dia, em muitos países no ensino superior, reflecte-se, de modo flagrante, na centralidade que este tópico encontra no ensino secundário. Nos países com grande tradição nas aplicações da Matemática, estas encontram forte expressão no currículo, enquanto que nos países em que as aplicações têm pouca expressão académica, elas são muitas vezes completamente ignoradas no ensino. Neste momento, há uma grande mudança na Matemática provocada pela tecnologia computacional, sendo de prever que, a sua influência nos currículos se torne cada vez mais forte.

Há muitos modos alternativos de conceber, desenvolver e usar a Matemática. Nem todos têm a mesma pertinência para o ensino não-superior. Além disso, o currículo não se deve apoiar só na Matemática académica mas deve ter também em conta a Matemática usada por outras ciências e ramos da actividade humana, incluindo a vida diária e o trabalho das pessoas. Tem havido alturas em que a ênfase foi dada à Matemática académica (como na Matemática moderna) e outras em que se privilegiou a Matemática prática (por exemplo, nos EUA nos anos 30 e, entre nós, no antigo ensino técnico). As posições extremistas conduzem invariavelmente a absurdos, mas nem sempre é fácil encontrar o melhor ponto de equilíbrio. Sendo assim, a natureza e a estrutura da Matemática dão alguma orientação para a selecção e organização dos tópicos a ensinar mas não são, só por si, suficientes para a concepção de um currículo.

Há outros domínios do saber que podem dar o seu contributo para a construção de um currículo. Na verdade, fazer a selecção dos conteúdos a tratar é, apesar de tudo, a parte mais fácil da tarefa. É preciso encontrar boas representações das ideias matemáticas e isso é um problema complexo que rapidamente se liga a questões acerca do modo como os alunos aprendem. Neste ponto é preciso recorrer aos contributos da Psicologia, o que não é muito difícil porque há nesta ciência uma grande tradição em estudar o pensamento das crianças e dos adultos em torno de conceitos matemáticos.

A Psicologia tem-se debruçado fortemente sobre a questão da representação do conhecimento na memória, o que levou a considerar diferentes formas de representações computacionais, distinguindo, por exemplo, entre memória de curto prazo e memória de longo prazo. Outra questão que tem merecido grande atenção dos investigadores é a do papel dos processos metacognitivos e dos processos de regulação da actividade mental. Conclui-se que é possível promover significativamente o seu desenvolvimento, em domínios e contextos problemáticos bem definidos. O conceito de inteligência, muito associado no passado ao raciocínio geral e abstracto evoluiu, incluindo hoje em dia aspectos como a criatividade, o pensamento divergente, a capacidade de resolver problemas e de estabelecer relações entre diversos domínios.

Um problema clássico da Psicologia é o da transferência do conhecimento de uns domínios para os outros. Trata-se de um problema central na Matemática dado que o poder desta ciência deriva dos seus conceitos e procedimentos poderem ser reconhecidos e explorados em muitos contextos diferentes. Alguns psicólogos consideram que a transferência pode ser obtida quando se conjuga o ensino de princípios gerais de raciocínio com a prática de autoregulação e se exercitam aplicações potenciais em diversos contextos. Outros, porém, são mais cépticos, considerando que, em última análise, é impossível separar o que é aprendido, da actividade e do contexto em que é aprendido[7]. Em conclusão, a própria Psicologia não dá orientações claras e inequívocas a serem seguidas cegamente, devendo antes suscitar a sensibilidade dos autores dos currículos e dos professores para os potenciais problemas que podem surgir no processo de ensino-aprendizagem.

Na construção do currículo, tem-se também tirado partido da investigação em Educação, nomeadamente à que se refere ao conhecimento e pensamento do professor e à dinâmica do funcionamento da instituição escolar. Os conhecimentos, interesses, capacidades e valores dos professores de Matemática têm de ser tidos em conta na elaboração do currículo desta disciplina. Hoje em dia, sabe-se muito acerca da natureza do conhecimento profissional do professor, nas suas vertentes explícita e implícita, relativamente à sua actividade lectiva e não lectiva. Reconhece-se que esse pensamento se organiza em imagens, princípios práticos e regras de prática e que a actividade profissional constitui um mundo de experiência específico, com as suas regras e condicionantes próprias. Assim, uma unidade de acção, como uma aula, decorre da constituição de uma agenda, é constantemente monitorizada através de um processo de recolha de informações e resulta numa avaliação final que o próprio professor faz sobre os resultados obtidos. Por outro lado, as funções e poderes das estruturas escolares e o próprio processo de socialização dos novos professores que chegam à escola, são factores determinantes nas concepções e nas práticas que se afirmam como dominantes no universo profissional. Assim, a investigação sobre o pensamento e o conhecimento profissional do professor e o funcionamento da instituição escolar tem ajudado a compreender os processos de mudança (ao nível individual e colectivo) e a sua íntima relação com os contextos de trabalho e com a biografia pessoal do professor, levando a uma melhor compreensão dos processos de desenvolvimento profissional e de mudança curricular.

Na elaboração de um currículo, um importante contributo pode ser também dado pelos próprios professores da disciplina, principalmente pelos mais experientes. A prática e, principalmente, a reflexão sobre a prática, é uma grande fonte de sabedoria, dando a conhecer o modo de reagir dos alunos aos diferentes tipos de propostas e modos de trabalho. Em muitos países, professores experientes têm dado directamente um grande contributo na elaboração do currículo. Mas, na maior parte dos casos, o seu papel é o de elemento regulador, ajudando a definir o que é ou não possível. Com a descentralização das decisões em matéria curricular e a afirmação crescente do protagonismo profissional dos professores, é de admitir que eles venham a ter um papel cada vez mais significativo neste domínio.

Finalmente, é preciso considerar o impacto do contexto social no processo de elaboração dos currículos — o factor que, no longo prazo, acaba por ser inquestionavelmente o mais importante de todos. Em todos os países existe uma opinião pública não profissional onde sobressaem jornalistas, comentadores e políticos. Em cada época, há forças sociais e valores que se afirmam como importantes e que influenciam, de modo mais ou menos directo, os currículos. As pressões do ensino superior, que pretende que os alunos que recebe tenham uma certa preparação, têm sido, tradicionalmente, um factor com muita influência no currículo. As preocupações de competição científica e tecnológica (nos anos 50) e económica (nos anos 80 e 90) tiveram um forte papel nas reformas curriculares. A interiorização dos valores da democratização e da igualdade de oportunidades levou à afirmação da perspectiva da "Matemática para todos", contrariando a velha noção do ensino elitista que pressupunha uma Matemática eminentemente selectiva, "apenas para alguns". Presentemente, um valor em crescente afirmação é o do multiculturalismo, levando a valorizar a Matemática própria de cada cultura ou ramos de actividade (etnomatemática), que existe no interior de uma dada sociedade.

3.3 - Finalidades do ensino da Matemática

O ensino da Matemática pode ser justificado com base em muitas e excelentes razões. Pode-se argumentar que esta disciplina é necessária à vida quotidiana e essencial em muitas actividades profissionais. Pode justificar-se dizendo que a Matemática faz parte do património cultural da sociedade, sendo nossa obrigação transmiti-la às novas gerações. Pode defender-se que ela "ensina a pensar", tornando-nos mais aptos, por exemplo, para pensar de forma abstracta e para fazer raciocínios dedutivos. Pode ainda salientar-se o facto de ela ajudar a desenvolver valores estéticos, nomeadamente a noção do belo. Além de tudo disso, pode dizer-se que trabalhar em Matemática constitui, em determinadas circunstâncias, um verdadeiro prazer.

A verdade é que as finalidades do ensino da Matemática de qualquer nível de ensino envolvem diversas dimensões, entre as quais se destacam aspectos culturais, sociais, formativos e políticos. A valorização que se dá a cada uma deles tem consequências profundas na elaboração do currículo, no processo de aprendizagem e no papel social desempenhado, em última análise, por esta disciplina.

3.3.1 - Dimensão cultural

Em tempos idos, a Matemática surge caracterizada como a ciência do número e da forma. Depois, é encarada como a ciência das estruturas. Actualmente, é vista por muitos como a ciência dos padrões e das regularidades. A sua evolução é permanente.

Para os egípcios e os babilónicos, a Matemática tem uma feição sobretudo utilitária, tal como hoje em dia acontece para muitos grupos sociais como os artesãos, os pescadores e os vendedores ambulantes. Para os gregos ela assume o papel de um jogo intelectual, apresentando-se como o grande paradigma de uma argumentação bem conduzida. Para os matemáticos europeus dos séculos XVIII e XIX, ela constitui uma linguagem indispensável para descrever o mundo físico e os fenómenos naturais. Mais recentemente, com as geometrias abstractas e os números transfinitos, começa-se a compreender que a Matemática também lida com conceitos criados pelo próprio homem, muitas vezes sem significado físico aparente.

A Matemática está sempre ligada aos grandes problemas da ciência e da técnica de cada época, que estimulam o desenvolvimento de novos conceitos e novas teorias. Isso verificou-se mesmo durante o período de mais intenso predomínio da escola formalista. Na verdade, o próprio David Hilbert, a grande figura desta escola, dedicou-se a diversos ramos da Matemática com aplicação a problemas físicos, como a teoria dos operadores e a teoria das equações às derivadas parciais.
O conhecimento matemático tem, assim, um carácter histórico e contingente, como qualquer outro domínio do conhecimento humano. O seu corpo de práticas e de realizações conceptuais está sempre ligado a contextos sociais e históricos concretos, sublinhando a importância da sua dimensão cultural. A Matemática apresentada como uma teoria axiomática e dedutiva sem história e sem qualquer relação com a realidade, não é mais do que uma opção cultural, entre outras formas tanto ou mais legítimas de encarar esta ciência.

O ensino da Matemática pode valorizar uma abordagem mais ou menos formalista, mais ou menos geométrica, mais ou menos rica em aplicações e em referências históricas e mais ou menos próxima das práticas matemáticas informais em curso na sociedade. Por

A história e a cultura no ensino da Matemática

Por causa das preocupações da sociedade com os papéis práticos e sociais da Matemática, as escolas raramente dão ênfase aos seus aspectos históricos e culturais. Como todas as disciplinas, a Matemática é desumanizada quando é divorciada das suas contribuições culturais e da sua história. Na medida em que estes aspectos não são discutidos, os alunos tendem a ficar com a impressão que a Matemática é estática e ultrapassada. Embora seja comum as crianças em idade escolar estarem familiarizadas com conceitos modernos nas ciências tais como o DNA e a energia atómica, raramente elas chegam a contactar com aspectos da Matemática (tais como estatística ou topologia) descobertos há menos de um século. As crianças nunca aprendem que a Matemática é uma disciplina dinâmica e em crescimento e apenas raramente vêem a beleza e fascínio da Matemática. O currículo de Matemática não pode continuar a ignorar o século XX.

MSEB, 1990
Reshaping school mathematics

isso, no que respeita às dimensões culturais, qualquer currículo envolve sempre diversas grandes opções no modo como valoriza (ou não) a perspectiva histórica e as aplicações desta ciência, levando os alunos a compreender o seu papel na sociedade, e como relaciona (ou não) a abordagem própria de cada país (e de cada comunidade) com a Matemática universalizada em permanente desenvolvimento pela comunidade de investigação.

3.3.2 - Dimensão social

O conhecimento matemático forma-se socialmente, através de relações de interacção e comunicação entre as pessoas e é exteriorizado publicamente (pelo menos em grande parte). A Matemática é a linguagem essencial do desenvolvimento científico e tecnológico mas, hoje em dia, surge em todas as esferas de actividade da sociedade, constituindo o que alguns autores chamam uma “cultura invisível”.

Base social do conhecimento matemático

A Matemática permite comunicar, interpretar, prever e conjecturar. Dota a informação de objectividade e transforma-a em conhecimento fundamentado. A sociologia do conhecimento estabelece que as representações matemáticas, como de resto todas as representações científicas, são construções sociais. A perspectiva da construção social radica o conhecimento, a cognição e as representações nos campos sociais da sua produção, distribuição e utilização. O conhecimento científico é inerentemente social devido ao facto que a ciência está socialmente orientada e os objectivos da ciência estão sustentados socialmente (...) O conhecimento matemático, como todas as formas de conhecimento, representa as experiências materiais das pessoas que interactuam em contextos particulares, em certas culturas e períodos históricos. Tendo em conta esta dimensão social, o sistema educativo — e em particular o sistema escolar — estabelece uma variedade de interacções com a comunidade matemática, já que se ocupa que as novas gerações sejam introduzidas aos recursos matemáticos utilizados socialmente e na

> rede de significados (ou visão do mundo) em que se encontram situados; isto é, organiza um modo de prática matemática.
>
> Luis Rico, 1996
> *Reflexión sobre los fines de la educación matemática*

As finalidades de natureza social atribuídas ao ensino da Matemática incluem a qualificação profissional de mão de obra indispensável para atender às necessidades do mercado de trabalho, bem como às necessidades de funcionamento da sociedade actual. Outra finalidade importante de natureza social é proporcionar ao cidadão comum as ferramentas matemáticas básicas para o seu desempenho social, âmbito em que podemos distinguir três domínios essenciais de qualificação: o vocacional, o prático e o cívico.

A vertente vocacional visa ajudar os alunos a preparar-se para uma variedade de carreiras profissionais e científicas. É ela que proporciona a formação de especialistas competentes que usam ferramentas matemáticas, muitas vezes sofisticadas, produzindo conhecimento organizado, e que têm muitas vezes práticas profissionais distintas dos matemáticos. Esta vertente é concretizada através de cursos especificamente orientados para as diversas profissões, tanto no ensino secundário como no ensino superior.

A vertente prática visa ajudar os alunos a tornarem-se pessoas competentes na resolução de muitos problemas do dia-a-dia. Envolve não só um bom domínio da aritmética básica e da geometria, mas também a capacidade de analisar dados e situações complexas e de lidar com problemas da vida real.

Finalmente, a vertente cívica visa tornar os alunos cidadãos capazes de participar com sentido crítico numa sociedade cada vez mais matematizada. Ela inclui o conhecimento matemático necessário para que cada indivíduo possa desenvolver-se na sociedade, para comunicar e receber informação em geral, interpretar esta informação e tomar decisões correctas com base na sua interpretação.

Em muitas ocasiões, as finalidades sociais da educação matemática são condicionadas pelos aspectos de ordem vocacional, relegando para segundo plano os aspectos prático e cívico. A vertente mais utilitária do conhecimento matemático tende a ser sobrevalorizada por muitos grupos profissionais, que por vezes constituem *lobbies* poderosos. No entanto, muito embora a visão utilitária deva estar contemplada entre as finalidades sociais do ensino da Matemática, ela está longe de ser a única importante.

3.3.3 - Dimensão formativa

Os sistemas educativos, como instituições sociais, devem contemplar a satisfação adequada das necessidades individuais, incluindo o desenvolvimento integral dos indivíduos. Através da educação, pretende-se que todos os jovens desenvolvam uma adequada compreensão da Matemática e do modo como ela pode ser usada nos mais diversos contextos. Isto implica a aquisição tanto de conhecimentos e destrezas como também — o que é extremamente importante — o desenvolvimento de diversas capacidades, atitudes e valores.

O ensino da Matemática começou por ter uma função meramente instrutiva, em que se privilegiava a memorização de factos e a exercitação de procedimentos e técnicas de cálculo. Viria depois a assumir uma função formativa mais ampla, considerando o conhecimento matemático estreitamente ligado ao mundo da cultura e aos interesses, preferências e inclinações dos indivíduos. Deste modo, passou a haver uma forte preocupação em fomentar a criatividade, a intuição e o pensamento divergente dos alunos e em promover valores e atitudes positivas em relação à Matemática.

Os valores formativos desta disciplina envolvem aspectos cognitivos, metacognitivos e afectivos. Incluem as capacidades de raciocinar matematicamente, relacionar conceitos, usar definições, fazer demonstrações e resolver problemas, mas também construir e aperfeiçoar modelos matemáticos e discutir a aplicação desta ciência a situações de outras ciências ou da vida quotidiana. Incluem, igualmente, a capacidade de comunicar e interpretar ideias matemáticas expressas oralmente e por escrito. Incluem ainda o desenvolvimento no aluno do seu próprio autocontrolo e autoconceito como pessoa capaz de usar com desembaraço as ferramentas e ideias matemáticas, estabelecendo uma relação positiva com esta disciplina.

Considerando a Matemática como elemento dinâmico da cultura da nossa sociedade, deixamos de a conceber como objecto já construído que é preciso apreender e passamos a considerá-la como uma forma de pensamento aberto, cujo domínio deve ser desenvolvido em todos os alunos, respeitando a sua autonomia e o seu ritmo próprio de aprendizagem.

Desenvolver o poder matemático dos alunos

O poder matemático... refere-se às capacidades de um indivíduo para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente, bem como à sua aptidão para usar uma variedade de métodos matemáticos para resolver problemas não rotineiros. Esta noção é baseada no reconhecimento que a Matemática é muito mais do que uma colecção de conceitos e capacidades a adquirir; ela inclui métodos de investigação e de raciocínio, meios de comunicação e noções de contexto. Além disso, para cada indivíduo, o poder matemático inclui o desenvolvimento da autoconfiança pessoal.

NCTM, 1991
Normas para o currículo e avaliação da matemática escolar

3.3.4 - Dimensão política

A Matemática tem, na sociedade actual, um papel bem visível de selecção. Além disso, tem outros papéis, talvez menos visíveis, de transmissão indirecta de determinados valores e atitudes. O ensino da Matemática, conforme o modo como for conduzido, pode contribuir para a democratização e a promoção de valores sociais de cultura, tolerância e solidariedade ou servir para reforçar mecanismos de competitividade e de selecção social.

O desempenho em Matemática tem constituído um critério decisivo para seleccionar os alunos, especialmente no que se refere ao acesso às profissões de natureza técnica e científica. Aqueles que tiram maus resultados nesta disciplina desencorajam-se de enveredar por uma carreira de engenharia ou um curso de ciências. Implicitamente, a Matemática leva muitos alunos a definirem-se em termos de carreiras profissionais.

De modo mais subtil, o ensino da Matemática corporiza mecanismos de transmissão de valores sociais para a esfera dos comportamentos individuais. Ele contribui para ajustar a conduta humana a determinados modos de racionalidade, dominantes na sociedade. Mas este ensino pode ser orientado para promover a difusão de valores democráticos e de integração social, como a capacidade de cooperação, a actividade crítica e a acção comunicativa. Trata-se, assim, de elementos importantes que devem ser tidos em conta na elaboração do currículo.

Uma escola orientada para a consecução de valores democráticos ao lado dos valores formativos de cunho individual deve dar ênfase ao conhecimento crítico de todo o sistema matemático e das suas relações com a cultura e a sociedade. Esta orientação crítica deve estar presente nas finalidades gerais do currículo da Matemática escolar. Por isso, entre as finalidades do ensino desta disciplina pode-se encontrar explicitamente a promoção de valores éticos e democráticos, que constituem um aspecto essencial da sua dimensão política.

Matemática e competência democrática

Os elementos da educação matemática que podem contribuir para uma competência democrática incluem um *agregado de conhecimento matemático, tecnológico e reflexivo* e uma *atitude e disposição para agir de modo democrático*. A educação matemática, adoptando a formação da competência democrática como um objectivo de longo prazo, apenas pode contribuir para a sua formação, mas as suas contribuições são de significativa importância.

C. Keitel, E. Kotzmann e O. Skovosmose, 1993
Beyond the tunnel vision

3.4 - Novos temas para o currículo de Matemática

Um dos factores fundamentais do desenvolvimento do currículo é a evolução da Matemática, chamando incessantemente a atenção para novos temas e, ao mesmo tempo, permitindo um novo olhar sobre temas já conhecidos. Nos anos mais recentes assistimos à introdução no currículo deste nível de ensino de probabilidades e estatística. Outros temas, como a lógica e as estruturas algébricas, chegaram a ter um lugar destacado mas foram posteriormente retirados. Temas como os logaritmos e o uso de tabelas trigonométricas, outrora importantes, desapareceram completamente. Para se ter um visão sobre a evolução futura, importa considerar a evolução recente desta ciência e a sua possível influência nos conteúdos a tratar no ensino secundário.

3.4.1 - A Matemática discreta

O desenvolvimento recente da Matemática é marcado de modo muito forte pelo grande crescimento de certos domínios, habitualmente designados por Matemática discreta. Incluímos aqui teorias muito diversas que envolvem estruturas de carácter finito como a análise combinatória, as probabilidades discretas, a teoria de grafos, as equações às diferenças, a lógica matemática, a teoria das funções recursivas, a geometria finita, e diversas áreas novas como a teoria da codificação.

A análise combinatória envolve, a um nível elementar, o estudo de permutações, arranjos e combinações e o teorema binomial. A um nível mais avançado inclui permutações e combinações com repetição, o teorema multinomial, problemas de contagem envolvendo partições de conjuntos, os princípios da inclusão e exclusão e algoritmos combinatórios. Outro tópico importante é as probabilidades discretas, que envolvem o estudo de distribuições de probabilidades como a binomial, a hipergeométrica, a multinomial e a distribuição de Poisson, a noção de valor esperado e aplicações como a teoria das filas de espera, a geração de números aleatórios e a análise de algoritmos simples. A teoria de grafos lida com estruturas compostas de nodos e ligações e tem múltiplas aplicações, nomeadamente a problemas de tráfego e de transporte. Os diagramas de árvore, que aparecem constantemente em ciências da computação, não são mais do que um tipo particular de grafo. Outros tópicos de Matemática discreta incluem as equações às diferenças (análogo discreto das equações diferenciais), as relações de recorrência e a lógica matemática (incluindo a álgebra de Boole).

Novas áreas da Matemática e suas aplicações

No final do século XIX, a axiomatização da Matemática com fundamento na lógica e na teoria dos conjuntos tornou possível as grandes teorias da álgebra, análise e topologia, cuja síntese dominou o ensino e a investigação matemática nos primeiros dois terços do século

XX. Estas áreas tradicionais foram agora suplementadas por grandes desenvolvimentos noutros domínios da matemática — em teoria dos números, lógica, estatística, investigação operacional, probabilidades, teoria da computação, geometria e análise combinatória.

Em cada uma destas subdisciplinas, as aplicações ombreiam com a teoria. Mesmo as partes mais exóticas e abstractas da Matemática — teoria de números e lógica, por exemplo — são agora usadas de forma rotineira em aplicações (por exemplo, em ciências da computação e criptografia). Há cinquenta anos, o destacado matemático inglês G. H. Hardy podia proclamar que a teoria de números era a parte da Matemática mais pura e menos útil. Hoje, a Matemática de Hardy é estudada como um pré-requesito essencial para muitas aplicações, incluindo o controlo de sistemas automáticos, a transmissão de dados de satélites remotos, a protecção de registos financeiros e algoritmos eficientes para o cálculo.

MSEB, 1989

Everybody counts

A Matemática discreta lida com objectos como reticulados, geometrias, códigos, partições e sistemas de conjuntos. Inclui representações como a codificação, as matrizes-(0,1), as sequências-(0,1), os grafos, os diagramas e os reticulados. Neste domínio têm grande importância ideias como as técnicas de contagem, as técnicas probabilísticas, os métodos de existência, as técnicas de construção, a unificação, os métodos de optimização e as técnicas de procura e simetria. A Matemática discreta usa ferramentas como a álgebra (teoria das matrizes, grupos finitos, corpos finitos, anéis), a teoria elementar dos números, a geometria e a análise (séries de potências, inversão de Lagrange). Uma parte da Matemática discreta já faz parte do currículo do ensino secundário. Outra parte é ensinada a nível superior e poderá, com o tempo, vir a ser introduzida a níveis mais elementares.

3.4.2 - Matemática e Informática

No desenvolvimento recente da Matemática é preciso dar especial atenção à sua relação com a Informática. A Matemática tem dado importantes contributos decisivos para o desenvolvimento dos computadores e das ciências da computação. Mas a Matemática é também fortemente influenciada pela Informática, tanto no que respeita aos problemas que coloca como aos métodos que usa na sua investigação. Esta forte relação entre a Matemática e a Informática, que se processa nos dois sentidos, reforça a ideia da importância da utilização dos instrumentos computacionais no processo de ensino-aprendizagem.

Uma parte importante da investigação em áreas como a análise numérica, a matemática discreta, os sistemas dinâmicos, a investigação operacional, a lógica e a ciência da computação faz-se hoje com forte recurso à utilização de ferramentas computacionais. O uso cada vez mais intensivo destas ferramentas para o processamento e transmissão de informação está a levar ao surgimento de novos conceitos e novas práticas na investigação na Matemática.

Matemática e computação

Durante a primeira metade do século XX o crescimento matemático foi prioritariamente estimulado pelo poder da abstracção e dedução, no que constitui o climax de mais de dois séculos de esforços para extrair todo o benefício dos princípios matemáticos da ciência física formulados por Isaac Newton. Agora, com o encerramento do século, as alianças históricas da matemática com a ciência expandem-se rapidamente; o legado da teoria matemática clássica, fortemente desenvolvido, está a ser posto em uso numa ampla e muitas vezes inesperada, paisagem matemática.

Alguns acontecimentos particulares deram origem a períodos de crescimento explosivo. A Segunda Guerra Mundial levou ao desenvolvimento de muitos novos e poderosos métodos de Matemática aplicada. Investimentos governamentais na Matemática no pós-guerra, encorajados pelo Sputnik, aceleraram tanto o crescimento na educação como na investigação. Nessa altura o desenvolvimento da computação electrónica levou a Matemática para uma perspectiva algorítmica ao mesmo tempo que fornecia à Matemática uma ferramenta poderosa para explorar regularidades e testar conjecturas.

MSEB, 1989

Everybody counts

O computador tem sido muito utilizado em teoria de números, para estudar as propriedades de números primos, de classes de congruência, as soluções inteiras de equações de coeficientes inteiros, etc. Outro domínio onde o computador tem sido muito usado é o estudo de funções não lineares, fundamentais para descrever muitos fenómenos em termodinâmica e mecânica de fluidos, levando ao estudo de sistemas dinâmicos (tanto discretos como contínuos). É preciso ter em conta que, na realização de cálculos numéricos e representações gráficas, o computador lida com a mesma facilidade com equações lineares e não lineares. Novos tipos de objectos geométricos, como os fractais, que têm uma estrutura extremamente complexa qualquer que seja a escala de ampliação em que sejam estudados, podem ser igualmente estudados recorrendo ao computador.

3.4.3 - Aplicações da Matemática

O nosso tempo assiste à afirmação duma importância crescente das aplicações da Matemática. Para além das aplicações tradicionais à Física e à Engenharia, multiplicam-se as aplicações às Ciências da Vida, às Ciências Sociais e Humanas e à actividade administrativa e de gestão. Igualmente de grande importância são as aplicações de uma parte da Matemática noutra, por exemplo, das probabilidades na teoria dos números e da geometria na análise.

As aplicações no ensino da Matemática

As interfaces entre a Matemática e a realidade podem aparecer essencialmente de três formas ao longo do processo de ensino-aprendizagem: (a) como ponto de partida para a formulação de novos conceitos ou ideias matemáticas; (b) como exemplos de aplicação de conceitos e ideias matemáticas a problemas concretos, e (c) como situações de modelação, em que se procura fazer o estudo duma dada situação recorrendo se necessário a ferramentas matemáticas diversificadas. Do meu ponto de vista, todas estas três formas são necessárias e devem ser vistas como complementares. A introdução de novos conceitos e ideias a partir de situações reais, devidamente estruturadas, pode constituir uma importante base concreta para desenvolver os conceitos e ideias pretendidos. Pode igualmente ter um significativo papel motivador, especialmente se as situações forem de natureza problemática e do interesse dos alunos.

A realização de actividades de aplicação, bem definidas, em que os alunos usam os conhecimentos aprendidos, são evidentemente necessárias e devem ser propostas frequentemente — tanto para um melhor esclarecimento daqueles conceitos, como para que os alunos ganhem sensibilidade para o tipo de estruturas e técnicas matemáticas que se utilizam numa variedade de situações. O estudo global duma situação, percorrendo todo o ciclo do processo de modelação (...) é fundamental para que os alunos se apercebam da interligação entre os vários domínios da Matemática e do poder e limitações de cada um deles (abordagens geométricas, algébricas, algorítmicas, numéricas, lógicas). Esta actividade é igualmente essencial para que os alunos ganhem sensibilidade para os aspectos mais globais do processo de modelação, nomeadamente a concepção geral, a avaliação e a análise crítica dos modelos (...)

Ser competente em Matemática (quer ao nível do cálculo, quer ao nível da resolução de problemas), não implica necessariamente ser competente na sua utilização em situações concretas. Trata-se de competências diferentes, que têm de ser igualmente tidas em consideração pelo currículo desta disciplina.

João Pedro da Ponte, 1992
Educação e Matemática, Nº 23

Desde há muito que os cientistas têm criado modelos matemáticos para descrever e intervir sobre o mundo. O surgimento do computador permitiu automatizar o processo de cálculo associado a estes modelos, tornando o seu uso muito mais atractivo e eficaz. O computador tem contribuído para alargar profundamente o âmbito e o alcance das aplicações da Matemática, constituindo um meio insubstituível para gerar, tratar e analisar dados e para tomar decisões.

Nos últimos anos, a Matemática tem encontrado numerosas aplicações em diversos domínios. Ela é fundamental, por exemplo, no estudo de aspectos do ambiente na-tural, incluindo a qualidade do ar e da água e os recursos energéticos. No que respeita às matas e florestas, ela permite o desenvolvimento de modelos que apoiam a definição de políticas de gestão de populações de animais selvagens, de modo a equilibrar a defesa das espécies animais com a produção de madeira.

3.5 - A concluir

O currículo de Matemática não se restringe ao nível programático dos objectivos, metodologias, conteúdos e recomendações para avaliação. Ele inclui igualmente o plano dos materiais educativos, onde sobressai o manual escolar. Qualquer manual constitui sempre uma interpretação (por vezes extremamente livre) do currículo oficial. Outro nível de interpretação do currículo é dado pelas tarefas e materiais elaborados pelos professores, questão a que daremos especial atenção no capítulo seguinte.

Deste modo, a elaboração de um currículo envolve tanto a selecção de temas como a construção de experiências de aprendizagem para os alunos. Enquanto que a perspectiva tradicional de currículo está estreitamente associada às ideias de "documento oficial", a perspectiva moderna dá cada vez mais importância ao professor como actor essencial na interpretação, elaboração e reformulação do currículo, adaptando-o às situações concretas.

O maior desafio do futuro próximo será, muito possivelmente, o de encontrar formas eficazes de articular a criatividade dos professores na construção de situações e materiais adequados aos seus alunos com os imperativos sociais duma formação de base sólida para todos os que frequentam o ensino secundário.

[1] Decreto Nº 37112 de 22 de Outubro de 1948.
[2] Idem.
[3] Um documento produzido em 1976 pelo National Council of Supervisors of Mathematics (dos EUA) propunha a redefinição das competências básicas, dando especial atenção à resolução de problemas, e conheceu nessa época grande repercussão.
[4] Refira-se, por exemplo, *School Mathematics for the 1990s* (Howson e Kahane, 1986), *Everybody Counts* e *Reshaping School Mathematics*, ambos do NCR (1989, 1990). Registe-se, também, o documento da iniciativa da APM (1988), *A renovação do currículo de Matemática*.
[5] Ver Romberg (1984)
[6] Ver CBMS (1982) e Romberg (1984).
[7] Ver Fey (1995).

4 - A DINÂMICA DA AULA DE MATEMÁTICA

Neste capítulo descrevem-se os aspectos fundamentais da dinâmica do processo do ensino-aprendizagem na aula de Matemática do ensino secundário. As orientações curriculares actuais do ensino desta disciplina sublinham a importância de objectivos relacionados com o desenvolvimento de capacidades como a resolução de problemas, o raciocínio, a comunicação e o pensamento crítico; apontam igualmente a importância do desenvolvimento de atitudes e valores como o gosto pela Matemática, a autonomia e a cooperação. Para atingir estes objectivos é necessário proporcionar aos alunos experiências diversificadas, baseadas em tarefas matematicamente ricas, realizadas num ambiente de aprendizagem estimulante. Tudo isto implica alterações significativas tanto no papel do professor como no dos alunos.

Existem diversos tipos de aulas de Matemática, cada uma com a sua dinâmica própria. Em muitas aulas, os conceitos e o conhecimento matemático são introduzidos pelo professor e os alunos têm um papel de meros receptores de informação. Noutras, o saber é construído no decurso da própria actividade matemática, cabendo aos alunos um papel de participação activa e ao professor um papel de organizador e dinamizador da aprendizagem.

A dinâmica da aula resulta de muitos factores. Depende, em primeiro lugar, das tarefas matemáticas propostas pelo professor — não podem correr de modo semelhante aulas em que se indicam exercícios para resolver, se propõe a realização de uma investigação, se conduz uma discussão colectiva, ou não se dá nada aos alunos para fazer. Mas a dinâmica da aula é igualmente influenciada por factores que têm a ver com os alunos — com as suas concepções e atitudes em relação à Matemática, com os seus conhecimentos e experiência de trabalho matemático e, de um modo geral, com a sua forma de encarar a escola. Outros factores, relacionam-se com o contexto escolar e social — a organização e o funcionamento da escola, os recursos existentes e as expectativas dos pais e comunidade. Finalmente, a dinâmica da aula depende também, naturalmente, do próprio professor, do seu conhecimento e competência profissional — muito em especial, do modo como introduz as diferentes tarefas e apoia os alunos na sua realização.

A investigação sobre a aprendizagem tem mostrado que o aluno aprende em consequência da actividade que desenvolve e da reflexão que sobre ela faz. A actividade do aluno é assim um elemento fulcral do processo ensino-aprendizagem. Ao professor cabe favorecê-la, planeando e conduzindo aulas que tenham em conta as características e interesses dos alunos e tirem partido dos recursos existentes. Ele é chamado a criar as condições necessárias para a aprendizagem, utilizando meios como manuais escolares, fichas de trabalho, quadro, retroprojector, materiais manipuláveis, calculadora e computador.

A comunicação matemática é um aspecto também importante do processo de ensino-aprendizagem. É através da comunicação oral e escrita que os alunos dão sentido ao conhecimento matemático que vai sendo construído. Esta comunicação desenvolve-se com base na utilização de diversos tipos de materiais, bem como de diferentes modos de trabalho e na gestão do espaço e do tempo realizada pelo professor. Finalmente, o ambiente de aprendizagem e a cultura da sala de aula são elementos decisivos na aprendizagem. É na interacção dos indivíduos uns com os outros que se desenvolvem as capacidades cognitivas e se promovem as atitudes e valores indicados pelas orientações curriculares.

Dois retratos

Toca para a entrada. Faz-se a chamada. Discute-se o trabalho de casa. Resolvem-se alguns exemplos no quadro. Passa-se o trabalho para casa. O professor tira algumas dúvidas. Toca para a saída.

David Johnson, 1982
Every Minute Counts

É interessante salientar o interesse demonstrado pelos alunos na realização dos seus trabalhos, dada a sua presença na sala de aula e participação na organização desta antes do toque da entrada (...) Encontravam-se dois grupos a trabalhar nos computadores enquanto os seus colegas trabalhavam na sala de aula (...) Como nem o Miguel nem a Dora sabiam quais os comandos necessários a introduzir para a impressão, a Dora virou-se para o outro grupo e disse “Sérgio estamos a precisar de ti” (...) Passado algum tempo, a professora surgiu na sala dando algumas orientações. Entre elas sugeriu ao grupo da Dora a outra parte do trabalho. Enquanto isso, o grupo do Pedro utilizava a máquina calculadora para fazer alguns cálculos. Achei interessante quando a professora se dirigiu ao Sérgio e perguntou: “Amanhã estás cá? Dás apoio?” Além de mostrar uma certa continuidade extra-aula no trabalho, denota por parte da professora confiança nos seus alunos, evidenciando-se um bom relacionamento professor-aluno para além de uma certa autonomia por parte dos alunos.

Registo de um observador, incluído em Paulo Abrantes, 1994
O Trabalho de Projecto e a Relação dos Alunos com a Matemática

Deste modo, procuramos neste capítulo discutir a articulação entre tarefa e actividade, bem como entre discurso e comunicação. Analisamos o processo de negociação de significados matemáticos, os diferentes modos de trabalho dos alunos e os elementos que compõem o ambiente de aprendizagem. Procuramos, assim, traçar o quadro das diversas opções que se oferecem ao professor que pretende reflectir sobre a sua actividade docente, adaptando-a da melhor maneira às necessidades dos seus alunos.

4.1 - Tarefa e actividade

A natureza das tarefas propostas pelo professor e das actividades realizadas pelos alunos constitui um factor decisivo na dinâmica da sala de aula de Matemática e, deste modo, no processo de ensino-aprendizagem. Os conceitos de tarefa e actividade, que não devem ser confundidos entre si, têm assim um lugar de destaque na educação matemática.

4.1.1 - Relação entre tarefa e actividade

As tarefas matemáticas em que os alunos se envolvem — problemas, investigações, exercícios, projectos, construções, aplicações, produções orais, relatórios, ensaios escritos, etc. — proporcionam o ponto de partida para o desenvolvimento da sua actividade matemática. As tarefas devem despertar curiosidade e entusiasmo, fazendo apelo aos seus conhecimentos prévios e intuições.

A actividade, que pode ser física ou mental, diz respeito ao aluno. Refere-se àquilo que ele faz num dado contexto, podendo incluir a execução de numerosos tipos de acção. Pelo seu lado, a tarefa constitui o objectivo de cada uma das acções em que a actividade se desdobra e é basicamente exterior ao aluno (embora possa ser decidida por ele). As tarefas são, na maior parte das

A actividade do aluno

A natureza da actividade dos alunos na aula de Matemática é uma questão central no ensino desta disciplina. A aprendizagem da Matemática é sempre produto da actividade, e se esta se reduz, por exemplo, à resolução repetitiva de exercícios para aplicação de certas fórmulas, é exactamente isto que se aprende e vai perdurar, enquanto ficar a memória das fórmulas. Além disso, essa é a imagem adquirida da Matemática.

APM, 1988
Renovação do Currículo da Matemática

vezes, propostas pelo professor; mas, uma vez propostas, têm de ser interpretadas pelo aluno e podem dar origem a actividades muito diversas (ou a nenhuma actividade), conforme a disposição do aluno e o ambiente de aprendizagem da sala de aula.

A tarefa propriamente dita pode apontar para diversas estruturas ou conceitos matemáticos. Mas estes, estritamente falando, não se encontram na tarefa. Têm de ser por nós interpretados — e nessa interpretação intervêm sempre factores de natureza psicológica, cultural e sociológica. Quando o professor selecciona, adapta ou cria uma tarefa deve ter em conta as características dos alunos, os seus interesses e a sua forma de aprendizagem da Matemática.

Uma tarefa envolve sempre uma dada situação de aprendizagem e aponta para um certo conteúdo matemático. A situação de aprendizagem constitui o referente de significados da vida quotidiana ou do domínio da Matemática a que a tarefa se refere,

Características das tarefas

Na aula de Matemática o professor deve propor tarefas[1] baseadas em:

_ Matemática sólida e significativa;

_ conhecimento das aptidões, interesses e experiências dos alunos;

_ conhecimento da variedade de formas pelas quais os diversos alunos aprendem Matemática;

e que:

_ apelem à inteligência dos alunos;

_ desenvolvam a compreensão e aptidões matemáticas dos alunos;

_ estimulem os alunos a estabelecer conexões e a desenvolver um enquadramento coerente para as ideias matemáticas;

_ apelem à formulação e resolução de problemas e ao raciocínio matemático;

_ promovam a comunicação sobre matemática;

_ mostrem a matemática como uma actividade humana permanente;

_ tenham em atenção e assentem em diferentes experiências e predisposições dos alunos;

> _ promovam o desenvolvimento da predisposição de todos os alunos para fazer matemática.
>
> NCTM, 1991
> *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática*

no quadro da cultura do aluno. O conteúdo matemático diz respeito aos aspectos matemáticos envolvidos (factos, conceitos, processos, ideias), no quadro do currículo correspondente. Tanto a situação de aprendizagem como o conteúdo matemático devem apontar de modo sugestivo para conceitos e processos e proporcionar ao aluno uma boa oportunidade de se envolver em actividade matemática.

A mesma situação de aprendizagem e o mesmo conteúdo podem originar diferentes tipos de actividade consoante a tarefa proposta, o modo como for apresentada aos alunos, a forma de organização do trabalho e o ambiente de aprendizagem. O exemplo seguinte procura ilustrar esta ideia.

A encomenda de calças

Um cliente da empresa *Confecções do Centro, Lda* fez-lhe uma grande encomenda de pares de calças de dois modelos diferentes mas com a condição de haver uma entrega diária de 120 pares de calças. A possibilidade de produção da empresa, dado o capital fixo disponível, está limitada à utilização de 300 metros de tecido e 300 horas de trabalho. A confecção de um par de calças do modelo A gasta 2 metros de tecido e três horas de trabalho enquanto que para o modelo B são necessários 3 metros de tecido e 1.5 horas de trabalho. O lucro proporcionado por cada par de calças dos modelos A e B é de 1500 e 2000 escudos respectivamente.[2]

A situação de aprendizagem refere-se a uma empresa que fabrica calças de vários modelos. O conteúdo matemático remete para temas do programa do 10º ano: funções e gráficos, generalidades; funções polinomiais. O seu estudo envolve diversos pré-requisitos: conhecimento da função afim; reconhecimento dessa função através do gráfico, esboço do gráfico e reconhecimento de algumas das suas propriedades (monotonia e zeros de forma apenas intuitiva e usando os conhecimentos sobre equações); capacidade de resolver equações e inequações do 1º grau e de equações do 2º grau; conhecimento dos números reais e representação de intervalos de números reais.

Com base nesta situação de aprendizagem podemos pensar em diferentes tarefas. Assim, T1 constitui um simples exercício. A ênfase é dada ao cálculo. São utilizados processos rotineiros e a única actividade pedida é encontrar a solução.

T2 constitui um problema susceptível de despertar a curiosidade dos alunos e de os motivar a tentar descobrir uma estratégia de resolução. Será importante dar atenção à discussão dos conceitos envolvidos e das estratégias seguidas, à argumentação, às tentativas de prova e à crítica dos resultados.

T1 - Determine o lucro obtido pela empresa ao vender 600 pares de calças do modelo A e 300 pares de calças do modelo B.

T2 - Admitindo que o lucro por cada par de calças é o lucro médio (a partir da produção máxima de cada um dos modelos) e que por cada dez pares de calças produzidas esse lucro tem um aumento de 0.5%, qual é o valor exacto do lucro da empresa quando se vendem 53 pares de calças do modelo A?

T3 - Investigue se a empresa tem condições para responder favoravelmente à encomenda que lhe é feita pelo cliente.

T4 - Averigúe se a empresa deve ser incluída no grupo de empresas de pequena, média ou grande dimensão.

- A partir de um certo número de unidades, a produção pode necessitar de alteração dos custos fixos. Será que uma maior produção origina sempre um maior lucro?
- Tente investigar numa unidade produtiva da sua zona, a influência da variação dos preços da energia, no custo médio dos produtos e nos lucros que a empresa vai obter com essa produção.
- Que estratégias poderia o empresário adoptar para tentar repor os lucros no seu nível médio?
- Produza um relatório que sintetize as suas conclusões sobre os aspectos referidos anteriormente.

Pelo seu lado, T3 é uma tarefa de investigação. Trata-se uma questão aberta, de cunho problemático, cuja realização pode demorar um conjunto de aulas. O aluno tem de formular objectivos mais precisos para investigar, formular conjecturas, testá-las e, eventualmente, demonstrá-las. Este tipo de trabalho favorece o desenvolvimento do espírito de observação e do sentido crítico, a capacidade de sistematização de resultados parcelares e de abstracção, bem como as capacidades de argumentação e de demonstração.

A tarefa T4 pode constituir o ponto de partida para um trabalho de projecto. Esta proposta pode envolver outras disciplinas, desenrolando-se por um período alargado de tempo. A tarefa poderá ser realizada em diferentes etapas que conduzam ao objectivo pretendido.

As tarefas têm, portanto, diferentes potencialidades. Cada uma delas será adequada para atingir determinados objectivos. Deste modo, torna-se particularmente relevante a escolha de tarefas que propiciem ao aluno experiências diversificadas e interessantes. O professor pode encontrar vários tipos de tarefas nos manuais escolares. Cabe-lhe, no entanto, adaptar e elaborar os seus próprios materiais de acordo com as características dos seus alunos de modo a encorajá-los a raciocinar sobre as ideias matemáticas e a estabelecer relações entre elas. Assim, será importante levá-los a comunicar entre si, argumentar e validar os seus raciocínios.

A variedade de tarefas e actividades na sala de aula

A variedade de tarefas e actividades para possível uso do professor de Matemática é tão lata, que torna surpreendente que a aula de Matemática típica seja um local tão rotineiro e ritualista como é frequentemente descrito. Esta semelhança é devida em grande parte à estruturação da lição. A alteração para a ideia de "actividade" poderá dar um grande contributo para quebrar esta monotonia.

Alan Bishop e Fred Goffree, 1986

A dinâmica e a organização na sala de aula

4.1.2. Da tarefa à actividade

Apresentamos seguidamente algumas tarefas incluídas num trabalho de investigação conduzido por Susana Carreira, *A aprendizagem da trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo*, discutindo os aspectos mais relevantes da actividade dos alunos. O trabalho aqui relatado foi antecedido por 3 aulas, que constituíram as primeiras aulas de trigonometria do ano lectivo. Fez-se o estudo de aspectos introdutórios das razões trigonométricas de um ângulo agudo em triângulos rectângulos e das razões trigonométricas dos ângulos de 30º, 45º e 60º.

Experiência anterior dos alunos

A turma de que nos ocupamos tem 29 alunos, 24 rapazes e 5 raparigas, com idades variando entre os 15 e os 18 anos. Relativamente à disciplina de Matemática, 13 alunos obtiveram negativa no 1º e no 2º períodos. Não existem divergências entre as classificações obtidas em Matemática e nas outras disciplinas. A turma pertence à área vocacional de Informática, sabendo alguns dos seus elementos trabalhar com a folha de cálculo.

Espaço físico e materiais de apoio

As aulas tiveram lugar em salas normais e na sala do projecto MINERVA da escola, que dispunha de cinco computadores e foi equipada com mais três cedidos por uma empresa de equipamentos informáticos, expressamente para desenvolver o projecto.

Foi usado um guião de utilização da folha de cálculo com um resumo dos comandos essenciais e opções a usar na construção de gráficos; um modelo para a elaboração dos relatórios escritos de cada uma das tarefas desenvolvidas com o computador, contendo os critérios de avaliação desses trabalhos; uma disquete para a gravação do trabalho (atribuída a cada grupo); retroprojector e fichas de trabalho.

Ambiente de aprendizagem e modo de trabalho dos alunos

A turma é em geral participativa mas revela discrepâncias entre a participação nas aulas e as classificações obtidas em provas de avaliação. Na generalidade, os alunos revelam um espírito curioso e interessado por aquilo que se passa à sua volta e trabalham habitualmente em grupo na aula de Matemática. Na opinião da professora, eles trabalham bem nas actividades especificamente propostas para a realização em grupo e funcionam de uma forma natural aos pares.

A tarefa foi realizada em grupos heterogéneos de 2 ou de 4 alunos formados espontaneamente por estes.

Conteúdo matemático e situação de aprendizagem

O conteúdo matemático a que se refere esta actividade é a aplicação de conceitos e relações referentes às razões trigonométricas de um ângulo agudo, de ângulos complementares e dos ângulos de 30º, 45º e 60º, a situações da vida real, estando também presentes conceitos de geometria relativos a sólidos e suas áreas e volumes.

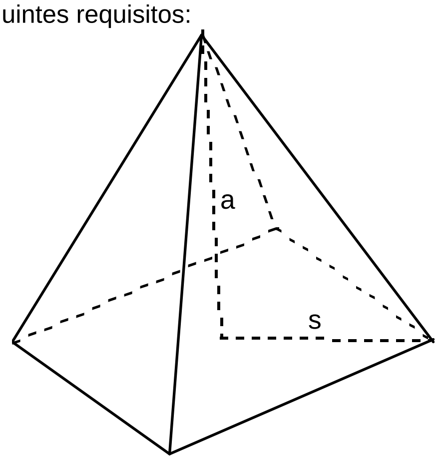
A situação de aprendizagem que serviu de base à construção das tarefas refere-se a embalagens de produtos de beleza.

Tarefa e modo como foi proposta

O trabalho iniciou-se numa aula de duas horas. Os grupos concentraram-se na leitura da situação. Alguns alunos colocaram questões sobre a fórmula do volume da pirâmide. Como nenhum aluno sabia a fórmula, ela foi-lhes fornecida pela professora. Os alunos receberam quatro pirâmides quadrangulares em cartolina que circularam pelos diferentes grupos durante a aula. Existiam duas pirâmides com a mesma base e alturas diferentes e outras duas com a mesma altura e bases diferentes. Os alunos não fizeram qualquer menção de relacionar as várias pirâmides. Preocuparam-se em saber se a fórmula do volume era a mesma caso as bases não fossem quadrados mas outros polígonos. Joana trocou impressões com os colegas a propósito de alguns termos: aresta, vértice, altura e face lateral.

A embalagem ideal

Uma fábrica de cosméticos pretende lançar no mercado uma nova marca de sais de banho. A imagem de marca do produto tem como fonte de inspiração o Oriente. Assim, a forma da embalagem deverá combinar com o exotismo da fragrância e com o próprio nome que a identifica: "EGYPTUM". A fábrica encomendou a uma firma especializada um projecto para a embalagem, com os seguintes requisitos:



- A embalagem, a ser construída em vidro delicado, deverá possuir um formato condizente com as características exóticas do perfume dos sais de banho.
- A forma da embalagem deverá permitir um fácil empacotamento de várias unidades em caixas, tendo em vista as perspectivas do produto em grande quantidade.
- Cada embalagem deverá ter uma capacidade compreendida entre 270 e 540 centímetros cúbicos.

Uma das ideias surgidas foi uma embalagem em forma de pirâmide quadrangular (observa a figura), alusiva às pirâmides do Egipto e cuja tampa seria a própria base amovível. A equipa de *designers* estabeleceu como critérios para a construção da embalagem, os seguintes:

- A estabilidade, definida através da razão entre a altura da pirâmide e a semi-diagonal da base: $E=a/s$
- A área total da pirâmide que estaria ligada ao custo em material: menor área significa menor custo.
- A facilidade de empacotamento das pirâmides em caixas, aproveitando ao máximo o espaço interior da caixa.

Tarefa - Relatório sobre a embalagem ideal

Elabora um breve relatório em que apresentes à fábrica de cosméticos a embalagem que julgares mais adequada, de modo a convenceres o cliente das vantagens da solução que propões com base nos estudos feitos.

Colocada neste termos, a tarefa assumia as características de um trabalho de projecto que levaria, por certo, várias aulas a concluir. A professora optou por modificar a tarefa, desdobrando-a em diversas subtarefas mais específicas (T1, T2, T3, T4, T5, T6 e T7), algumas com um cunho mais problemático, outras essencialmente de cálculo.

Subtarefas

T1 - Os elementos da equipa verificaram que a estabilidade da pirâmide seria tanto maior quanto menor fosse o valor da razão E. Ilustra esta conclusão por meio de um esquema elucidativo.

T2 - A razão de estabilidade E corresponde à tangente trigonométrica de um ângulo existente na pirâmide. Qual é esse ângulo? Que amplitudes poderá ter esse ângulo? Como será a variação da estabilidade à medida que esse ângulo aumenta?

T3 - A equipa responsável pelo projecto resolveu considerar os três casos possíveis para o comprimento da aresta da base da pirâmide: aresta 1 = 6 cm; aresta 2 = 9 cm; aresta 3 =12 cm. Tendo em conta os volumes admissíveis indica, para cada caso, os valores possíveis para a altura da pirâmide.

T4 - Tomando uma série de valores para a altura da pirâmide, em cada um dos casos, averigua o que sucede à estabilidade obtida. Quais serão, em cada caso, as pirâmides mais estáveis e as menos estáveis? Justifica a tua resposta. Se achares conveniente ilustra por meio de gráficos.

T5 - Determina em cada caso o volume correspondente a cada altura considerada.

T6 - Determina também, em cada caso, a área total da pirâmide correspondente a cada altura considerada.

T7 - Uma vez acordado que uma estabilidade aceitável corresponde a um valor de razão E compreendido entre 1 e 2.5, procura decidir em função dos critérios da equipa, qual ou quais seriam as pirâmides mais vantajosas.

Na realização das subtarefas, os alunos começaram por procurar referentes para a clarificação do contexto real. Eles dialogaram entre si, explicitando as suas ideias sobre os objectos, fenómenos e situações descritos. Frequentemente, estas discussões incluíram o confronto de perspectivas para aferir o sentido de diversos pormenores do cenário extra-matemático. Os alunos foram criando imagens mentais da situação apresentada que materializaram em esboços esquemáticos que ilustram aspectos essenciais do modelo real.

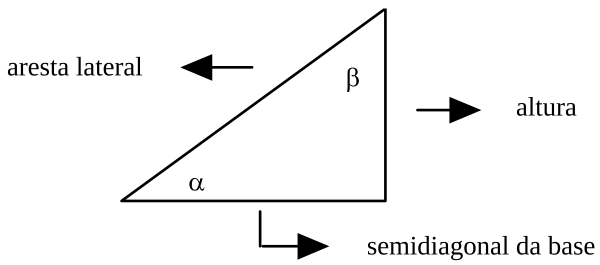
Assim, na subtarefa T1 os alunos procuraram interpretar a noção de estabilidade e foram levados a imaginar formas de pirâmides mais ou menos estáveis. A estabilidade surgiu como um conceito de natureza não matemática, ligado à ideia de maior ou menor facilidade em derrubar a pirâmide. Esta formulação de estabilidade revelou-se importante para a construção do conceito funcional de estabilidade expresso na conclusão — a estabilidade depende da base e da altura.

A representação através de esquemas foi importante para a interpretação da estabilidade como função de certos ângulos definidos na pirâmide. Ao analisarem a influência dos ângulos α e β os alunos observaram de que forma a variação da tangente está relacionada com a variação do ângulo.

Nas diversas subtarefas os alunos tiveram ainda oportunidade de realizar discussões entre si, definir uma estratégia, ajudando-se mutuamente na compreensão das condições da situação e da estratégia a seguir, colocar questões à professora, tirar conclusões e ilustrá-las por meio de esquemas, usar a folha de cálculo para realizar cálculos, comparar resultados feitos com e sem computador, definir critérios e redigir o relatório pretendido. Trata-se de um bom exemplo de uma tarefa realizada em grupo que culminou num relatório de que apresentamos um extracto.

Extracto do relatório dos alunos sobre o problema das pirâmides

Achámos necessário utilizar o triângulo rectângulo existente na pirâmide da Actividade A1 [tarefa 1]:



O ângulo existente na pirâmide correspondente à tangente trigonométrica que irá ser equivalente à razão E, é-nos dado pelo α, pois:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto.oposto}}{\text{cateto.adjacente}} = \frac{\text{altura}}{\text{semidiagonal.da.base}} = \frac{a}{s}$$

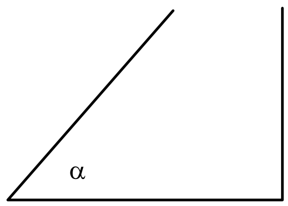
$$\text{Sendo. E} = \frac{a}{s} \wedge \text{tg}\alpha = s\frac{a}{s} \Leftrightarrow \text{E} = \text{tg}\alpha$$

A amplitude do ângulo é >0º e <90º, pois se for 0º a aresta lateral vai ficar coincidente com a semidiagonal da base. Se for 90º a altura vai ser infinita.

Como será a variação da estabilidade à medida que o referido ângulo aumenta?

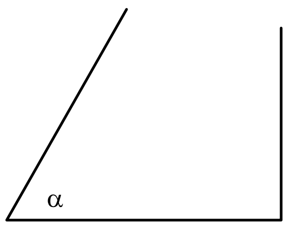
Para explicar melhor a resposta, pensámos que era importante fazer um desenho que fosse mostrando o que acontece à medida que o ângulo α aumenta.

Se o ângulo α aumentar



A altura tem necessidade de aumentar

Se o ângulo aumentar ainda mais



A altura tem ainda mais necessidade de aumentar

Como já concluímos nas anteriores questões, à medida que a altura aumenta, a estabilidade vai diminuindo. Assim:

> α origina > altura e implica < estabilidade.

Achámos curioso o outro ângulo β. Então fizemos uma breve reflexão sobre o referido ângulo:

$$\text{tg } \beta = \frac{\text{cateto.oposto}}{\text{cateto.adjacente}} = \frac{\text{semidiagonal.da.base}}{\text{altura}} = \frac{s}{a}$$

A conclusão foi a seguinte: à medida que o ângulo β aumenta, a altura diminui. Como vimos anteriormente, quanto menor for a altura maior é a estabilidade. Assim:

> b origina <altura e implica > estabilidade".

4.2 - Comunicação e negociação

O ensino-aprendizagem da Matemática envolve, como vimos, interacções dos alunos entre si e entre os alunos e o professor. Duas dessas formas de interacção assumem um papel fundamental, a comunicação e a negociação de significados. A comunicação refere-se à interacção dos diversos intervenientes na sala de aula, utilizando uma linguagem própria, que é um misto de linguagem corrente e de linguagem matemática. A negociação de significados respeita ao modo como alunos e professores expõem uns aos outros o seu modo de encarar os conceitos e processos matemáticos, os aperfeiçoam e ajustam ao conhecimento matemático indicado pelo currículo.

4.2.1 - Comunicação na aula de Matemática

A comunicação matemática na sala de aula é um dos aspectos que mais atenção tem vindo a merecer no conjunto das actuais orientações curriculares para o ensino da Matemática. Ela é, ao mesmo tempo, um indicador da natureza do processo de ensino-aprendizagem e uma condição necessária para o seu desenvolvimento.

A comunicação é habitualmente analisada através do discurso dos diversos intervenientes. Na linguagem comum, discurso significa uma longa intervenção por parte de um orador, muitas vezes revestida de uma certa formalidade. No sentido técnico da linguística, discurso tem um significado muito diferente. Indica o modo como os significados são atribuídos e partilhados por interlocutores em situações concretas e contextualizadas. Envolve tanto o modo como as ideias são apresentadas como aquilo que elas veiculam implicitamente. Deste modo, o discurso pode ser oral, escrito ou gestual e existe necessariamente, sob uma ou outra forma, em toda a actividade de ensino-aprendizagem.

Nas aulas de Matemática, os intervenientes no discurso são o professor e os alunos. De um modo geral, o discurso é controlado pelo professor, podendo este atribuir aos alunos uma participação mais ou menos significativa. Pelo seu lado, os alunos, nem sempre aceitam completamente o controlo do seu discurso, procurando exprimir-se por meios próprios, por vezes em declarado conflito com as intenções do professor.

O discurso na sala de aula

O discurso implica aspectos fundamentais do conhecimento: O que faz com que algo seja verdade ou plausível em Matemática? Como se pode descobrir se uma coisa faz ou não sentido? Que uma coisa é verdade porque o livro ou o professor o dizem, é o argumento básico no discurso de muitas aulas tradicionais. Uma outra visão, aquela que é avançada aqui, centra-se no raciocínio e evidência matemática como base do discurso. Para que os alunos desenvolvam a capacidade de formular problemas, de explorar, conjecturar, e raciocinar logicamente, de avaliar se uma coisa faz sentido, o discurso da aula deve estar baseado na evidência matemática.

NCTM, 1994
Normas Profissionais para Ensino da Matemática

A comunicação oral tem um papel fundamental na aula de Matemática. Ela é imprescindível para que os alunos possam exprimir as suas ideias e confrontá-las com as dos seus colegas. A comunicação oral é determinante no que os alunos aprendem acerca da disciplina, quer sobre os conteúdos, quer sobre a própria natureza da Matemática.

A condução do discurso na sala de aula é parte importante do papel do professor. Cabe-lhe colocar questões e propor tarefas que facilitem, promovam e desafiem o pensamento de cada aluno. Para isso, o professor precisa de saber ouvir com atenção as ideias dos alunos e pedir-lhes que as clarifiquem e justifiquem, oralmente ou por escrito. Ele tem de gerir a participação dos alunos na discussão e decidir quando e como encorajar cada aluno a participar. A condução do discurso impõe ao professor constantes decisões — o que deve ser aprofundado, quando se deve introduzir notações matemáticas e linguagem matemática, quando deve fornecer informação, quando deve deixar os alunos lutarem com uma dada dificuldade, etc.

A comunicação escrita proporciona uma oportunidade também importante de expressão das ideias matemáticas. Os registos efectuados no quadro e no caderno do aluno desempenham um papel estruturante, muitas vezes decisivo, das actividades de aprendizagem. Na prática, a produção escrita por parte dos alunos tende a ser muito limitada, reduzindo-se muitas vezes à realização de cálculos necessários à resolução de exercícios e problemas. No entanto, hoje reconhece-se que ela pode ter um papel mais importante no ensino da Matemática. Assim, começa a pedir-se cada vez mais aos alunos para redigirem relatórios ou ensaios explicando e justificando os seus raciocínios.

Relatório sobre a resolução de um problema no computador

Depois de desenhar aquilo que nos era dado, tentámos resolver o nosso problema. Então fizemos uma recta t paralela à recta r que passava pelo ponto A e logo depois fizemos uma recta p perpendicular à recta r passando pelo ponto B. Depois achámos o ponto de intersecção das rectas t e p e achámos o ponto E. Pensámos que o ponto E fosse o centro da circunferência pedida mas a olho nu verificámos que não e então tentámos de outra maneira. Depois desta nossa tentativa falhada, voltámos a falhar numa tentativa que consistiu em achar a mediatriz de [AB] e depois o ponto de intersecção D desta recta com a recta t. Então fizemos uma circunferência com centro em D e verificámos que não era tangente, mas por pouco, daí então vimos que estávamos perto. Então surgiu-nos fazer intersectar a mediatriz m com a recta p (perpendicular à recta dada) e então deu-nos o ponto C. Fizemos uma circunferência com centro em C e raio AC e deu-nos a circunferência que procurávamos. Esta circunferência i era tangente à recta r. Para o verificarmos fizemos a intersecção da circunferência i com a recta r e deu-nos como resultado que eram tangentes (...)

Manuel Saraiva, 1991
O computador na aprendizagem da Geometria:
Uma experiência com alunos do 10º ano de escolaridade

Uma das formas mais importantes que o professor dispõe para orientar o discurso na sala de aula é fazendo perguntas aos alunos. Questionando-os, o professor pode detectar dificuldades ao nível da compreensão dos conceitos e dos processos matemáticos, ajudá-los a pensar, motivá-los para participar e saber se eles estão a acompanhar o trabalho da aula.

Fazer boas perguntas não é tão simples como parece. Perguntas que suscitem resposta do tipo “sim” ou “não” ou que, na sua formulação, já incluem a própria resposta, não ajudam muito o aluno a raciocinar.

Os alunos devem explicar o significado de conceitos, fazer conjecturas, propor estratégias e soluções para os problemas, devem poder discutir, testar, aplicar e verificar as suas descobertas. Para isso, precisam de falar, quer uns com os outros, quer com o professor. Quando os alunos raciocinam em voz alta acerca da Matemática, as ideias e o conhecimento são desenvolvidos em cooperação. Na resolução de um problema, os professores devem explorar as sugestões dos alunos, ajudá-los a avaliar as sugestões uns dos outros e reflectir criticamente sobre elas, levantando objecções e implicações. A participação activa dos alunos na aprendizagem deve proporcionar múltiplas oportunidades para discutir, colocar questões e reforçar a compreensão da Matemática e da sua ligação à vida corrente.

A arte de questionar

1. Tento fazer uma pausa depois de uma pergunta (...) A pausa deixa claro que a pergunta é dirigida a todos, e não apenas a um ou dois dos mais rápidos e dos que levantam a mão. Muitos alunos nem sequer tentam responder a uma pergunta a não ser que sintam seguros da resposta. Uma pausa maior dá-lhes tempo para pensar e para ganhar confiança antes de responderem (...)

3. Tento evitar responder às minhas próprias perguntas. Muitas vezes, costumava responder às minhas próprias perguntas quando não havia um voluntário para fazê-lo ou quando estava com pressa. Isto levava os alunos a pensar que eles não eram obrigados a responder.

4. Tento fazer, a seguir às respostas dos alunos, a pergunta "porquê?". Isto ajudará os alunos que não sabiam responder à pergunta inicial a compreender como é que se chegou à resposta. Encorajará igualmente a discussão entre os alunos e eliminará as respostas ao acaso. Ouvir uma resposta curta raramente se torna útil. "Porquê?" deveria ser uma das perguntas mais frequentemente usadas na sala de aula.

5. Tento limitar o uso de perguntas que se baseiam quase exclusivamente na memória. Os alunos podem ser perfeitamente capazes de recitar, por exemplo, a propriedade associativa, mas isso não significa que eles reconheçam a propriedade ou a apliquem numa situação nova (...)

8. Tento que a seguir à resposta de um aluno haja uma reacção por parte da turma ou de um outro aluno. Esta é uma outra forma de encorajar os alunos a ouvirem-se uns aos outros (...)

9. Tento insistir na atenção durante as discussões. Pretendo que todos os alunos aprendam a ouvir — a ouvir-me a mim, a ouvirem-se uns aos outros, a ouvirem toda a gente.

15. Tento fazer perguntas abertas. Poderia perguntar, por exemplo, "qual é a maior, (b) ou (-b) ?" Os alunos que tentarem responder a isto, rapidamente descobrirão que não há uma resposta única e directa. Uma pergunta como esta pode provocar uma discussão viva, levando os alunos a uma compreensão mais profunda de variáveis e números negativos (...)

18. Tento substituir exposições por um conjunto de perguntas apropriadas. Com alguma orientação, os alunos podem descobrir as mesmas ideias que eu tinha planeado transmitir-lhes de um modo expositivo (...)

19. Tento evitar que as perguntas façam apelo a respostas orais em grupo. O interesse da informação que obtenho desse tipo de respostas é duvidoso. Poderia perguntar, por exemplo, "a que é igual a soma de 7x e 5x, turma?". Ouviria a turma inteira a responder numa entoação de rotina: "12x". Mas significa isso que todos compreendem? (...)

David Johnson, 1982
Every Minute Counts

Os alunos devem aprender a verificar, rever e rejeitar afirmações com base em raciocínios matemáticos. É através da comunicação que tomam consciência dos processos de construção e validação do conhecimento matemático, que aprendem as razões que fazem com que algo tenha ou não sentido, que determinam se uma certa afirmação é ou não verdade em Matemática.

O discurso na aula de Matemática deve ser conduzido pelo professor de modo a que os alunos oiçam, respondam, comentem e façam perguntas uns aos outros. O professor deve procurar que os alunos tenham a iniciativa de formular problemas e fazer perguntas, façam conjecturas e apresentem soluções, explorem exemplos e contra-exemplos na investigação de uma conjectura e utilizem argumentos matemáticos para determinar a validade de afirmações, tentando convencer-se a si próprios e aos outros. Os alunos devem habituar-se a usar uma diversidade de ferramentas para raciocinar e comunicar, incluindo o quadro, o retroprojector, cartazes, a calculadora, o computador e outros materiais e suportes.

Na verdade, o trabalho com a calculadora e o computador, se for baseado em tarefas interessantes e desafiantes, pode favorecer a formulação de conjecturas por parte dos alunos, estimular uma atitude investigativa e enriquecer o tipo de raciocínios e de argumentos por eles utilizados. Para isso, é fundamental que eles adquiram à vontade e destreza no uso da tecnologia e possam usá-la com flexibilidade, quando ela se torna útil e pertinente. O trabalho com outros materiais (por exemplo, no estudo da geometria) pode proporcionar igualmente situações muito ricas do ponto de vista do envolvimento dos alunos, do seu raciocínio e da comunicação matemática.

Em qualquer aula de Matemática, da mais inovadora à mais tradicional, existe sempre um fluxo contínuo de comunicação. O professor deve garantir que essa comunicação se efectua nos dois sentidos — dele para os alunos e dos alunos para si. O professor deve ainda valorizar a comunicação entre os próprios alunos, estabelecendo, para isso, as regras adequadas. Da fluência e da naturalidade da comunicação entre os diversos intervenientes, bem como da diversificação dos suportes (orais, escritos, usando meios audiovisuais ou novas tecnologias) depende grande parte do sucesso no desenvolvimento dos conhecimentos, capacidades, atitudes e valores estabelecidos no currículo.

4.2.2 - Negociação de significados

Uma negociação é uma interacção entre dois ou mais intervenientes, com pontos de partida e interesses muitas vezes diferentes, que podem dar algo uns aos outros, beneficiando todos. No processo de ensino-aprendizagem, o professor e os alunos têm, à partida, experiências e conhecimentos muito diversos. O professor — pelo menos em princípio — é o perito e o aluno o aprendiz. Para o professor, os conceitos matemáticos têm um significado rico, pleno de ligações com outros conceitos e processos matemáticos. Para os alunos, os conceitos matemáticos, começam por não ter qualquer significado. Ambos estão — também, pelo menos em princípio — interessados em que haja aprendizagem. Assim, a negociação do significado matemático na sala de aula constitui um aspecto importante do processo de aprendizagem. Torna-se, por isso, importante caracterizar o papel nela assumido pelo professor e pelos alunos.

Significado matemático

O significado matemático é obtido através do estabelecimento de conexões entre a ideia matemática particular em discussão e os outros conhecimentos pessoais do indivíduo. Uma nova ideia é significativa na medida em que cada indivíduo é capaz de a ligar com os conhecimentos que já tem. As ideias matemáticas formarão conexões de alguma maneira, não apenas com outras ideias matemáticas como também com outros aspectos do conhecimento pessoal. Professores e alunos possuirão o seu próprio conjunto de significados, únicos para cada indivíduo (...)

Na partilha de significados o professor que deseja promover a negociação na sala de aula deve ainda ter em conta que precisa de questionar e responder a questões, dar razões e pedir razões, clarificar e pedir clarificação, dar analogias e pedir analogias, descrever e pedir descrições, explicar e pedir explicações dar e receber exemplos. A simetria é óbvia e, podíamos argumentar, necessária se queremos que ocorra uma genuína negociação de significados.

Alan Bishop e Fred Goffree, 1986
A dinâmica e a organização na sala de aula

A negociação de significados matemáticos na sala de aula implica que cada um dos intervenientes, professores e alunos, tornem os seus próprios significados visíveis no processo. Através das trocas de ideias, cada um fica a conhecer melhor os referentes do outro e as suas ligações com o conhecimento matemático. Neste processo, a discussão sobre diferentes temas bem como a reflexão sobre tarefas já previamente realizadas pelos alunos desempenha um importante papel.

Ao professor cabe estabelecer as condições necessárias ao desenvolvimento normal do processo de negociação de significados matemáticos na sala de aula. Assim, deve estimular os alunos a falar e contribuir com frequência. Os alunos, pelo seu lado, necessitam de desenvolver confiança na sua participação neste processo e interiorizar as regras adequadas ao seu desenvolvimento. Assim, precisam de compreender que devem dar uns aos outros a possibilidade de contribuírem, tratar as diversas contribuições com respeito, perguntar, quando não se entende o contributo dos outros,

Desenvolver a compreensão matemática

P: Vamos formular o nosso problema: supondo que um navio consome uma certa quantidade q de óleo por milha à velocidade, digamos, 20 nós, e os tanques têm a capacidade de T toneladas de óleo, quantas milhas pode o navio viajar sem se reabastecer?

A: O que é que q e T significam?

P: Porquê? q significa a quantidade de óleo consumido por milha e T a capacidade do tanque em toneladas.

A: Porque é que tu não nos dá os números? Podíamos fazer um problema.

P: Porque não resolvê-lo sem números?

A: Eu podia resolvê-lo se tivesse números.

> P: Diz-me como.
>
> A: Dividia o número de toneladas no tanque pelo consumo por milha.
>
> P: Porque é que não indicas a divisão?
>
> A: Eu podia, mas não sei o que dividir pelo quê.
>
> P: Mas tu sabes, tens tudo o que precisas. Tenta fazê-lo. Usa as letras. *T* para o número de toneladas e *q* para a quantidade de óleo consumido por milha. O que é que vais escrever para a incógnita?
>
> A: Vamos chamar-lhe A.
>
> P: Está bem, então A vai ser igual a quê?
>
> A: A é igual a *T* a dividir por *q*
>
> (...) Uma "intervenção" particular da professora, "Diz-me como", usa positivamente o poder, convidando o aluno a explicar e a clarificar publicamente os seus pensamentos e conhecimentos. Isto facilita à professora desenvolver o significado matemático dos alunos com sucesso. Tais momentos são críticos; o acontecimento (e a intervenção) parece relativamente insignificante, no entanto quando se acumulam produzem um ambiente de aprendizagem totalmente diferente do que aquele que é criado pelo professor que "impõe". Além disso, à medida que os alunos ficam mais velhos, aprendem mais acerca dos significados matemáticos e ganham confiança no uso das técnicas de negociação podem entrar conjuntamente no processo de aprendizagem, muitas vezes tomando mais do poder e controlo do professor.
>
> Alan Bishop e Fred Goffree, 1986
> *A dinâmica e a organização na sala de aula*

objectar se sentem que uma contribuição é de algum modo inválida, apresentar razões para as afirmações realizadas e tentar separar a ideia da pessoa que a dá. É claro que todas estas normas de procedimento são igualmente válidas para os professores.

4.3 - Ambiente de aprendizagem

O ambiente de aprendizagem assume um papel de grande relevância na forma como os alunos aprendem Matemática. Este ambiente pode traduzir um maior ou menor envolvimento no trabalho e uma maior rigidez ou informalidade nas relações entre os diversos intervenientes. Para além das tarefas propostas e do tipo de comunicação e negociação de significados, o ambiente de aprendizagem depende de dois factores essenciais: a cultura da sala de aula e o modo de trabalho dos alunos.

4.3.1 Ambiente de aprendizagem e cultura da sala de aula

Na caracterização do ambiente de aprendizagem há dois aspectos decisivos: o que é permitido e o que é esperado dos diferentes actores. O que é permitido que os alunos façam? Podem fazer perguntas em voz alta ao professor? Podem trocar-se impressões com os colegas do lado? De que modo é que o professor se relaciona com os diferentes alunos? Solicita a sua participação? Trata todos de modo idêntico? Que expectativas tem que os alunos realizem o trabalho proposto?

O ambiente de aprendizagem é condicionado pelas características físicas da sala de aula, como o espaço existente, as mesas e cadeiras, a luz, o isolamento em relação a ruídos do exterior, etc. Mas é sobretudo influenciado pela relação de poder estabelecida e pelos papéis atribuídos aos alunos e ao professor. Ou seja, subjacente ao ambiente de cada aula há uma determinada cultura que regula as normas de comportamento e de interacção e estabelece as expectativas dos respectivos intervenientes.

Na verdade, as salas de aula constituem verdadeiras microculturas onde se afirmam diversas crenças e valores que são perpetuados pelas práticas diárias. Estas práticas incluem o modo como se entra na sala, como o sumário é elaborado e a forma como se corrige o trabalho de casa. Incluem igualmente, e num plano mais decisivo, o tipo de tarefas que o professor costuma propor, o modo como encoraja (ou não) a manifestação de dúvidas e opiniões por parte dos alunos, a oportunidade que lhes dá a que argumentem e justifiquem as suas ideias. Todos estes aspectos carregam mensagens implícitas sobre o papel que o professor atribui aos alunos na aprendizagem e sobre as suas expectativas em relação às suas capacidades. Estas crenças e valores têm directamente a ver com a natureza e propósitos da disciplina, como corpo do saber e como prática social (daí a relevância de considerar as questões da epistemologia da Matemática) e também como objecto de estudo (daí a importância de considerar em pormenor os diversos tipo de finalidades do seu ensino).

Para além do conhecimento sobre os factos e procedimentos matemáticos que os alunos adquirem como resultado da sua frequência da disciplina, eles formam uma ideia acerca do que é a Matemática e como se resolvem as tarefas matemáticas, ideia esta que é fortemente determinada pela cultura da Matemática escolar onde aprendem esses factos e procedimentos. Por outro lado, essa noção do que é realmente a Matemática e como se trabalha em Matemática determina em grande medida o modo como os alunos usam, na sala de aula e em contexto extra-escolar — a Matemática que aprenderam.

Ambiente de aprendizagem

> O professor de Matemática deve criar um ambiente de aprendizagem que favoreça o desenvolvimento do poder matemático de cada aluno:
>
> _ permitindo e estruturando o tempo necessário para explorar profundamente a Matemática e para se familiarizar com ideias e problemas significativos;
>
> _ usando o espaço físico e os materiais de forma a facilitar a aprendizagem do aluno em Matemática;
>
> _ oferecendo um contexto que encoraje o desenvolvimento da aptidão e competência matemáticas;
>
> _ respeitando e valorizando as ideias dos alunos, as suas formas de pensar e a sua predisposição para a Matemática;
>
> e esperando e encorajando constantemente os alunos a:
>
> _ trabalhar independentemente ou em colaboração de modo a dar sentido à matemática;
>
> _ aceitar riscos intelectuais, colocando questões e formulando conjecturas;
>
> _ manifestar um sentido de competência matemática ao validar e defender ideias com argumentos matemáticos.
>
> NCTM, 1994
> *Normas Profissionais para Ensino da Matemática*

A aprendizagem da Matemática requer um ambiente onde os alunos possam exprimir com à vontade as suas dúvidas e sugestões, onde se sintam respeitados e valorizados, nos seus contributos para o trabalho colectivo. Isto implica a capacidade de o professor valorizar as suas ideias, encorajar a sua contribuição e respeitar as suas diferenças e dificuldades.

O uso da calculadora e do computador possibilitam o desenvolvimento de um ambiente de trabalho participativo, onde se leva a cabo actividade matemática rica e estimulante. Estes materiais podem ser usados pelo professor, para reforçar o seu domínio do discurso. Mas também podem ser usados para estimular nos alunos uma atitude crítica e investigativa e enriquecer a sua capacidade de raciocínio e de comunicação.

O professor deve desenvolver e integrar tarefas, discurso e ambiente de forma a promover a aprendizagem dos alunos. Deste modo torna-se fundamental que os observe e ouça durante a aula no sentido de lhes colocar questões ou tarefas que desenvolvam o raciocínio e compreensão dos alunos.

4.3.2 - Modos de trabalho dos alunos

Na sala de aula, o professor pode escolher entre diversas formas de organização do trabalho dos alunos. As formas básicas de trabalho são em colectivo, em pequeno grupo, aos pares ou individualmente. Cada uma delas permite atingir melhor certos objectivos e é mais adequada para a realização de certas tarefas.

O trabalho em colectivo é fundamental nas aulas de Matemática. O professor usa-o habitualmente para apresentar matéria nova, conduzir uma discussão, questionar os alunos ou interrogar em especial um aluno a quem solicita que vá ao quadro. O trabalho em colectivo é decisivo na negociação de significados matemáticos. Trata-se de um modo de trabalho indispensável na introdução de novos conceitos e ideias matemáticas, bem como na apresentação de novas tarefas e na discussão de tarefas já concluídas. É, muitas vezes, usado para realizar discussões com os alunos. Pode, ainda, servir para resolver um problema ou conduzir uma investigação matemática, solicitando o professor o contributo de todos os alunos. No entanto, se usado com exagero, tomando todo o tempo da aula, este tipo de trabalho pode levar muitos alunos a distraírem-se e a deixarem de participar e, o que é mais grave, não permite o desenvolvimento de determinado tipo de competências e capacidades que exigem esforço individual ou interacção com outros colegas. Por isso, é importante que o professor seja capaz de dosear convenientemente este tipo de trabalho, conjugando-o com outras formas que facilitem o envolvimento de todos os alunos.

Um momento de discussão em trabalho colectivo

[Após o estudo da função quadrática]. A professora dialoga com os alunos em torno de questões que conduziram a situações diferentes das que se acabara de estudar, suscitando expectativa e reflexão e possibilitando a intervenção de outras noções. Este diálogo, conduzido pela professora, é construído com base em perguntas e alguns desafios propostos à turma, a que os alunos iam respondendo:

P: Neste momento, o que podemos concluir é que se num ponto f'(x) passa de positiva para negativa, a função tem um máximo relativo. A recíproca será verdadeira? Que acham?

Um aluno: Acho que não.

P: Dá-me então um exemplo.

O aluno não consegue. Ninguém dá um exemplo.

P: Têm de descobrir uma função que tenha um extremo relativo num ponto e que não tenha derivada nesse ponto.

Um aluno, passado um momento: Temos de começar por ver quando é que uma função não tem derivada...

P: E quando é?

O aluno responde correctamente.

P: Um exemplo?

> Cria-se um momento de espera. Uma aluna sugere algo que a professora recusa: Muito complicado, quero uma coisa que se veja logo.
>
> Pouco depois outro aluno sugere |x| que é muito bem aceite pela professora: Hoje o Paulo bate-vos aos pontos.
>
> Henrique Guimarães, 1988
> *Ensinar Matemática: Concepções e Práticas*

Trabalhar em pequeno grupo permite aos alunos expor as suas ideias, ouvir os seus colegas, colocar questões, discutir estratégias e soluções, argumentar e criticar outros argumentos. Em pequeno grupo, torna-se mais fácil arriscar os seus pontos de vista, avançar com as suas descobertas e exprimir o seu pensamento. Por isso, destinar mais tempo ao trabalho em pequenos grupos nas aulas de Matemática é uma das orientações curriculares mais salientes. No entanto, nem todas as tarefas se proporcionam para a realização de trabalhos de grupo. Tarefas muito estruturadas, como a resolução de exercícios, não tiram grande partido da interacção entre os alunos. Cada aluno acaba muitas vezes por resolver os exercícios por si mesmo, não havendo um propósito claro para a actividade do grupo. Tarefas que exigem um elevado grau de concentração, como resolver um difícil problema ou escrever um ensaio, também não são próprias para o trabalho de grupo. Por outro lado, a realização de investigações matemáticas e a execução de projectos são tarefas que podem tirar grande partido da capacidade criativa do trabalho de grupo e da possibilidade dos alunos fazerem eles próprios uma certa subdivisão do trabalho, usando da melhor maneira as capacidades de cada um.

O trabalho em pares tem vindo a conhecer uma importância crescente na aula de Matemática. Este tipo de trabalho proporciona a possibilidade de uma interacção significativa entre os alunos, que podem trocar impressões entre si, com vista à realização da tarefa proposta. Os alunos podem assim participar em dois níveis do discurso da aula — o colectivo e o que desenvolvem com o seu parceiro de aprendizagem. Trata-se de uma forma prática de trabalhar, que não exige, de um modo geral, alterações no espaço físico da sala de aula e que proporciona aos alunos uma certa margem de autonomia. É particularmente adequada quando a tarefa proposta é relativamente estruturada e não exige um elevado nível de concentração individual.

Finalmente, o trabalho individual é também necessário no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. O aluno tem de ser capaz de assumir a sua independência e a sua responsabilidade pessoal. O professor tem, também, de saber encontrar momentos para dialogar especificamente com cada aluno, apercebendo-se das suas necessidades e interesses, dando-lhe o apoio directo necessário para que possa progredir. A realização de exercícios, problemas e ensaios são tarefas que se adequam muitas vezes a este modo de trabalho.

Diferentes tipos de tarefas e diferentes modos de trabalho

(...) As ideias não estão isoladas na memória, mas sim organizadas e associadas à linguagem natural que se usa e às situações que foram encontradas no passado. Este ponto de vista construtivo do processo de aprendizagem deve reflectir-se no modo como grande parte da Matemática é ensinada. Assim o ensino deve ser variado e incluir oportunidades para:

_ trabalho de projecto adequado;

_ propostas para trabalho individual e em grupo;

_ discussão entre o professor e os alunos e entre os alunos;

_ prática de métodos matemáticos;

_ exposição pelo professor.

NCTM, 1994
Normas Profissionais para Ensino da Matemática

Cada uma das formas de trabalho tem o seu papel a desempenhar. No entanto, a sua eficácia depende do modo como forem conduzidas pelo professor. Há trabalho colectivo interessante e monótono, trabalho de grupo produtivo e improdutivo, assim como trabalho em pares e individual bem e mal aproveitado. Tudo depende das tarefas propostas aos alunos, serem ou não adequadas ao modo de trabalho estabelecido. E tudo depende, também, do modo como o professor acompanha realização das tarefas e vai gerindo o ambiente de aprendizagem.

4.4 - A concluir

Cada professor tem o seu estilo próprio de ensino, estruturando as unidades didácticas, seleccionando as situações de aprendizagem, sequenciando as tarefas e articulando o processo de ensino com os momentos de avaliação. Torna-se, no entanto, importante, que o professor tenha em conta os diversos aspectos estruturante do processo de ensino-aprendizagem, de modo a analisar a adequação da sua prática às características da sua escola e de cada turma e às necessidades individuais de cada aluno.

O facto de não haver uma metodologia universalmente aplicável (nem no ensino secundário nem em qualquer outro nível de ensino), não significa que não existam estratégias de ensino mais adequadas e outras mais desaconselháveis para cada situação concreta. Cabe ao professor conhecer as alternativas disponíveis e conhecer-se a si próprio, sabendo até que ponto é capaz de usar com confiança e desembaraço cada uma delas. Cabe-lhe, também, procurar, através da troca de experiências com os seus colegas, da participação em actividades de formação e em projectos inovadores de investigação ou investigação-acção, aperfeiçoar-se e tornar-se cada vez mais competente no manejo dos instrumentos de análise e das abordagens próprias da sua área profissional.

[1] Na versão portuguesa, usa-se o termo "actividade" como tradução de "task". Optamos aqui pelo termo "tarefa", uma vez que pretendemos salientar bem a distinção conceptual entre os dois conceitos.

[2]A situação de aprendizagem e as tarefas apresentadas foram desenvolvidas em colaboração por Margarida Graça e Liliana Costa.

5 - AVALIAÇÃO

A avaliação dos alunos constitui uma das tarefas mais problemáticas para os professores. Esta realidade acentuou-se nos últimos anos com a reforma curricular. Nos primeiros estudos que foram realizados sobre a experimentação dos novos programas, muitos professores apontaram a avaliação como um dos aspectos em que as recomendações oficiais eram mais insuficientes e, ao mesmo tempo, como uma das áreas em que era necessária mais formação. Nos encontros de professores, as sessões sobre avaliação são normalmente das mais procuradas. Em 1991, a Associação de Professores de Matemática (APM) organizou um seminário dedicado especificamente a este tema, no qual a avaliação das actividades de resolução de problemas e a análise crítica de diversos instrumentos de avaliação mereceram uma atenção privilegiada.

Este fenómeno não é exclusivo do nosso país. Nos últimos anos, a avaliação tornou-se um tema muito discutido em congressos e publicações, em particular no domínio da educação matemática. A *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI), também em 1991, promoveu um estudo sobre a avaliação em Matemática e os seus efeitos, no qual se salienta que as perspectivas sobre o ensino da Matemática evoluiram muito nos últimos tempos sem que as orientações e práticas de avaliação as tivessem acompanhado, o que constitui um problema particularmente sério numa época de crescente expansão dos sistemas escolares.

Com efeito, os programas de Matemática vêm evoluindo no sentido de considerar que os objectivos da aprendizagem incluem não só os conhecimentos que os alunos adquirem mas também as capacidades e as atitudes que desenvolvem, e de valorizar aspectos como a resolução de problemas, a comunicação e o trabalho de grupo. No entanto, os instrumentos de avaliação por excelência continuam a ser os testes e os exames, os quais tendem a valorizar os conhecimentos factuais dos alunos e a sua rapidez e eficiência na execução de procedimentos de cálculo.

Neste capítulo, analisa-se o modo como a evolução das perspectivas educativas nos leva a uma nova visão da avaliação e, à luz desta, reconsideram-se as funções e os princípios da avaliação. Além disso, apresentam-se diversos instrumentos de avaliação a que os professores de Matemática podem recorrer e discutem-se alguns procedimentos associados à sua utilização.

Um problema que se agrava

A avaliação vem merecendo uma atenção crescente por parte da comunidade internacional da educação matemática. Há numerosas razões para isso mas uma parece ser predominante. Durante as últimas décadas, a educação matemática desenvolveu-se consideravelmente no domínio dos ideais e objectivos, na teoria e na prática, enquanto os conceitos e práticas de avaliação não registaram o mesmo desenvolvimento.

O currículo de matemática tem-se expandido. Em primeiro lugar, quanto aos conteúdos, aspectos das aplicações e modelação, a cooperação com outras disciplinas, a filosofia e história da matemática, a resolução de problemas, as actividades de exploração e experências realizadas com o apoio das tecnologias têm sido incluídas em diversos programas um pouco por todo o mundo. Em segundo lugar, testemunhamos uma expansão notável do leque de formas de trabalho e actividades dos alunos. Investigações prolongadas, tanto de matemática pura como aplicada, trabalho de projecto, discussões científicas, actividades fora da sala de aula, experimentação, trabalho de grupo, etc., já não são entidades utópicas no ensino da matemática. Em consequência, emergiu uma noção muito mais ampla de matemática e de educação matemática.

Porém, estes desenvolvimentos não foram acompanhados por correspondentes desenvolvimentos em avaliação, no que diz respeito aos valores e conceitos, bem como à teoria e prática. Deste facto decorre um desajuste e uma tensão crescentes entre o estado da educação matemática e as práticas usuais de avaliação. Talvez os ideais e objectivos da educação matemática nunca tenham estado realmente em consonância com os modos de avaliação disponíveis. No entanto, quando a educação matemática era oferecida apenas a uma minoria de jovens, os problemas provocados por aquele desajuste eram talvez menos sérios ou, pelo menos, encarados como tal. Seja como for, a expansão das noções de matemática e de educação matemática alargou sem dúvida o fosso entre as tendências actuais no ensino da matemática e as práticas tradicionais de avaliação.

Mogens Niss, 1993
Investigações sobre avaliação em educação matemática

5.1 - Propósitos e funções da avaliação

A avaliação dos alunos serve diferentes propósitos, relacionados ou não entre si, dos quais se podem destacar o de fornecer informação a diversos intervenientes ou interessados no processo de ensino-aprendizagem e o de constituir uma base para decisões e medidas a tomar.

Os resultados da avaliação de um aluno destinam-se, em primeiro lugar, a informar o próprio aluno, o professor, os pais, a escola, a comunidade, a respeito do seu progresso nos diferentes domínios da aprendizagem. Além disso, fornecem dados para ajudar o professor a avaliar o seu próprio ensino. Este papel informativo pode auxiliar a tomada de decisões, em especial por parte do aluno e do professor, envolvendo eventualmente a modificação ou o ajustamento do modo de estudar (do aluno) ou de organizar o ensino (do professor).

O propósito central da avaliação num dado momento é evidenciado muitas vezes através do uso de distintos termos. Assim, a avaliação de *diagnóstico* (realizada geralmente no início de um ano ou de uma unidade didáctica) destina-se a determinar se o aluno tem os pré-requisitos necessários para aprender os tópicos seguintes do programa, podendo os seus resultados condicionar a planificação prevista; a avaliação *formativa* (que ocorre em diversos momentos do processo de ensino-aprendizagem) tem o propósito de fazer pontos da situação relativamente ao progresso dos alunos face aos vários tipos de objectivos do currículo, permitindo ao professor introduzir as necessárias correcções ou inflexões na sua estratégia de ensino.

Porém, as decisões e medidas que se tomam com base nos resultados da avaliação dos alunos vão muito para além da planificação ou dos reajustamentos de natureza pedagógica que se fazem ao nível da sala de aula. De facto, há também uma avaliação *sumativa* cujos resultados, expressos geralmente numa nota, são usados para se decidir se o aluno passa (ou não) para o ano ou ciclo seguinte, ou para lhe atribuir uma posição relativa que pode determinar a sua admissão (ou não) em certos estudos superiores.

A avaliação tem ao mesmo tempo uma função pedagógica e uma função de controlo e pressão sobre os alunos, os professores e a escola. Embora variando muito com os níveis de escolaridade e de uns países para outros, assumindo formas mais subtis ou mais ostensivas, esta segunda função exerce uma grande influência em todos os aspectos do processo educativo, sendo particularmente visível quando existe um sistema de exames com um peso considerável na possibilidade de o aluno não ser aprovado e/ou não ser admitido em estudos superiores.

Este fenómeno ocorre no sistema educativo português, designadamente ao nível do ensino secundário. A função de controlo e pressão, de motivação externa para manter na escola um ritmo de estudo e um padrão de comportamento, serve-se prioritariamente de instrumentos como os exames e de provas feitas à sua imagem e semelhança (testes escritos e provas globais). Ora, as formas de avaliação que têm maior peso no sucesso ou insucesso escolar constituem uma arma poderosa, exercendo um efeito retroactivo sobre o processo educativo e determinando em larga medida quais são os aspectos da aprendizagem que acabam por ser mais valorizados e o modo como se ensina e como se estuda. Como escreveu Freudenthal, há mais de 20 anos, o exame torna-se um objectivo, o que vem para exame um programa, o ensino da matéria para exame um método. A lógica de preparação para os testes e provas globais — e, em última análise, para os exames — torna-se muitas vezes a perspectiva dominante, comprometendo seriamente a possibilidade de se atingirem certos (novos) objectivos e de se desenvolverem algumas (novas) formas de trabalho preconizadas pelos próprios programas.

As contradições inerentes a esta situação provocam várias tensões que o professor tem que gerir, por vezes com grande dificuldade. No pouco tempo de que dispõe, será preferível seguir as orientações que recomendam uma concretização flexível do programa, de acordo com as diferenças de estilo e de ritmo entre os seus alunos, ou treiná-los de um modo uniforme para uma prova de um certo tipo que é igual para todos? Como deverá encarar a tradicional aceitação de que a avaliação externa é "mais válida" do que o seu julgamento profissional quando é ele quem conhece os alunos, a sua evolução, as suas potencialidades, os contextos em que estudaram? E como deverá transmitir as suas apreciações aos alunos e aos pais, tendo consciência de que a avaliação é (deve ser) muito mais do que a atribuição de uma nota (num qualquer sistema de classificação) mas sabendo que se move num ambiente em que se dá uma atenção privilegiada às notas e às comparações entre notas?

Claro que o professor não pode ignorar o tipo de avaliação externa a que os seus alunos serão sujeitos nem as expectativas dominantes no meio em que exerce a sua actividade. Mas pode trabalhar no sentido de conceber e utilizar igualmente formas alternativas de avaliação que prestem justiça a uma variedade de objectivos do currículo e que se enquadrem numa lógica de desenvolvimento integral desse currículo. Para discutir esta questão, convirá reflectir sobre o modo como o próprio conceito de avaliação tem que evoluir em consonância com a evolução mais geral do pensamento educativo; e, em seguida, repensar as funções da avaliação e os princípios em que se pode basear a escolha de novos modos e instrumentos de avaliação.

5.2 - Os conceitos de avaliação

Numa concepção tradicional, a aprendizagem surge fortemente associada à capacidade de reproduzir os conhecimentos transmitidos pelo professor e pelo manual escolar. Deste modo, a avaliação é encarada como o processo de medir a diferença entre o "modelo do professor" e a forma como o aluno o reproduz. As medidas resultantes são geralmente classificações numéricas (*notas*), relacionadas com a média de um grupo (a turma, por exemplo) e idealmente ajustadas pela curva normal. Os conceitos de avaliação e classificação praticamente não se distinguem.

Nesta perspectiva, a avaliação tende a ocorrer em momentos pré-estabelecidos, tipicamente no fim de um período escolar, um ano ou um ciclo. Os resultados determinam a progressão escolar e a certificação dos alunos, servindo ainda para informar os pais ou os futuros empregadores, mas não têm uma dimensão pedagógica no sentido em que não incidem directamente no processo de ensino- aprendizagem.

A preocupação em introduzir mais “rigor” e “objectividade” na atribuição das notas veio encontrar na chamada “pedagogia por objectivos” um importante suporte teórico. Formulando os objectivos educacionais em termos de comportamentos observáveis, separando-os em vários domínios (com o cognitivo a merecer uma atenção privilegiada), especificando-os em relação a tópicos precisos dos programas e hierarquizando-os desde os mais simples até aos mais complexos, esta perspectiva pedagógica tende a encarar a avaliação como um processo de medir a distância entre a resposta do aluno e o objectivo (comportamento) previamente identificado.

Assumindo uma concepção muito estruturada e hierarquizada do processo de aprendizagem, esta abordagem trouxe uma dimensão pedagógica à avaliação, ao introduzir noções como a avaliação de diagnóstico e a avaliação formativa. Esta última, em particular, tem o propósito de verificar até que ponto os objectivos previamente estabelecidos estão a ser alcançados ou se é preciso desenvolver actividades de “remediação”.

De acordo com esta visão, só os comportamentos observáveis podem ser avaliados de uma forma objectiva e rigorosa. Os itens dos testes são associados directamente aos objectivos específicos e as respostas do aluno ao conjunto das perguntas de um teste são consideradas “representativas” da aprendizagem. Evitam-se as questões que possam conduzir a uma avaliação “subjectiva” pelo que, idealmente, as provas são escritas e os itens são de escolha múltipla ou de resposta curta. Os critérios para medir o grau de consecução dos objectivos baseiam-se essencialmente na percentagem de respostas certas que o aluno apresenta.

A pedagogia por objectivos tende a dar uma atenção privilegiada ao treino de competências específicas, numa lógica de estímulo-resposta, para que o aluno seja capaz de produzir as respostas certas no momento do teste ou do exame, independentemente da consistência das suas aprendizagens, do significado que atribui aos seus conhecimentos e de se saber até que ponto estes vão perdurar. No quadro desta abordagem pedagógica, a avaliação formativa é muitas vezes encarada como uma simulação de um prova sumativa (ou uma preparação para esta), a tempo de se detectarem e corrigirem erros nas respostas do aluno.

Nos últimos anos têm emergido novas teorias sobre a aprendizagem, de acordo com as quais esta tende a ser vista como um processo de construção pessoal de significados, fortemente baseado nas experiências que o aluno viveu. As novas ideias educativas levam a considerar que uma avaliação descontextualizada e despersonalizada, que valoriza as respostas-tipo e negligencia os processos, deixa de fora aspectos essenciais. Torna-se necessário reconsiderar o que é a avaliação, associando-a ao propósito de compreender o processo de aprendizagem, identificar problemas e gerar hipóteses explicativas. O erro deixa de ser visto como uma coisa indesejável que é preciso evitar a todo o custo, tendendo a ser encarado como algo que é inerente ao próprio processo e que importa analisar e compreender.

Esta perspectiva de avaliação assume uma intenção essencialmente pedagógica. O foco deixa de estar em medir informação e passa a estar em interpretar a informação e agir pedagogicamente em função dela. Isto significa assumir que a avaliação tem, de algum modo, um carácter subjectivo. É importante sublinhar que, neste domínio e ao contrário do que por vezes se ouve dizer, a subjectividade não é um defeito mas sim uma qualidade necessária para interpretar fenómenos que são complexos e cuja compreensão requer um conhecimento aprofundado (e muitas vezes pessoal) das situações e dos intervenientes.

Ao mesmo tempo, o pensamento educativo tem evoluído no sentido de considerar que as capacidades de ordem superior têm uma natureza complexa e global e, embora sejam inseparáveis da aquisição de conhecimentos e competências "básicas", não se podem reduzir a uma sequência linear, fragmentada e hierarquizada destas competências: não é por se treinar muitos exercícios de cálculo, progressivamente mais complicados, que se desenvolve a capacidade de resolver problemas, de argumentar ou de formular e provar conjecturas. Além disso, os objectivos de natureza cognitiva também não se podem isolar de outros, nomeadamente dos objectivos de carácter afectivo ou do domínio das atitudes e das concepções.

De acordo com estas ideias, nos últimos tempos e um pouco por todo o mundo, os currículos passaram a valorizar objectivos dos domínios das capacidades e das atitudes, a par dos conhecimentos, e a salientar que os vários tipos de objectivos têm que ser vistos de um modo integrado. Para concretizar estas orientações, novas tarefas e formas de trabalho têm sido propostas para a sala de aula, com o propósito de gerar uma actividade dos alunos que não se reduza à produção de respostas curtas e "objectivas", mas que inclua, por exemplo, a elaboração de explicações pormenorizadas (tanto escritas como orais) sobre problemas resolvidos ou a redacção de relatórios de projectos ou trabalhos de grupo. Uma concepção da Matemática como disciplina do "certo-ou-errado" e da avaliação como medida dá lugar à necessidade de desenvolver uma perspectiva interpretativa e qualitativa do trabalho que os alunos realizam e do próprio processo de ensino-aprendizagem.

5.3 - Uma nova visão sobre as funções e os princípios da avaliação

A perspectiva interpretativa da avaliação leva-nos a encarar esta como uma parte integrante do processo de ensino-aprendizagem. Ensino e avaliação devem ser vistos como duas componentes de um mesmo sistema e não como sistemas separados. Isto não significa que não possa ou deva haver momentos ou trabalhos com uma importância especial para efeitos de avaliação mas implica que as tarefas de avaliação sejam capazes, ao mesmo tempo, de gerar novas oportunidades para aprender e de constituir fontes de informação essenciais tanto para o professor como para o aluno.

Com efeito, as tarefas de avaliação devem fornecer dados significativos a respeito das aptidões, preferências e dificuldades de cada aluno que ajudem o professor a compreendê-lo enquanto "aluno de Matemática" e constituam uma base para conceber e orientar futuras actividades. Ao mesmo tempo, devem fornecer ao aluno uma informação que o ajude na reflexão e auto-regulação relativamente ao seu próprio processo de aprendizagem.

Nas *Normas para o Currículo e a Avaliação*, o NCTM propõe, como grandes princípios para a avaliação dos alunos, que esta seja parte integrante do processo de ensino, que sejam utilizados múltiplos meios de avaliação e ainda que sejam avaliados todos os aspectos do conhecimento matemático e as suas interligações. Quanto aos procedimentos a mudar no domínio da avaliação, o NCTM salienta, entre outros aspectos, que é preciso:

• focar uma grande variedade de tarefas matemáticas e adoptar uma visão holística da Matemática, em vez de focar capacidades específicas e isoladas organizadas numa matriz de conteúdos/objectivos comportamentais;

• recorrer a vários métodos de avaliação, incluindo formas escritas, orais e de demonstração (e algumas vezes ao uso de calculadoras, computadores e materiais manipuláveis), em vez de utilizar apenas testes escritos.

> ***Avaliar uma variedade de aspectos e a sua integração***
>
> Em matemática, como em qualquer campo, o conhecimento consiste em informação e em saber como fazer. O saber como fazer em matemática, que conduz ao poder matemático, requer a capacidade de usar a informação para raciocinar e pensar criativamente e para formular, resolver e reflectir criticamente sobre problemas. A avaliação do poder matemático dos alunos vai para além da medição da quantidade de informação que eles dominam, devendo incluir o alcance da sua capacidade e disposição para utilizar, aplicar e comunicar essa informação. A avaliação deve analisar até que ponto os alunos integraram e deram sentido à informação, se conseguem aplicá-la em situações que requeiram raciocínio e pensamento criativo e se são capazes de utilizar a matemática para comunicar as suas ideias. Para além disso, a avaliação deve analisar a predisposição dos alunos face a esta ciência, em particular a sua confiança em fazer matemática e o modo como a valorizam.
>
> Uma avaliação da capacidade matemática dos alunos tem um alcance amplo, devendo incluir todos os aspectos referidos nesta norma e determinar até que ponto eles se encontram integrados. A avaliação do poder matemático não deve ser concebida como a avaliação de competências separadas ou isoladas. Embora um dado aspecto do conhecimento matemático possa ser mais salientado do que um outro numa dada avaliação, deve ficar claro que o poder matemático compreende todos os aspectos do conhecimento matemático e a sua integração.
>
> NCTM, 1991
> *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*

Uma preocupação fundamental é que as práticas de avaliação sejam compatíveis com as orientações curriculares, procurando estar em sintonia com os principais objectivos do currículo, com a importância relativa atribuída aos vários tópicos e processos, e com as abordagens e formas de trabalho desenvolvidas nas aulas. Para fazer justiça à variedade de orientações curriculares é necessário recorrer a fontes de informação diversificadas mas, ao mesmo tempo, é preciso recolher e organizar a informação de um modo sistemático e dar-lhe um sentido global.

Inspirando-se em experiências anteriores realizadas noutros países, o projecto MAT789 — que concebeu e implementou em Portugal um currículo inovador de Matemática entre 1988 e 1992 — formulou os princípios de avaliação do seguinte modo:

- a avaliação deve gerar, ela própria, novas situações de aprendizagem;
- a avaliação deve ser consistente com os objectivos, os métodos e os principais tipos de actividades do currículo;
- a avaliação deve ter um carácter positivo, isto é, focar aquilo que o aluno já é capaz de fazer em vez daquilo que ele ainda não sabe, não se requerendo necessariamente o mesmo nível de desenvolvimento a todos os alunos;

- a avaliação, nas formas e instrumentos que utiliza, não deve estar dependente das possibilidades de se atribuirem classificações quantitativas aos alunos;
- a avaliação deve ocorrer num ambiente de transparência e confiança, no qual as críticas e sugestões sejam encaradas como naturais.

Como forma de concretizar os princípios, os professores que desenvolveram este currículo utilizaram nas turmas experimentais uma grande variedade de modos e instrumentos de avaliação: relatórios e ensaios (ora individuais ora em pequenos grupos) que os alunos elaboravam sobre problemas e situações problemáticas; produtos gerados no decorrer de projectos; testes em duas fases; apresentações orais, por um aluno ou um grupo, do modo como resolveram um problema ou realizaram um trabalho, seguidas de discussão; questionários e entrevistas; observações do trabalho dos alunos nas aulas, seguidas de discussão e reflexão entre os professores.

As práticas de avaliação deste projecto assentam em alguns pressupostos que importa explicitar. Em primeiro lugar, não há um instrumento único que seja capaz de captar os aspectos essenciais da evolução de um aluno nos vários domínios que pretendemos considerar. Em segundo lugar, a aprendizagem de um dado conceito ou procedimento não deve estar associada a um momento único nem a uma forma única de a testar. Em terceiro lugar, o trabalho realizado por um aluno ou por um grupo não deve ser considerado como definitivo.

Da combinação destes pressupostos com os princípios atrás enunciados resultam diversas orientações para a actuação do professor. Não basta ter boas ideias sobre tarefas a propor aos alunos, é preciso enquadrá-las numa perspectiva que integre a avaliação e a aprendizagem e que seja consistente com os principais objectivos e metodologias do currículo. Por exemplo, de pouco servirá propor a elaboração de um relatório se os alunos não forem encorajados a mostrar uma versão preliminar do seu trabalho e, se for caso disso, a melhorá-lo com base nas sugestões e críticas do professor. Analogamente, de pouco servirá propor a resolução de um problema interessante ou uma tarefa de natureza investigativa se os alunos não dispuserem de tempo (e, eventualmente, dos recursos adequados) para desenvolver o trabalho e reflectir sobre ele.

5.4 - Modos e instrumentos de avaliação

O professor tem à sua disposição uma grande variedade de modos e instrumentos de avaliação, relativamente aos quais terá que fazer as suas opções de acordo com a orientação que dá ao processo de ensino-aprendizagem e tendo em conta, em cada caso, as prioridades que estabelece quanto ao tipo de informação que pretende obter. Sendo assim, conhecer diferentes possibilidades no domínio da avaliação e reflectir sobre as características, potencialidades e limitações de cada uma delas constitui obviamente uma tarefa importante.

5.4.1 - Testes

Os testes, sobretudo na sua forma mais habitual — provas escritas, individuais, sem consulta, com tempo limitado — constituem o instrumento dominante, e por vezes quase exclusivo, de avaliação dos alunos. Este facto não é novo mas ter-se-á até acentuado nas últimas décadas. Com efeito, outros instrumentos de avaliação, como as provas orais (em todas as disciplinas), as composições ou os trabalhos práticos (nalgumas disciplinas), perderam uma grande parte da importância que já tiveram, sobretudo a partir da emergência de fenómenos (no caso português, por volta dos anos 70) como a influência das ideias behaviouristas e a massificação do ensino.

Os resultados dos testes usuais fornecem alguma informação sobre a aprendizagem tanto aos professores como aos alunos. No entanto, é preciso relativizar o alcance dessa informação. Pela sua própria natureza, os testes usuais não podem avaliar um conjunto de aspectos fundamentais. Sendo provas escritas, não avaliam o desempenho oral do aluno nem o modo como ele é capaz de participar numa discussão e só muito limitadamente captam a sua capacidade de argumentação. Sendo provas individuais, não podem naturalmente avaliar até que ponto o aluno desenvolveu a apetência para interagir com outros na resolução de um problema e têm que deixar de fora tarefas que exijam cooperação. Sendo provas sem consulta, são incapazes de determinar a capacidade do aluno para estudar um texto matemático ou para procurar a informação de que necessita. Finalmente, sendo provas com tempo limitado, são inadequadas para por à prova a persistência do aluno e o seu gosto e aptidão para se envolver numa investigação prolongada.

Uma avaliação fortemente baseada em testes é, por isso, inadequada para dar resposta à variedade de objectivos de aprendizagem que as actuais orientações curriculares recomendam. Além disso, a sobrevalorização dos testes induz o aluno a estudar e a encarar a Matemática de uma maneira que destaca aqueles aspectos que são mais facilmente e habitualmente avaliáveis desta forma: a memorização de fórmulas e regras práticas e o treino na resolução de exercícios-tipo.

Certamente, o esforço para elaborar melhores testes, bem como para analisar da forma mais adequada as respostas dos alunos, pode ser muito útil. Um teste não tem que ser necessariamente um conjunto de exercícios-tipo aos quais o aluno se limita a dar uma resposta numérica “certa”. Pode incluir questões que levem o aluno a interpretar, a reflectir, a explicitar raciocínios e a elaborar explicações. Além disso, mudanças nas metodologias, bem como nos recursos de que os alunos dispõem, requerem uma mudança nas perguntas que habitualmente se incluem nos testes.

Por exemplo, num teste sobre funções, pedir o traçado do gráfico ou o cálculo dos zeros de uma dada função quadrática, não avalia certamente as mesmas competências consoante os alunos utilizam ou não calculadoras gráficas. Mas há muitas questões susceptíveis de avaliar a compreensão de conceitos e até aptidões no domínio da interpretação de gráficos, para cuja resolução a calculadora é um instrumento de trabalho que de modo algum substitui o aluno na elaboração da resposta.

Exemplos de questões sobre funções[1]

Eis algumas questões simples sobre funções que podem ser adequadas em testes nos quais os alunos dispõem de calculadoras gráficas:

• Dar exemplo (ou exemplos) de uma função quadrática em que zero seja um zero da função.

• Dar um exemplo de uma função que seja: (a) positiva em todo o domínio; (b) decrescente em todo o domínio.

• Dizer, justificando, se é verdadeiro ou falso: (a) se uma função *f* é par, o mesmo acontece com *-f*; (b) uma função ímpar tem no máximo um zero; (c) se *f* é uma função ímpar, então *2f* é uma função par; (d) existem funções pares com um número ímpar de zeros.

• Apresentar uma expressão analítica e o esboço do gráfico de uma função que admita 1 como zero e que seja crescente de - 8 a -1.

O uso da calculadora permite mesmo que se varie mais o tipo de problemas que podem ser propostos em testes, pelo que será preciso ter o cuidado de encontrar questões de diversos níveis de complexidade, adequadas a uma prova de tempo limitado, incluindo algumas a que se possa responder de um modo simples em poucos minutos.

De qualquer modo, por mais bem elaborados que sejam, os testes usuais não são suficientes como instrumentos de avaliação, pelo que se torna essencial considerar outras possibilidades.

5.4.2 - Testes em duas fases

Os testes em duas fases foram concebidos originalmente na Holanda, em projectos de desenvolvimento curricular no âmbito do ensino secundário. A ideia consiste em elaborar um teste a que o aluno responde em dois momentos: num primeiro momento, na sala de aula e sem quaisquer indicações do professor; num segundo momento, dispondo de mais tempo e dos comentários que o professor formulou ao avaliar as respostas iniciais. Para tirar partido das potencialidades deste teste, o enunciado inclui questões de dois tipos: (1) perguntas de interpretação ou pedindo justificações e problemas de resolução relativamente breve; e (2) questões abertas e problemas requerendo alguma investigação e respostas mais desenvolvidas. A expectativa é que o aluno, na primeira fase, resolva as questões do tipo (1) e comece a trabalhar as do tipo (2) e que, na segunda fase, corrija ou melhore as respostas às primeiras (se for caso disso) e desenvolva as segundas. A avaliação que o professor faz daquilo que cada aluno produziu tem em conta as duas fases do processo, considerando quer as respostas iniciais quer o modo como o aluno as desenvolveu na segunda fase.

O sucesso deste instrumento de avaliação depende de vários factores. A escolha das questões a incluir no enunciado deve ser feita com cuidado, tendo presente o modo como o teste funciona e os seus objectivos. Além disso, as pistas e sugestões dadas pelo professor entre os dois momentos, variáveis consoante as respostas da primeira fase, desempenham um papel crucial no trabalho subsequente dos alunos. Finalmente, é preciso que tanto o professor como os alunos tenham consciência de que a segunda fase não é um truque para obrigar os alunos a corrigir os erros mas sim uma parte essencial e insubstituível do processo.

Em comparação com os testes usuais, os testes em duas fases permitem captar mais aspectos relevantes sobre a aprendizagem sem se perder o tipo de informação que é recolhido através das provas habituais. Mas, essencialmente, os testes em duas fases estão muito mais de acordo com os princípios de avaliação enunciados atrás, nomeadamente gerando novas oportunidades para aprender, assumindo um carácter mais positivo e ajudando a encarar as críticas e sugestões como algo que é inerente ao próprio processo de aprendizagem.

Os testes em duas fases podem ser postos em prática de diversas maneiras. Em Portugal, o projecto MAT789 adoptou a ideia e usou-a de um modo sistemático ao longo de três anos com alunos dos 7º, 8º e 9º anos. Tal como no projecto holandês Hewet, a segunda fase era feita em casa e os alunos dispunham de bastante tempo para a desenvolver (uma semana no caso português). Mas, ao contrário do que se passava na experiência holandesa, não havia uma classificação antes que todo o processo estivesse concluído. Além disso, o projecto MAT789 organizava a primeira fase de uma forma que já se distinguia significativamente dos testes usuais. Os alunos tinham duas horas para responder às várias questões, podiam consultar os seus cadernos e apontamentos (naturalmente, as perguntas tinham este facto em conta) e deviam apresentar respostas pormenorizadas e explicadas. Por outro lado, sempre que o estudo de um dado tema se tinha baseado fortemente no recurso a materiais (por exemplo, o computador ou manipuláveis), procurava-se que esses mesmos materiais estivessem disponíveis pelo menos para a realização de uma parte do teste. Tanto na experiência holandesa como na portuguesa, não obstante a diferença de idades dos alunos e as variantes na concretização do processo, os testes em duas fases, após um período inicial de adaptação dos intervenientes a uma nova maneira de encarar os testes, revelaram-se um instrumento de avaliação útil e do agrado de professores e alunos.

Vários professores têm usado, em Portugal, os testes em duas fases, em turmas de diversos níveis de escolaridade. Nalguns casos, a segunda fase incide apenas em algumas questões previamente identificadas e, por vezes, ela é realizada não em casa mas numa aula ou numa parte de uma aula. Numa experiência realizada no 10º ano, os alunos deviam refazer ou desenvolver as suas respostas a um problema do teste não a partir de comentários escritos da professora mas depois de se ter trabalhado com toda a turma uma situação nova em que intervinham os mesmos conceitos. Em qualquer destes casos, é possível identificar a preocupação comum em ver a avaliação como algo que tem por objectivo melhorar a aprendizagem.

Num caso em que a professora de Matemática acompanhou a turma ao longo dos três anos do ensino secundário (uma turma de Artes, entre 1994/95 e 96/97), todos os testes tinham uma segunda fase, num sistema idêntico ao do projecto MAT789. Uma análise do trabalho dos alunos mostra uma grande evolução na predisposição para encarar a segunda fase como um momento para reflectir sobre as primeiras respostas e para as desenvolver de acordo com as sugestões da professora.

Teste em duas fases: exemplo de uma questão (10º ano)[2]

A questão do teste apresentava um paralelepípedo de dimensões 6x8x11 e pedia o cálculo do comprimento de cada uma das suas diagonais faciais.

Resposta do Carlos na primeira fase:

Diagonal facial [OT]: 13,6 cm

$DF^2 = 11^2 + 8^2 = 121 + 64 = 185$

DF = v 185 = 13,6

Diagonal facial [OM]: 10 cm

$DF^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

DF = v 100 = 10

Comentário da professora:

Por que é que só calculaste duas? O paralelepípedo tem 12 diagonais faciais!

Resposta do Carlos na segunda fase:

[Apresenta os cálculos para as 12 diagonais e acrescenta:]

Só tinha calculado 2 porque pensei a princípio que ON também media 8 cm então bastava fazer aquelas duas que as outras teriam o mesmo comprimento, mas depois apercebi-me dos 6 cm e já não tive tempo para fazer o resto.

[A professora escreveu ainda um comentário a esta resposta, ao lado dos cálculos das 12 diagonais:]

Bastava teres dito quais é que eram iguais!

O comentário da professora levou o aluno não só a corrigir a resposta mas a pensar no erro do seu raciocínio inicial. O facto de o aluno ter apresentado os cálculos para os 12 casos sugere ainda algum receio e falta de autonomia. É interessante analisar um episódio com o mesmo aluno, ocorrido dois anos mais tarde. Um maior à vontade na comunicação aluno-professora é um aspecto imediatamente visível.

A segunda fase não é, de facto, uma mera correcção dos erros. A segunda resposta do aluno não teria sido possível na primeira fase por várias razões. Em primeiro lugar, o aluno responde à professora, num interessante processo de comunicação por escrito: ele explica o seu “aparte”, mas ao mesmo tempo, mostra compreender o reparo da professora (o uso da palavra “aparte” é elucidativo). Em segundo lugar, o aluno reflecte sobre a sua resposta inicial, não só detectando o que está mal mas procurando reconstituir e criticar o seu próprio raciocínio (ele descreve o que fez e também o que pensou na altura antes de explicar por que razão o processo não era correcto). Em terceiro lugar, o aluno desenvolve muito a sua resposta, encorajado

Teste em duas fases: exemplo de uma questão (12º ano)[2]

Dentro de um saco estão nove cartões de igual formato e textura. Em cada um deles está desenhada uma das letras da palavra BORBOLETA.
Se tirar sucessivamente quatro desses cartões e dispuser as respectivas letras pela ordem de saída, qual é a probabilidade de obter a palavra LOBO?

Resposta do Carlos na primeira fase:

São arranjos porque a ordem interessa. Saindo 4 letras LOBO podia-se escrever 24 palavras.

Casos possíveis: 9x8x7x6 = 3024

Casos favoráveis: são 2 pois pode sair LoBO ou LOBo.

Então 2/3024 = 0,0007 = 0,007%

Comentário da professora:

[no primeiro parágrafo:] *Esta não tem nada a ver com este problema, pois não?*

[no segundo parágrafo:] *Explica melhor*

[no terceiro parágrafo:] *Explica e "vê" melhor!*

Resposta do Carlos na segunda fase:

Em relação àquele aparte, de se poderem escrever 24 palavras com as 4 letras LOBO, foi apenas para explicar melhor porque é que se tratava de arranjos e não de combinações.

Em relação aos casos possíveis, é tudo muito simples: No início temos 9 letras. Retiramos 1 e ficam 8. Para cada primeira que saisse existiam mais 8 casos na segunda. Poder-se-ia fazer um esquema em árvore mas teria uma extensão muito grande, todos esses casos seriam 3024.

Como fiz no teste: 9x8x7x6 = 3024.

Aplicando os meus conhecimentos em termos de arranjos: $^{9}A_{4} = 9!/4! = 3024$

Estes são os possíveis. No que toca aos casos favoráveis o que eu fiz no teste foi o seguinte:

Pensei: o que se pretende é a palavra LOBO, portanto à partida seria 1 caso favorável, mas não, é que existem dois Os, então parti do princípio que seriam 2 os casos favoráveis: LOBo e LoBO

Mas continua errado, ou não completamente certo, pois também existem dois Bs, então os casos favoráveis passam para: LOBo, LoBO, LObo, LobO — o que também se pode ver assim: 1x2x2x1 = 4

Portanto, seguindo a regra de Laplace, 4/3024 = 0,0013 = 0,13%

pela professora, mesmo nos aspectos em que não havia qualquer erro. O modo como este desenvolvimento é feito seria impossível na primeira fase (ou num teste usual) para todas as questões, atendendo ao tempo disponível e ao ambiente de alguma tensão que rodeia uma prova de avaliação. No caso do último exemplo, as respostas do aluno na primeira fase ocupavam uma página e meia, enquanto as da segunda fase enchiam seis páginas inteiras.

A experiência desta professora mostra ainda como este processo de comunicação gerado pela segunda fase envolve aspectos de natureza afectiva, sobretudo depois de um período mais ou menos longo de habituação ao processo. Na segunda fase dos testes, surgem afirmações dos alunos como: “Realmente, não sei onde tinha a cabeça para escrever isso”, “Estava distraído e nem reparei que...” ou “Já não é a primeira vez que cometo este erro”.

5.4.3 - Relatórios e ensaios

Produções escritas, mais ou menos extensas, realizadas pelos alunos a respeito de problemas, actividades de investigação ou projectos em que trabalharam, podem constituir um factor de aprendizagem e um elemento significativo de avaliação. Pela sua própria natureza, tarefas deste tipo estão fortemente associadas (mais do que os testes) a objectivos curriculares de aplicação de conhecimentos a situações novas e de desenvolvimento de algumas capacidades e atitudes. Além disso, tendem a estar em consonância com os princípios de avaliação atrás apontados.

No domínio da resolução de problemas, quer se trate de problemas puramente matemáticos ou de aplicação a situações da realidade concreta, a elaboração de textos ou relatórios pode fazer muito sentido. Num interessante artigo publicado em 1992, Jeremy Kilpatrick, realçando o valor da comunicação na educação matemática, compara mesmo a tarefa de explicar a resolução de um problema com a de escrever uma composição. Quando um aluno tem que escrever um texto coerente sobre a resolução de um problema, de um modo que seja compreensível para um leitor (o professor, os colegas ou mesmo outras pessoas), ele precisa de reflectir globalmente sobre o problema, as razões por que o abordou de uma certa maneira e as relações entre as principais ideias matemáticas envolvidas. O esforço para desenvolver uma actividade deste tipo pode originar uma reflexão mais profunda do que aquela que é necessária quando apenas se apresenta a resposta, eventualmente acompanhada de uma justificação breve e imediata do raciocínio seguido. É por isso que Kilpatrick diz que “o aluno que não é capaz de comunicar aquilo que fez com um problema não o resolveu verdadeiramente”.

Resolução de problemas e comunicação

Não precisamos de esperar por novos modelos de avaliação para começarmos a investigar novas abordagens à avaliação da resolução de problemas. Uma das mais prometedoras destas abordagens consiste em tratar a resolução de um problema como uma tarefa de composição. Isto é, tal como numa composição se pode distinguir entre a reprodução e a transformação dos conhecimentos, também na resolução de um problema se pode observar que alguns raciocínios são uma execução quase mecânica de um procedimento treinado enquanto outros operam em vários níveis para atingir uma compreensão do problema através de várias transformações que, em última análise, produza uma solução. Quando se pede a um aluno um relatório de uma resolução de um problema matemático, ele envolve-se numa actividade parecida com a de escrever uma composição. O aluno precisa de planear de que maneira o argumento deverá ser organizado, aquilo que o leitor precisa de saber e como é que as ideias se relacionam. O relatório escrito pode ser avaliado de um modo muito parecido com o modo como um ensaio é avaliado, e pode-se ver se a resolução envolve apenas procedimentos mecanizados ou algum nível de compreensão mais profundo.

Jeremy Kilpatrick, 1992
Some issues in the assessment of mathematical problem solving

Desde que não se limitem a reproduzir ou resumir textos consultados, isto é, desde que constituam, em maior ou menor grau, uma elaboração pessoal, as produções escritas têm um grande potencial formativo, sendo susceptíveis de contribuir para desenvolver a autonomia e a reflexão dos alunos relativamente à sua própria aprendizagem. Este tipo de trabalho, pela sua natureza, pode estar fortemente associado a objectivos que os currículos e os programas actuais tendem a valorizar, tanto ao nível das capacidades (resolução de problemas, raciocínio, comunicação) como das atitudes e valores (gosto pela pesquisa, persistência, responsabilidade). E os produtos gerados pelos alunos correspondem, simultaneamente e de um modo integrado, a oportunidades de aprendizagem e de avaliação.

As produções escritas dos alunos podem ser elaboradas individualmente ou em pequenos grupos, dentro ou fora da sala de aula. Por outro lado, podem assumir diversas formas. Por vezes, os alunos são solicitados a explicar as implicações de um determinado problema e o modo como o resolveram ou a comentar um texto que lhes foi dado para analisar. Nestes casos, aquilo que produzem é uma espécie de *ensaio*, como sucede quando se escreve um artigo para uma revista. Outras vezes, a tarefa consiste em descrever com algum pormenor um trabalho realizado, incluindo a organização e interpretação dos dados recolhidos e, eventualmente, a apresentação de conclusões. Nestas situações, o produto final assemelha-se a um *relatório*, habitual quando se termina uma actividade experimental ou um projecto.

O projecto MAT789 desenvolveu, com sucesso, tarefas como estas em turmas do 3º ciclo do Ensino Básico, de um modo que (com as necessárias adaptações de conteúdo e de nível de exigência) é generalizável a outros ciclos de escolaridade. Os alunos elaboraram um ensaio, por exemplo, quando fizeram aquilo que ficou conhecido pelo "trabalho das matrículas": na sequência de uma unidade em que se trabalhou sobre problemas de contagem envolvendo processos combinatórios, cada aluno devia escrever um texto sobre a adequação ao nosso país do sistema de matrículas de automóveis em vigor (na época, um assunto em discussão), no qual criticasse os argumentos numéricos pouco claros de uma opinião publicada numa revista e apresentasse uma proposta fundamentada para um novo sistema. E produziram um relatório, por exemplo, quando descreveram o funcionamento de um jogo de computador baseado nos divisores dos números e as experiências que haviam realizado com esse jogo; ou quando apresentaram os resultados finais de um projecto em que investigaram, a partir de métodos estatísticos, os hábitos de consumo de água mineral dos alunos da escola e das respectivas famílias. Em qualquer dos casos, o trabalho dos alunos era apreciado pela professora e fornecia dados sobre a evolução dos alunos face a objectivos fundamentais do currículo. O processo de avaliação incidia no produto final apresentado pelos alunos mas tinha em conta todo o percurso efectuado. Um aspecto essencial da utilização deste tipo de trabalhos como instrumentos de avaliação é a preocupação do professor em acompanhá-los e orientá-los desde o início, o que implica sugestões e críticas no decorrer do processo e até mesmo eventuais reformulações do produto final.

No ensino secundário, há vários exemplos de actividades envolvendo a elaboração de produtos escritos que muitos professores têm promovido nas suas aulas e que podem, com vantagem, ser tomadas deliberadamente também como elementos da avaliação dos alunos, assumindo um peso igual ou superior ao dos testes usuais. É o caso de actividades como a investigação sobre os polígonos que são obtidos pela intersecção de um plano com um determinado sólido geométrico, a procura de uma função que possa constituir um modelo adequado para uma dada situação da realidade concreta ou o estudo estatístico sobre alguma questão relevante para a população escolar. Os aspectos da aprendizagem mais importantes, em situações como estas, são melhor avaliados através de produções escritas que os alunos elaboraram no desenvolvimento do próprio trabalho (nomeadamente relatórios) do que por intermédio de instrumentos de avaliação externos a esse trabalho.

5.4.4 - *Portfolios*

O reconhecimento de que a avaliação dos alunos deve considerar, de um modo integrado, uma variedade de aspectos relativos à sua evolução numa determinada disciplina tem levado à procura de instrumentos que prestem justiça a esse carácter desejavelmente global da avaliação. Uma das ideias prometedoras que têm sido propostas nos últimos anos é o recurso à constituição de *portfolios*. O *portfolio* de um aluno é, no fundo, uma pasta ou um dossier contendo elementos significativos do trabalho que ele realizou na disciplina ao longo de um ano lectivo ou mesmo de um ciclo.

O *portfolio* deve conter os principais trabalhos do aluno, incluindo relatórios que elaborou, problemas que resolveu, explorações e investigações em que esteve envolvido, sozinho ou em colaboração com colegas, testes que fez, etc. Esses elementos devem estar acompanhados dos comentários que o professor e o próprio aluno foram fazendo a propósito das diversas actividades realizadas. O *portfolio* deve reflectir globalmente o percurso do aluno, não se limitando aos aspectos cognitivos do seu trabalho mas incidindo igualmente nos aspectos de natureza afectiva. Nesta perspectiva, pode constituir um testemunho valioso o facto de se guardar, por exemplo, o trabalho preferido, os comentários feitos numa reflexão pessoal sobre uma actividade matemática, ou as respostas dadas a um questionário sobre as aulas.

A selecção do material a incluir no *portfolio* deve ser da responsabilidade conjunta do aluno e do professor. Aliás, a escolha desse material constituirá desejavelmente uma oportunidade de interacção entre os dois a respeito do trabalho realizado. Para o aluno, pode contribuir para desenvolver o sentido de responsabilidade e os hábitos de reflexão. Do ponto de vista do professor, ajudá-lo-á a ter uma visão global do trabalho do aluno e a focar sobretudo a sua evolução mais do que aspectos isolados ou pontuais daquilo que ele fez.

O *portfolio* não deve ser confundido com um dossier de trabalho contendo tudo o que o aluno fez por ordem cronológica. O seu valor, nomeadamente do ponto de vista da auto-avaliação, pode estar na selecção e organização do material que é incluído e na justificação que o aluno apresenta para a escolha desse material. Por isso mesmo, será útil destinar periodicamente algum tempo e atenção à tarefa específica de organizar o *portfolio*, uma tarefa que requer, ela própria, orientação da parte do professor.

Com base na experiência de utilização de *portfolio*s na disciplina de Matemática por parte de diversos professores, Diana Lambdin e Vicki Walker apresentam várias sugestões valiosas. Genericamente, propõem que o *portfolio* contemple: um índice, uma introdução descrevendo e justificando o seu conteúdo; e um certo número de trabalhos realizados. Cada um destes deve incluir a questão original que lhe deu origem, um título, a data de realização e eventuais comentários que lhe estejam associados. Desejavelmente, uma variedade de tipos de actividade deve estar representada por trabalhos diversos como: textos pessoais e ensaios; investigações e projectos; trabalhos relacionando a Matemática com situações da vida real ou com outras disciplinas; problemas e jogos. Uma sugestão particularmente interessante diz respeito à inclusão de uma “autobiografia matemática”, na qual o aluno reflicta sobre o modo como se relaciona com a Matemática.

De algum modo, na avaliação que se faz no ensino primário e pré-primário, ou em algumas disciplinas da área da formação artística, encontram-se elementos das ideias aqui apresentadas. Ao nível da Matemática no ensino secundário, não existe no nosso país experiência de utilização do *portfolio* como instrumento de avaliação.

Exemplo do índice de um portfolio

Nome: Ano: Turma:

Indice

	Pág.
Introdução	1
Uma investigação sobre sólidos platónicos (Nov. 97)	3
A minha segunda resposta num teste de Geometria (Dez. 97)	7
Trabalho no computador: à procura de uma função (Jan. 98)	9
O problema mais interessante das Olimpíadas	12
Reflexão pessoal sobre o que é a Matemática (Fev. 98)	13
O problema do arrefecimento do café (Mar. 98)	14
Projecto estatístico: as condições de trabalho na escola (Mai. 98)	17
A minha experiência com a Matemática no 10º ano (Jun. 98)	21

Para ser bem sucedida, essa utilização requer que o professor crie desde o início do ano hábitos de trabalho organizado na sua disciplina e ganharia muito, certamente, com a existência na própria escola de locais onde os trabalhos e materiais dos alunos pudessem ser guardados. Nenhum destes aspectos é fácil de assegurar. No entanto, desde que o professor disponha de condições mínimas para o fazer, e tendo o cuidado de ir avaliando e reorientando o próprio processo, o uso do *portfolio* poderá trazer contributos positivos à avaliação numa perspectiva da sua efectiva integração na aprendizagem.

5.4.5 - Outros instrumentos de avaliação

Os produtos do trabalho dos alunos não são necessariamente documentos escritos. Em diversas situações, os alunos podem realizar trabalho prático ou desenvolver projectos que dão origem a produções que devem igualmente ser tomadas como elementos de avaliação: por exemplo, a construção de um modelo físico baseado em ideias matemáticas, a montagem de uma exposição com os resultados de um trabalho de natureza estatística ou de história da Matemática, a apresentação oral do modo como uma determinada investigação geométrica foi desenvolvida.

As apresentações orais, em particular, podem desempenhar um papel de relevo em relação a vários objectivos curriculares. Ao exporem o seu trabalho perante os colegas e o professor, preparando previamente a sua exposição e submetendo-se às questões que lhes sejam colocadas, os alunos desenvolvem a sua compreensão dos problemas estudados, bem como a capacidade de comunicação e argumentação. Ao mesmo tempo, estas actividades constituem valiosas fontes de informação para o professor quanto ao progresso dos seus alunos nestes domínios da aprendizagem.

O desempenho oral não tem que ser desenvolvido e avaliado apenas através de apresentações. Outra hipótese é promover a participação dos alunos em discussões sobre questões de Matemática dos mais diversos tipos. Há aspectos da aptidão em Matemática, como a compreensão de ideias e a argumentação, e mesmo atitudes em relação a esta disciplina, que são dificilmente avaliáveis sem uma componente de discussão oral. Numa recente reforma do ensino secundário na Dinamarca, os exames finais foram modificados de modo a ser reintroduzida uma prova oral que consiste basicamente na discussão entre o aluno e um professor em torno de um texto que contempla ideias matemáticas e que é dado ao aluno para estudar durante algum tempo. Esta prova é mesmo o único exame de Matemática no caso dos alunos de áreas (como as Humanidades) em que os objectivos fundamentais não dizem respeito ao domínio de técnicas de cálculo ou à capacidade de resolver problemas complexos mas sim à compreensão de ideias matemáticas e à aptidão para interpretar e discutir situações em que essas ideias estejam presentes.

A avaliação de alguns aspectos do domínio das atitudes e valores, bem como das concepções que os alunos desenvolvem a respeito da Matemática e da própria aprendizagem, requer a utilização de instrumentos que sejam capazes de captar um tipo de informação dificilmente acessível através dos modos de avaliação atrás apresentados. Para saber o que os seus alunos pensam e sentem relativamente à Matemática e à aprendizagem desta disciplina, o professor precisa de lhes fazer perguntas adequadas e de reflectir sobre as respostas. Por esta razão, o recurso a questionários e entrevistas, individuais ou em pequenos grupos, pode revelar-se uma prática de grande importância no domínio da avaliação.

Uma grande parte da informação que permite ao professor compreender o modo como os seus alunos estão a evoluir relativamente a muitos dos objectivos mais importantes do currículo é obtida directamente através da observação do modo como participam nas aulas e se envolvem nas diferentes actividades. O professor não deve desvalorizar este tipo de informação pelo facto de dar origem a juízos alegadamente impressionistas ou subjectivos. Mantendo um registo dos principais factos que observa, o professor pode usá-los, em conjunto com dados resultantes de diversos instrumentos de avaliação, para dar sentido e uma maior consistência à apreciação que faz periodicamente do trabalho de cada um dos seus alunos.

5.5 - Procedimentos de avaliação

Utilizar uma variedade de modos e instrumentos de avaliação é necessário mas não suficiente. É preciso igualmente definir procedimentos (parâmetros, critérios, modos de fazer) que sejam adequados àquilo que efectivamente se pretende avaliar e que atendam à natureza das tarefas de avaliação propostas.

5.5.1 - Avaliação e resolução de problemas

Ao avaliar as respostas dos alunos a problemas propostos nas aulas ou em testes, o professor não se pode limitar a verificar se a solução é ou não correcta. Mesmo pensando, por agora, apenas em problemas que requerem uma resposta relativamente breve, o professor deve analisar o grau de compreensão e de elaboração que a resposta do aluno revela. Uma consequência imediata disto é a importância de se insistir com os alunos para que explicitem os procedimentos que usaram e expliquem as suas afirmações.

Num livro publicado em 1987, Charles, Lester e O’Daffer indicam vários métodos que podem ser usados para avaliar as respostas dos alunos a problemas deste tipo. Segundo um desses métodos, o professor examina as respostas através do uso de uma “escala analítica”, avaliando sucessivamente a compreensão do problema, o planeamento de uma estratégia de resolução e a formulação da resposta final.

Porém, em muitos casos, não é possível ou conveniente adoptar uma perspectiva analítica como esta porque as várias fases da resolução do problema não surgem claramente demarcadas ou porque, simplesmente, o professor prefere fazer uma avaliação com base em critérios que atendam à maneira como, globalmente, o aluno abordou o problema e o resolveu. Nestes casos, os mesmos autores propõem que se utilize uma “escala holística focada“, através da qual se estabelecem níveis de qualidade de acordo com tipos genéricos de respostas.

Escala holística focada

0 pontos: Trabalhos que têm uma das seguintes características:
- Estão em branco.
- Os dados foram apenas copiados do enunciado ou há algum trabalho mas não parece haver qualquer compreensão do problema.
- Apresentam simplesmente uma resposta incorrecta.

1 ponto: Trabalhos que têm uma das seguintes características:
- Há um começo de trabalho reflectindo alguma compreensão, mas a estratégia usada não conduziria a uma solução correcta.
- Uma estratégia inadequada foi começada mas não desenvolvida e não há evidência de que o aluno tenha tentado outra.
- O aluno tentou alcançar um sub-objectivo do problema mas sem êxito.

2 pontos: Trabalhos que têm uma das seguintes características:
- O aluno usou uma estratégia inadequada e chegou a uma resposta incorrecta mas o trabalho mostra alguma compreensão do problema.
- Foi usada uma estratégia adequada mas que: (a) não foi suficientemente desenvolvida para chegar a uma solução; ou (b) foi implementada incorrectamente e por isso não conduziu a uma resposta correcta.
- O aluno alcançou um sub-objectivo do problema mas não foi mais longe.
- Apresenta uma resposta correcta mas o trabalho é incompreensível.

3 pontos: Trabalhos que têm uma das seguintes características:
- O aluno implementou uma estratégia que poderia conduzir a uma resposta correcta mas não compreendeu uma parte do problema ou ignorou uma condição.
- O aluno usou correctamente estratégias adequadas mas: (a) apresenta uma resposta incorrecta sem que se compreenda porquê; ou (b) indica mal a resposta; ou (c) simplesmente não apresenta a resposta.
- O aluno dá uma resposta correcta e há evidência de ter selecionado estratégias adequadas mas a sua implementação não é totalmente clara.

4 pontos: Trabalhos que têm uma das seguintes características:
- O aluno cometeu apenas um erro de cálculo ou ao passar o enunciado mas esse erro não reflecte falta de compreensão nem do problema nem do modo de implementar a estratégia.
- O aluno seleccionou e implementou estratégias adequadas e apresenta uma resposta correcta.

Charles, Lester e O'Daffer, 1987
How to evaluate progress in problem solving

Estas escalas, mesmo quando recorrem a uma classificação numérica, têm um carácter claramente qualitativo. A descrição dos aspectos a considerar e dos critérios de avaliação pode constituir um guia para o professor e pode também sugerir o tipo de informação a fornecer ao aluno.

Naturalmente, estas escalas são aqui apresentadas a título de exemplo. Na prática, o professor deve adaptá-las de acordo com os aspectos a que dá maior ênfase e que, aliás, devem ser objecto de clarificação com os alunos. Por exemplo, se é uma prática corrente e assumida por todos que as explicações pormenorizadas das respostas são essenciais e a simples indicação de um resultado final não tem qualquer valor, então esse facto deve reflectir-se nas escalas utilizadas.

De qualquer modo, escalas deste tipo têm o grande mérito de chamar a atenção para a importância primordial que deve ser atribuída na resolução de problemas (e, consequentemente, na respectiva avaliação) a aspectos como a compreensão, a escolha e desenvolvimento de uma estratégia e a sua explicação. A prática, de algum modo corrente em provas escolares e até em concursos de problemas, de estabelecer previamente uma resposta tipo e avaliar em seguida se o aluno percorreu parcial ou totalmente os sucessivos passos dessa resposta, conduz a uma avaliação arbitrária sempre que o aluno decide adoptar uma estratégia muito diferente. Além disso, e talvez mais importante, é uma prática de avaliação cujo foco está na identificação e execução de procedimentos que podem ser usados para se obter a solução de um determinado problema e não na manifestação de competências gerais de resolução de problemas.

5.5.2 - Avaliação de relatórios e outras produções escritas

A importância de se adoptar uma perspectiva global que atenda ao valor intrínseco das respostas dos alunos, e não ao grau de aproximação face a uma resposta tipo, é ainda maior quando se trata de produções extensas, relativas a questões mais abertas, de natureza investigativa, ou a projectos que os alunos desenvolveram.

No entanto, a avaliação de relatórios ou ensaios dos alunos requer a definição de parâmetros que tenham em conta a natureza do problema em estudo e o modo como a actividade foi orientada. Embora essa definição tenha que ser feita caso a caso, atendendo às condições específicas da situação, há um certo número de recomendações que convirá ter presente.

Assim, tratando-se de um ensaio sobre a resolução de um problema, para além dos aspectos genéricos já atrás mencionados (compreensão, estratégia, solução), será relevante analisar se o aluno se limita a utilizar mecanicamente procedimentos aprendidos ou se revela uma compreensão mais profunda do problema, bem como apreciar o poder de comunicação e a qualidade da argumentação que o trabalho exibe. Se a tarefa tem uma natureza investigativa, então será importante dar uma atenção privilegiada às capacidades de formular, testar e criticar conjecturas, e de fazer generalizações.

Num trabalho sobre um problema da vida real ou de outra disciplina requerendo a escolha e justificação de um modelo matemático, os parâmetros de avaliação a considerar poderão ser do tipo seguinte:

- a pertinência e viabilidade da resposta em relação com a situação proposta;
- a relevância e correcção dos aspectos matemáticos envolvidos;
- a qualidade da argumentação;
- a clareza, organização e originalidade do trabalho.

Num relatório sobre um projecto, estes parâmetros continuam a ser pertinentes. Mas será igualmente necessário avaliar a coerência global do trabalho apresentado, pelo que importa analisar se (e até que ponto): o problema em estudo é formulado; os métodos utilizados são adequados e estão explicitados; os dados são obtidos e interpretados correctamente; e a conclusão está em consonância com esses dados e responde ao problema inicial.

A avaliação de um *portfolio* coloca outros problemas. Neste caso, o professor deve ter presente que não está a re-avaliar produtos mais ou menos pontuais do trabalho do aluno (o que já terá feito na devida altura) mas está a dirigir a sua atenção para aspectos mais abrangentes da aprendizagem, em especial para a capacidade de reflexão do aluno e para a sua percepção global do processo ao longo de um ano. Embora possa fazer sentido centrar a avaliação em grandes objectivos transversais do currículo — resolução de problemas, raciocínio e conexões, comunicação, atitudes perante a Matemática — é talvez preferível atender à natureza específica e aos objectivos do *portfolio*, como sugerem Lambdin e Walker, estabelecendo categorias do tipo seguinte:

- selecção — diversidade e representatividade dos trabalhos escolhidos;
- reflexão — qualidade das justificações e dos comentários escritos;
- organização — estrutura e apresentação dadas ao *portfolio*.

Seja qual for o tipo de produção escrita que está a avaliar, o professor deve ter em conta que a avaliação é inseparável do modo como a aprendizagem decorreu e, em particular, da orientação que foi dada aos alunos. As principais componentes de um determinado trabalho devem ser claras para os alunos. No caso dos alunos mais novos e/ou inexperientes na elaboração de relatórios, por exemplo, pode ser importante dar-lhes um guião e discutir com eles o modo de o utilizar. Além disso, fazer um comentário, escrito ou oral, sobre uma versão preliminar do trabalho dos alunos, numa fase intermédia da sua elaboração, é um elemento fundamental que não deve ser esquecido.

Por outro lado, convirá ter presente que a avaliação deste tipo de trabalhos escritos — ao contrário do que sucede usualmente com os testes baseados em exercícios de cálculo — tende a ser mais qualitativa do que quantitativa, mais absoluta do que relativa, essencialmente holística e não segmentada em diversas componentes. Isto quer dizer que um nível qualitativo é geralmente mais adequado do que uma nota, que é preciso atender ao valor intrínseco do trabalho de acordo com a abordagem de cada aluno e não tanto à comparação entre alunos e, finalmente, que o trabalho deve merecer uma apreciação global.

Em particular, é preciso não cair numa lógica de avaliar por contabilização de erros a descontar, sob pena de desvirtuar a natureza deste tipo de trabalho e de gerar nos alunos atitudes defensivas prejudiciais à aprendizagem. Muitas vezes, as melhores produções dos alunos, aquelas onde eles explicitam os seus raciocínios e as suas descobertas, contêm imprecisões (e mesmo erros) que não se encontram quando os alunos apresentam produtos muito mais pobres, em que evitam simplesmente correr quaisquer riscos.

5.5.3 - Integração de vários modos e instrumentos de avaliação

A variedade de objectivos curriculares e o reconhecimento de que é importante atender a diferentes domínios da aprendizagem impõem uma diversificação de modos e instrumentos de avaliação. De facto, alguns instrumentos, só por si, são incapazes de fornecer ao professor ou ao aluno o tipo de informação pretendida num dado momento. Além disso, a informação gerada por alguns instrumentos completa ou esclarece aquela que é fornecida por outros. Por exemplo, sucede com alguma frequência não ser possível compreender o raciocínio que um aluno seguiu numa tarefa de resolução de problemas apenas pela análise do que ele escreveu — por melhores que sejam os critérios de avaliação — sendo necessário perguntar-lhe e discutir pessoalmente a questão. Um argumento porventura ainda mais relevante a favor da diversificação é a maior confiança que se pode ter em juízos formulados com base em múltiplas fontes de informação.

Por razões de ordem prática, o professor — sobretudo quando tem várias turmas e muitos alunos — tem que ser criterioso nas formas e instrumentos de avaliação que utiliza, pois não lhe será possível lidar com uma quantidade exagerada de dados. Este facto não constitui um argumento contra a diversificação dos instrumentos a utilizar mas sim uma chamada de atenção para a necessidade de se recorrer preferencialmente àqueles que são mais poderosos, no sentido de fornecerem uma informação mais significativa, e mais facilmente integráveis no próprio processo de ensino-aprendizagem.

É certo que o professor tem que avaliar o desenvolvimento dos seus alunos em aspectos como o conhecimento de factos e procedimentos, a compreensão de conceitos, a capacidade de resolução de problemas, as atitudes e concepções sobre a Matemática.

Mas alguns dos instrumentos atrás referidos podem ajudar a captar, ao mesmo tempo, elementos significativos de vários destes domínios. Num teste em duas fases, o professor pode verificar se o aluno já é capaz de executar um determinado procedimento e também até que ponto ele se mostra persistente na resolução de um problema não rotineiro. Um relatório de uma investigação ou de um projecto constitui simultaneamente uma tarefa de aprendizagem e de avaliação, susceptível de revelar uma variedade de conhecimentos e de capacidades do aluno e até de aspectos da sua predisposição para a Matemática. A organização do *portfolio* pode fornecer indicações preciosas a respeito do progresso do aluno em aspectos muito diversos de natureza afectiva e metacognitiva.

A recomendação de que a avaliação deve ser diversificada não traduz um apelo à multiplicação de formas e instrumentos de avaliação. Mas pretende destacar que um percurso escolar em Matemática, ao longo de um ano ou um ciclo, em que o aluno não foi solicitado a escrever um texto, a elaborar um relatório sobre um projecto, a participar numa discussão sobre um problema, a fazer alguma reflexão sobre a Matemática e a sua própria relação com esta disciplina, representa um grande empobrecimento tanto em termos de aprendizagem como de avaliação.

5.6 - A concluir

As práticas de avaliação em Matemática têm que ser repensadas. Muitas vezes, elas não só não prestam justiça à evolução dos objectivos e dos métodos de ensino como constituem mesmo obstáculos a essa evolução.

Embora estejamos ainda longe de conhecer uma teoria e um conjunto de métodos de avaliação inteiramente satisfatórios, existem muitas ideias e experiências das quais é possível retirar sugestões que vale a pena ensaiar.

Tratando-se de um tema controverso e delicado, sobre o qual os pais dos alunos e a sociedade em geral têm muitas vezes atitudes diferentes daquelas que assumem face a outros aspectos da vida escolar, a avaliação requer cuidados especiais. A prática de um trabalho colaborativo entre os professores torna-se por isso, neste domínio, uma recomendação particularmente relevante.

O sentido geral das propostas apresentadas ao longo deste texto aponta para a necessidade de se ver a avaliação como um processo ao serviço da aprendizagem, com um carácter essencialmente positivo e no qual a interacção entre o professor e o aluno é uma componente insubstituível. As sugestões mais concretas do texto não são receitas para resolver os problemas da avaliação mas sim exemplos para ilustrar ideias. Cabe, naturalmente, a cada professor tomar, em cada caso, as decisões que julga mais adequadas aos seus alunos.

[1] Estes exemplos foram sugeridos por Adelina Precatado e Paula Teixeira, a quem deixamos aqui o nosso agradecimento.

[2] Estes exemplos foram fornecidos por Rita Bastos, professora da Escola Secundária António Arroio, a quem igualmente agradecemos.

NOTAS

Capítulo 2

[1] J. Dieudonné (1990, p. 47). As citações incluídas no texto serão identificadas nestas notas através da indicação do nome do autor, da data da publicação de que a citação foi extraída e da página ou páginas em que se encontra. A restante identificação da publicação será feita na Bibliografia.

[2] Muitas das ideias da teoria empiricista de Mill sobre a Matemática estão incluídas no seu livro *System of logic* (1943). Bloor, no capítulo 5 de *Knowledge and social imagery*, intitulado *A naturalistic approach to mathematics*, apresenta uma síntese desta teoria bem como uma análise crítica dos principais argumentos propostos por Frege para a contestar.

[3] M. Kline (1989, p. 75).

[4] P. Davis e R. Hersh (1988, p. 52).

[5] D. J. Struik (1989, p. 78).

[6] D. J. Struik (1989, pp. 90-91).

[7] Números cuja forma é a+bi+cj+dk, em que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

[8] M. Kline (1989, p. 95).

[9] A expressão *mito de Euclides* é utilizada por Davis e Hersh para destacarem a ideia de que durante séculos foi crença generalizada que os livros de Euclides continham verdades acerca do Universo que eram claras e indubitáveis.

[10] Segundo Snapper (1979) no contexto do logicismo uma proposição lógica é definida como uma proposição que tem generalidade completa e é verdadeira em virtude da sua forma em vez do seu conteúdo. Neste sentido, por exemplo, o princípio do terceiro excluído ($p \vee \sim p$ é sempre verdadeiro) é uma proposição lógica pois p pode ser uma proposição da Matemática, da Física ou outra qualquer.

[11] P. Davis e R. Hersh (1988, p. 56).

[12] P. Ernest (1991, p. 14), referindo Lakatos.

[13] I. Lakatos (1993, p. 5).

[14] A designação é proposta, nomeadamente, por Tymoczko (1986) que refere que esta abordagem tem sido objecto de uma adesão cada vez maior, embora não constitua uma representação completa da filosofia da Matemática contemporânea.

[15] R. Hersh (1986, p. 22).

[16] S. Restivo (1988, p. 18).

[17] S. Papert (1980). Papert inclui na face extra-lógica da Matemática a beleza matemática, o prazer matemático e a intuição matemática. O livro *Mindstorms: Children, computers and powerful ideas,* onde ele refere estas ideias, tem uma tradução brasileira intitulada *Logo: Computadores e educação*, publicada pela primeira vez em 1985 por Editora Brasilience São Paulo.

[18] S. Papert (1980). O teorema que indica que raiz quadrada de 2 é um número irracional foi escolhido exactamente por o matemático inglês Hardy o ter considerado como um dos mais puros exemplos de beleza matemática.

[19] Esta expressão é usada por Pavelle, Rothestein e Fitch (1991), para indicar que o computador, através da utilização de sistemas automáticos de manipulações algébricas, permite explorar expressões algébricas frequentemente incluídas em teorias científicas, que são extremamente difíceis de explorar "à mão".

[20] T. Tymoczko (1986) vai mais longe, afirmando que aceitar a legitimidade do teorema das quatro cores conduz a adoptar uma teoria quasi-empírica da Matemática.

[21] Ver, por exemplo, *Expresso* 15/2/97.

[22] A formulação e demonstração do teorema de Robbins, bem como as informações que foram fornecidas ao computador podem ser obtidas no endereço http://www.mcs.anl.gov/

Capítulo 3

[1] Decreto Nº 37112 de 22 de Outubro de 1948.

[2] Idem.

[3] Um documento produzido em 1976 pelo National Council of Supervisors of Mathematics (dos EUA) propunha a redefinição das competências básicas, dando especial atenção à resolução de problemas, e conheceu nessa época grande repercussão.

[4] Refira-se, por exemplo, *School Mathematics for the 1990s* (Howson e Kahane, 1986), *Everybody Counts* e *Reshaping School Mathematics*, ambos do NCR (1989, 1990). Registe-se, também, o documento da iniciativa da APM (1988), *A renovação do currículo de Matemática*.

[5] Ver Romberg (1984).

[6] Ver CBMS (1982) e Romberg (1984).

[7] Ver Fey (1995).

Capítulo 4

[1] Na versão portuguesa deste livro, usa-se o termo "actividade" como tradução de "task". Optamos aqui por traduzir "task" pelo termo "tarefa", uma vez que pretendemos salientar bem a distinção conceptual entre os dois conceitos.

[2]A situação de aprendizagem e as tarefas apresentadas foram desenvolvidas em colaboração por Margarida Graça e Liliana Costa.

Capítulo 5

[1] Estes exemplos foram sugeridos por Adelina Precatado e Paula Teixeira, a quem deixamos aqui o nosso agradecimento.

[2] Estes exemplos foram fornecidos por Rita Bastos, professora da Escola Secundária António Arroio, a quem igualmente agradecemos.

BIBLIOGRAFIA

Bibliografia comentada

APM (1988). *Renovação do currículo de Matemática.* Lisboa: APM.

Resultado de um seminário realizado em Vila Nova de Mil Fontes, este livro procura discutir as grandes orientações para o ensino da Matemática, com especial incidência no estilo de currículo, objectivos, natureza e organização das actividades de aprendizagem e o papel das novas tecnologias.

Davis, P., e Hersh, R. (1995). *A experiência matemática.* Lisboa: Gradiva

Neste livro os autores reflectem sobre a questão do que é a experiência matemática, a partir da problematização da actividade matemática do ponto de vista de quem a faz. Recorrendo a numerosos exemplos, descrevem aspectos variados desta actividade, analisam qual a natureza da matemática e qual o significado de fazer matemática, discutem como é produzida e avaliada a matemática, como se aplica, como se adapta à diversidade da experiência humana e qual o valor do conhecimento matemático.

Guimarães, H. (Organizador) (1996). *Dez anos de ProfMat: Intervenções*. Lisboa: APM

Agrupando conferências plenárias realizadas ao longo de dez anos em encontros nacionais de professores de Matemática (ProfMat), este livro contém textos muito variados sobre temas gerais de educação matemática, sobre a natureza da Matemática, sobre questões de ordem curricular e sobre os professores e a mudança escolar. Trata-se de uma colectânea de grande valor para compreender o tipo de preocupações e a diversidade das perspectivas de educadores que, dentro e fora da Matemática, se têm interessado pelo ensino desta disciplina.

Leal, Leonor Cunha (1992). *Avaliação da aprendizagem num contexto de inovação curricular* (tese de mestrado). Lisboa: APM.

Esta tese analisa as potencialidades de diversas formas de avaliação, como foram usadas por um projecto de inovação curricular. Dedica especial atenção ao teste em duas fases, ao relatório escrito (individualmente e em grupo), à apresentação oral e à observação dos alunos. Para cada uma das formas de avaliação, os efeitos são analisados à luz dos objectivos cobertos, do grau de aplicabilidade e do grau de aceitação por parte dos professores e dos alunos.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.* Lisboa: IIE e APM.

Documento programático produzido pelo NCTM — a associação de professores de Matemática dos Estados Unidos — ao longo de um participado processo de mais de dois anos e onde se indicam um conjunto de orientações para o ensino da Matemática naquele país, mas que em muitos aspectos têm alcance universal. Nele se estabelece como grande objectivo para o ensino desta disciplina o desenvolvimento do poder matemático dos alunos, com ênfase em actividades como a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática.* Lisboa: IIE e APM.

Esta publicação do NCTM constitui um valioso elemento de trabalho para a reflexão e a formação dos professores de Matemática de todos os níveis de ensino. Trata as questões do desenvolvimento profissional, analisando aspectos fundamentais da prática docente (ensino e avaliação), formação inicial e contínua e discute as condições institucionais de apoio ao desenvolvimento profissional do professor.

Stewart, I. (1995). *Os problemas da Matemática.* Lisboa: Gradiva.

O autor apresenta de uma forma descritiva e acessível alguns dos problemas que os matemáticos procuraram resolver ao longo dos tempos, abordando frequentemente questões que continuam a ser objecto actual de investigação. Escrito com um humor incisivo, esta obra aborda questões fundamentais relacionadas, nomeadamente, com a natureza da matemática, com relações entre a matemática e a realidade, com teoria dos números, geometria euclidiana e geometrias não euclidianas e com diversos conceitos e problemas matemáticos como é o caso do conceito de infinito, noções topológicas, objectos fractais e teorema das quatro cores.

Bibliografia geral

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática: A experiência do projecto* MAT_{789} (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Abrantes, P., Leal, L. C., e Ponte, J. P. (1996). *Investigar para aprender Matemática: Textos seleccionados*. Lisboa: APM.

Abrantes, P., Leal, L. C., Teixeira, P., e Veloso, E. (1997). MAT_{789}*: Inovação curricular em Matemática*. Lisboa: Fundação Gulbenkian.

Associação de Professores de Matemática (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

Associação de Professores de Matemática (1988). *A natureza da Matemática* (Cadernos de educação e matemática, Nº 1). Lisboa: APM.

Associação de Professores de Matemática (1991). *Avaliação: Uma questão a enfrentar*. Lisboa: APM.

Barbin, E. (1994). A Matemática como processo histórico e como objecto cultural. In *Actas do ProfMat 94* (pp. 36-44). Lisboa: APM.

Bishop, A., e Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson, e M. Otte (Orgs.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Bloor, D. (1991). *Knowledge and social imagery*. London: University of Chicago Press.

Bkoucher, R., Charlot, B., e Rouche, N. (1991). *Faire les mathématiques: Le plaisir du sens*. Paris: Armand Colin.

Browder, F., e Mac Lane, S. (1988). A relevância da Matemática. In *A Natureza da Matemática* (pp. 17-44). Lisboa: APM.

Caraça, B. (1989). *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Sá da Costa.

Carreira, S. (1992). *A aprendizagem da trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Charles, R., Lester, F. e O'Daffer, P. (1987). *How to evaluate progress in problem solving*. Reston, VA: NCTM.

Christiansen, B., e Walter, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, e M. Otte (Orgs.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Conference Board of the Mathematical Sciences (1982). *The mathematical sciences curriculum K-12: What is still fundamental and what is not*. Washington: CBMS.

Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics counts*. London: HMSO.

College Board (1983). *Academic preparation for college: What students need to know and be able to do.* New York: The College Board.

Connes, A. (1991). O estranho mundo da Matemática. *Jornal O Público, 8/11.*

Cooney, T. J. (Org.) (1990). *Teaching and learning mathematics in the 1990s*. Reston: NCTM.

Correia, J. L. M. (1995). *Concepções e práticas de professores de Matemática: Contributos para o estudo da pergunta* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Davis, P., e Hersh, R. (1988). Da certeza à falibilidade. In *A Natureza da Matemática* (pp. 45-72). Lisboa: APM.

Davis, P., e Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

De Lange, J. (1987). *Mathematics: Insight and meaning*. Utrecht: OW&OC (actual Freudenthal Institute).

Department of Education and Welsh Office (1985). *Mathematics in the national curriculum*. London: Her Magesty Stationery Office.

Dias Agudo, F. R. (1980). *A Matemática no mundo contemporâneo*, Tomo XXIII. Lisboa: Academia das Ciências de Lisboa

Dieudonné, J. (1990). *A formação da Matemática contemporânea*. Lisboa: Dom Quixote.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. Hampshire: Falmer.

Ernest, P. (1994). The philosophy of mathematics and the didactics of mathematics. In R. Biehler, R. Scholz, R. SträBer, e B. Winkelmann (Orgs.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 335-349). Dordrech: Kluwer.

Fernandes, D., Borralho, A., e Amaro, G. (Orgs.), *Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular*. Lisboa: IIE.

Fey, J. T. (1994). Eclectic approaches to elementarization: Cases of curriculum construction in the United States. In R. Biehler, R. Scholz, R. Sträßer, e B. Wilkelmann (Orgs.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 15-26). Dordrech: Kluwer.

Gazeta de Matemática (1948). Programa de Matemática do ensino liceal, conforme o Decreto Nº 37112 de 22 de Outubro de 1948. *Gazeta de Matemática*, Nº 37-38, pp. 20-27.

Goldsmith, C. (1987). The sixth form scene, 1961-86: An SMP view. In G. Howson (Org.), *Challenges and responses in mathematics.* Cambridge: Cambridge University Press.

Griffiths, H. B., e Howson, A. G. (1974). *Mathematics: Society and curricula*. Cambridge: Cambridge University Press.

Guimarães, H. M. (1988). *Ensinar Matemática: Concepções e práticas* (Tese de mestrado na Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Hersh, R. (1986). Some proposals for reviving the philosophy of mathematics. In T. Tymoczko (Org.). *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 9-28). Boston: Birkhäuser.

Hirsch, C. e Zweng, M. J. (Orgs.), *The secondary school mathematics curriculum*. Reston: NCTM.

Howson, A. G., e Kahane, J.-P. (1986). *School mathematics in the 1990s*. Cambridge: Cambridge University Press.

Howson, A. G., Keitel, C., e Kilpatrick, J. (1981). *Curriculum development in mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Johnson, D. (1982). *Every minutre counts*. Palo Alto: Dale Seymour.

Keitel, C., Kotzmann, E., e Skovsmose, O. (1993). Beyond the tunnel vision: Analysing the relationship between mathematics, society and tecnhology. In C. Keitel e K. Ruthveen (Orgs.), *Learning from computers: Mathematics education and tecnhology* (pp. 243-279). Berlim: Springer-Verlag.

Kilpatrick, J. (1992). Some issues in the assessment of mathematical problem solving. In J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos, e D. Fernandes (Orgs), *Mathematical problem solving and new information technologies* (pp. 37-44). Berlim: Springer-Verlag.

Kline, M. (1976). *O fracasso da Matemática moderna*. São Paulo: Ibrasa. (tradução do original publicado em inglês em 1973)

Kline, M. (1980). *Mathematics: The loss of certainty*. Oxford: Oxford University Press.

Lakatos, I. (1976

). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lakatos, I. (1986). A Renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics? In T. Tymoczko (Org.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 29-48). Boston: Birkhäuser.

Lambdin, D. e Walker, V. (1994). Planning for classroom portfolio assessment. *Arithmetic Teacher,* Vol. 41, Nº 6, pp. 318-324.

Leal, L. C. (1992). *Avaliação da aprendizagem num contexto de inovação curricular* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Matos, J. F., Amorim, I., Carreira, S., Mota, G., e Santos, M. (1995). *Matemática e realidade: Que papel na educação e no currículo?* Lisboa: IIE.

Mathematical Sciences Education Board (1989). *Everybody counts: A report to the nation o the future of mathematics education*. Washington: National Academy Press.

Mathematical Sciences Education Board (1990). *Reshaping School Mathematics*. Washington: National Academy Press.

National Council of Supervisors of Mathematics (1990). A Matemática essencial para o século XXI. *Educação e Matemática*, Nº 14, pp. 23-25 e 35. (tradução portuguesa da edição original de 1988)

National Council of Teachers of Mathematics (1980). *An agenda for action*. Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE. (tradução portuguesa da edição original de 1989)

National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE. (tradução portuguesa da edição original de 1991)

Niss, M. (1993). Assessment in mathematics education and its effects: An introduction. In Mogens Niss (Org.), *Investigations into assessment in mathematics education* (pp. 1-30). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers and poweful ideias.* New York: Basic Books.

Pavelle, R., Rothestein, M., e Fich, J. (1991). Álgebra por computador. In J. P. Ponte (Org.), *O computador na Educação Matemática* (pp. 11-27). Lisboa: APM.

Poincaré, H. (1988). Intuição e lógica em Matemática. In *A natureza da Matemática* (pp. 7-16). Lisboa: APM

Poincaré, H. (1996). A invenção matemática. In P. Abrantes, L. C. Leal e J. P. Ponte (Orgs), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 7-13). Lisboa: APM.

Pólya, G. (1975). *A arte de resolver problemas*. São Paulo: Interciência. (tradução brasileira da edição original de 1945)

Pólya, G. (1986). From the preface of induction and analogy in mathematics. In T. Tymoczko (Org.) *New directions in the philosophy of mathematics* (pp.99-101). Boston: Birkhäuser.

Ponte, J. P. (1990). Documentos programáticos no ensino da Matemática (1975-1990). *Actas do ProfMat 90* (pp. 1-10), Caldas da Rainha. Lisboa: APM.

Ponte, J. (Org.) (1991). *O computador na educação matemática*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (1995). Do tangram ao cálculo das áreas: Procurando pôr em prática os novos programas. In *Actas do SIEM V* (pp. 35-50). Lisboa: APM.

Ponte, J., Nunes, F., e Veloso, E. (1991). *Computadores no ensino da Matemática: Uma colecção de estudos de caso.* Lisboa: APM e Projecto MINERVA.

Popkewitz, T. (1988). Institutional issues in the study of school mathematics curriculum research. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 19, pp. 221-249.

Quadling, D. A. (1979). L'enseignment des mathematiques dans le second cycle de l'enseigmement secondaire (lycées et établissements assimilés). In UNESCO (Org.), *Tendences nouvelles dans l'enseignement des mathématiques* (pp. 50-69). Paris: UNESCO.

Restivo, S. (1988). The social life of mathematics. *Philosophica*, Vol. 42, Nº 2, pp. 5-20.

Revuz, A. (1980). *Est-il impossible d'enseigner les mathématiques?* Paris: PUF.

Rico, L. (em publicação). Finalidades de educação matemática. *Quadrante*.

Robitaille, D. (1980). Intention, implementation, realization: Case studies of the impact of curriculum reform. In H.-G. Steiner (Org.), *Comparative studies of mathematics curricula: Change and stability, 1960-1980* (pp. 90-107). Bielefeld: IDM.

Romberg, T. (1984). *School mathematics, Options for the 1990s: A Chaiman's report of a conference*. Washington: ASERI, U.S. Departament of Education.

Saraiva, M. (1991). *O computador na aprendizagem da Geometria: Uma experiência com alunos do 10º ano de escolaridade* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Org.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.

Schwarzenberger, R. L. E., e Johnson, D. C. (1985). *Conference on the future of A-level mathematics*. Londres: Mathematics Education Unit, Centre for Educational Studies, King's College, University of London.

Sebastião e Silva, J. (1964). *Guia para a utilização do compêndio de Matemática, 1º volume, 6º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

Steiner, H.-G. (Org.) (1980). *Comparative studies of mathematics curricula: Change and stability, 1960-1980.* Bielefeld: IDM.

Snapper, E. (1979). The three crises in mathematics: Logicism, intuitionism and formalism. *Mathematics Magazine*, Vol. 52, Nº 4, pp. 207-216.

Struik, D. (1989). *História concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

Schoenfeld, A. (1990). Problem solving in context(s). In R. Charles e E. Silver (Orgs.) *Teaching and assessing of problem solving* (pp. 82-92). Virginia: NCTM.

Tymoczko, T. (Org.) (1986). *New directions in the philosophy of mathematics*. Boston: Birkhäuser.

Usiskin, Z. (1985). We need another revolution in secondary school mathematics. In C. Hirsch e M. J. Zweng (Orgs.), *The secondary school mathematics curriculum* (pp. 1-21). Reston: NCTM.

Vergani, T. (1993). *Educação matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Webb, N. (Org.) (1993). *Assessment in the mathematics classroom*. Reston: NCTM.

Wilder, R. (1986). The cultural basis of mathematics. In T. Tymoczko (Org.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp.185-199). Boston: Birkhäuser.