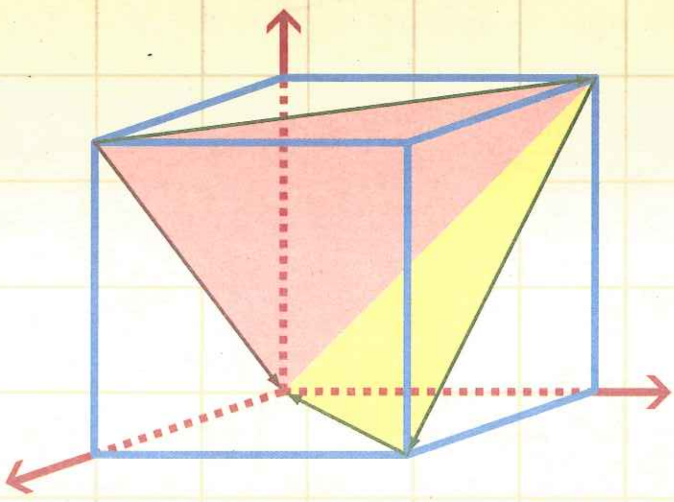
MATEMÁTICA

Ministério da Educação
Departamento do **Ensino Secundário**

Geometria

11º ano de escolaridade

Cristina Loureiro
A. Franco de Oliveira
Elfrida Ralha
Rita Bastos



APRESENTAÇÃO

O tema Geometria do 11º ano engloba duas partes, trigonometria e geometria analítica, dois assuntos em que há uma grande tendência para escapar da geometria e cair no cálculo e na álgebra, esquecendo problemas e actividades criativos para derrapar em rotinas e técnicas. Os textos que vos apresentamos têm assim, como preocupação fundamental, apelar ao reforço da geometria e, por inerência, ao papel da história.

Assim, e à semelhança da brochura de Geometria do 10º ano, organizámos este texto em três partes distintas, não totalmente estanques e que estabelecem algumas pontes entre si:

Histórias de Ângulos e Triângulos, A. Franco de Oliveira
Uma série de textos breves sobre aspectos interessantes, que podem ser utilizados directamente com os alunos, e que sugerem várias possibilidades de integração da histórica da geometria.

Geometria, Elfrida Ralha
Algumas perspectivas sobre a geometria integrada com outros assuntos matemáticos e ideias da sua didáctica para a articulação de conhecimentos.

Actividades Comentadas, Cristina Loureiro e Rita Bastos
Uma série de actividades seleccionadas para apresentar aos alunos sobre aspectos fundamentais dos assuntos a estudar e da perspectiva em que estes podem ser trabalhados.

ÍNDICE

HISTÓRIAS DE ÂNGULOS E TRIÂNGULOS

1. O tamanho da Terra

Uma das primeiras aplicações da geometria euclidiana em grande escala data do tempo de Arquimedes ou, mais exactamente, do seu contemporâneo Eratóstenes, director da famosa Biblioteca de Alexandria, e cognominado "Beta", por ser o segundo em todas as coisas (o primeiro era Arquimedes, obviamente).

A ideia de Eratóstenes para determinar o perímetro de um círculo máximo ou um meridiano da Terra era a seguinte. Imaginemos um plano vertical passando pelos pólos Norte (N) e Sul (S) e por um lugar A sobre a superfície da Terra. No ponto A espeta-se uma estaca $[AP]$[1] com a direcção do fio de prumo, apontando, portanto, para o centro O da Terra, que é também o centro do meridiano NSA. O meio-dia solar é a hora a que o (centro do) Sol está sobre o dito plano. Se o ponto A estiver entre o Trópico de Câncer e o Trópico de Capricórnio, há um dia do ano, no meio do Verão, em que a posição do Sol passa exactamente no zénite da estaca $[AP]$, isto é, em que a estaca não produz qualquer sombra. Eratóstenes conhecia um lugar assim, a sul de Alexandria (B), no actual Assuão.

[1] Por uma questão de uniformidade com o resto do texto e com o uso corrente entre nós utilizamos esta notação para segmentos. Continuamos a achar preferível a notação $\overline{AP}$ para segmento com extremos A e P, e AP para o comprimento do segmento. Uma razão desta preferência é que a notação [ ] é universalmente utilizada para classes de equivalência, por exemplo, para a definição de vector livre como classe de equivalência de um segmento orientado dado para a relação de equivalência de equipolência. Não é esta a altura oportuna nem este o local, todavia, para encetar uma reforma das notações em uso no ensino secundário.

Para completar os cálculos, haveria que medir a distância de A a B e o ângulo α que os raios solares fazem com uma estaca vertical em B, no mesmo dia e hora em que o Sol passa no zénite de A. Supondo que os raios solares são paralelos, aquele é também o ângulo ao centro AOB, pela proposição geométrica conhecida por "teorema dos ângulos alternos-internos". É claro, por outro lado, que o ângulo ao centro AOB é proporcional ao comprimento do arco AB sobre o meridiano NSA (fig. 1).

Segundo o cronista Cleómedes, Eratóstenes teria estimado a distância de B a A em 5000 estádios, e o ângulo na 25ª parte de um ângulo raso, obtendo o resultado

$$2 \times 25 \times 5000 = 250\ 000 \text{ estádios}$$

para perímetro do meridiano terrestre. Par ter uma ideia deste valor, tenhamos em conta que, de acordo com Plínio, o estádio de Eratóstenes valia 300 cúbitos egípcios, e que 1 cúbito = 0,525 m, o que dá o valor final para perímetro do meridiano terrestre em 39 375 km. Este valor está aquém do valor actualmente conhecido por umas escassas centenas de quilómetros, o que é surpreendente para o carácter rudimentar das medições efectuadas.

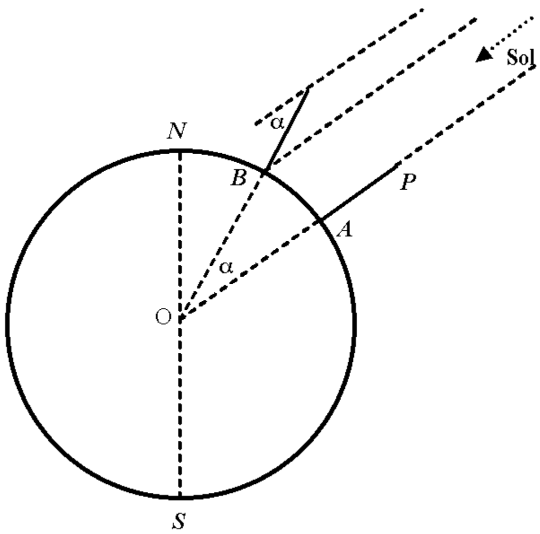


Figura 1

Na verdade, Plínio atribui a Eratóstenes o valor ainda mais próximo de 252 000 estádios, cerca de 24 660 milhas terrestres, talvez por ser preferível para as contas no sistema sexagesimal. Neste sistema, o ângulo raso era dividido em 180 partes ou graus (180º), e cada parte ou grau corresponderia, portanto, a um arco de comprimento

$$252\,000 \div (2\times180) = 700 \text{ estádios}$$

Os gregos desenvolveram outro método para medir o perímetro do meridiano terrestre utilizando uma estrela fixa em vez do Sol. O método, atribuído a Possidónio, baseia-se na observação de que quando a estrela Canopos (C) se vê imediatamente acima do horizonte, na direcção de Rhodes, ela está a 24ª parte de um ângulo raso acima do horizonte em Alexandria. Como Rhodes e Alexandria estão sensivelmente num mesmo meridiano, e sendo $\overleftrightarrow{HH'}$ a linha do horizonte em Rhodes (R) e $\overleftrightarrow{II'}$ a linha do horizonte em Alexandria (A), ambas perpendiculares aos raios da Terra nos pontos de tangência R e A, respectivamente, tem-se a igualdade dos ângulos $I'AC$ e ROA, e também dos ângulos $I'LH'$ e $I'AC$, pois $\overleftrightarrow{HH'}$ // $\overleftrightarrow{AC}$ (fig. 2).

A estimativa de Possidónio, de que o ângulo $I'AC$ é a 24ª parte de um ângulo raso, ou seja, 7,5º, que é também a medida do ângulo ROA, faz com que o comprimento do arco subtenso AR seja a 48ª parte do perímetro do meridiano terrestre. Faltava medir o comprimento deste arco, ligando Alexandria a Rhodes. Só que estas duas cidades estavam separadas por mar. Possidónio toma o valor atribuído a Eratóstenes, segundo o qual o comprimento do arco AR é de 3750 estádios e, portanto, o perímetro do meridiano terrestre vem igual a

$$48\times3750 = 180\,000 \text{ estádios,}$$

menos de ¾ do valor obtido por Eratóstenes. A estimativa por Possidónio da elevação de Canopos estava errada, devia ter sido de 5,25º em vez de 7,5º. Este erro, transmitido à posteridade através do trabalhos do geógrafo Strabo, haveria de ter uma grande repercussão nas navegações quinhentistas, como veremos de seguida.

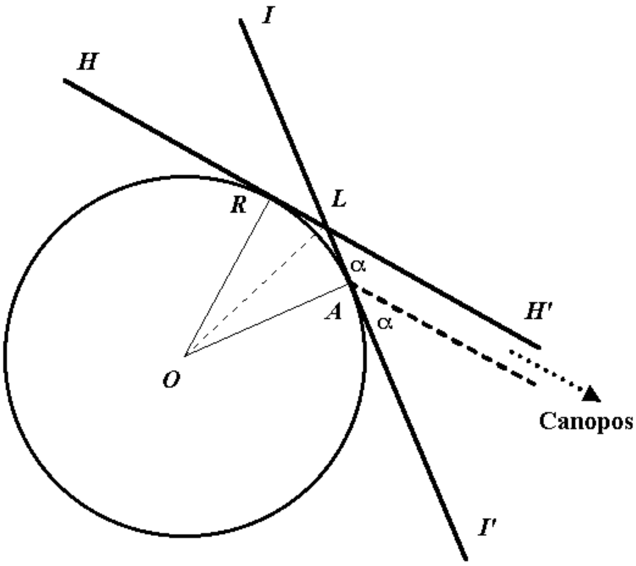


Figura 2

2. O erro de Colombo

Colombo utilizou deliberadamente o valor de 180 000 estádios na sua argumentação para convencer os poderosos e eventuais financiadores da viabilidade da sua viagem às Índias Orientais navegando para Ocidente. Sabia-se que a Terra era esférica e tratava-se, portanto, apenas de calcular a duração da pretensa viagem, o que iria depender exclusivamente dos cálculos relativos ao tamanho da globo terrestre. De acordo com o *Almageste* do famoso astrónomo Ptolemeu (muito posterior a Eratóstenes, Possidónio e Strabo), um viajante partindo do ponto mais ocidental da Europa (o Cabo de S. Vicente) e viajando para Oriente percorreria a primeira metade do percurso em terra (até Xangai) e a segunda metade por mar. Quer dizer, a porção continental abrangeria cerca de 180º de um paralelo terrestre situado na zona temperada norte do planeta. Isto deixaria demasiado mar para poente do Cabo de S. Vicente para satisfazer Colombo. Bem mais conforme aos seus interesses era a estimativa de outro geógrafo grego, Marino de Tire, criticado por Ptolemeu, o qual alongava o percurso terrestre para oriente para 235º em vez de 180º e, por conseguinte, encurtava o percurso marítimo para 135º.

Isto ainda parecia muito. De acordo com o livro de viagens de Marco Polo, muito popular na época, que Colombo adquiriu e anotou, a posição da costa oriental da China estava 28º mais a nascente do que a indicada por Marino de Tire, e as Índias Orientais ou, mais exactamente, a ilha japonesa de Cipango, estavam 30º ainda mais a oriente, de acordo com Marco Polo, o que reduzia o arco a percorrer a (135º – 28º) – 30º = 77º. Como Colombo pretendia partir das Ilhas Canárias e não do Cabo de S. Vicente, uns 9º a poente, ficariam 68º a percorrer por mar. Aos viajantes e pescadores é tradicionalmente tolerada a tendência para exagerar, e Colombo não se coibiu de arredondar os 68º para 60º, a terça parte da estimativa de Ptolemeu. Para julgar da praticabilidade da viagem haveria agora que converter esta medida angular em medida linear. Foi aqui que entrou o erro de Possidónio. Preferindo o valor deste ao de Eratóstenes, ao longo do Equador a distância a percorrer seria de

$$\frac{60}{360}\times\frac{180000}{252000}\times 24400 \approx 3000 \text{ milhas } \approx 4800 \text{ km}$$

Como a viagem seria feita não ao longo do Equador mas sim de um paralelo passando pelas Canárias, à latitude de 23º N, cujo perímetro é inferior ao do Equador por um factor de 0,92 (v. adiante), obtemos finalmente a módica distância de pouco mais de 4300 km a percorrer desde as Canárias até ao Japão. Colombo calculou que precisaria de cerca de 30 dias para fazer esta viagem. Na realidade foram precisos 33 dias para encontrar terra firme, 57º a nascente do ponto de partida. Astrónomos portugueses e espanhóis terão duvidado dos cálculos de Colombo, pois os dados de Eratóstenes e Ptolemeu (confirmados por medições mais recentes), ignorando M. Polo, apontariam para uma distância quatro vezes maior, que nenhumas naús da época suportariam. Mas Isabel de Espanha e alguns investidores apostaram forte nas pretensões de Colombo, e ganharam — ninguém da época podia adivinhar que no fim da viagem se encontrasse não as ilhas japonesas mas um Novo Mundo por explorar, as Américas!

3. Graduando um arco

A Proposição I.9 dos *Elementos* de Euclides ensina a construir, com régua e compasso, a bissectriz $\vec{AD}$ de um ângulo geométrico $\angle BAC$ dado (figura 3a). A prova de que a semi-recta $\vec{AD}$ é de facto a bissectriz recorre ao conhecido critério (LLL) de congruência de triângulos (figura 3b). Esta bissectriz é, também, o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes dos lados do ângulo dado.[2]

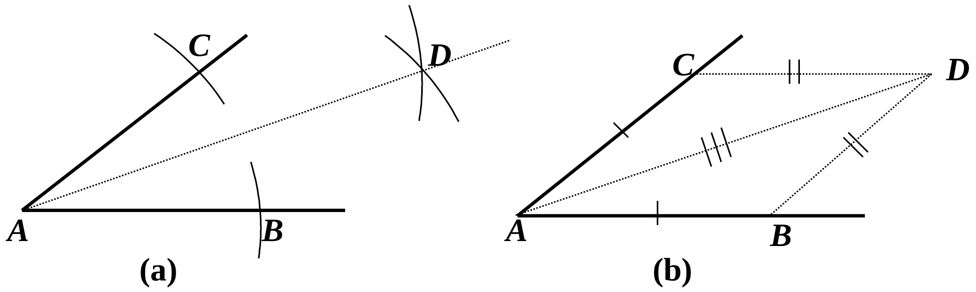


Figura 3

A construção da bissectriz é o método mais básico para a graduação (divisão em partes iguais) de um arco de circunferência, ou de instrumentos de medição de ângulos (transferidor, quadrantes astronómicos, astrolábios, teodolitos, etc.).

A designação de um ângulo como uma fracção de um ângulo recto é muito razoável e útil nas aplicações, nomeadamente, na construção de instrumentos, mas outras convenções foram sendo feitas desde a antiguidade. Já no tempo dos babilónicos e egípcios antigos o ângulo recto era suposto dividido em 90 partes iguais, ou graus, cada grau em 60 partes chamadas minutos, e cada minuto em 60 partes ou segundos. Ao todo, pois, o ângulo recto compreende 5400 minutos. A importância do ângulo recto como unidade natural está bem evidenciada nos *Elementos* de Euclides, pois é objecto do Postulado 4, o qual afirma que "todos os ângulos rectos são iguais". Recorde-se que Euclides define um ângulo recto como sendo um ângulo "igual"[3] a um seu suplementar adjacente. Em versões mais modernas da geometria euclidiana esta proposição pode ser demonstrada,

---

[2] Na geometria sintética, o ângulo geométrico é usualmente definido como a reunião de duas semi-rectas com a mesma origem, não opostas nem coincidentes. Quando se definem os ângulos orientados (como pares ordenados de semi-rectas) e se introduzem medidas, é que é usual estender a definição de modo a incluir o ângulo nulo (semi-rectas coincidentes) e o ângulo raso (semi-rectas opostas).

[3] Modernamente, traduzimos o "igual" de Euclides, quando aplicado a figuras como segmentos (que ele chamava linhas rectas), ângulos e triângulos, circunferências, etc. por "congruentes". Na geometria métrica isto quer dizer "mesma forma e medida", mas não esqueçamos que a geometria de Euclides é, toda ela, sintética (sem números).

mas não se sabia como fazê-lo no tempo de Euclides, nem tal teria sido possível somente com os postulados que Euclides nos deixou. Efectivamente, como se sabe, a moderna concepção da geometria euclidiana muito deve aos geómetras que, desde finais do século XVIII, mas principalmente nas últimas décadas do século passado (Pieri, Pasch, Hilbert) procederam a uma profunda revisão dos fundamentos da geometria, completando o que Euclides deixara omisso ou incompleto (questões relativas à ordem e à continuidade, por exemplo). Veja-se, a propósito, o que se disse a este respeito na brochura para o 10º ano.

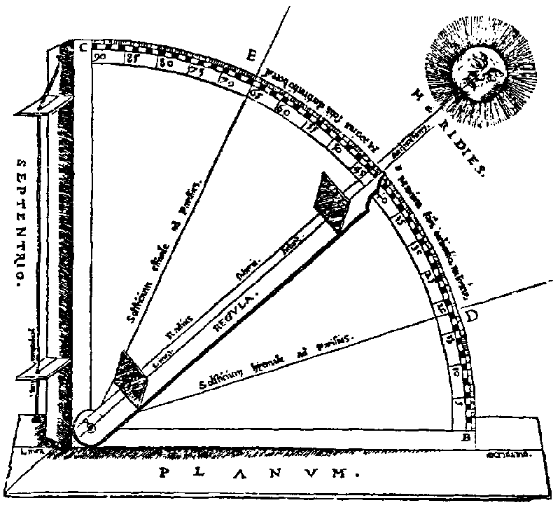


Figura 4

Um quadrante astronómico para medir a altitude do Sol, do séc. XVI

Pelo método da bissectriz, a partir do ângulo recto, a melhor aproximação que se obtém de 1º é (90÷64)º, ou seja, aproximadamente, 1º26’ (um grau e 26 minutos); a partir de 2/3 de um ângulo recto, ou seja 60º, este método permite obter a aproximação (90÷96)º, ou seja, quase 56’’ (56 segundos). Um ângulo recto dividido desta maneira teria 96 partes e não 90.

Para complicar as coisas, a Revolução Francesa procedeu a uma reforma dos pesos e medidas em 1792, que se traduziu na divisão do ângulo recto em 100 partes ou grados, e cada grado em 100 partes, também chamadas minutos (para ajudar à confusão), de modo a ficar mais conforme ao sistema métrico. E a unidade linear de comprimento, o metro (m) foi definida como sendo a milésima parte do comprimento de um arco de meridiano, junto ao equador, subtenso por um ângulo de 1 grado. O mesmo arco, se subtenso por 1º babilónico, corresponde a 1 milha náutica. Um quarto de meridiano tem, pois, $90 \times 60 = 540$ milhas náuticas, ou $100 \times 100 = 10\,000$ km, donde a relação

$$1 \text{ km} = 0.54 \text{ milhas náuticas.}$$

Não há nenhum problema, do ponto de vista teórico, em dividir o ângulo recto em 100 partes iguais, ou em 96, em vez de 90, ou em qualquer outro número de partes. É tudo uma questão de convenção.

Convenção por convenção, pode-se fixar aquela que define o radiano como a medida de um ângulo ao centro que subtende o arco menor de comprimento 1 da circunferência unitária. Deste modo, definindo π como comprimento de uma semicircunferência unitária (ou de uma semicircunferência cujo raio se toma por unidade), o ângulo recto medirá $\pi/2$ radianos.

4. Medindo as alturas

Outra aplicação prática da geometria euclidiana, que conduz à trigonometria, consiste na utilização de triângulos semelhantes para a determinação de alturas de objectos distantes, como árvores ou torres. Como se sabe, a semelhança de triângulos é definida em termos de congruências de ângulos homólogos ou correspondentes, mas o resultado que mais interessa aqui é a proposição VI.4 de Euclides de que, em triângulos semelhantes, lados homólogos são proporcionais. Na semelhança

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

(em que os vértices A, B, C correspondem aos vértices D, E, F, respectivamente) tem-se

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$ [4]

[4] Recorde-se que, para os geómetras gregos antigos, uma razão numérica como AB/DE não possui uma existência ou significado autónomo. As razões só aparecem integradas em proporções "$a : b :: c :$

Se designarmos por r a razão comum, resulta que os perímetros dos dois triângulos estão na mesma razão

$$\frac{AB + AC + BC}{DE + DF + EF} = r$$

Com um pouco mais de engenho, utilizando o facto de a área de um triângulo ser igual a metade da área de um paralelogramo com a mesma base e altura, resulta que a razão entre as áreas dos dois triângulos é

$$\frac{area(\Delta ABC)}{area(\Delta DEF)} = r^2$$

Regressando ao problema da medição de alturas, imaginemos uma pessoa colocada em D com altura AD igual à altura do tronco da árvore BF, desejando medir a altura da árvore CF, como na figura seguinte. Necessita da ajuda de um amigo ou de uma estaca vertical de comprimento YZ com $XZ = AD$. Supondo conhecidos AD, YX e $AB = DF$, tem-se $\Delta AXY \sim \Delta ABC$, logo

$$\frac{YX}{AX} = \frac{CB}{AB},$$

donde

$$CB = AB \times \left(\frac{YX}{AX}\right),$$

e finalmente $CF = CB + BF = CB + AD.$

A medição da altura da árvore pode-se até fazer sem conhecer a distância AB, poupando o esforço físico do percurso mas onerando um pouco o esforço mental.

---

d" (ler "*a* está para *b* assim como *c* está para *d*", e não são entre números mas entre objectos geométricos da mesma espécie (como dois segmentos, ou duas figuras planas, ou dois sólidos). Qualquer criança entende o significado de uma frase como "o meu pau é duas vezes maior do que o teu" mesmo que não faça a mínima ideia de como medir comprimentos.

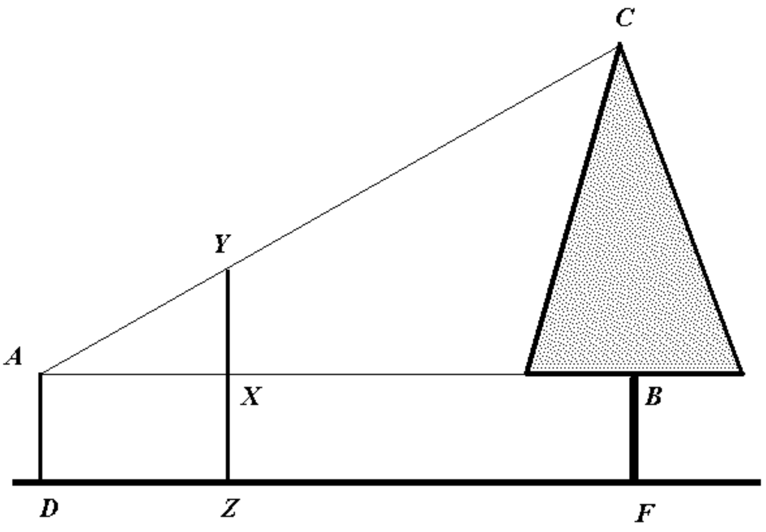


Figura 5

Mas desta vez há que fazer a medição em A, obtendo a relação

$$AH / GH = AB / CB,$$

e repeti-la um pouco mais adiante em D, obtendo a relação

$$DJ / IJ = DB / CB = (AB - AD) / CB.$$

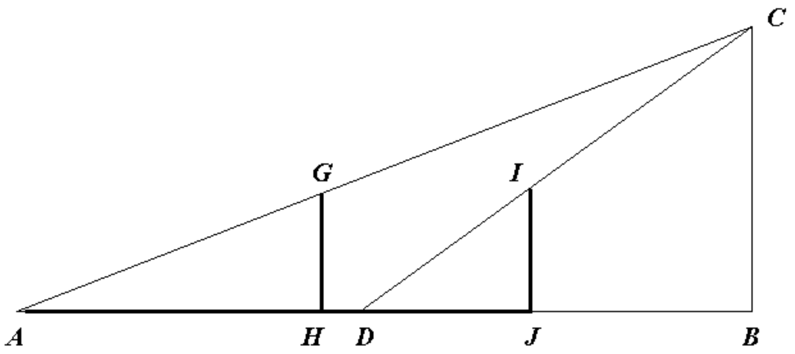


Figura 6

Temos então

$$\frac{DJ}{IJ} = \frac{AB}{CB} - \frac{AD}{CB} = \frac{AH}{GH} - \frac{AD}{CB},$$

donde

$$\frac{AD}{CB} = \frac{AH}{GH} - \frac{DJ}{IJ}$$

Esta última relação permite calcular o valor desconhecido CB, já que todos os outros são conhecidos.

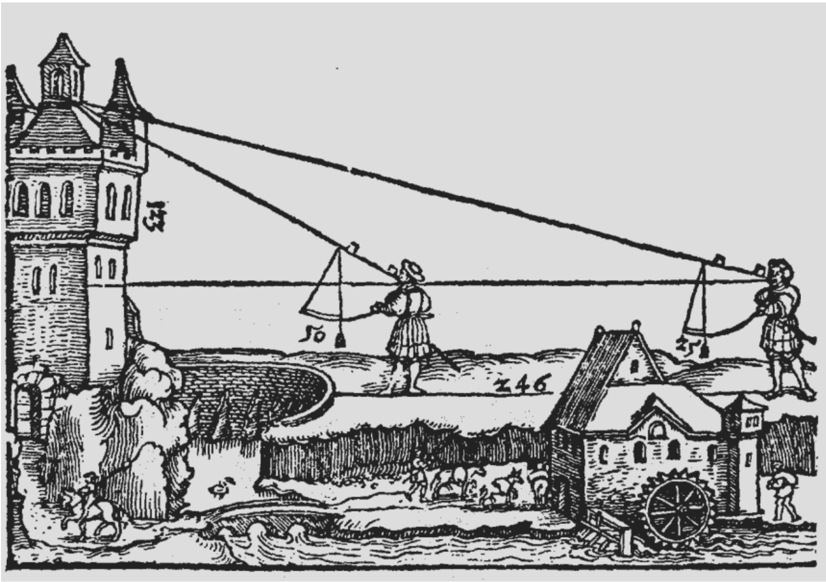


Figura 7

Altura de uma torre, pelo método dos triângulos semelhantes, de acordo com Apianus, *Quadrans astronomicus* (1532)

5. As razões trigonométricas

Abstraindo das aplicações, e focando a atenção somente nas semelhanças inerentes à figura seguinte (verticais paralelas, ângulo recto em C), podemos dizer que o valor comum das razões

(1)
$$\frac{XY}{AY} = \frac{VW}{AW} = \frac{CB}{AB}$$

é determinado pelo ângulo geométrico $\angle CAB$. Para um ângulo mais pequeno $\angle C'AB$ o valor da razão diminui, pois diminuem os numeradores mas permanecem os denominadores.

Podemos dizer, portanto, que qualquer uma daquelas razões é uma espécie de medida da amplitude do ângulo $\angle BAC$. Mas o mesmo se poderia dizer de qualquer uma das razões

(2) $$\frac{AB}{AC} = \frac{AW}{AV} = \frac{AY}{AX},$$

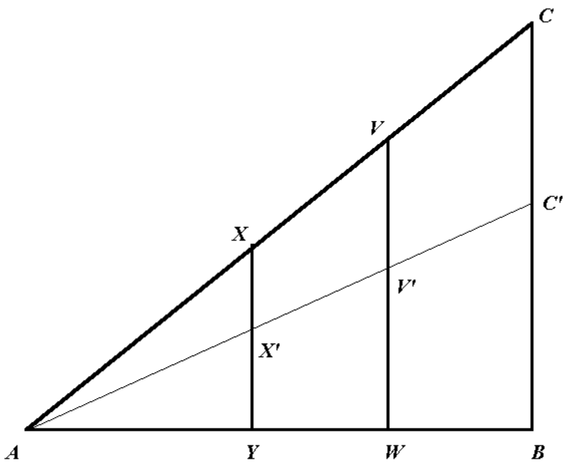


Figura 8

ou de qualquer uma das razões

(3) $$\frac{CB}{AC} = \frac{VW}{AV} = \frac{XY}{AX}$$

Os geómetras não privilegiam nenhuma das razões anteriores, mas deram nomes a todas elas.

Assim, no triângulo rectângulo ΔABC, a razão (*lado oposto / lado adjacente*) = $\frac{CB}{AB}$ (ou qualquer uma das suas iguais,) é chamada a *tangente* do ângulo $\angle A$ (= $\angle BAC$), abreviadamente

$$tg\ A = \frac{CB}{AB}$$

A razão (*lado oposto* / *hipotenusa*) = $\dfrac{BC}{AC}$ (ou qualquer uma das suas iguais) é chamada o *seno* do ângulo A, abreviadamente

$$sen\ A = \frac{BC}{AC}$$

Finalmente, a razão (*lado adjacente* / *hipotenusa*) = $\dfrac{AB}{AC}$ é chamada o *coseno* do ângulo A,

$$cos\ A = \frac{AB}{AC}$$

Resulta imediatamente das definições que

(4) $$sen\ A = cos\ C \quad \text{e} \quad cos\ A = sen\ C$$

Além disso, como qualquer cateto é mais pequeno do que a hipotenusa, as funções seno e coseno têm sempre valores entre 0 e 1. No caso particular de o triângulo rectângulo ABC ser isósceles (isto é, AC = CB e, portanto, por *pons asinorum*, $\angle A$ e $\angle B$ são congruentes, logo cada um deles mede 45º), tem-se $tg\ A$ = tg 45º = 1.

Como as razões (1), (2) ou (3) só dependem da amplitude do $\angle A$ e quaisquer dois ângulos congruentes têm a mesma amplitude, é conveniente saber os valores de $tg\ A$, $sen\ A$ e $cos\ A$ para diferentes ângulos. Desde muito cedo que estes valores foram tabelados. Na página seguinte está um exemplo de uma tal tabela. Por causa das relações (4) tais tabelas só precisam de ser feitas para ângulos entre 0º e 45º pois, por exemplo, para um ângulo entre 45º e 90º, que é da forma 45º + x, tem-se

$$\text{sen}(45º + x) = \cos(45º - x),$$

com 45º – x entre 0º e 45º. O aspecto de tais tabelas pouco se alterou nos últimos 400 anos, excepto talvez no grau de precisão dos valores. Modernamente recorre-se às calculadoras para obter os valores desejados com boa aproximação.

O caso 23º deve merecer atenção especial, por razões históricas, pois é o ângulo compreendido por dois raios da Terra, um terminando no Equador e outro terminando no paralelo das Canárias. Colombo necessitou de calcular a razão entre os perímetros do Equador e desse paralelo, a qual é igual à razão entre os raios respectivos (porquê), conforme a figura seguinte, ou seja

$$\cos 23^{o} \approx 0{,}92$$

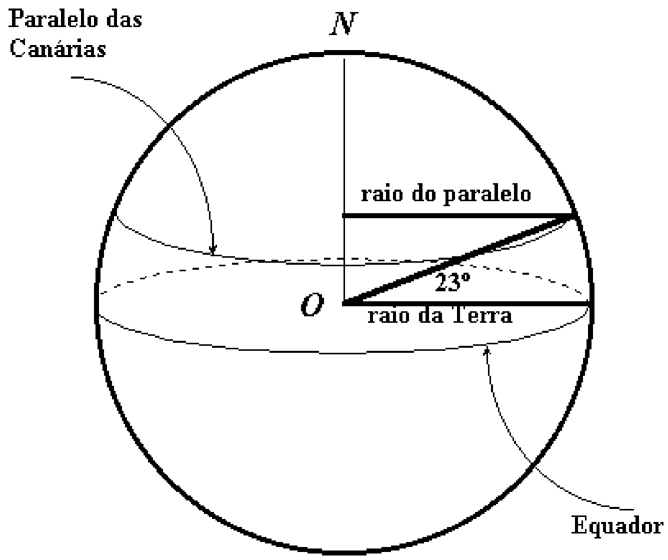


Figura 9

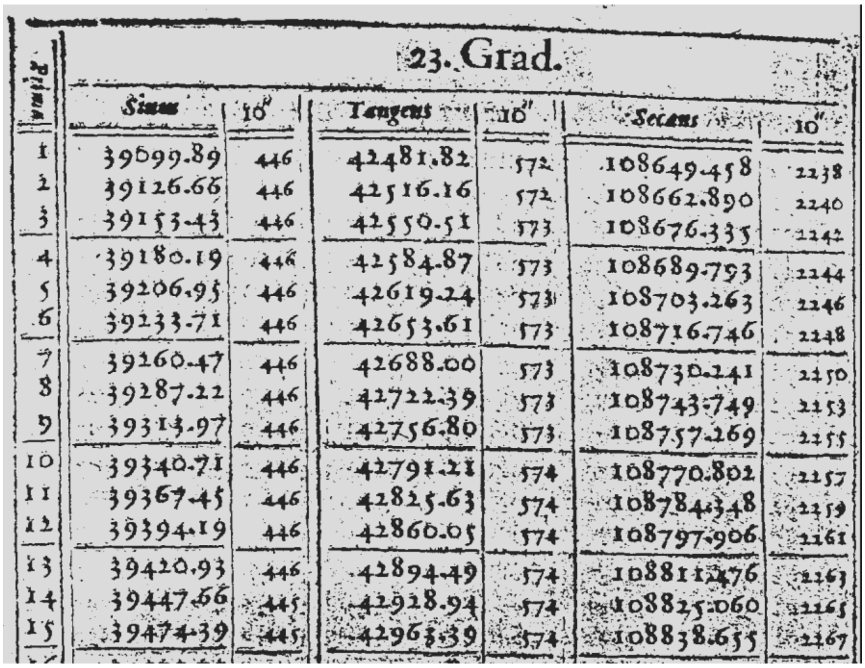
A terceira coluna da tabela (parcial) seguinte exibe os valores da função *secante*. Os geómetras também deram nomes às razões recíprocas das razões (1), (2) e (3), respectivamente

$$cotangente\ de\ A = cotg\ A = 1/tg\ A,$$

$$cosecante\ de\ A = cosec\ A = 1/sen\ A,$$

$$secante\ de\ A = sec\ A = 1/cos\ A$$

As seis razões ou funções trigonométricas foram introduzidas pelos Árabes.



	23. Grad.					
Prima	Sinus	10"	Tangens	10"	Secans	10"
1	39099.89	446	42481.82	572	108649.458	2238
2	39126.66	446	42516.16	572	108662.890	2240
3	39153.43	446	42550.51	573	108676.335	2242
4	39180.19	446	42584.87	573	108689.793	2244
5	39206.95	446	42619.24	573	108703.263	2246
6	39233.71	446	42653.61	573	108716.746	2248
7	39260.47	446	42688.00	573	108730.241	2250
8	39287.22	446	42722.39	573	108743.749	2253
9	39313.97	446	42756.80	573	108757.269	2255
10	39340.71	446	42791.21	574	108770.802	2257
11	39367.45	446	42825.63	574	108784.348	2259
12	39394.19	446	42860.05	574	108797.906	2261
13	39420.93	446	42894.49	574	108811.476	2263
14	39447.66	445	42928.94	574	108825.060	2265
15	39474.39	445	42963.39	574	108838.655	2267

Figura 10
Parte de uma tabela trigonométrica, de Pitiscus (1612)

Com excepção do termo *seno*, os nomes das funções têm uma explicação simples em termos do chamado *círculo* (mais propriamente: *circunferência*) *trigonométrico*, o qual é conhecido desde há, pelo menos, 500 anos. Pensemos numa circunferência de centro O e raio 1, conforme a figura seguinte. Deste modo, as razões em que o denominador é o comprimento do raio correspondem a segmentos com o comprimento do numerador.

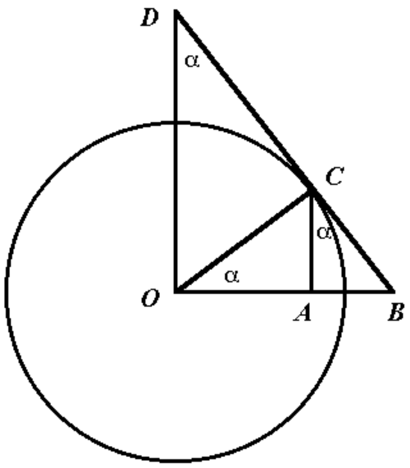


Figura 11

Nesta figura é suposto o segmento $[BD]$ ser tangente à circunferência no ponto C, $[CA]$ perpendicular a $[OB]$ no ponto A, e o triângulo OAD com ângulo recto em O. O raio $[OC]$ tem comprimento 1, como se disse. Assim, atendendo às igualdades de ângulos (α) assinaladas (justificação?),

$$sen\ \alpha = \frac{AC}{OC} = AC,\ cos\ \alpha = \frac{OA}{OC} = OA,\ tg\ \alpha = \frac{BC}{OC} = BC$$

$$cosec\ \alpha = \frac{OD}{OC} = OD,\ sec\ \alpha = \frac{OB}{OC} = OB,\ cotg\ \alpha = \frac{CD}{OC} = CD$$

Quanto ao nome *seno*, este deriva do latim *sinus*, que significa “baía” ou “cova” (como em “cova do peito”) e parece ter origem numa tradução deficiente, pelos árabes, da palavra “Jya” utilizada por Aryabhata para nomear a razão $\frac{AC}{OC}$, palavra essa que significa “arco” (a arma, de “arco e flecha”). Os árabes substituíram a palavra “Jya” por “Jaib” (“cova do peito”) que deu no latim *sinus*. Observe-se que há outras versões do círculo trigonométrico adequadas para visualizar as razões trigonométricas.

Como curiosidade, Lewis Carroll, o conhecido autor das aventuras de *Alice*, também lógico e matemático, designou as seis funções trigonométricas pelos símbolos seguintes:

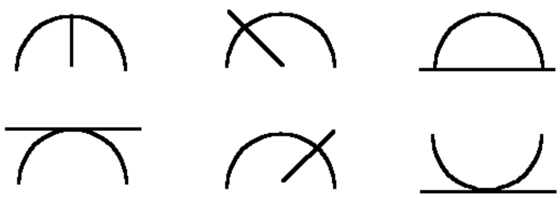


Figura 12

Qual é qual?

6. Uma aplicação à Óptica

A trigonometria tem muitas aplicações às ciências. Uma das mais simples, mas não menos importante, é ao fenómeno da refracção (ou deflexão) da luz ao passar de um meio para outro, por exemplo, ao passar do ar para a água, ao atravessar a atmosfera ou penetrar numa lente de vidro. Os gregos antigos conheciam o fenómeno e tentaram explicá-lo geometricamente, mas sem grande sucesso. Os termos "ângulo de incidência" (*i*) e "ângulo de refracção" (*r*) são deles, mas escapou-lhes a relação entre *i* e *r*.

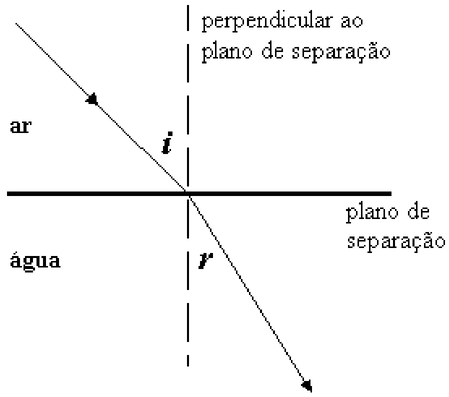


Figura 13

Árabes e Cristãos não fizeram melhor ao longo dos séculos, até que o geómetra holandês Willebrord Snel, no começo do séc. XVII, propôs a fórmula simples (correcta)

$$sen\ i = n\ sen\ r,$$

onde *n* é uma constante chamada *índice de refracção*, que depende dos dois meios que a luz atravessa. No caso da água, em comparação com o ar (quer dizer, o sentido da trajectória é da água para o ar), o valor da constante é n = 1,333.

Imaginemos um observador em B, 21 cm acima do nível da água no recipiente cilíndrico e 12 cm à esquerda do bordo H, como na figura seguinte.

O recipiente tem a altura de 8 cm, e o ponto A (o bordo superior direito de uma moeda colocada centralmente no fundo) está a 4 cm da linha DF. Para uma certa altura da água, a moeda torna-se visível e parece estar mais próxima da superfície do líquido do que está na realidade (note que o trajecto do raio de luz é da moeda para o observador), como se o observador estivesse em Q e não houvesse refracção.

Qual é a altura da água para que a moeda comece a ficar visível?

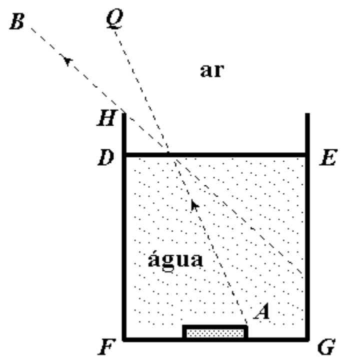


Figura 14

A geometria da situação é descrita na figura seguinte (os números não estão em escala). Pelos dados do problema, $tg\ \alpha$ = 21/12 = 1,75, donde α = 60º 15' e *r* = 90º – 60º 15' = 29º 45'. Ignorando a altura da moeda, substituindo os valores de *n* e $sen\ r$ na lei de Snel vem $sen\ i$ = 0,372 e $tg\ i$ = 0,401.

Seja $x = DF$ a altura da superfície da água a determinar, e $y = FL$. Então

$$tg\ \alpha = \frac{FH - FD}{CD} = \frac{8 - x}{y}$$

e

$$tg\ \ i = \frac{4 - y}{x},$$

ou seja

$$1{,}75y = 8 - x$$

$$0{,}401x = 4 - y,$$

sistema este que permite determinar $x \approx 3{,}34$ cm, um pouco abaixo da meia altura do recipiente.

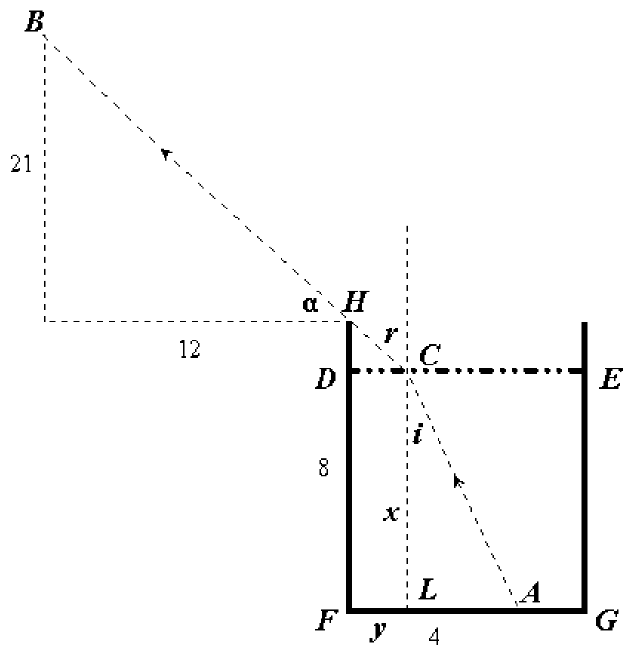


Figura 15

7. Uma questão de método

Desde que foi criada por Descartes e Fermat no séc. XVII, a geometria analítica no plano ou no espaço adquiriu um estatuto privilegiado nos estudos geométricos, algébricos e analíticos, quer pelo facto de permitir integrar uns nos outros os métodos geométricos, algébricos e analíticos (reais e complexos) quer pelas possibilidades de enriquecimento (cálculo vectorial, álgebra linear e multilinear) e de generalização a outras dimensões. O plano euclidiano real $\mathbf{R}^2$ e o espaço euclidiano real $\mathbf{R}^3$ são, tão somente, modelos particulares da geometria euclidiana em qualquer uma das modernas formulações axiomáticas nos quais os conceitos (primitivos ou definidos, conforme a axiomática) ponto, recta, plano, incidência, distância, ordem (relação *situado entre*), congruência, etc. admitem interpretações concretas, e aí se podem concretizar eficientemente as proposições, construções e transformações geométricas que são objecto do desenvolvimento dedutivo a partir da axiomática admitida. Um caso típico de sucesso do tratamento algébrico-analítico é, por exemplo, no estudo das cónicas. No caso da geometria euclidiana plana ou espacial (axiomática de Hilbert, ou alguma das axiomáticas métricas), acontece que tais modelos são únicos a menos de isomorfismo, respectivamente.

Mas nada disto retira o interesse científico e didáctico pelo estudo axiomático da geometria, ou melhor, das geometrias, e aqui estamos pensando tanto nas mais simples (conceptualmente, mas não computacionalmente) geometrias finitas, afins, hiperbólicas ou projectivas e suas aplicações (da estatística à criptografia), como das geometrias euclidiana e suas subgeometrias, não-euclidianas como a hiperbólica, projectiva, esférica, etc. etc. etc. e respectivos modelos. Só esta perspectiva axiomática permite elucidar convenientemente o papel dos axiomas de paralelismo, a natureza métrica e não métrica de diversas noções, etc.[5]

Não menos importante, do ponto de vista formativo, é a própria oportunidade de ilustração do método axiomático ou hipotético-dedutivo, tão difícil de conseguir noutras áreas, e os associados conceitos de rigor justificativo ou demonstrativo onde se concretiza o raciocínio lógico (a lógica está aqui, inerente à prática demonstrativa, ainda que informal, e não necessita de ser explicitada a este nível — apenas é necessário e suficiente formular os enunciados e as definições e fazer as justificações ou demonstrações possíveis (a este nível básico ou secundário) com CLAREZA TRANSPARENTE, única maneira de as tornar convincentes e universalmente aceites). Isto é, obviamente, um complemento natural do papel da intuição e da visualização espacial (façam muitas figuras!) na descoberta de justificações e de soluções de problemas (sempre os houve, montanhas deles, em geometria!).

Todos estes aspectos deviam fazer parte da formação científica básica do futuro professor de matemática, mesmo que, como tem acontecido nas últimas décadas, o papel da geometria nos níveis básico e secundário tenha sido minimizado e reduzido a uma expressão mínima incaracterística. Porquê? A questão não é nova. Em vários países aconteceu o mesmo ao longo deste século, ciclicamente. Quer por que académicos influentes mas insensíveis ao fundo da questão foram expurgando os

---

[5] Dois exemplos: 1) o paralelismo de duas rectas no plano (euclidiano) é muitas vezes explicado e interiorizado pelos alunos como significando equidistância quando, na realidade, se trata de uma noção não métrica mas unicamente de incidência — as rectas r e s são paralelas se e só se coincidem ou não têm nenhum ponto comum; 2) a definição de ângulo recto é também interiorizada normalmente como uma noção métrica (um ângulo que mede 90º), esquecendo a simplicidade da definição de Euclides discutida acima e esquecendo que antes de medir qualquer coisa se tem de fixar uma unidade padrão.

curricula universitários da geometria “elementar”, sintética ou métrica, de base axiomática, a favor dos poderosos meios algébricos e analíticos da geometria “superior”, o que não deixou de influenciar gerações de autores de programas e de manuais escolares; quer por serem eles mesmos professores universitários com natural tendência para verem tudo em função dos seus interesses imediatos quer por serem professores liceais acomodados à rotina e incapazes de fazerem frente às directivas de quem lhes está hierarquicamente acima; quer porque, em áreas diferentes da geometria, algumas alterações curriculares vindas “de cima” foram efectivamente necessárias e correctas e reforçaram o mito de que tudo o que vem de cima é bom[6]; quer ainda porque há sempre quem tenha receio de que a matemática seja uma violência mental aos coitadinhos dos estudantes, num mundo moderno de consumismo imediatista e de explosão e democratização escolar a qualquer preço. Ciclicamente porque, ao longo do século, se foi reconhecendo o erro das estratégias modernistas bem pensantes no que diz respeito ao ensino da geometria, o que pode ser constatado em modernas edições e reedições de manuais clássicos de geometria que caíram em desuso e foram recuperados em formas didáctica e visualmente mais aliciantes mas estruturalmente inalteradas.

Por muito que pese a alguns pedagogos de ocasião, a natureza da matemática não mudou nos dois últimos milénios (os teoremas das teorias matemáticas não envelheceram entretanto, tornaram-se clássicos) apenas se enriqueceu com novas teorias, poderosos meios de cálculo e de simulação ou visualização (programas informáticos e computacionais). Umas doses de Pedagogia, umas experiências diversificadas de prática pedagógica e umas lições de História da Matemática e de histórias da matemática e dos matemáticos não fazem mal a ninguém; pelo contrário, são um complemento importante e útil à formação básica do futuro professor, mas desengane-se quem pense que elas (estes breves guias ou os próprios manuais escolares) podem substituir a formação científica de base.

Preconizamos múltiplas abordagens possíveis, portanto, no ensino da geometria elementar, mas a partir de um fundo comum com alguma coerência e extensão, como o fornecido pelas monografias de Birkoff & Beatly, Lang & Murrow ou Moise & Downs indicadas na Bibliografia.

[6] Apesar do reconhecido exagero e carácter nefasto da imposição dos formalismos abstractos (bourbakistas) que acompanharam a (aliás boa) reforma dos programas e a introdução das

8. Duas interpretações

A propósito da introdução da noção de produto interno (em $\mathbf{R}^3$), parece-nos conveniente fazê-la preceder de interpretações motivadoras. Uma é retirada da área da Economia e outra da área da Física.

Se o custo unitário de certa mercadoria é ***c*** e são produzidas ***a*** unidades, o custo total é ***ca***. Se em vez de uma mercadoria são produzidas três, digamos que as componentes materiais de certo artefacto, com custos unitários c_1, c_2 e c_3, podemos representar o custo unitário do dito artefacto por um vector

$$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3), \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{c} = c_1\mathbf{e_1} + c_2\mathbf{e_2} + c_3\mathbf{e_3},$$

onde $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ os vectores da base canónica. E o número de unidades de cada componente do artefacto, a_1, a_2 e a_3, respectivamente, serão analogamente representadas por um vector

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{a} = a_1\mathbf{e_1} + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$$

O custo total do artefacto será, naturalmente, a soma dos custos parciais c_ia_i,

$$\text{custo total} = c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3$$

A esta quantidade chama-se produto interno (canónico) dos vectores ***c*** e ***a***, e denota-se $\boldsymbol{c} \bullet \boldsymbol{a}$.

Vejamos agora como se define habitualmente a noção de trabalho em Física. Imaginemos uma força (não nula) ***f*** actuando sobre uma partícula ou corpo pontual, colocado na origem dos eixos, provocando um deslocamento ***v*** (não nulo) em linha recta. Se a força ***f*** e o vector ***v*** têm a mesma direcção e sentido, isto é, se o ângulo θ entre ***f*** e ***v*** for nulo, então o trabalho W realizado pela força ***f*** é simplesmente o produto das normas (comprimentos) de ***f*** e ***v***,

$$W = \|\boldsymbol{f}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|$$

"matemáticas modernas" nos anos sessenta.

Em geral, o trabalho realizado por uma força depende da componente da força segundo o vector da deslocação, isto é, do produto $||\boldsymbol{f}||\ cos\ \theta$, cujo significado geométrico se constata na figura seguinte. O trabalho realizado é, então, o produto desta componente pelo comprimento do vector deslocação

$$W = ||\boldsymbol{f}||\cdot||\boldsymbol{v}||\cdot cos\ \theta$$

Esta quantidade escalar é positiva se $0 < \theta < 90º$, nula se $\theta = 0º$ e negativa se $\theta < 90º$.

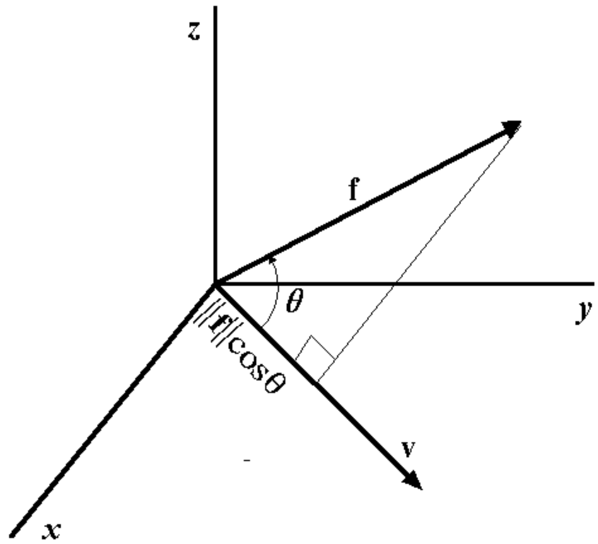


Figura 16

Prova-se que esta expressão para o trabalho realizado pela força ***f*** que produz o deslocamento ***v*** é igual ao produto interno de ***f*** e ***v***, mas a prova utiliza a chamada *lei dos cosenos* (v. figura seguinte para o significado dos termos[7])

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ \theta$$

Esta lei pode-se considerar uma generalização do teorema de Pitágoras, que corresponde ao caso particular $\theta = \pi/2$. Aplicando este teorema aos triângulos CBD e ABD obtemos

$$b^2 = BD^2 + x^2 \quad \text{e} \quad c^2 = BD^2 + (a - x)^2$$

Subtraindo membro a membro a segunda equação da primeira vem

$$c^2 - b^2 = a^2 - 2ax$$

Substituindo $x = b \cos \theta$ na última expressão vem a lei dos cosenos.

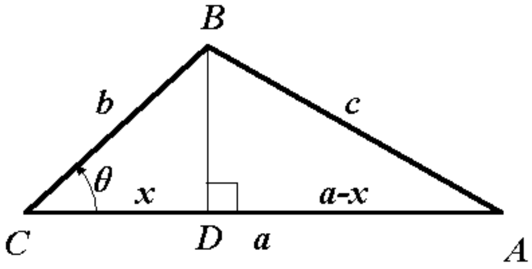


Figura 17

Supondo $\boldsymbol{a} = B - C = (a_1, a_2)$, $\boldsymbol{b} = A - C = (b_1, b_2)$, é claro que $c = \|A - B\| = \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|$ (v. figura). Mostramos que

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\| \cos \theta$$

De facto, pela lei dos cosenos tem-se

$$\begin{aligned} 2\,\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\| \cos \theta &= \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - ((b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2) \\ &= 2(a_1 b_1 + a_2 b_2) \\ &= 2(\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}), \end{aligned}$$

donde o resultado.

[7] Figura-se o caso de θ ser agudo, mas a lei também vale nos outros casos.

Bibliografia

P.V. ARAÚJO --- *Curso de Geometria*, Gradiva, 1998.

G.D. BIRKHOFF — "A set of postulates for Plane Geometry, based on Scale and Protactor", *Annals of Math.*, 33 (1932), 329–345.

*G.D. BIRKHOFF e R. BEATLY, R. — *Basic Geometry*, Third Edition, Chelsea, 1959.

D.M. BURTON — *The History of Mathematics, An Introduction*, Allyn & Bacon, Third Edition, 1997.

*C.H. CLEMENS e M.A. CLEMENS — *Geometry for the Classroom*, Springer-Verlag, 1991.

A.F. COXFORD e outros — *Geometria a Partir de Múltiplas Perspectivas*, Associação de Professores de Matemática, 1993.

*A.N.P. FERNANDES — *Elementos de Geometria para o Ensino Secundário*, Plátano Editora, 1981.

M.J. GREENBERG — *Euclidean and Non-Euclidean Geometry*, W.H. Freeman, Third Edition, 1993.

T.L. HEATH — *Euclid, the thirteen books of The Elements*, Vols. I, II e III, Second edition, Dover, 1956. Disponíveis na Internet:

http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/ java/ elements/ elements.html

D.W. HENDERSON — *Experiencing Geometry on Plane and Sphere*, Prentice Hall, 1996.

M. HENLE — *Modern Geometries*, The Analytical Approach, Prentice Hall, 1997.

D. HILBERT — *Foundations of Geometry*, Second English Edition (translated from the tenth german edition), Revised and Enlarged by P. Bernays, Open Court, 1971; *Fundamentos da Geometria*, trad. da 7ª ed. alemã (1930), com exclusão dos Apêndices, por M.P. Ribeiro e J.S. Paulo, Instituto para a Alta Cultura, 1952; *Fundamentos de la Geometria*, trad. da 7ª ed., com todos os Apêndices, Consejo Sup. de Inv. Cientificas, Madrid, 1991.

*J. HEILBRON — *Geometry Civilized, History, Culture and Technique*, Clarendon Press, Oxford, 1998.

*S. LANG, G. MURROW — *Geometry*, Second Edition, Springer, 1997.

*E.E. MOISE, F.L. DOWNS Jr. — *Geometry*, Addison-Wesley, 1982.

A.J.F. OLIVEIRA — *Geometria Euclidiana*, Univ. Aberta, 1995; *Transformações Geométricas*, Univ. Aberta, 1997.

E. PERRY — *Geometry*, Marcel Dekker, 1992.

*D.A. SINGER — *Geometry, Plane and Fancy*, Springer, 1997.

*E.C. WALLACE, S.F. WEST — *Roads to Geometry*, Second Edition, 1998.

* : especialmente recomendados.

GEOMETRIA

Introdução

Estou absolutamente convencida de que a Geometria contém um valor educacional único e também de que, apesar disso, tem sido, nos últimos tempos, dramaticamente relegada para um plano pouco condizente com esse valor.

No entanto, o assunto principal que me levou a escrever este texto não é sentimental; diz, na verdade, respeito a um conteúdo obrigatório dos programas de Matemática e trata-se, por isso, também de uma questão oficialmente prioritária na formação escolar dos nossos jovens.

Neste caso, como em muitos outros semelhantes, nem as minhas convicções nem sequer a obrigatoriedade oficial do assunto são condições suficientes para a sua implementação efectiva, na prática lectiva, dentro das salas de aula. Parece-me, em particular, transparecer, entre muitos professores de Matemática, uma postura de prática derrotista e uma atitude de quase reconciliação com o desaparecimento efectivo da Geometria, algumas vezes camuflado sob a forma de reconversão em conteúdos puramente algébricos, das nossas aulas de Geometria.

Pretendo pois argumentar que, por um lado, nem o desaparecimento da Geometria é inevitável nem a sua substituição por conteúdos algébricos puros é necessariamente eficaz e que, por outro lado, a aprendizagem da Geometria não depende tanto do tipo de conteúdos geométricos específicos nem dos próprios alunos como depende da vontade, do empenho e do esforço dos agentes transmissores que são os professores, em aumentar o número dos "sobreviventes" em Matemática.

Não se vislumbram razões de facto para que est**a Geometria** (elementar) que, desde sempre, esteve relacionada com a instrução fundamental dos cidadãos, não deva, agora e no futuro, continuar a ser um tema central da formação dos nossos alunos. Possui, reconhecidamente, qualidades estéticas únicas e possui, acima de tudo, capacidades de estimular o raciocínio matemático ímpares **podendo**, dizem, **desenvolver nos alunos**

uma autoconfiança intelectual genuína porquanto se trata de um assunto perfeitamente inteligível ao alcance de qualquer um deles.

Na actualidade, as directivas metodológicas internacionais apontam, fundamentalmente, na direcção de se considerar o aprendiz um participante activo que constrói os seus próprios conhecimentos, em vez de um mero receptor de conhecimentos já construídos. Deste modo, **pretende-se que a sala de aula de Matemática se converta em um laboratório matemático** onde, em particular:

i) estarão sempre presentes os compassos e as réguas, os esquadros e os transferidores e ainda os sólidos (de madeira e/ou acrílicos) tradicionais mas também onde se instalarão as calculadoras gráficas e outro apoio multimedia (televisor, videogravador, cassetes, etc.);

ii) existirão os materiais susceptíveis de se transformarem em modelos tais como as palhinhas e os arames, os elásticos e os espelhos, os geoplanos, as tábuas de madeira, os pregos e os martelos, etc.;

iii) estarão sempre disponíveis manuais escolares diversificados e outra bibliografia afim, para consulta e esclarecimento adicionais individualizados ou em grupo quer do professor quer dos alunos;

iv) reinará um ambiente contínuo de descoberta (heurístico) que é implementado e supervisado pelo professor mas deverá ser desenvolvido de forma rigorosa por todos.

Um alerta especial importa aqui referir: sabe-se, também, que **o uso esporádico dos materiais na aula de Geometria converte-os numa curiosidade em vez de os tornar ferramentas metodológicas valiosas**.

Tendo, na brochura anterior, optado por uma sensibilização metodológico/filosófica sobre a Geometria apresentei, na altura, três objectivos principais que suportam o seu ensino. Agora, assumindo essa sensibilização como ponto de partida já assente, concentrar-me-ei fundamentalmente em outras três questões, de carácter geométrico mais ao nível dos conteúdos que tentarei abordar sobre diversas perspectivas e que estão, ao mesmo tempo, relacionadas directamente com esses objectivos enunciados na brochura anterior:

i) a “Lógica” - a propósito do papel da Geometria no desenvolvimento de capacidades de raciocínio lógico/dedutivo;

ii) a “Trigonometria” - como ilustração das relações da Geometria com a resolução de problemas do mundo real, isto é, como exemplo das aplicações da Geometria e

iii) a “Programação Linear” - acerca do papel que a visualização (processamento e interpretação visuais) desempenha enquanto capacidade importante em, por exemplo, outros problemas matemáticos.

Além disso, as razões por detrás da selecção destes três tópicos científicos extravasaram o estabelecimento destas relações dicotómicas com os objectivos metodológicos apresentados na brochura anterior. As verdadeiras razões prendem-se, respectivamente, com:

i) Os **Professores** de Matemática - Durante este ano ouvi, muitas vezes e nas mais diversas ocasiões, os professores de Matemática do Ensino Secundário repetidamente comentarem (queixosos) e questionarem o desaparecimento da *Lógica* no novo ajustamento dos programas oficiais. Não me parece de todo verdade que a Lógica Matemática tenha desaparecido dos programas, simplesmente porque tal seria impossível numa disciplina (a Matemática) e sobre um assunto (a Geometria) onde o raciocínio lógico tem lugar inerente e não é necessariamente equivalente ao uso e abuso de um formalismo e uma manipulação abstractos de “V(s)” e “F(s)”.

Na Geometria não só se encontra a lógica formalizada como a podemos encontrar de uma forma muito mais útil, aplicada a situações concretas suportada pelo intuitivo, pelo visual e pelo experimental que servem, frequentemente, uma desejável compreensão efectiva de leis e regras de raciocínio lógico e que se opõem a um conhecimento mecânico (memorizado) de regras e leis teóricas traduzíveis em quadros e caracterizações, mais ou menos, extensos e rebuscados.

ii) Os **Alunos** de Matemática - Ao longo da minha carreira tenho, ano após ano, encontrado centenas de alunos, recém-chegados à Universidade, com um trauma particular a respeito da *Trigonometria*. No meu entender não há razão de fundo, relativa ao conteúdo, que possa justificar tal atitude de pânico por parte dos estudantes. A Trigonometria sugere-nos a resolução de problemas históricos perfeitamente actuais, permite-nos estabelecer as tão desejáveis ligações com outras disciplinas, como ainda nos pode ajudar a encontrar uma grande variedade de desafios do quotidiano cujo “esqueleto” matemático é simples e, em muitos casos, único.

iii) Os **Conteúdos** em Matemática - A *Programação Linear* é um assunto actual, também simples e verdadeiramente cativante porquanto relativo a conceitos geométricos básicos de fácil aplicação a situações reais deveras interessantes (por exemplo, em contextos industriais e comerciais). Trata-se, por conseguinte, de um tema particularmente apropriado para tratar os conhecimentos, eventualmente mais teóricos, que se relacionam com "rectas". Em traços gerais podemos dizer que a Programação Linear é um método para obtenção das "melhores" soluções de problemas que se expressam em termos de equações ou inequações do 1º grau, com duas variáveis. Estas soluções são, usualmente, encontradas a partir de esboços de linhas rectas.

Sobre a(s) dificuldade(s) da Geometria

A ênfase que colocamos no ensino da Geometria depende não tanto da própria Geometria como depende do modo como olhamos para o mundo e do modo como pretendemos a sociedade à nossa volta, isto é, como depende da geração dos alunos que a devem aprender. Assim, hoje em dia e sobretudo ao nível do ensino dito secundário, toda a álgebra, toda a trigonometria, todo o cálculo, etc., que ensinamos aos nossos alunos podem, se calhar mais do que em qualquer outra era, facilmente perder o seu verdadeiro valor e tornarem-se tão somente num ritual sem sentido (embora, porventura, mantendo a elegância) a menos que nós, professores, relembremos constantemente a função da Matemática na sociedade actual. Esta função, variável com o tempo e com a cultura, permite-nos ainda, em particular, colocar no devido lugar quer a Aritmética elementar quer, eventualmente por razões distintas, a Geometria.

Desde há vários anos que, pelo menos dentro dos círculos especializados em Ensino da Matemática, se recomenda uma "unificação" dos diversos ramos da Matemática e se destaca o papel d**a Geometria como elemento de ligação vital entre os tópicos (Álgebra, Cálculo, Estatística, etc.)**. Os métodos algébricos e os geométricos podem, pela sua natureza complementar, entrecruzilhar-se em vez de se sobreporem. Atente-se, em particular, nas seguintes "dificuldades":

Linguagem - a utilização de letras para os ângulos e para os arcos, para os segmentos e para os comprimentos, para os pontos e para os vectores, para as áreas e para os volumes, etc., isto é, as ferramentas algébricas reduzem, frequentemente, os problemas geométricos a sequências de silogismos (algébricos); poupa-se, deste modo, tempo e espaço mas introduz-se uma linguagem matemática simbólica que nem sempre é óbvia (que o digam a grande maioria dos nossos alunos) porquanto altamente abstracta. Ora, enquanto o professor possui um grau de especialização elevado e que pratica, de forma sistemática, durante muitos anos o aluno tem ainda uma visão muito reduzida das vantagens dessa linguagem algébrica (principalmente porque tradicionalmente lhe é imposta e introduzida em jeito de regras e mnemónicas de carácter memorizável).

Relações - uma curva (ente geométrico) estuda-se a partir de uma relação funcional (ente algébrico) do tipo $y = f(x)$ ou $F(x, y) = 0$, isto é, as ferramentas geométricas suportam de uma forma crucial o estudo do Cálculo (diferencial e integral). No entanto os alunos raramente têm oportunidade de perceber estas relações intertemáticas na sua verdadeira extensão porquanto muitas vezes os assuntos lhes são ensinados por professores distintos, com sensibilidades diferenciadas e, muitas vezes, em anos ou em ciclos lectivos mais ou menos distanciados.

Aqueles que acham que a Geometria é muito difícil têm, provavelmente, em mente um cenário onde o professor se refugia - porventura por desconhecimento das verdadeiras razões subjacentes ao seu ensino- nos métodos algébricos e onde o aluno se debate sozinho contra longas sequências de passos cuja dificuldade é, muitas vezes, minimizada pelo professor mas que o aluno sente penalizadora para ele próprio. Aqui faz sentido realçar o papel do **trabalho oral** e o do **trabalho em equipe** dentro da sala de aula: o aluno não precisa de começar por provar que é capaz de entender e de apresentar demonstrações escritas dos problemas geométricos, muito menos se forem demonstrações levadas a cabo individualmente e ainda menos se essas demonstrações têm lugar em testes e em exames.

Exemplos

Sobre a complementaridade dos diversos tópicos matemáticos e sobre algumas questões de linguagem apresento, de seguida, dois exemplos que tentarei explorar sob perspectivas distintas sem, contudo, me alongar demasiado em nenhuma delas e nunca perdendo o sentido de que este texto se destina a um público muito especial[1], -porquanto especializado e capaz de estudar, de criticar, de fazer adaptações em vez de se limitar a reproduzir de forma papagueada e impessoal,- que são os professores de Matemática.

1º Exemplo - *Qual a maior área rectangular que é limitada por um dado perímetro?*

(suponhamos que um agricultor tem 200 metros de vedação para limitar um campo, por forma a que nele caiba o maior número de ovelhas)

<u>*Aritmética:*</u>

A natureza do problema vê-se considerando alguns produtos (de números naturais) $1\times 99,\ 2\times 98,\ 3\times 97,\ ...,\ 50\times 50,\ ...,\ 99\times 1;$ a partir dos quais se "intui" que a área máxima corresponde à forma quadrada. Isto é, o campo de maior área é o campo quadrado com $50\ metros$ de lado.

<u>*Cálculo:*</u>

Observe-se, em particular, como a "simetria" do problema é destruída quando este se aborda pelo método tradicional do cálculo, nomeadamente:

Com $A = x\,y = x\,(100 - x)$,

vem $\dfrac{dA}{dx} = 100 - 2x.$

Ora $\dfrac{dA}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = 50.$

E como $\dfrac{d^2A}{dx^2} = -2$, trata-se de um máximo quando $x = y.$

Ou seja, neste caso, quando

$$x = y = 50.$$

[1] O papel de simples exemplos ilustrativos concretos de afirmações, eventualmente mais teóricas, que vão sendo apresentados ao público especializado destinatário deste texto e que aqui se realça a propósito destes dois problemas matemáticos, vai continuar a manter-se ao longo das secções seguintes.

Álgebra:

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\ (x+y)^2\geq 4xy$$

$$\Leftrightarrow\ xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

e a igualdade ocorre quando $x=y.$

Como, neste caso, se tem por hipótese que $2x+2y=200,$ obtém-se finalmente

$$x=y=50.$$

Abordagem Paramétrica:

Seja $x=50+t.$

Então $y=50-t$

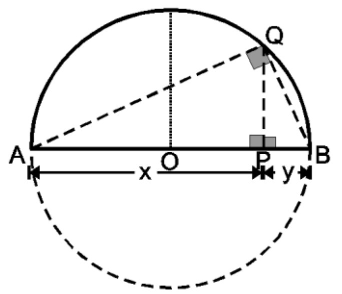
e portanto $xy=2500-t^2\leq 2500.$

A igualdade ocorre quando $t=0,$ isto é, quando

$$x=y=50.$$

Abordagem Geométrica:

Considere-se a circunferência de diâmetro $\overline{AB}=100,$



Sejam $x = \overline{PA}$ e $y = \overline{PB}$. Então, por construção geométrica (com régua e compasso), tem-se

$$x\,y = \overline{PA}\,.\,\overline{PB} = \overline{PQ}^{\,2}$$

que é máximo quando $[PQ]$ está na posição (simétrica) a ponteado. Ou seja, quando x e y são iguais e como o diâmetro da circunferência é $x + y,$ que, por hipótese, é $100\ (metros)$ tem-se finalmente

$$\overline{PA} = \overline{PB} = 50.$$

Trigonometricamente:

A partir da figura anterior, seja $\angle QAP = \theta.$

Então $\quad x = 100\ \cos^2\theta, \quad y = 100\ \mathrm{sen}^2\,\theta$

e portanto $\quad x\,y = 10000\ \cos^2\theta\ \mathrm{sen}^2\,\theta = 2500\ \mathrm{sen}^2\,2\theta;$

cujo máximo é $\quad 2500.$

Donde se conclui que

$$\theta = 45^o;$$

E, portanto

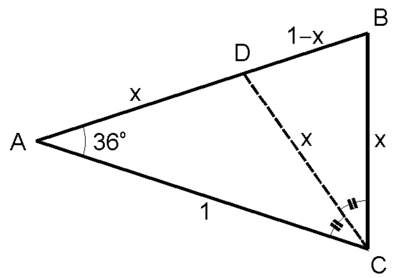
$$x = 100\cos^2 45^o = 50 \ \text{ e } \ y = 100\ \mathrm{sen}^2\,45^o = 50$$

<u>Comentário:</u> Este problema de máximos (e mínimos) é, na verdade, uma variação do resultado sobre médias aritmética e geométrica cuja origem se traça, pelo menos, até à Grécia Clássica:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a\,b}$$

Serve, em particular, como exemplo das inúmeras oportunidades para que, dentro da sala de aula de Matemática, professor e alunos explorem as ligações entre os diversos tópicos, estabeleçam as ligações entre a Matemática abordada em diversos níveis de escolaridade, dismistifiquem as resoluções únicas dos problemas de Matemática, abordem os mesmos resultados sob perspectivas diversificadas e a propósito de problemas diferenciados, etc., etc..

2º Exemplo- *O estudo de um triângulo isósceles* $[ABC]$ *no qual* $\angle BAC = 36^o$ *e a recta* CD *bissecta o ângulo* ACB.



<u>*Para iniciados:*</u>

É um exercício adequado a demonstração de que os segmentos de recta $[AD]$, $[DC]$ e $[BC]$ têm o mesmo comprimento; e, dever-se-á acrescentar (a demonstração de) que este é o único triângulo isósceles que conduz a esta propriedade.

Fazendo, por exemplo, $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$ e $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{BC} = x,$ verifica-se que:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}.$$

O que dará ao aluno do ensino Básico uma oportunidade para rever as equações do 2^o grau:

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

obtendo-se, para este problema, uma única solução que é

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

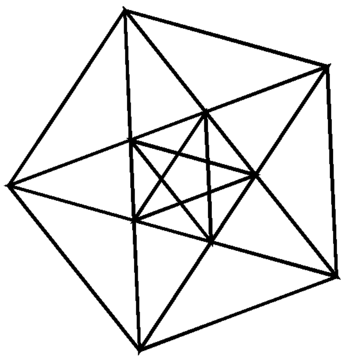
A “razão de ouro” é portanto

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{\overline{DB}}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{\overline{BC}}} = \frac{1}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}.$$

Aqui existe uma oportunidade para rever os números irracionais e também para "experimentar" a calculadora, nomeadamente porque

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cong 1.618034...$$

É ainda um exercício óptimo pedir aos alunos que "encontrem" os triângulos "$36^o-72^o-72^o$" num pentágono regular e num pentagrama como o da figura seguinte:



Pentagrama(s) Regular(es)

Mas os alunos, mesmo os do Ensino Básico, não têm que parar no pentagrama. O professor pode ainda mostrar-lhes os 4 poliedros regulares ditos de *Kepler-Poinsot* e pedir-lhes que, também neste caso, se descubra a "razão de ouro".

A construção com régua e compasso do pentágono regular também vale a pena ser experimentada com estes alunos.

E continuando:

Neste problema podemos seguir o caminho que nos conduz à trigonometria básica; assim temos:

$$\text{sen } 18^o=\cos\, 72^o=\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

E continuando:

O mesmo resultado obtém-se a partir da solução da equação trigonométrica

$$\cos\, 3\theta=\cos\, 2\theta,$$

$$3\theta = \pm 2\theta + 360^o k,$$ com k número inteiro.

$$\Rightarrow \theta = 72^o k.$$

Também se tem que,

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

equivalente a

$$4c^3 - 2c^2 - 3c + 1 = 0.$$

O que nos dá uma oportunidade de trabalhar a factorização de polinómios (o Teorema do Resto):

$$(c-1)(4c^2 + 2c - 1) = 0,$$

$$\Leftrightarrow c = 1 \vee c = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Portanto, $\cos 72^o = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, como antes.

O significado da outra raiz, $\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)$, é o coseno de 144^o - e tem-se mais outra oportunidade para estabelecer "pontes" - o que nos conduz a:

$$\cos 36^o = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

O valor exacto de

$$\cos 36^o \times \cos 72^o = \frac{1}{4},$$

dever-se-ia também obter usando a teoria das equações de 2^o grau e verificado por outros métodos, quer algébricos quer geométricos.

O aluno que, com a ajuda da turma (professor incluído), chegou ao resultado

$$\operatorname{sen} 18^o = \cos 72^o = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

poderá sentir alguma dificuldade em chegar até ao significado de $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Para obter $\cos 36^o$, poderá raciocinar da seguinte forma:

$$\cos 36^o = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\, 18^o = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{8-\left(6-2\sqrt{5}\right)}{8} = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

ou

$$\cos 72^o = 2\cos^2 36^o - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Portanto,

$$\cos^2 36^o = \frac{\sqrt{5}+3}{8} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2.$$

Aqui, existe uma grande oportunidade para o professor mais ambicioso realçar o facto de os números da forma $a + b\sqrt{5}$, com a e b racionais serem um *corpo*, explicando-se, a estes alunos, que são números que, quer os somemos, subtraiamos, multipliquemos ou dividamos (quaisquer dois deles) ainda chegaremos a um número da mesma forma.

Finalmente:

Não é possível abordar o tema do "número de ouro" sem passar algum tempo com a sucessão $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$, a que chamamos de *Fibonacci*. Deste modo, é também possível passar (rever, abordar pela primeira vez ou, simplesmente, referenciar) pelas relações "por recorrência", pelo desenvolvimento binomial e até pelas fracções contínuas.

Comentário: Relações algébrico/trigonométrico/geométricas do mesmo tipo podem abordar-se com as razões trigonométricas de 15^o, $22\frac{1}{2}^o$, etc., mas os ângulos que tratámos no exercício anterior são particularmente importantes por causa da ligação com a "razão de ouro"; podendo, assim, estabelecer-se uma desejável cooperação entre o professor de Matemática e os colegas das áreas das artes visuais e tecnológicas da escola assim como com os colegas de Biologia a propósito da árvore genealógica do "zangão" (sucessão de Fibonacci). Salientando ainda a relação estreita entre a Matemática que se estudou anteriormente, aquela que se está estudar no presente e aquela que o aluno encontrará no futuro da sua formação académica.

Lógica

A Filosofia começou quando o Homem começou a questionar-se sobre os quês e os porquês do mundo que o rodeava. Um exemplo clássico desta busca filosófica é a descrição, pelos filósofos Gregos, de que o mundo é composto por 4 elementos, nomeadamente, a Terra, o Fogo, a Água e o Ar[1]. Segundo Platão o mundo real era um "mundo de forma" onde:

um triângulo equilátero representava a Terra,

um triângulo isósceles simbolizava o Fogo,

um triângulo rectângulo simbolizava o espírito da Água,

um triângulo escaleno representava o Ar.

Associada a estas preocupações filosóficas desenvolve-se a Ciência (a Geometria, em particular, enquanto modelo científico –lógico- por excelência). Hoje em dia a Ciência está de tal forma desenvolvida e oferece-nos tanta informação acerca do **como** que temos, muitas vezes, a sensação de que sabemos o **porquê**. As questões filosóficas que se colocaram na Grécia Clássica podem ou não já ter sido respondidas e, no entanto, hoje, como no passado, interessa perceber o porquê das coisas e não buscarmos tão somente as respostas para o como.

Sobre o desaparecimento de "Os Elementos"

Quer se queira quer não se queira, a velha atitude aristocrática em relação à Matemática, baseada nos ideais platónicos, desapareceu em grande parte da sociedade contemporânea. Levantam-se, outra vez, questões fundamentais sobre a natureza, o significado e os objectivos da Matemática e do seu ensino mas a Matemática já não se destina só a uma elite intelectual e, em última análise, nós, os professores de Matemática, somos agora vistos como meros oficiais recrutados para uma determinada profissão que, desejavelmente, nos satisfaz.

[1] Para uma descrição mais detalhada mas, ao mesmo tempo, suficientemente simples sobre este assunto pode, por exemplo, ler-se "Conceitos Fundamentais da Matemática" do Professor Bento de Jesus Caraça.

Quando procuramos as razões pelas quais, no Ensino da Matemática, se abandonam determinados objectivos educativos e se reformulam ciclicamente os programas curriculares, estamos, na prática, a recuperar tempo e esforços; podemos seguir por atalhos que os nossos antepassados não podiam prever; pode-se adaptar o nosso ensino às exigências sociais do nosso público e, acima de tudo, podem-se desempenhar as funções de professor com as certezas e as justificações sólidas do que se está a fazer e não agir por mímica ou por obediência cega a directivas oficiais. O entendimento, por parte do professor de Matemática, das razões subjacentes às reformas curriculares é, assim, uma mais valia, no desempenho profissional.

Referi, anteriormente, a atitude de derrota em relação ao desaparecimento da Geometria nas nossas escolas embora a Geometria, enquanto conteúdo educacional, nunca tenha desaparecido dos programas oficiais; o que sim desapareceu foi a Geometria, dita de Euclides. Interessa, antes de mais, perceber que, ao abandonar os princípios (platónicos) patentes na obra de Euclides, a Geometria não se tornou numa área do saber menos fundamental, nem sequer numa actividade mental menos admirável. E, no entanto, associados a este desaparecimento estão, por um lado, o início da tal postura derrotista nos professores de Matemática e, por outro lado, o início das directivas metodológicas sobre os laboratórios de Matemática.

Tendo pois claro que, uma coisa é o currículo que se programa (aquele que é ditado oficialmente e que deveria, em teoria, ser cumprido) e outra coisa, por vezes completamente distinta, é o currículo que se ensina (aquele que os professores, na prática, entendem, sabem, podem e/ou querem cumprir)[2], interessa apostar numa aproximação efectiva entre estes dois conjuntos de saberes, nomeadamente à custa do esclarecimento, junto dos professores, das razões subjacentes às reformas curriculares.

Tornou-se comum referenciar a História da Matemática como tema relevante na instrução Matemática contemporânea. Enunciam-se, cada vez mais extensamente, razões de peso para esse recurso educacional em Matemática; existem, cada vez mais ao nosso dispor, materiais (bibliografia e videogramas, por exemplo) com sugestões relevantes sobre possíveis abordagens histórico/didácticas de temas matemáticos; existe também, cada vez mais, um número crescente de especialistas interessados na

[2] Existe ainda um terceiro currículo: aquele que, efectivamente, os alunos aprendem e que também, muitas vezes, tem poucas semelhanças quer com o currículo programado quer com o que lhes foi ensinado. O estudo das semelhanças e das diferenças entre estes três currículos é um assunto importante e deveras interessante.

recuperação de textos matemáticos históricos por forma a estabelecer relações científico/culturais entre os conteúdos matemáticos, as suas raízes históricas e as suas raízes culturais. No entanto, existe outra razão igualmente importante para que os professores de Matemática se interessem pela História da Matemática em geral e, em particular, pela História do Ensino da Matemática: o reconhecimento de que as decisões curriculares são decisões que assentam em tradições (de carácter mais ou menos nacional) que, por sua vez e por razões específicas bem identificadas, variam e podem inclusive cessar de ser relevantes, em determinado momento e em determinadas sociedades.

Actualmente, "*Os Elementos*" de Euclides já não são os principais livros-texto nas nossas escolas; já nem sequer constituem, na maioria dos casos, suporte e referência fundamentais na escrita dos livros que os substituíram e, até já, desapareceram da grande maioria dos planos de estudo dos cursos de Matemática nas nossas Universidades. No entanto, os 13 livros (escritos por volta do ano 300 a.C.) que compõem "*Os Elementos*" e englobam todos os sucessos da Matemática Grega foram, durante muitos séculos e ininterruptamente, a base de todo e qualquer ensino de Matemática no mundo Ocidental. Durante a primeira metade do nosso século, estes livros mantinham-se ainda como "o" tratado essencial do ensino da Matemática na maioria das escolas e das universidades do Ocidente.

Justifica-se, pelos motivos apresentados anteriormente, uma análise, ainda que rápida, das razões histórico/sociais por detrás deste desaparecimento recentemente consumado após tantos séculos de supremacia. São duas as principais razões para o abandono, nos currículos contemporâneos, desta obra ímpar; nomeadamente:

a) Por um lado, Euclides (e também Platão) professava, - veja-se este facto à luz da sociedade em que estava inserido- uma metodologia de ensino de alguma forma distante de objectivos mais concretos e mais populares da sociedade moderna. A exposição dos temas em "Os Elementos" afigura-se, por isto, desprovida de incentivos pedagógicos para o aprendiz contemporâneo; por exemplo, a célebre frase de Platão de que:

Não há caminhos reais para a Geometria...,

identifica-se com um ideal metodológico de ensino da Geometria baseado em pressupostos de sacrifícios subjacentes a esse caminho. Ora, esta filosofia de instrução da Grécia Clássica e, eventualmente, de muitas outras civilizações posteriores que comungavam dos mesmos princípios apresenta-se, na sociedade actual, como directiva educacional pouco condizente com **uma instrução que se pretende agora mais simplificada, mais concreta e mais prática, mas também mais alargada a mais cidadãos**.

b) Por outro lado, "Os Elementos" reconheceram-se, na altura da sua abolição como texto básico dos nossos estabelecimentos de ensino, como um tratado muito extenso e, por conseguinte, também pouco condizente com **ideais mais imediatistas e também cientificamente mais diversificados da sociedade moderna**.

Sendo uma exposição longa de conteúdos e não dizendo sequer respeito a outros tópicos matemáticos entretanto já conhecidos foi, por isso, substituída por outras abordagens que parecem ser mais apropriadas ao ritmo de aprendizagem requerido pelo cidadão moderno. A sociedade contemporânea mostra-se, por exemplo, adversa a aceitar um tratamento científico pouco diferenciado de resultados que, segundo o seu entendimento, têm uma importância muito variável. Criticou-se, especialmente, a apresentação repetitiva de resultados secundários, a igualdade na ênfase com que se tratam teoremas principais e teoremas secundários e a demora na apresentação de resultados verdadeiramente importantes; refere-se, a este respeito, o caso do famoso Teorema de Pitágoras que só aparece (no Livro I de "Os Elementos") depois de serem enunciados e demonstrados 40 outros teoremas e sem a utilização de qualquer destaque especial.

Em resumo, foram estas as duas principais razões pelas quais desapareceu das nossas escolas um texto básico de qualidade inigualável e que sobreviveu como texto fundamental apesar de, ao longo dos séculos, ter sido sujeito a um escrutínio cerrado por parte de matemáticos conceituados, nomeadamente a propósito do "*Postulado das Paralelas*".

Que fiquem pois esclarecidos, os professores de Matemática, sobre os imperativos sociais contemporâneos por detrás do abandono de "*Os Elementos*". Em sua substituição, destacam-se, no caso do Ensino da Geometria, para os alunos da actualidade:

- o abandono de exposições longas;
- o abandono de repetições fastidiosas;
- o abandono de palestras matemáticas de carácter eminentemente teórico;

– o abandono de um tratamento monotónico dos diversos resultados;...

Por outro lado, o estudo da História do Ensino da Matemática como meio de esclarecimento de dúvidas metodológicas que se colocam ao professor de Matemática a propósito do desaparecimento de "*Os Elementos*", mantém:

– um tratamento rigoroso;
– um tratamento lógico[3];
– um tratamento consistente e compatível dos entes geométricos;

isto é, os termos indefinidos, as definições exactas, as deduções válidas e/ou inválidas, etc., jamais foram excluídos do ensino da Geometria e, muito especialmente, dos programas do Ensino Secundário.

Sobre a "Lógica"

A *Lógica,* enquanto ramo científico, trata dos princípios de inferência válida e a sua origem traça-se - na sequência do que atrás referimos a respeito dos filósofos cidadãos de uma sociedade, à Grécia Clássica, que se revelou particularmente apropriada a estas reflexões - até Aristóteles (384 - 322 a. C.)[4]. No entanto, parece óbvio aceitar que, agora e sempre, os homens, mesmo antes de Aristóteles, fazem e discutem inferências.

Um dos grandes objectivos que pretendemos alcançar com o estudo da Geometria continua a ser - como já salientei na brochura anterior e como pretendi justificar nos parágrafos anteriores - o desenvolvimento das capacidades de raciocínio lógico que, de resto, usamos intensamente no nosso dia-a-dia: quando, simplesmente, decidimos o que vestir pela manhã, quando mantemos uma qualquer conversa com um amigo, quando ouvimos uma notícia na telefonia, quando lemos uma história num livro, quando assistimos a um filme ou quando planeamos o que fazer numa qualquer situação requer-se um raciocínio lógico. Os mal-entendidos são comuns e, frequentemente, tiramos conclusões que estão incorrectas ou, pelo menos, são questionáveis. A Lógica, por isso, não é tão somente uma ferramenta para o matemático ou para o lógico; é

[3] Neste contexto, interessa frequentemente distinguir "lógico" de "formal".
[4] A Lógica de Aristóteles era baseada numa espécie formal de argumento a que chamamos *silogismo*.

usada por cada um de nós, em cada dia e em quase todos os aspectos da nossa vida. **Raciocinar de uma forma razoável** afigura-se, por isso, cada vez mais importante e tal pode, de uma forma simples, ser desenvolvido, nas aulas de Matemática, **com a ajuda da Geometria**.

As características da Geometria inspiraram a Humanidade, ao longo dos tempos e em muitos outros campos do saber, da moral, da política, etc., a organizar as suas ideias segundo os mesmos princípios. Assim, no estudo da Geometria, encontram-se inúmeras oportunidades para se usar/desenvolver o raciocínio.

A Geometria foi o primeiro sistema de ideias desenvolvido pelo Homem segundo o qual uns poucos e simples factos tomados como pontos de partida foram, posteriormente, usados para obter muitos outros factos menos simples. Tal sistema diz-se dedutivo - a Geometria é, assim, um modelo de um sistema lógico - e à lógica que usamos nas demonstrações geométricas costumamos chamar **dedução**. Enquanto ciência dedutiva, a Geometria cumpre determinados requisitos básicos, nomeadamente:

1) certos termos e certas proposições são “primitivos”, isto é, têm que ser aceites, respectivamente como “indefinidos” e “sem demonstração”;
2) todos os outros termos e proposições têm que ser derivados dos “primitivos”.

Sobre os termos indefinidos

O seguinte diálogo passa-se numa sala de aula e pertence a um filme dos “Bucha e Estica”.

> *Professora*: O que é um cometa?
> *Um dos alunos*: Uma estrela com uma cauda.
> *Professora*: Quem é que é capaz de me dar um exemplo de um cometa?
> *Estica*: O Rin-Tin-Tin.

A palavra “cometa” foi, neste diálogo, interpretada de maneira diferente mas igualmente lógica.

Em Geometria, como no dia-a-dia, algumas palavras podem ter significados diferentes que, regra geral, subentendemos a partir do contexto onde estão inseridas. Outras palavras, apesar de apresentarem um único significado no dicionário, podem significar coisas diferentes para pessoas diferentes. As diferenças de significado podem acarretar desentendimentos, de maior ou menor gravidade, entre, em particular, professor e alunos. Por exemplo:

"Pode um losango ser um quadrado? E um quadrado pode ser um losango?", que, neste caso, afinal se resumem a "O que é um losango e o que é um quadrado?".

Interessa, em primeiro lugar, garantir que, na sala de aula, existe unanimidade (há exactidão) nas definições dos termos geométricos, por forma a estabelecer um entendimento básico entre aquilo que professor e alunos dizem e entendem entre si.

Está-se, por isso, perante a questão de se saber por onde começar? Parece lógico começar pelo princípio, isto é, pelos termos mais simples. Termos suficientemente simples tais como "ponto" ou "linha"[5] são, na realidade, **termos indefinidos,** isto é, não se definem. A respeito deles só podemos, com rigor, dizer que, em Geometria, "um ponto é um ponto é um ponto..." e assim sucessivamente[6] e, embora possa parecer que designando-os como "indefinidos" estamos, porventura, a abandonar a procura de uma definição, a verdade é que para definirmos qualquer palavra precisamos de outras palavras que, por sua vez, precisam ainda de outras palavras e esta cadeia tem, necessariamente, um fim[7].

Então escolhem-se termos como "ponto" ou "linha", isto é, especialmente simples para serem os primeiros dessa cadeia de palavras que caracterizam outras palavras e chamamo-lhes termos indefinidos. A partir daí, servem como base para as definições de outros termos. Para além de "**ponto**" e "**linha**" temos, em Geometria, outros termos especialmente simples como é o caso de "**plano**" e "**conjunto**" que também **são termos indefinidos**.

[5] No presente contexto lógico dever-se-á entender "linha recta" sempre que o termo "linha" for referido. Posteriormente, a respeito dos postulados, se aprofundará esta identificação.

[6] Aproveito a oportunidade para fazer uma chamada de atenção particular, a respeito do rigor exigível nas aulas de Matemática: enganam-se os alunos quando lhes são apresentadas "definições" para estes termos (ponto e linha, por exemplo); rigorosamente falando, eles não se definem.

[7] As definições ditas circulares, isto é, onde se utiliza na caracterização o termo que se está a definir não são verdadeiras definições mas, regra geral, os livros-texto que temos à nossa disposição são, no caso específico das definições em Geometria, particularmente "descuidados" com estas pseudo/definições.

Depois de alguns termos simples terem sido aceites como indefinidos, pode-se finalmente começar a definir outros termos.

Pergunto:

a) É possível definir qualquer termo geométrico?

b) Euclides tentou definir "ponto" dizendo que "é o que não tem partes". Qual teria sido a sua intenção?

Sobre as definições

Conjunto, ponto, linha e plano são termos suficientemente simples para que os aceitemos como indefinidos. E espaço?

Espaço, define-se como sendo o conjunto de todos os pontos. Com esta definição queremos pois dizer que a palavra "espaço" e a frase "conjunto de todos os pontos" têm exactamente o mesmo significado; isto é, não só podemos afirmar que "espaço" é "o conjunto de todos os pontos", como também podemos afirmar que "o conjunto de todos os pontos" é o "espaço". Ora, cada uma destas afirmações é a **recíproca** uma da outra e sabemos que a recíproca de uma proposição verdadeira pode ou não ser uma proposição verdadeira. No entanto, a natureza de uma **definição** acarreta como consequência que as duas proposições recíprocas são sempre verdadeiras.

Acabámos de ver que uma consequência do nome "definição" é a garantia de que a sua recíproca também é verdadeira, ou seja

Se uma afirmação é uma definição, então a sua recíproca é também verdadeira.

Pergunto:

a) Podemos concluir que se a recíproca não é verdadeira, a afirmação não pode ser uma definição? Porquê?

Sugiro:

a) Tente escrever uma definição clara e concisa que explique o seu entendimento do termo "linha" (recta).

b_1) À luz do que se afirmou a respeito de definições, defina-se, por exemplo, “triângulo equilátero”.

b_2) Separem-se as afirmações recíprocas envolvidas na definição.

b_3) Introduza-se o significado de “se e só se”, numa definição.

Sobre os postulados

Vimos, anteriormente, que a palavra “linha” está entre os termos que deixaremos por definir. A este respeito o matemático D’ Alembert escreveu um dia que:

É uma desgraça o facto da Geometria não me dar uma definição de linha...

Tente-se[8], por desafio, por teimosia ou simplesmente por curiosidade, escrever uma definição clara e concisa que explique o conceito de linha. Suponhamos a este respeito que, em vez de aceitarmos “linha” como termo indefinido, tentávamos definir “linha” a partir, por exemplo, de “ponto” e “conjunto” (tendo-os aceites como indefinidos).

Pergunto:

Porque é que, em particular, a seguinte definição é insatisfatória?

Uma linha é um conjunto de pontos!

A Geometria, ou qualquer outro sistema dedutivo, comporta-se tal e qual um jogo. Para se jogar bem, em Geometria como nos outros jogos, têm que se conhecer e aceitar as regras básicas. Além disso, para que o “jogo” seja jogável interessa, pelo menos, garantir que:

– as regras básicas são *suficientes*, isto é, dizem-nos o que fazer em qualquer situação que possa surgir;

[8] Acredito que para efeitos de uma compreensão efectiva da Matemática a pergunta “E se não fosse assim?” ou o desafio “Suponhamos que não!!” deveriam fazer parte obrigatória da lista das perguntas que o professor faz a si próprio e também das que faz aos seus alunos porquanto são altamente esclarecedoras da génese dos próprios conceitos matemáticos. São, por conseguinte, altamente recomendáveis na prática lectiva diária.

– as regras básicas são *consistentes*, isto é, não se contradizem umas às outras nem nos conduzem a contradições[9].

As regras básicas em Geometria, que se fixam de uma vez por todas e que, de facto, é necessário aceitar antes de iniciar o "jogo", chamam-se **postulados**[10]; são criações humanas e o aspecto que o assunto toma depende directamente da natureza dos postulados que se escolhem. Em Geometria encontramos ainda algumas grandes vantagens relativamente a outros jogos; em particular, em Geometria existem muito menos regras (postulados) do que, por exemplo, no futebol e (outra vantagem) em Geometria, os postulados não são tão subjectivos nem variam tanto como as regras do futebol.

Diferentes conjuntos de postulados geométricos deram, ao longo dos tempos, origem a diferentes geometrias e o facto de, durante muitos séculos, a Geometria Euclideana ser a única Geometria que se conhecia deve-se, basicamente, à duração da pesquisa que se foi desenrolando até que o Homem se apercebesse de que era possível "jogar" com diferentes conjuntos de regras.

Hoje em dia, aceitando os postulados da Geometria Euclideana[11] e complementando-os com algumas regras algébricas elementares, estamos em condições de iniciar um "jogo" deveras interessante e importante com os nossos alunos do Ensino Secundário.

Os postulados geométricos tratam de conjuntos de pontos e das suas relações[12] e uma maneira lógica de começar é pelos termos indefinidos: "ponto", "linha" e "plano". Uma vez que não possuímos definições que nos dizem o que é que estas palavras significam, dar-lhes-emos significado postulando algumas relações entre esses termos[13]:

1º Postulado: Para quaisquer dois pontos, existe uma única linha que passa por eles.

---

[9] No entanto, no raciocínio dedutivo em Geometria é, muitas vezes, útil tentar chegar, de forma deliberada, a contradições; fala-se, nesse caso, de "dedução indirecta".

[10] "Postular" significa "pedir para aceitar".

[11] O desaparecimento de "Os Elementos" de Euclides não significaram o desaparecimento, dos nossos currículos, dos postulados de Euclides.

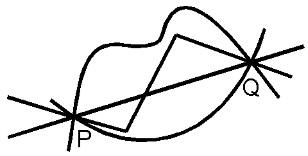
[12] Relembre-se, a este propósito, o que escrevi na brochura anterior a respeito da ordem a seguir: primeiro os factos, depois as propriedades e, finalmente num nível de maturidade superior, as relações.

[13] E resolvemos, desta forma, o problema de D'Alembert e, eventualmente, de muitos dos nossos alunos.

<u>Sugiro</u>:

Uma análise crítica a propósito das razões subjacentes aos enunciados dos postulados geométricos. Por exemplo:

a) Se não pensássemos numa linha como sendo **recta**, existiriam muitas linhas determinadas por dois pontos (P e Q); veja-se, a este respeito, a seguinte figura:



b) Se uma linha fosse recta mas finita, teríamos também muitas linhas rectas a passar por dois pontos (quaisquer dois segmentos de recta que passassem por esses pontos).

Contudo se uma linha for recta e de comprimento infinito parece haver *só uma linha que passa por dois pontos dados*. Assumimos que tal é verdade e chamamos-lhe um postulado.

2º Postulado: Uma linha contém pelo menos dois[14] pontos.

<u>Sugestões lectivas:</u>

Abordem-se, a propósito deste postulado, por exemplo:

- as definições de *pontos colineares* e de *rectas concorrentes*;
- justifique-se a existência deste postulado salientado, em particular, que uma linha recta também contém mais do que dois pontos;
- o número máximo de pontos que duas quaisquer linhas rectas podem ter em comum.

3º Postulado: Para quaisquer 3 pontos não colineares, existe exactamente um plano que os contém.

4º Postulado: Se 2 pontos pertencem a um plano, então a recta que passa por esses pontos está no plano.

[14] No nosso contexto geométrico quando nos referimos a *dois* entes pretenderemos sempre dizer que não são o mesmo ente.

Mais sugestões lectivas:

Salientem-se, em particular:

- as convenções (para representar um plano, por exemplo);
- os cuidados especiais (embora os nossos desenhos tenham limites, é bom não esquecer que, por exemplo, os planos são superfícies ilimitadas);
- os modelos físicos (usem-se, por exemplo, 3 pequenos cilindros de cortiça - rolhas - com as mesmas dimensões para representar pontos e um rectângulo de plástico transparente para representar um plano que se assenta sobre os pontos: experimente-se remover uma ou duas das rolhas, experimente-se colocar as rolhas em posições particulares por debaixo do plano ou ainda acrescente-se ao modelo um pau colorido - mikado - que passe por 2 dos pontos ou 2 paus que passem pelos três pontos, etc., etc..)

A informação que estes postulados nos dão pode ser utilizada para demonstrar outras relações entre pontos, rectas e planos. Por outras palavras, **se aceitarmos estas quatro afirmações como sendo verdadeiras, podemos demonstrar - quer geométrica quer algebricamente - a veracidade de outras afirmações, usando um raciocínio dedutivo.**

Pretendendo, acima de tudo, evitar as situações onde, a propósito do estudo da Geometria no Ensino Secundário, ouvimos dizer que "*as respostas são simplesmente uma questão de opinião*"[15]; interessa relembrar que existem outros postulados, alguns dos quais da área da "aritmética", isto é, outros postulados que não enunciaremos mas que importa relembrar para efeitos do tal desejável rigor e entendimento na comunicação entre professor e alunos na aula de Matemática e a propósito do ensino da Geometria dizem, por exemplo, respeito a:

- a distância entre 2 pontos e a correspondência entre pontos de uma recta e o conjunto dos números reais;
- a medida de ângulos e a correspondência entre ângulos e um intervalo de números reais;

[15] Cito, neste caso, o comentário que ouvi ser proferido por um aluno que encontrei recentemente numa aula de Geometria de uma Escola Secundária.

e ainda:

- os postulados da reflexividade, da simetria e da transitividade da relação de igualdade entre 2 números reais;
- os postulados do “corpo” dos números reais;
- etc., etc..

Sobre tirar conclusões

Aceitar a veracidade de determinada informação é o que nós fazemos, a toda a hora, quando ouvimos, apalpamos, saboreamos, cheiramos ou vemos os factos do mundo à nossa volta, isto é, quando fazemos uso dos nossos 5 sentidos. A seguir, tiramos conclusões e essas conclusões - verdadeiras, falsas ou simplesmente incertas - englobam uma justificação, isto é, um raciocínio subjacente[16].

Ora, em Geometria, repetimos tão somente este processo geral de abordar os problemas com que somos confrontados: partimos dos factos, a que chamamos **postulados**[17] (cuja veracidade ou falsidade não é ditada pela Lógica), **que** também **nos são ditados pelos sentidos** e vamos (com a ajuda da Lógica) deduzindo conclusões que pretendemos verdadeiras.

Simbolicamente traduzimos esta abordagem, escrevendo, por exemplo:

- *Se A, então B*
- *A implica B*
- $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$
- *Tem-se B, quando se tem A*
- Etc., etc.,

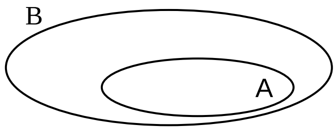
Dizemos ainda que *A* é a *hipótese* (o antecedente) e *B* é a *conclusão* (a consequência); e podemos ainda representar esta relação de “*se - então*” entre antecedente e

[16] Encontram-se facilmente, para efeitos de motivação para o assunto nas aulas de Geometria, situações reais exemplificativas desta actividade. Por exemplo: lendo e tirando conclusões de textos publicados em jornais ou vendo fotografias e chegando a conclusões acerca das mesmas.

[17] Também se dizem “axiomas”.

consequente, entre hipótese e conclusão, por meio de um diagrama[18], nomeadamente:

Diagrama de Euler



desenhando duas curvas fechadas, uma dentro da outra, onde o círculo menor diz respeito à hipótese (*A*) e o círculo maior é relativo à conclusão (*B*).

De notar que, nesta representação, reside, para os alunos, uma dificuldade já identificada e motivo de alguns estudos didácticos, nomeadamente:

A compreensão de que, numa implicação, a conclusão (B) contém a hipótese (A).

Salientamos também que a construção de tabelas de verdade - porquanto imposta e formal - não deu, até ao momento, qualquer mostra de facilitar esta compreensão e, deste modo, contribuir para ultrapassar esta dificuldade diagnosticada. Bem pelo contrário, o recurso a uma linguagem tecnicista e abstracta de "V(s)" e "F(s)" assentua o distanciamento entre a lógica básica do raciocínio do dia-a-dia e a lógica igualmente básica (se bem que sistematizada) do raciocínio geométrico que desejamos estreitar.

Proponho, por conseguinte, o tratamento lógico de exercícios diversificados e abordados sistematicamente ao longo de todo o capítulo[19] que apontem, em particular, para a compreensão[20] do significado de uma afirmação do tipo:

A implica B

a) A partir do reconhecimento, por parte do professor, de que as "implicações" nem sempre (nem no dia–a-dia nem na sala de aula de Geometria) nos surgem[21] na forma mais óbvia e mais esquelética de

Se A, então B.

---

[18] Estes diagramas chamam-se, por vezes, *diagramas de Euler* em memória de um matemático suíço do século XVIII (Leonardo Euler).

[19] De salientar que, na conjectura actual e nacional, não é defendida, no ensino secundário, uma abordagem da "Lógica" separada dos problemas concretos da aprendizagem da Geometria, nem agrupada numa única secção.

[20] A palavra "compreensão" que, de resto, será repetida ao longo deste texto, pretende, neste contexto, significar mais do que "conhecimento"; "compreensão" significa "entendimento" e pressupõe mais do que "repetição" ou "memorização" abstractos.

A rescrita de frases com o propósito da não alteração do significado da frase inicial é um exercício importante de interpretação, de análise crítica e de contacto com um conjunto diversificado de afirmações equivalentes que estão, em particular, na base das demonstrações dos teoremas matemáticos. Sugiro pois ao professor de Matemática que, sem ser necessário o recurso a uma ênfase explicitamente formal, modere e adeqúe sempre o seu ensino e a escolha da sua linguagem à sua classe que - em determinado dia e em determinada hora vai aprender uma Matemática determinada- sem nunca abandonar um tratamento **rigor**oso, coerente e lógico dos conceitos matemáticos. Torna-se, por isso, indispensável que o professor de Matemática esteja constantemente consciente das consequências (lógicas) das afirmações que profere e do contexto em que estas são proferidas, por mais óbvias que estas pareçam por forma a poder exigir que os alunos também se comportem e ajam com o mesmo rigor.

Os objectivos do professor a este respeito são, fundamentalmente:

– com o trampolim por excelência que é a Geometria, **ajudar os nossos alunos** a raciocinar logicamente e nunca o de, em Geometria, criar ratoeiras onde, sem o acompanhamento e o rigor devidos, os nossos alunos ficarão inevitavelmente presos;
– aspirar, em Geometria, a um **rigor de comunicação** que é constante, que é o mesmo para alunos e para professores e onde as deduções são validadas ou invalidadas com base em argumentos lógicos irrefutáveis.

Sobre a equivalência lógica

Lewis Carroll (1832 - 1898), escritor de histórias para crianças entre as quais se destaca "*Alice no País das Maravilhas*", foi professor de Matemática em Oxford. Os seus livros contêm inúmeros e memoráveis exemplos de boa e deliberada lógica que ele próprio colocava aos seus colegas e aos seus alunos na Universidade e que se tornaram exercícios favoritos entre muitos matemáticos. Recomendo, a este respeito, a leitura atenta deste livro e a análise subsequente das situações que aí são descritas por forma a, em particular, abordar questões lógicas pertinentes a respeito de:

[21] Referimo-nos a meios de comunicação que podem ser escritos e também, noutros casos igualmente passíveis de serem tratados na aula de Geometria, poderão ser de comunicação oral, ou comunicação gestual em vez de escritos.

- Proposições contrapositivas; simbolicamente, a proposição contrapositiva de "*A implica B*" é a proposição "*não B implica não A*".
- Proposições recíprocas; simbolicamente, a proposição recíproca de "*A implica B*" é "*B implica A*".
- Proposições inversas; simbolicamente, a proposição inversa de "*A implica B*" é "*não A implica não B*".

As relações entre estas proposições derivadas são facilmente analisáveis e subsequentemente entendíveis à custa de, por exemplo, diagramas de Euler e podem ser sumariadas no seguinte quadro:

Logicamente Equivalentes	Uma afirmação condicional: $A \Rightarrow B$ (1) A afirmação contrapositiva de (1): $\neg B \Rightarrow \neg A$
Logicamente Equivalentes	A afirmação recíproca de (1): $B \Rightarrow A$ A afirmação inversa de (1): $\neg A \Rightarrow \neg B$

Assim se aceitarmos a proposição (1) como verdadeira, não temos outro remédio senão aceitar também a veracidade da sua contrapositiva e analogamente para as proposições recíproca e inversa; uma vez que tais proposições são logicamente equivalentes. É precisamente nestas relações que reside a validade das deduções que fazemos, em Geometria assim como, por exemplo, numa investigação criminal.

<u>Pergunto</u>:

a) Quais as proposições contrapositiva, recíproca e inversa da seguinte afirmação:

Num plano, duas rectas perpendiculares a uma terceira são paralelas entre si.

Trigonometria

Nos finais do século III antes de Cristo, Alexandria (no Egipto) era o centro de um movimento intelectual operado pelos judeus refugiados nesta cidade e que aí se haviam familiarizado com a cultura Grega. Sob a dominação esclarecida da dinastia dos Lágidas, Alexandria era o maior centro das artes de navegar e mecânica do mundo antigo e, com a sua biblioteca, o seu observatório e os seus jardins botânico e zoológico, tornou-se num prodigioso foco de concentração dos mais variados conhecimentos humanos. Aí floresceram, a par do comércio, as letras, as artes e as ciências e ali acorreram sábios de outros países e filósofos de outras escolas (cirenaicos, cépticos, estóicos, platónicos e peripatéticos). Neste ambiente, a cidade de Alexandria, salientava-se como um grande centro de aprendizagem e de transacções marítimas onde o grego era o meio de ensino e de escrita mas onde os cidadãos eram cosmopolitas[1] com uma forte componente judaica.

Os Homens, em Alexandria, questionavam-se então sobre quanto do mundo estaria por explorar e a Geometria (Grega) foi aplicada à medida dos Céus. Toma forma a *Trigonometria* (medida(s) de triângulos) e o tamanho da Terra e a distância da Terra ao Sol ou à Lua são calculados; é o início de uma nova era, relacionada com as medições celestiais e que, necessariamente, envolviam números muito maiores do que os tratados, até então, pelos Gregos.

Alguns séculos mais tarde uma nova aritmética desenvolvida por matemáticos árabes tais como Al-Kwarizmi e Omar Khayam teve lugar; ainda hoje a conhecemos pelo seu nome árabe “álgebra” e através das rotas comerciais esta nova linguagem chega à Europa.

Europa está no limiar das grandes navegações: os homens do mar transportam os astrónomos judeus que fazem uso dos almanaques preparados por estudiosos árabes; os mercadores enriquecem; mais do que nunca o mundo pensa em termos de números grandes; a nova aritmética fomenta um instrumento impressionante que foi criado pela necessidade de melhores tábuas de medidas celestiais para uso nas descobertas marítimas; os logaritmos contam-se entre os primeiros “frutos” culturais fomentados

[1] Influenciados por muitos países e muitas culturas.

pelas navegações; os matemáticos pensam em termos de mapas, em latitudes e em longitudes; uma nova espécie de geometria é inevitável.

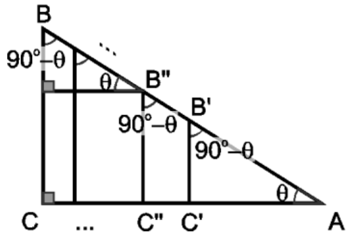
E a partir desta nova Geometria de Descartes, um grupo de estudiosos, preocupados com a mecânica do relógio de pêndulo, faz também novas descobertas sobre o movimento dos planetas e inicia uma nova linguagem matemática a que nós hoje chamamos "cálculo".

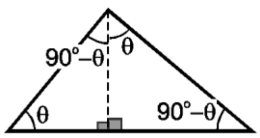
<u>Sugiro:</u>

Porque acredito que é um bom exercício, quer para alunos quer para professores de Matemática, um esforço suplementar para nos apercebermos do quanto a História da Matemática é um espelho das civilizações - que se entrecruzam com a cultura, com a economia, com a religião, com as invenções e as descobertas - cujos mapas se foram alterando e ao qual nós hoje, felizmente, podemos aceder (através do estudo) em pouco tempo.

Sobre triângulos (rectângulos): algumas coisas básicas e indispensáveis

Dois triângulos são, por definição, "equiangulares[2]" quando os pares dos ângulos correspondentes tiverem a mesma medida. Recordo, a este respeito, algumas representações básicas de triângulos rectângulos que ilustram resultados básicos indispensáveis em Trigonometria[3] (e independente do nível de Ensino em que se está a abordar):





[2] Note-se que a "equiangularidade" é um caso da semelhança de triângulos.
[3] A figura do lado direito serve também de base à célebre demonstração, do Teorema de Pitágoras, feita por Naber no início deste século.

E recordo também o enunciado de uma proposição, também fundamental para o estudo da Trigonometria - cuja demonstração se pode encontrar no livro VI de Euclides e cujo enunciado diz:

São iguais os quocientes entre os comprimentos dos lados correspondentes de triângulos rectângulos[4] equiangulares:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AB''}}{\overline{B''C''}} = \frac{\overline{AB'''}}{\overline{B'''C'''}} = ...$$

<u>Sugiro:</u>

O recurso a desenhos de situações reais onde a utilização simples destas noções possa ser, de forma rápida e eficaz, recordada.

Faço, por exemplo, referências a um desenho típico sobre a forma como Tales poderá ter medido a altura da Grande Pirâmide de Gizé ou, a partir de uma fotografia específica, à idealização de "instrumentos" para a medição da largura de um rio.

Para se dar o salto de Atenas para Alexandria basta tão somente dar nomes às 3 (três) razões constantes para cada ângulo e independentes do triângulo. Os nomes então escolhidos e que ainda hoje se mantêm, foram:

$$sen\,\theta = \frac{comprimento\ do\ cateto\ oposto}{comprimento\ da\ hipotenusa};$$

$$cos\,\theta = \frac{comprimento\ do\ cateto\ adjacente}{comprimento\ da\ hipotenusa};$$

$$tg\,\theta = \frac{comprimento\ do\ cateto\ oposto}{comprimento\ do\ cateto\ adjacente}.$$

Noto também, a partir da figura anterior, que algumas das consequências das definições destas razões trigonométricas são:

$$\text{sen}\ \theta = \cos\ (90^{\text{o}} - \theta);$$

[4] Nós, hoje em dia, sabemos ser verdade também para quaisquer outros triângulos, não obrigatoriamente rectângulos.

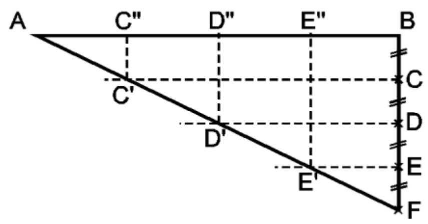
$$\cos\theta = \text{sen}\,(90^\circ - \theta);$$

$$\text{tg}\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}.$$

Além disso, a partir daqui e em jeito de aplicação prático/técnica, pode-se apresentar um critério para a

a divisão de um segmento em qualquer número de partes com o mesmo comprimento.

Por exemplo a divisão em 4 partes do segmento de recta $[\text{AB}]$:



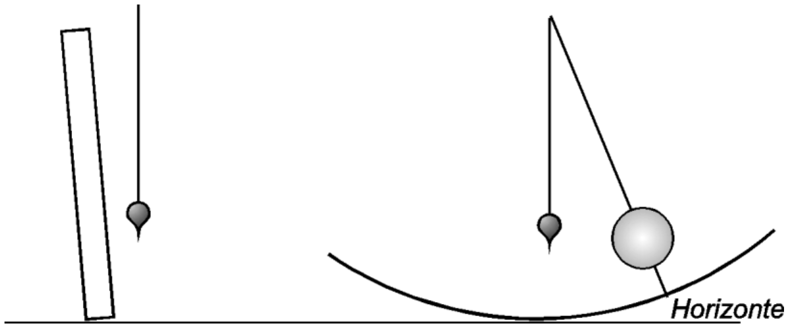
Traçar o segmento $[\text{BF}]$ *de comprimento 4 unidades a partir do segmento* $[\text{AB}]$, *que se pretende dividir, de tal forma que* $\overline{\text{BC}} = \overline{\text{CD}} = \overline{\text{DE}} = \overline{\text{EF}} = 1.$ *Tracem-se* $[\text{CC}']$, $[\text{DD}']$ *e* $[\text{EE}']$ *paralelos a* $[\text{AB}]$ *e depois tracem-se* $[\text{C}'\text{C}'']$, $[\text{D}'\text{D}'']$ *e* $[\text{E}'\text{E}'']$ *paralelos a* $[\text{BF}]$. *Então*

$$\overline{\text{AC}''} = \overline{\text{C}''\text{D}''} = \overline{\text{D}''\text{E}''} = \overline{\text{E}''\text{B}}.$$

E assim estabelecer, por sua vez, uma aplicação importante que é à construção de escalas - por exemplo, o *Nónio* - que revolucionaram a precisão das medições, nomeadamente as efectuadas no tempo de Newton.

Sugiro:

Referências históricas à construção de templos e de túmulos na Antiguidade podem servir de mote para um problema elementar de medição angular sobre a construção de (paredes) verticais. Para isso recorre-se, hoje como no passado, a um *fio de prumo* ou a um *pêndulo* como se ilustra a seguir:



Princípios de "Tangência".

Enquanto o fio de prumo coloca a ênfase no ângulo recto como unidade fundamental da medição angular; o pêndulo serve para realçar (mostrar de forma informal) o facto de a tangente a uma circunferência num dado ponto ser perpendicular ao segmento que passa por esse ponto e pelo centro da circunferência.

Sobre o(s) radiano(s)

Uma outra forma de medir um ângulo[5] é procurando o número de radianos, isto é, a partir *da razão entre o arco da circunferência (a circunferência que tem centro no vértice do ângulo e o arco que é limitado pelos lados do ângulo) e o raio dessa circunferência.* De tal forma que quando o arco mede o mesmo que o raio, dizemos que o ângulo mede 1 **radiano**. À constante de proporcionalidade entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência chamamos π Por exemplo:

Desenhe-se uma circunferência cujo raio mede 1 unidade; desenhem-se ainda dois raios dessa circunferência que limitem um ângulo de 15^o. A partir desse diagrama concluímos facilmente que esta circunferência fica dividida em 24 ângulos (ao centro) de 15^o cada e que, portanto, o arco que limita cada um destes ângulos mede $\frac{1}{24}$ do perímetro da circunferência; pelo que, também podemos descrever o ângulo de 15^o dizendo que mede $\frac{\pi}{12}$ *radianos*[6].

---

[5] Medem-se ângulos procurando, por exemplo, o número de **graus** ou o número de **grados**.

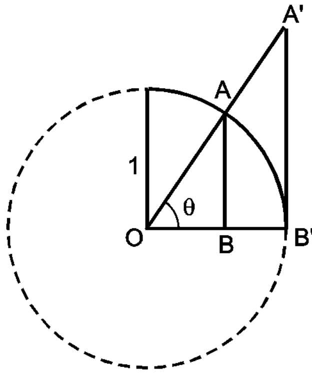
[6] Em jeito de brincadeira mas ao mesmo tempo antevendo o estudo das funções trigonométricas costumo dizer aos meus alunos que uma grande vantagem deste "novo" sistema de medição de ângulos é que, em radianos, podemos medir ângulos com uma fita métrica (ou uma régua)...

Uma forma útil de definir as razões trigonométricas é precisamente recorrendo ao círculo de raio 1 (unidade) – dito *círculo trigonométrico*. Então, no círculo trigonométrico, tem-se:

$$\operatorname{sen}\theta = \overline{\mathrm{AB}} \quad (= \text{cateto oposto})$$

$$\cos\theta = \overline{\mathrm{OB}} \quad (= \text{cateto adjacente})$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{OB'}}} = \overline{\mathrm{A'B'}}$$

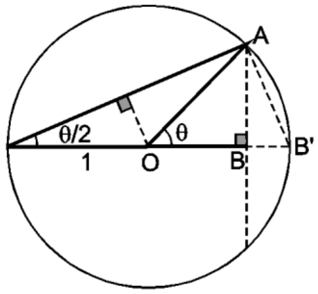


Esta é, de resto, a razão pela qual os primeiros textos sobre Trigonometria chamam a $\overline{\mathrm{AB}}\ (= \operatorname{sen}\theta)$ *semicorda*[7] do ângulo 2θ. No círculo trigonométrico podemos ainda “deduzir” relações trigonométricas relevantes como é o caso das seguintes:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1;$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}};$$

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{2\ \cos\frac{\theta}{2}};$$



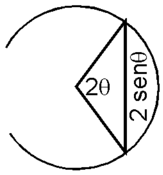
ou ainda

$$\overline{\mathrm{AB'}} = 2 - 2\cos\theta.$$

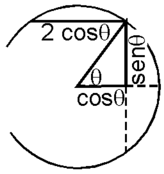
Sugiro:

Também neste caso a História da Matemática nos fornece material didáctico deveras adequado para explorações na sala de aula. Por exemplo:

[7] Pode ainda confirmar-se a escolha desta designação numa das figuras que de seguida se apresentam a respeito da Trigonometria de Ptolemeu.



Trigonometria de Ptolemeu

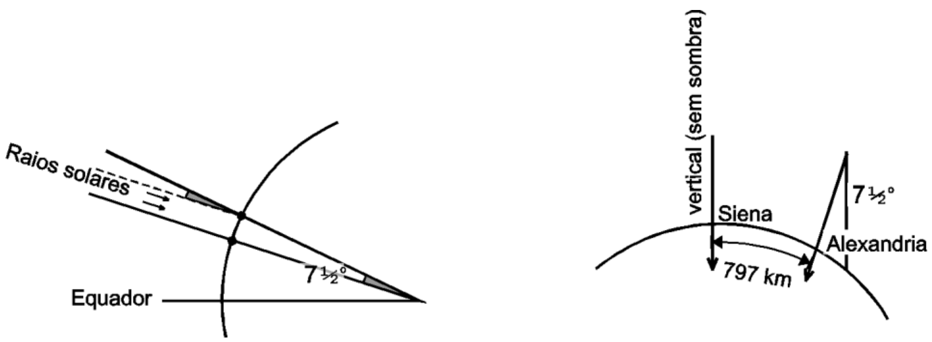


Trigonometria Hindu (e moderna)

Sugiro ainda:

Algumas aplicações práticas relevantes e saliento, a este propósito, a oportunidade que aqui existe para se estabelecerem ligações interdisciplinares privilegiadas [8] entre a Matemática e outras áreas do saber, nomeadamente a História, a Física, a Astronomia e a Geografia.

Exemplo 1.



(Como Eratóstenes mediu o perímetro da Terra)
Ao meio-dia o Sol brilha directamente sobre o meridiano de longitude do observador. Siena e Alexandria têm (praticamente) a mesma longitude e distam (aproximadamente) 800 quilómetros. Assim, o Sol, os dois lugares e o centro da Terra podem desenhar-se na mesma superfície plana do espaço.

Para podermos concluir que o perímetro da Terra é aproximadamente igual a 40000 quilómetros, dado por:

$$\frac{800 \times 360^{o}}{7\frac{1}{2}^{o}} \text{ (quilómetros)}$$

[8] Faço aqui referência para a necessidade que existe de se diversificarem estas relações interdisciplinares, por exemplo, a nível da chamada "Área Escola" onde a Matemática aparece sistematicamente como área de apoio unicamente estatístico e portanto redutor das verdadeiras capacidades da Matemática.

e portanto, tomando $\pi = 3\frac{1}{7}$ temos o raio da Terra aproximadamente igual a 6400 quilómetros.

Exemplo 2.

Outros exercícios de raciocínio e aplicação das noções trigonométricas patentes, por exemplo, no cálculo de latitudes.

Programação Linear

O estudo da *Programação Linear* desenvolveu-se a partir do trabalho, na Força Aérea dos Estados Unidos em finais dos anos 40 de George Dantzig.

Hoje em dia a programação linear aplica-se a uma variedade alargada de problemas quer na indústria quer na ciência, de contornos mais ou menos complicados mas de resolução básica simples e à medida que os computadores se tornaram mais potentes foram também sendo resolvidos problemas mais elaborados.

O que se propõe –neste nível de ensino- é uma abordagem geométrica para a solução de problemas de máximos ou de mínimos de uma expressão linear com duas variáveis sujeitas a um conjunto de restrições também lineares e consegue-se, ao mesmo tempo, uma concretização (à custa de enunciados apelativos e diferenciados de acordo com as características das turmas) de técnicas algébricas de resolução, mais ou menos rebuscadas e abstractas. O objectivo primordial deste assunto é **motivar** os alunos para a aprendizagem da Matemática, mostrando-lhes verdadeiros problemas reais nos quais a Geometria que estão a aprender é actualmente usada na indústria, na economia, etc.,. Os objectivos específicos deste conteúdo prendem-se fundamentalmente com:

- a tradução matemática das ideias expressas em linguagem corrente;
- a representação gráfica de sistemas de inequações lineares;
- a conexão entre a solução de um sistema de inequações lineares e um plano factível de produção;

- a ligação gráfica entre uma função objectivo e uma região possível do plano, por forma a obter a "melhor" solução para o problema;
- a interpretação da solução obtida para o problema;
- a análise do impacto, em problemas reais, da adição de novas restrições.

Os problemas de Programação Linear são constituídos por 3 ingredientes básicos:

- uma **função objectivo** (equação linear que representa o objectivo de quer maximizar o lucro quer minimizar o custo), a qual se pretende maximizar ou minimizar;
- um conjunto de incógnitas ou **variáveis** (que as circunstâncias podem fazer alterar) que afectam o valor da função objectivos;
- um conjunto de **restrições** (criadas por imposições diversificadas, tais como o tempo, o equipamento, etc.) que condicionam os valores que as incógnitas podem tomar e os que estão excluídos.

Exemplos de problemas sobre Programação Linear:

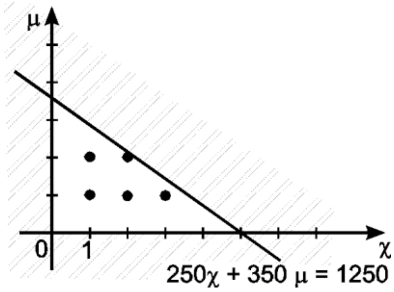
1º Exemplo - *Se eu for a um parque de diversões com 1250 escudos na carteira e as únicas atracções em que estou interessada são os carrinhos de choque (que custam 250 escudos por cada volta) e a montanha russa (que custa 350 escudos, por volta), quantas voltas em cada uma das atracções posso eu dar?*

Existem, é claro, muitas respostas diferentes para esta questão que até se conseguem facilmente obter sem qualquer cálculo. Posso, por exemplo, andar 5 voltas nos carrinhos de choque; ou 3 voltas na montanha russa e ainda regressar a casa com algum troco.

Se eu andar χ voltas nos carrinhos e μ voltas na montanha russa, χ e μ estão restringidas pela desigualdade seguinte:

$$250\chi + 350\mu \leq 1250$$

que, por sua vez, se pode representar graficamente como, por exemplo, na figura seguinte, onde todas as possíveis respostas estão dadas pelos pontos marcados no triângulo que não se sombreou:



Este método é particularmente fácil por causa da pergunta colocada mas era, ainda assim, válido mesmo quando a minha actividade no parque de diversões estiver sujeita a outras restrições. Além disso, em casos como este, as soluções têm que ser pares ordenados (χ, μ) de números naturais [9]. Na representação gráfica só os pontos assinalados na figura é que são relevantes em termos de resposta ao problema.

Suponhamos que não podia estar mais do que 1 hora no parque e que os carrinhos demoram... e a montanha russa demora... E que escolhas eu tenho se eu considerar que a montanha russa me diverte 2 vezes mais do que os carrinhos?

Sugiro:

- Desde o início, uma abordagem de **diálogo aberto e livre entre professor e alunos** a propósito das "restrições" que podemos ir impondo neste tipo de problemas.
- Elaboração de "**portfolios**" como técnica de avaliação privilegiada deste conteúdo.
- Estabelecimento de **projectos** individuais e de escolha arbitrária de temas, de acordo com os interesses específicos de cada um.

2º Exemplo – *Um aluno pretende que o seu pequeno almoço de leite e flocos de milho lhe saia tão económico quanto possível.*

Com base no que come habitualmente nas outras refeições do dia, decide que ao pequeno almoço deverá ingerir pelo menos 9*g* de proteínas, pelo menos $\frac{1}{3}$ da dose diária recomendada (ddr) de vitamina D e pelo menos $\frac{1}{4}$ da dose diária recomendada de cálcio.

Nas embalagens do leite e dos flocos, o aluno encontra a seguinte informação:

	Leite (🗁 chávena)	Flocos de Milho (30 g)
Preço	15 escudos	45 escudos
Proteínas	4 g	2 g
Vitamina D	🖮 ddr	📫 ddr
Cálcio	🗄 ddr	–

Uma vez que o aluno não gosta da sua mistura nem demasiadamente líquida nem demasiadamente seca, decide ainda condicionar a sua mistura a uma chávena de leite para uma quantidade de flocos que varia entre 30*g* e 100*g*.

3º Exemplo – *Uma fábrica de doces tem em armazém 130 kg de bombons de cereja coberta de chocolate e 170 kg de bombons de chocolate com recheio de baunilha e decidem vender estes produtos sob a forma de 2 misturas embaladas convenientemente:*

– *numa das misturas, juntar-se-ão uns e outros bombons em partes iguais e vender-se-á este produto embalado por 1500 escudos;*

– *na outra mistura, juntar-se-ão um terço dos bombons de cereja com dois terços dos bombons de baunilha e pôr-se-ão à venda estas embalagens por 1000 escudos*

Quantos quilos de cada mistura deverá a fábrica preparar de modo a obter o maior lucro possível?

Sugiro:

– Um cuidado especial com os dados destes problemas que se pretendem verdadeiramente realistas.
– Proponho, também neste caso, uma reflexão muito cuidada, por parte do professor de Matemática, sobre os aspectos algébricos deste tipo de problemas. O seu tratamento rigoroso não é facilmente implementável no ensino secundário e, como tal, será preferível ficarmo-nos pelo tratamento geométrico. Na

[9] Não é possível dar-se, por exemplo, meia volta em nenhuma das atracções.

realidade cada um destes três exemplos é uma caso particular do seguinte problema algébrico:

Encontrar os valores de x_1 *e de* x_2 *que maximizem (ou minimizem) a função*

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

condicionada por exigências do tipo $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ e ainda do tipo[10]

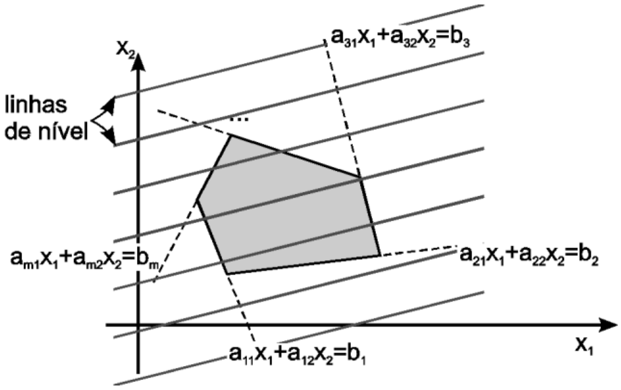
$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \ (\leq)(\geq)(=)\ b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \ (\leq)(\geq)(=)\ b_2$$
$$.....$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 \ (\leq)(\geq)(=)\ b_m$$

Um par de valores (x_1, x_2) que satisfaçam todas as restrições diz-se uma *solução possível* para o problema. Um tratamento algébrico do problema pressupõe o conhecimento e o uso de ferramentas adequadas[11] mas um tratamento geométrico resume-se, de forma fácil, à procura de uma região do plano que é o conjunto de todas as soluções possíveis. A representação geométrica pode, neste caso como em muitos outros, sugerir a demonstração de teoremas fundamentais, a serem tratados posteriormente, tais como os que dizem respeito aos pontos extremos numa região de soluções possíveis (a sombreado na figura[12]); por exemplo:

[10] Note-se que a notação que decidi adoptar nestas expressões significa que cada uma das linhas pode, na verdade, ser um dos três casos seguintes: a inequação linear com o sinal "$\leq$", ou a inequação linear com o sinal "$\geq$", ou ainda a equação linear com o sinal "$=$".

[11] Nomeadamente, sistemas lineares com mais equações do que incógnitas, matrizes, dependência linear, etc..

[12] As linhas de nível representadas nesta figura são, por definição, as linhas ao longo das quais a função objectivo toma valores constantes.



Nota final

Os matemáticos Gregos herdaram, sem dúvida, de outros povos os conhecimentos matemáticos que lhes permitiam fazer cálculos comerciais, estabelecer impostos, medir terrenos, desenhar calendários e outros fins práticos, mais ou menos, "primitivos". Costuma, em jeito de resumo, afirmar-se que os Gregos tiveram duas fontes principais de inspiração, ambas originárias do Neolítico, nomeadamente: uma fonte algébrica vinda da Babilónia e uma fonte geométrica vinda do Egipto; depois, com essa herança, fizeram algo de novo: transformaram a Matemática num sistema lógico que parte de proposições fundamentais e, via deduções, se desenrola em direcção às conclusões. Desde então, qualquer pessoa pode, racionalmente, convencer-se da validade dos raciocínios que faz e esta concepção da Matemática (e muito especialmente da Geometria) manteve-se inalterada. Gradualmente, as aplicações da Matemática foram-se alargando e outras ciências foram fazendo uso do método dedutivo da Matemática. Apesar disso, a grande maioria dos alunos que, nas nossas escolas básicas e secundárias, aprende Matemática dificilmente reconhecerá o uso tão importante deste conhecimento escolar a menos que o professor de Matemática assuma a missão de apresentar ao aluno uma cadeia de raciocínios matemáticos sobre os quais o aluno é capaz de reflectir, que é capaz de seguir e, enfim, que possa compreender.

Actualmente é impossível dizer onde é que começa a álgebra e acaba a geometria ou onde começa a geometria e acaba a análise; os problemas geométricos resolvem-se algebricamente da mesma forma que problemas algébricos podem ser resolvidos geometricamente. Osgood costumava afirmar que:

> *Todas as regras da Trigonometria se podem deduzir a partir da equação diferencial* $y' + y = 0$ *.*

Pergunto:

Se, porventura, encontrássemos um dia um aluno que tivesse estudado o assunto desta maneira, estaríamos disposto a aceitar estes conhecimentos que, afinal, nem começam com a medição de triângulos?

Não se irá certamente muito longe se continuarmos a fundamentar o estudo da Geometria Analítica em questões manipulativas de escrita, mais ou menos, rebuscadas com base na representação de pontos por meio de coordenadas. Descartes inventou eixos e coordenadas para representar os entes geométricos mas, como nota final, parece-me importante explicitar algo que, porventura, já está implícito no texto que aqui apresento e que é a relação entre "notação" e "método".

Em Geometria a notação que se escolhe não tem qualquer relação com o método que se adopta. Assim, embora as demonstrações possam, por meio de uma escolha apropriada de notação (dita analítica), ser, por exemplo, encurtadas; os problemas geométricos que se propõem oficialmente neste nível de ensino (secundário) continuam a ser os problemas da Geometria de Euclides e o método de abordagem desses problemas é, portanto, o método (de raciocínio) dedutivo.

Bibliografia

Coolidge, Julian Lowell: *A History of Geometrical Methods*. Oxford University Press, 1940.

Freudenthal, Hans: *Mathematics Observed*. World University Library, 1967.

Hogben, Lancelot: *Mathematics for the Million (How to master the Magic of Numbers)*. Allen & Unwin, 1936.

Van der Waerden, B. L.: *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations.* Springer-Verlag, 1983.

ACTIVIDADES COMENTADAS

Como acontece na maior parte dos casos a introdução é escrita no fim. Também nós começámos por registar apenas as ideias orientadoras das actividades a seleccionar e dos comentários a fazer, e foi depois de tudo escrito que elaborámos esta apresentação. Desde o início que fixámos que o nosso trabalho assentaria nas seguintes ideias: visualização, muita visualização, ambientes dinâmicos de trabalho e articulação de ideias.

A visualização, segundo Conway referido por Eduardo Veloso (1998, p.132 e seguintes), e como nós também a entendemos, *(...) diz respeito à construção e manipulação de imagens mentais. Essas imagens podem destinar-se a reproduzir situações que não estão visíveis naquele momento mas que são familiares, ou podem tentar estudar situações inacessíveis que apenas podem ser imaginadas*.
(...)
A frase que se ouve frequentemente, "nunca fui capaz de ver no espaço", pode levar a crer que essa capacidade é como que inata, há quem a tenha e quem nunca a venha a ter. Mas não é assim. O poder de visualização treina-se, e uma das consequências de um ensino da geometria em que se utilizem métodos activos de construção e manipulação de modelos e em que existam actividades explícitas para desenvolver a visualização é precisamente o acréscimo desse poder.

A visualização, para além de um trabalho específico que virá sendo feito, talvez, ao longo dos vários anos de aprendizagem matemática, e não só, deve estar sempre presente no trabalho em geometria. Será assim que se enriquece e reconstrói o património de imagens de cada um. A imagem de um triângulo, ou de um cubo, não pode ser igual para um aluno do secundário e para um aluno do 2º ciclo, embora cada um deles deva trabalhar muitos triângulos e muitos cubos para ter a imagem mais rica possível e por isso, mais articulada com outras imagens, de cada um destes objectos matemáticos. Se experimentarmos fechar os olhos e ver tudo o que pudermos num triângulo ou num cubo podemos apercebermo-nos da riqueza e extensão da nossa experiência de visualização.

Mas ver é uma actividade dinâmica, intimamente ligada à representação, e por isso os objectos não podem estar inacessíveis. Se é essencial a construção e manipulação de modelos e a sua representação de muitos modos possíveis, isso deve ser feito por todos os meios ao nosso alcance.

Em 1988, James T. Fey escreveu (p. 45)

Uma das mais importantes tarefas em Educação Matemática hoje é a revisão dos currículos e dos métodos de ensino de modo a tirar proveito das novas tecnologias.

Já então Fey afirmava que *os instrumentos numéricos, gráficos e de manipulação simbólica fornecidos pelo computador oferecem cada um formas únicas de esclarecimento e poder no ensino e aprendizagem da matemática e na resolução de problemas. Contudo, o aspecto dos computadores que recentemente tem gerado mais entusiasmo entre os educadores matemáticos é a facilidade de passagem de uma forma de representação da informação para outra à medida que o utilizador procura a compreensão conceptual e as soluções dos problemas.* (p. 60)

Recordar este artigo de James Fey, cuja leitura recomendamos vivamente, é ter presente algumas ideias fundamentais sobre a utilização de computadores e de calculadoras gráficas, que evidenciamos: o dinamismo e a versatilidade das representações de ideias matemáticas e de procedimentos, os ambientes de trabalho interactivos e a deslocação do pensamento concreto para formas simbólicas.

Embora à data do referido texto ainda não existissem os programas educacionais de que hoje dispomos, as ideias fundamentais já estavam presentes. Entre estas queremos salientar as condições de variabilidade o dinamismo e a flexibilidade do tipo de ambiente de trabalho proporcionado, com que podemos fazer a ponte para 1998. Já nada poderá ser como dantes.

As novas tecnologias estão a transformar rapidamente o panorama da matemática e do seu ensino. O chamado software para a geometria dinâmica, representado pelos programas Cabri-géomètre e The Geometer's Sketchpad, tem potencialidades para revolucionar profundamente os modos de resolução de problemas e de exploração de situações e as próprias concepções de demonstração, em particular a sua relevância na aprendizagem da geometria. Ao lado das outras perspectivas, devemos também considerar a abordagem através deste tipo de software.(Veloso 1998, p. 60)

Neste programa do Ensino Secundário a utilização de computadores não está prevista para todos os alunos, e é muita pena. Mas o recurso a laboratórios de Matemática e as novas orientações curriculares abrem boas hipóteses para que muitos alunos possam passar por esta experiência na Matemática. Por isso, muitas das actividades que apresentamos foram já pensadas na perspectiva da sua utilização num ambiente geométrico dinâmico (AGD) embora grande parte delas também possam, ainda que de forma muito mais pobre e deficiente, ser trabalhadas com papel e lápis. Algumas das sugestões para os AGD podem ser exploradas pelos alunos para resolver problemas e em projectos fora da sala de aula. São situações extremamente simples do ponto de vista da construção e que exigem muito poucos conhecimentos desses programas, seja o *Geometer's Sketchpad*, seja o *Cabri-géomètre*.

Tanto para professores como para alunos a articulação de ideias, conhecimentos, processos, ... é fundamental. E esta preocupação torna-se mais pertinente se pensarmos que estamos a falar de 11º ano e de assuntos que não são novos. Os alunos podem ou não ter já trabalhado a trigonometria e a geometria analítica, mas o professor nunca poderá iniciar a sua exploração sem articular velhos com novos conhecimentos e potencializando aprendizagens já feitas pelos alunos. Para o professor esta preocupação traduz-se na selecção de propostas diversificadas, nas múltiplas perspectivas, nos cuidados com a discussão de explorações realizadas, ... Para os alunos passará por experiências de muitos tipos, pessoais e colectivas, pela investigação, pela descoberta, pela discussão, pela demonstração, pelo trabalho na sala de aula e fora dela, pela resolução de problemas e pela realização de projectos também. Para tudo isto temos a nosso favor a matemática, ciência por excelência das conexões e do poder da articulação de processos.

Pensamos que a combinação de ambientes dinâmicos com propostas diversificadas e abertas permitirá aos alunos, e aos professores também, desenvolver novas perspectivas sobre a Matemática e sobre o seu ensino. É esta preocupação que nos persegue porque se alguma certeza temos sobre a nossa experiência recente de educação matemática é o aprofundamento dos nossos conhecimentos matemáticos e da multiplicidade e complexidade dos modos de aprender.

É com esta estrutura orientadora que procurámos arrumar ideias sobre o desenvolvimento do Tema Geometria do programa do 11º ano, que engloba duas partes fundamentais: trigonometria, geometria analítica.

Embora possa parecer que o nosso texto está um pouco carregado de citações, optámos por fazê-lo para estimular a leitura dos textos originais. Textos estes que consideramos fundamentais para qualquer professor de Matemática e cujas ideias, porque estão já tão bem expressas, não faz sentido rescrever por palavras nossas.

É com esta estrutura orientadora que procurámos arrumar ideias sobre o desenvolvimento do Tema Geometria do programa do 11º ano, que engloba duas partes fundamentais: trigonometria, geometria analítica.

Embora possa parecer que o nosso texto está um pouco carregado de citações, optámos por fazê-lo para estimular a leitura dos textos originais. Textos estes que consideramos fundamentais para qualquer professor de Matemática e cujas ideias, porque estão já tão bem expressas, não faz sentido rescrever por palavras nossas.

Trigonometria

As sugestões de trabalho que vamos apresentar não são inteiramente novas, porém as explorações que sugerimos apontam para que se dê mais atenção aos conceitos e ao seu significado e menos às técnicas. Esta perspectiva é sustentada pelas indicações metodológicas do ajustamento do programa e favorecida pelos instrumentos tecnológicos que estão ao nosso dispor e que se vão revelar aqui bastante poderosos.

Os exercícios tradicionais de redução ao primeiro quadrante, simplificação de expressões e resolução de equações deixaram de fazer sentido porque as calculadoras calculam razões trigonométricas de qualquer ângulo, utilizam expressões não simplificadas e dão-nos muito boas aproximações das soluções de equações. As relações continuam a ser importantes, mas os objectivos e a maneira de as trabalhar têm que ser outros.

O ensino da trigonometria poderá ter sempre presente:

– A história como uma forma de valorizar e compreender a evolução da matemática como parte da evolução da cultura científica e técnica.

– As aplicações da matemática que, neste caso e a este nível, estão muito ligadas a problemas históricos.

– As conexões dentro da matemática, porque este assunto articula conhecimentos de geometria, de cálculo, de funções, etc.

– A natureza do conhecimento matemático na perspectiva empírica e indutiva, por um lado, dedutiva e formal, por outro.

Problemas de resolução de triângulos

Tanto por razões históricas como por razões didácticas, não há outra maneira de começar a trabalhar a trigonometria que não seja pela resolução de problemas sobre triângulos. Do ponto de vista histórico, a trigonometria desenvolveu-se precisamente para resolver problemas em que estavam presentes os triângulos. Do ponto de vista didáctico, esta abordagem permite ao professor apresentar situações estimulantes tanto para alunos que já contactaram com as razões trigonométricas (fazem parte do programa do 9º ano), como para aqueles que as desconhecem totalmente.

Nem todos os problemas de resolução de triângulos são igualmente interessantes. Tentámos seleccionar alguns que, na nossa opinião, ajudam a dar significado às razões trigonométricas e valorizam o raciocínio geométrico. Não considerámos aqui nenhum problema histórico porque há vários tratados noutro texto desta brochura.

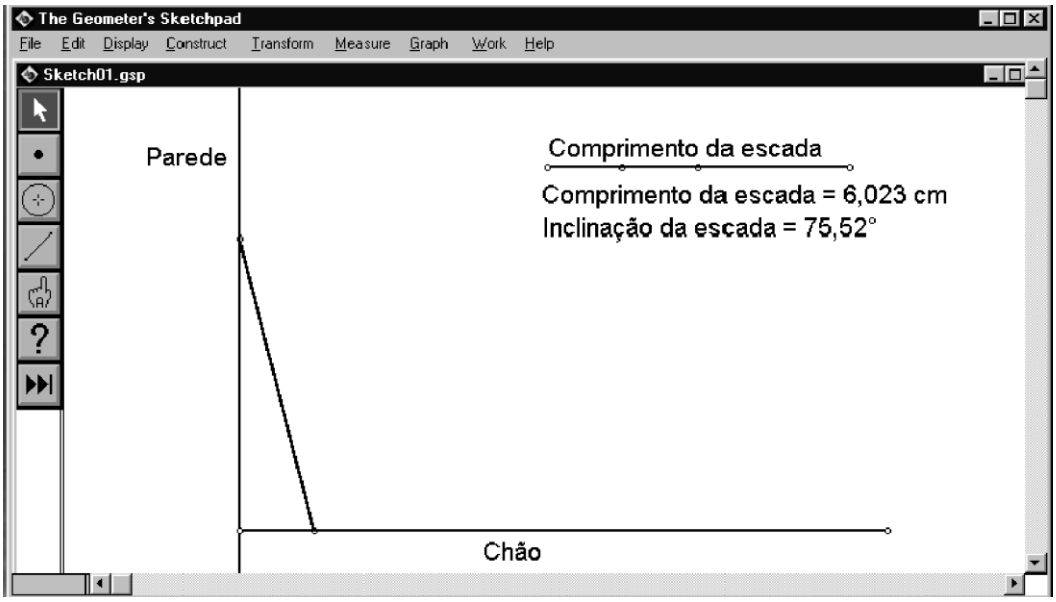
A escada de pedreiro

Para maior segurança, a distância da base de uma escada de pedreiro à parede deve ser igual a um quarto do comprimento da escada. Qual é o ângulo que uma escada nesta posição faz com o chão? Será que depende do comprimento da escada?

A forma aberta como este problema está colocado permite que diferentes alunos experimentem diferentes medidas da escada e que, em discussão, se conclua que o ângulo não depende do comprimento da escada. É um problema que permite rever ou introduzir a semelhança nos triângulos rectângulos e as razões trigonométricas como dependentes do ângulo.

Esta experiência com diversos valores é muito mais visível e completa se for feita num programa de geometria dinâmica. Neste caso é desejável que os alunos construam o modelo da situação, individualmente ou em grupo, mesmo que isso não seja feito em tempo de aula. Os alunos devem ser estimulados a procurar outros problemas deste tipo e a simulá-los em computador.

Em alguns problemas o professor poderá apresentar modelos previamente construídos, como o que se segue.



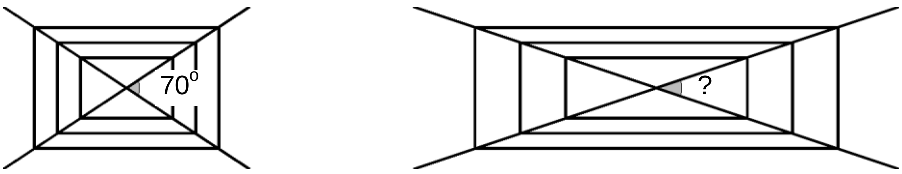
A construção geométrica tem que ser feita de modo a que a distância da base da escada à parede seja sempre um quarto do comprimento da escada. Se fizermos variar o comprimento da escada vemos que no desenho e nas medições a escada aumenta de comprimento, e portanto aumenta também a distância da base à parede, mas a inclinação mantém-se. Até agora não utilizámos nenhuma razão trigonométrica, ela apenas está implícita na situação. Este problema pode ser uma boa ocasião para definir a função trigonométrica *coseno*.

Ângulo das diagonais de um rectângulo

Constrói um rectângulo em que o ângulo das suas diagonais seja de 70°. Qual é a relação entre o comprimento e a largura do rectângulo?

Qual é o ângulo das diagonais de um rectângulo em que o comprimento é o triplo da largura?

A exploração deste problema é perfeitamente análoga à do problema anterior. Tanto



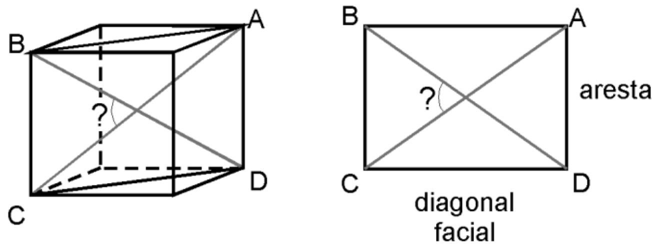
pode ser trabalhado através da experimentação de vários casos com papel e lápis, como pela construção de um *sketch* apropriado.

Na primeira situação o ângulo determina a razão constante entre os lados. Na segunda, é a razão entre os lados que determina o ângulo.

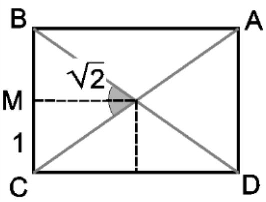
Ângulo das diagonais de um cubo

Qual é o ângulo de duas diagonais espaciais de um cubo?

Fazendo no cubo um corte adequado, isto é, o corte do plano definido por duas diagonais espaciais, reduzimos a questão ao problema do plano que acabámos de resolver.



A razão trigonométrica que nos vai permitir obter o ângulo pedido é a *tangente*, exactamente como no problema anterior. A *tangente* é igual à razão entre os lados do rectângulo de corte, ou seja, é igual à razão entre uma aresta e uma diagonal facial do cubo.



$\frac{\alpha}{2} \approx 35{,}26^{o}$

$\alpha \approx 70{,}53^{o} \approx 70^{o}\ 31'\ 44''$

Este problema pode ser estendido à obtenção dos ângulos de diagonais de paralelepípedos e de prismas rectos. Também aqui, para sólidos semelhantes, os ângulos correspondentes são iguais.

Polígono regular

Quanto mede o lado de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio **r**? E o lado de um quadrado? E de um pentágono regular? E de um polígono de **n** lados?

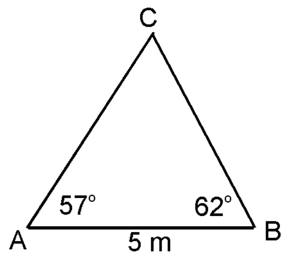
Quanto mede o apótema de um polígono regular de **n** lados inscrito numa circunferência de raio **r**? Qual é a área desse polígono?

Embora possa parecer que a formulação do problema é repetitiva, a ideia é fazer a exploração de alguns casos para chegar a expressões gerais ou fórmulas que permitem relacionar medidas do polígono inscrito com o raio da circunferência. Qualquer delas é a expressão geral de uma sucessão, já que o número de lados é uma variável natural.

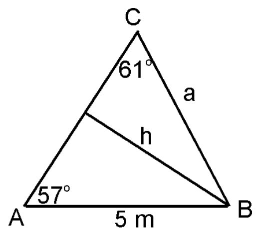
A visualização dos polígonos inscritos numa mesma circunferência permite trabalhar conceitos importantes das sucessões: sucessões monótonas, sucessões limitadas, convergência, etc.

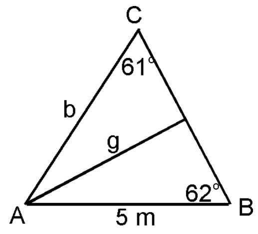
Triângulos não rectângulos

Dois barcos A e B encontram-se a cinco milhas um do outro e observam um terceiro barco C, em dificuldades. O barco A observa os outros dois segundo direcções que fazem um ângulo de 57^o e o barco B observa os outros dois segundo um ângulo de 62^o. Se o barco A se deslocar à velocidade de 25 milhas por hora e o barco B à velocidade de 20 milhas por hora, qual é que chega primeiro para socorrer o barco C?



Todas as situações anteriores se resolviam recorrendo a triângulos rectângulos ou a triângulos isósceles dos quais imediatamente se obtém um triângulo rectângulo. Consideramos que é importante também resolver problemas em que o triângulo de partida é escaleno e em que a divisão em triângulos rectângulos não é tão imediata.





$\frac{h}{5} = \text{sen } 57^o$ e $\frac{h}{a} = \text{sen } 61^o$

$5 \text{ sen } 57^o = a \text{ sen } 61^o$

$a = \frac{5 \text{ sen } 57^o}{\text{sen } 61^o} \approx 4{,}794$

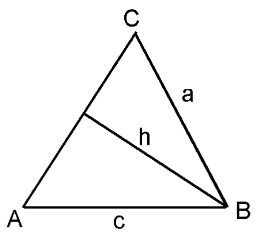
$\frac{g}{5} = \text{sen } 62^o$ e $\frac{g}{b} = \text{sen } 61^o$

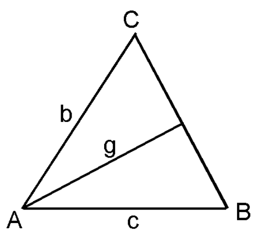
$5 \text{ sen } 62^o = b \text{ sen } 61^o$

$b = \frac{5 \text{ sen } 62^o}{\text{sen } 61^o} \approx 5{,}048$

O barco A encontra-se a 5,048 milhas de C, a uma velocidade de 25 milhas por hora dá 0,202 horas, ou seja quase 13 minutos de percurso. O barco B encontra-se a 4,794 milhas de C, a 20 milhas por hora dá 0,239 horas, mais do que 14 minutos. Embora o barco B esteja mais perto, o barco A é mais rápido e vai chegar primeiro.

Na resolução que apresentamos não calculámos propositadamente **h** e **g**, embora isso fosse possível e o mais natural para os alunos. Não o fizemos porque esses valores não são necessários e porque estamos a pensar já na generalização deste problema a qualquer triângulo.





$\frac{h}{c} = \text{sen } \hat{A}$ e $\frac{h}{a} = \text{sen } \hat{C}$

$c \times \text{sen } \hat{A} = a \times \text{sen } \hat{C}$

$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$

$\frac{g}{c} = \text{sen } \hat{B}$ e $\frac{g}{b} = \text{sen } \hat{C}$

$c \times \text{sen } \hat{B} = b \times \text{sen } \hat{C}$

$\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$

Destas duas igualdades tira-se a relação $\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$ conhecida como *Lei dos Senos (*ou *Analogia dos Senos*): Esta lei, embora não fazendo parte do programa, é uma generalização com alguma utilidade e muito acessível a alunos mais interessados. A sua dedução pode surgir no seguimento da resolução de situações como esta. O valor de uma fórmula matemática está precisamente no poder que ela representa, e portanto na sua obtenção, e não na sua utilização mecânica.

Quando se tem à disposição instrumentos tão poderosos como os programas de geometria dinâmica, é interessante observar o comportamento duma relação como esta. Para um triângulo qualquer, que no fundo representa todos os triângulos, observamos a variação de todas as medidas – lados, ângulos e respectivos *senos* – e a constância das razões entre cada lado e o *seno* do ângulo oposto. Esta exploração pode ser realizada antes de estabelecida a *Lei dos Senos*, embora tenha que ser feita como uma actividade extremamente dirigida porque muito dificilmente os alunos se lembrarão de calcular as referidas razões. Optando por esta investigação, será que depois de observar que as razões se mantêm constantes, fica alguma dúvida de que *Lei dos Senos* seja válida para qualquer triângulo? Em casos como este, o papel da demonstração, ou da dedução que apresentámos, deixa de ser o de convencer-nos da validade da relação para passar a ser o da compreensão de porque é que ela se verifica. Até porque se experimentarmos com outras razões, notamos que não há invariantes deste tipo.

Fomos habituados a valorizar a pureza de uma dedução, esquecendo-nos muitas vezes de todas as dificuldades, ensaios, erros e frustrações que tantas vezes estiveram presentes na actividade matemática de quem a fez. Combinando experimentação e dedução, temos a possibilidade de fazer com que os alunos se aproximem do que é essa actividade matemática e consigam perceber o valor da dedução, mas partindo de experiências com muito mais significado para eles e mais acessíveis a todos. Parece-nos que qualquer aluno aderirá com mais ou menos entusiasmo à observação de uma animação como a que falámos, mas só alguns alunos são sensíveis à dedução pura. Talvez que abordagens combinadas como esta que propomos façam com que mais alunos passem a valorizar os métodos da matemática.

Estas são apenas algumas sugestões de problemas e de ideias para a sua exploração. Problemas deste tipo são relativamente fáceis de encontrar e surgem até em situações de aplicações da matemática a áreas de conhecimento muito diversas. São boas oportunidades para ir ao encontro de alguns interesses dos alunos.

Ângulos e medidas

Na trigonometria trabalhamos com ângulos e destes o que nos interessa principalmente é a sua medida. Por isso é tão importante o sistema de unidades utilizado. A unidade de medida de ângulo mais conhecida é o grau e é a única com que os alunos trabalharam até ao fim do 3º ciclo. O sistema que tem por unidade de medida o grau, sistema sexagesimal, é extremamente interessante do ponto de vista histórico e sugere actividades de pesquisa documental a realizar com os alunos. Mas, se pode ser interessante o aprofundamento do conhecimento de um sistema de unidades de medida que os alunos utilizam rotineiramente, a introdução de um novo sistema de medidas arrasta a necessidade de o professor dar atenção a outros aspectos que não sejam a mera mecanização da utilização deste sistema. Não só os alunos têm já maior capacidade de compreender as ideias fundamentais de cada um dos sistemas de medidas, e as vantagens ou desvantagens respectivas, como surge aqui uma boa oportunidade de aprofundar o seu conhecimento sobre a natureza da matemática. Estamos perante um dos aspectos interessantes do pensamento matemático que é a possibilidade de criar um sistema em que a unidade de medida é escolhida de acordo com os interesses de quem vai trabalhar com ela, neste caso por razões que têm a ver com a simplificação dos processos.

Radiano

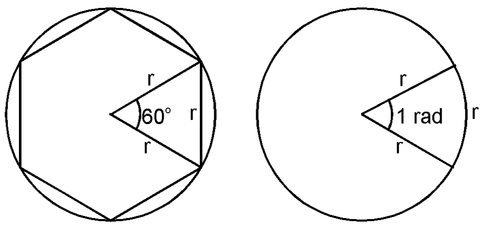
- Uma circunferência tem 5 cm de raio. Qual é o comprimento da circunferência?
  Qual é o comprimento de um arco de 180^o de amplitude? E de 90^o? E de 30^o?
  Qual é o comprimento de um arco de 52^o de amplitude?
  Qual é a amplitude de um arco que tem 12 cm de comprimento? E de 4 cm?
  Qual é a amplitude de um arco que tem 5 cm de comprimento?
- Uma circunferência tem raio ***r***. Qual é o comprimento da circunferência?
  Qual é o comprimento de um arco de 180^o de amplitude? E de 90^o? E de 30^o?
  Qual é a amplitude de um arco que tem comprimento ***r***?
- Numa circunferência à tua escolha desenha um arco cujo comprimento seja aproximadamente igual ao raio. Representa também o ângulo ao centro correspondente.

O radiano foi universalmente adoptado como unidade para medir ângulos. Um radiano é a amplitude do ângulo ao centro correspondente a um arco cujo comprimento é igual ao raio.

Com o desenvolver desta actividade pretende-se que o aluno estabeleça relações entre comprimentos e amplitudes numa circunferência, para chegar à ideia de que a amplitude de um arco que tem comprimento igual ao raio é independente do raio, e para ter uma representação visual do radiano. O conceito de radiano aparece assim com significado para o aluno e associado a uma imagem que é útil.

$$1 \text{ radiano} = \frac{360^{\circ}}{2\pi} \approx 57{,}3^{\circ}$$

Para reforçar esta imagem, podemos ainda comparar o ângulo de um radiano com o ângulo ao centro do hexágono inscrito na circunferência, que sabemos ser de 60°.

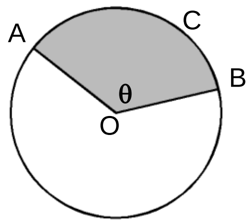


Esta imagem permite uma boa estimativa do radiano baseada em argumentos geométricos.

Também pode ser útil determinar a medida em radianos de um ângulo de um grau.

$$1^{\circ} \approx 0{,}01745 \text{ rad}$$

Não é por acaso que se escolheu esta unidade para medida de ângulos. As razões são várias: o radiano é uma unidade mais conveniente do que o grau porque é maior e por isso permite trabalhar com números mais pequenos; o sistema circular é um sistema decimal como o nosso sistema de numeração, o que não acontece com o sistema sexagesimal. Porém, estes dois argumentos não justificam totalmente a forma como o radiano foi definido. A principal razão é a simplificação de muitas fórmulas, como é o caso da área do sector circular e do comprimento de um arco.



Área do sector circular:

Área = $\frac{r^2 \theta}{2}$ se θ for a medida do ângulo em radianos

Área = $\frac{\pi r^2 \theta}{360}$ se θ for a medida do ângulo em graus

Comprimento do arco ACB:

Comp. = $r \theta$ se θ for a medida do ângulo em radianos

Comp. = $\frac{\pi r \theta}{360}$ se θ for a medida do ângulo em graus

É interessante notar o valor destas fórmulas para o ângulo de volta inteira ou ângulo giro. São pequenas constatações deste tipo que ajudam a construir a ideia da coerência do conhecimento matemático. Muitas destas constatações só surgem se o professor tiver o cuidado de fazer com que os alunos as notem. É um bom hábito, em matemática, quando aparece uma fórmula nova, interpretá-la para alguns casos particulares e verificar que ela toma valores já conhecidos. Isso faz com que se compreenda melhor a fórmula e, ao mesmo tempo, se ganhe segurança na sua validade.

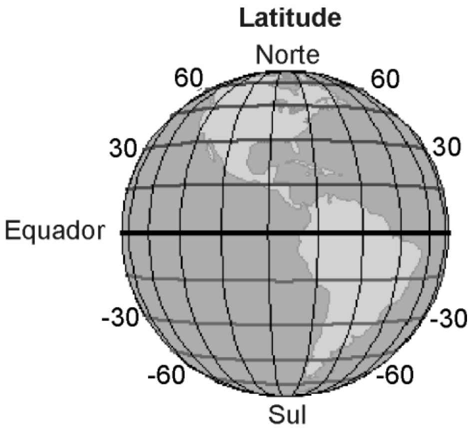
Um outro aspecto interessante que podemos já observar, embora não esteja directamente ligado ao programa do 11º ano, é o facto de, para ângulos muito pequenos, a medida do ângulo em radianos e o valor do *seno* serem números muito aproximados. Tanto mais aproximados quanto menor for o ângulo, facto que costumamos traduzir matematicamente por $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

$$\operatorname{sen} 1^{o} \approx 0{,}0174524$$

$$1^{o} \approx 0{,}017453 \text{ rad}$$

Para além das razões que apontámos para se utilizar o sistema circular, que podemos discutir com os alunos, é bom não esquecer as relacionadas com os desenvolvimentos em série e as derivadas das funções trigonométricas.

Comprimentos e amplitudes



A Terra tem a forma aproximada de uma esfera com 6367 km de raio. A latitude de um lugar é a amplitude, em graus, do arco de meridiano que passa nesse lugar, começando no ponto em que intersecta o equador e acabando no lugar. Assim, pela latitude é possível calcular a distância de um lugar ao equador.

- Procura saber qual a latitude do lugar onde vives e calcula a quantos quilómetros te encontras do equador.
- Procura um lugar que se encontre a dois mil quilómetros do equador.
- Qual é a distância entre dois locais com a mesma longitude cujas latitudes diferem de 1^o? E de 1'?

Se aproveitarmos a calculadora para a conversão de graus para radianos, o cálculo da distância ao equador reduz-se a uma simples conta de multiplicar. Por exemplo, a latitude de Lisboa é 38^o 44'' N, ou seja $38{,}7(3)^o$ ou aproximadamente 0,676 radianos. Logo a distância de Lisboa ao Equador é $0{,}676 \times 6367$ km, aproximadamente 4 300 km.

Inversamente, procurar um lugar a dois mil quilómetros do equador é procurar um lugar cuja latitude seja $\frac{2000}{6367}$ radianos $\approx 18^{\circ}$, norte ou sul. Há muitos lugares nestas condições, todos situados entre os trópicos.

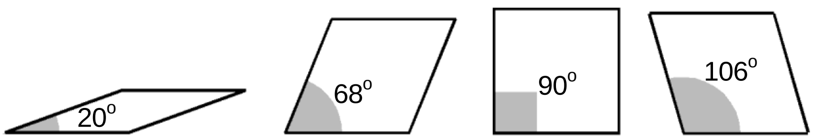
Ao obtermos a distância correspondente à diferença de 1^o nas latitudes, sobre o mesmo meridiano, estamos a preparar o caminho para chegar à milha marítima, que é o comprimento de um arco de círculo máximo com a amplitude de 1', ou seja, 1,852 km.

Problemas com ângulos que variam

A resolução de problemas de triângulos pode conduzir ao estudo da variação das funções trigonométricas mesmo antes destas estarem definidas no círculo trigonométrico. Para isso basta escolher figuras em que um ângulo possa ser encarado como um elemento dinâmico que determina a variação de outras medidas: comprimentos, áreas, volumes, etc. Estes problemas dão significado às funções trigonométricas e permitem adquirir alguma destreza no tratamento de relações entre os elementos de uma figura geométrica. São situações como estas que contribuem para que os alunos construam a ideia de que os objectos matemáticos estão relacionados. Por outro lado, preparam o estudo gráfico e analítico de funções trigonométricas que se fará no 12º ano.

Variação do seno

Tomando como unidade de comprimento o lado dos losangos da figura, determina a área de cada um deles.



Descreve a variação da área do losango como função de um dos seus ângulos.
De que valor se aproxima a área quando o ângulo é quase nulo? E quase raso?
Qual é o losango que tem maior área?
Há ângulos diferentes que dão origem à mesma área? E existem losangos diferentes com a mesma área?

Uma das primeiras ideias interessantes desta tarefa é a visualização dos losangos. Não só não é costume desenhá-los nesta posição, como também não costumamos calcular a sua área como a de um paralelogramo qualquer, isto é, utilizando as medidas da base e da altura em vez das diagonais. Esta situação dá sentido à definição de losango como um caso particular de paralelogramo e à de quadrado como caso particular de losango, ideias que normalmente os alunos têm dificuldade em aceitar.

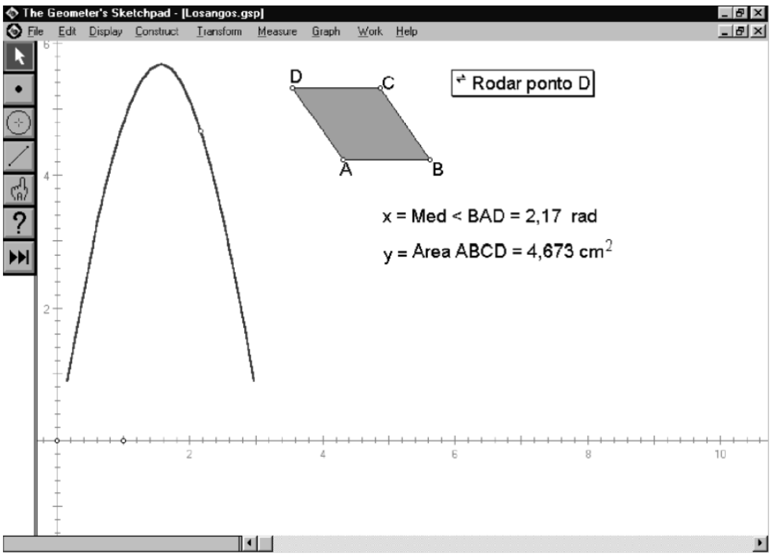
O cálculo da área é um problema de resolução de triângulos rectângulos, e os valores obtidos dão ideias claras sobre a variação da área do losango em função do ângulo.

h = sen 20^{o} | h = sen 68^{o} | h = sen 74^{o}

A = sen 20^{o} | A = sen 68^{o} | A = 1 | A = sen 74^{o}

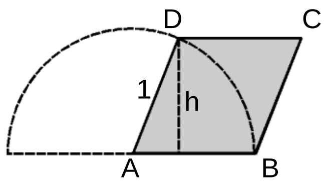
O interesse de ter várias situações análogas é permitir discutir algumas ideias sobre a variação da função *seno*, mesmo que ela ainda não tenha sido definida e mesmo que nem sequer tenhamos estendido a definição de *seno* aos ângulos não agudos. Podemos até aproveitar para discutir qual a melhor extensão da definição do *seno* ao ângulo recto e aos ângulos obtusos, de acordo com esta situação. Quando se adoptar a definição no círculo trigonométrico, verificar-se-à que ela é coerente com a que serve melhor a este caso. Podemos sempre construir um gráfico desta função, fazendo apelo às questões da actividade e aproveitando para visualizar de uma outra forma, certamente mais significativa, a variação da função *seno*. A simetria da função *Área*, relativamente ao quadrado, tem um paralelo claro com a simetria da função *seno* relativamente ao ângulo recto.

Num programa de geometria dinâmica, podemos observar simultaneamente o losango a variar, o ângulo e a área, os correspondentes valores numéricos e o gráfico que traduz a dependência entre as duas variáveis.



Aqui não necessitamos de utilizar a trigonometria porque o programa faz as medições directamente, mas se relacionarmos estas com a expressão que obtivemos anteriormente para calcular a área, o que estaremos a observar é a variação da função **y = sen x** no intervalo **]0, π[**.

A variação do ângulo do losango neste programa, obtém-se fazendo o ponto D deslocar-se sobre uma semicircunferência. A imagem do ponto D em movimento, associada à altura do losango correspondente, que varia, é já uma aproximação à variação da função *seno* no círculo trigonométrico.



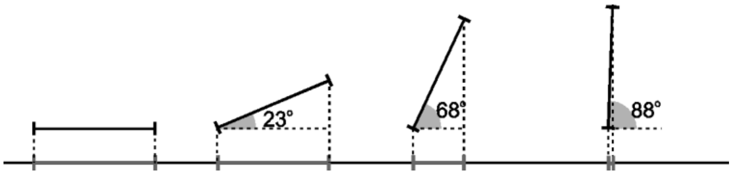
É interessante notarmos que subjacente a este problema, colocado desta forma, esteve sempre uma optimização, que corresponde exactamente ao caso particular do quadrado, e que o gráfico tão bem ilustra.

A exploração desta situação apresenta-nos alternativas de continuidade e ampliação como, por exemplo, pensar agora no problema para um paralelogramo qualquer. É uma alternativa de ampliação porque permite que alunos mais expeditos aprofundem o seu trabalho numa situação de continuidade relativamente à actividade que desenvolveram. A primeira actividade explorada pode passar então a ser encarada como um caso particular da que agora se coloca.

O estudo de funções trigonométricas como funções reais de variável real não faz parte do programa do 11º ano. No entanto, as potencialidades de instrumentos de trabalho tão poderosos como as calculadoras gráficas e os programas de computador levam-nos a pensar nos problemas tradicionais de trigonometria numa perspectiva dinâmica que é natural traduzir em gráficos.

Variação do coseno

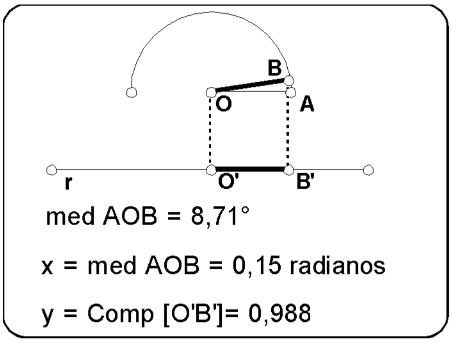
Tomando como unidade de comprimento o dos segmentos de recta da figura, calcula o comprimento dos segmentos que são as suas projecções ortogonais sobre a recta ***r***.

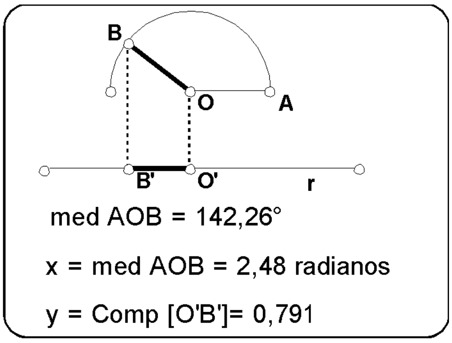


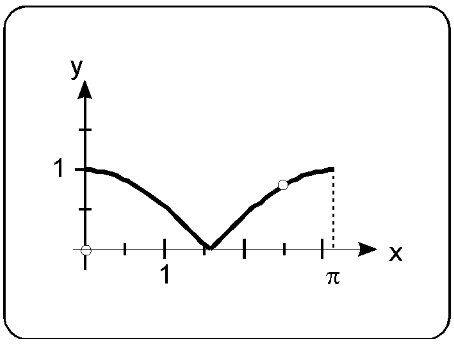
Descreve a variação do comprimento da projecção como função da inclinação do segmento.

Qual é o valor do comprimento da projecção quando o ângulo é zero? E quando o ângulo é recto? Qual é a posição que corresponde à maior projecção?

Esta é uma situação análoga à anterior que permite estudar a variação da função *coseno* no intervalo [0^o, 90^o], mesmo sem a termos definido. A construção desta figura pelos alunos num programa de geometria dinâmica passa pela necessidade da construção de um ponto móvel numa circunferência de raio 1, que já está muito perto de ser um círculo trigonométrico.





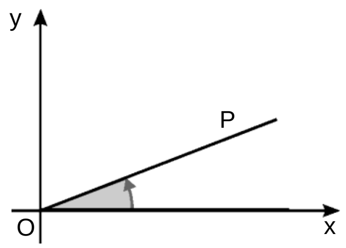


Estes problemas permitiram-nos articular vários elementos de uma figura de uma forma dinâmica. Em todos eles a ideia fundamental é que, a partir de um ponto que se move num arco de circunferência, pudemos relacionar a variação de um ângulo com comprimentos de segmentos. É esta ideia que vai estar na base do estudo das funções trigonométricas a partir do círculo trigonométrico.

O círculo trigonométrico

O círculo trigonométrico é um referencial que permite relacionar um ângulo com as suas razões trigonométricas. Assim sendo, podemos entender as convenções que se utilizam e que facilitam o estudo de um ângulo orientado nesse referencial.

Naturalmente escolhemos para origem do referencial o vértice do ângulo e para semi-eixo positivo Ox, a semi-recta origem do ângulo. Ao estabelecer esta convenção, um ângulo orientado fica definido no referencial por uma semi-recta $\dot{O}P$ ou por um ponto P.



Ângulos em referencial

- Um ângulo de 40^{o} está representado num referencial.
  Obtém as coordenadas de um ponto P que defina o ângulo.
  Obtém as coordenadas do ponto P, considerando $\overline{OP} = 1$.
  Desenha o ângulo no referencial e faz as medições necessárias para determinares valores aproximados do *seno* e do *coseno* de 40^{o}. Verifica com a tua calculadora se obtiveste uma boa aproximação.
- Por representação num referencial, obtém valores aproximados do *seno* e do *coseno* de 50^{o}.

Esta actividade pode servir para chegar à definição do círculo trigonométrico como o referencial mais conveniente para a leitura do *seno* e do *coseno* de um ângulo e que vai permitir a generalização da definição destas funções trigonométricas para qualquer ângulo.

Círculo trigonométrico

- Por leitura directa do círculo trigonométrico, determina os valores do *seno* e do *coseno* dos seguintes ângulos:

$0 \qquad \frac{\pi}{2} \qquad -\frac{\pi}{4} \qquad \pi \qquad \frac{3\pi}{2}$

- Representa, se possível, no círculo trigonométrico, ângulos tais que:

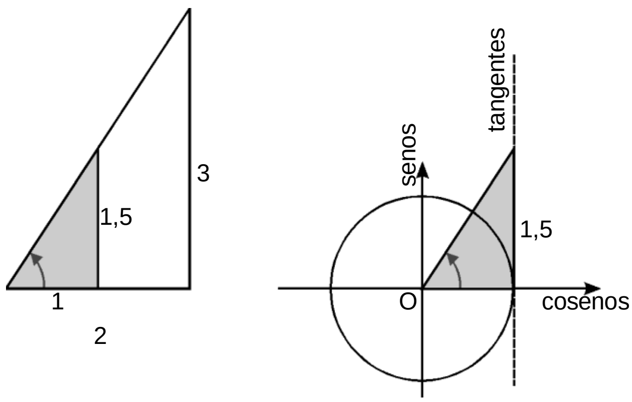
$\text{sen}\ \alpha = \frac{3}{5} \qquad \cos\beta = \frac{3}{5} \qquad \text{sen}\ \gamma = \frac{6}{5} \qquad \text{sen}\ \theta = -\frac{3}{5}$

Estas questões são exemplos de situações que levam o aluno a utilizar o círculo trigonométrico como referencial para fazer leituras e compreender as relações entre razões trigonométricas de ângulos diferentes. É a partir de questões deste tipo que os alunos podem ser levados a concluir que o *seno* e o *coseno* variam entre –1 e 1 e que há vários ângulos com o mesmo *seno* ou o mesmo *coseno*, e podem até determinar as relações existentes entre os ângulos com o mesmo *seno* e entre os ângulos com o mesmo *coseno*. Todo este trabalho é sempre feito com o suporte do círculo trigonométrico porque só assim o aluno sentirá o poder deste instrumento na visualização das relações trigonométricas. Por exemplo, não faz sentido decorar a fórmula $sen\ (\pi - \alpha) = sen\ \alpha$, mas faz sentido, numa situação particular e recorrendo ao círculo trigonométrico, argumentar que $sen\ 140^o = sen\ 40^o$ ou escrever a fórmula como conclusão de uma exploração.

O que estamos a dizer para o *seno* e para o *coseno* estende-se à *tangente*, depois de a definir utilizando um novo segmento no círculo trigonométrico. Esta definição não é tão acessível como a do *seno* e do *coseno*, que aparecem naturalmente como a ordenada e a abcissa do ponto sobre a circunferência, depois das situações que explorámos em que já interpretávamos a extensão aos ângulos obtusos.

A tangente no círculo trigonométrico

- Desenha um triângulo rectângulo de modo que um dos seus ângulos agudos tenha *tangente* 1,5.
- Representa no círculo trigonométrico um ângulo agudo que tenha *tangente* 1,5.
- Recorrendo ao círculo trigonométrico, obtém uma extensão da definição de *tangente* de um ângulo qualquer. Compara a tua definição com as dos teus colegas e discutam as vantagens e desvantagens de cada uma.



A representação geométrica da *tangente* que adoptámos aqui parece-nos ser a mais conhecida, embora não seja a única como é pode ser visto na página 23 desta publicação.

Nas abordagens de situações que fizemos e que utilizavam a função *tangente*, nada pudemos avançar para ângulos obtusos e nada indicava que a *tangente* de um ângulo obtuso fosse negativa. Também no círculo trigonométrico nada nos faria supor que para determinar a *tangente* de um ângulo do 2º quadrante tivéssemos que prolongar o lado do ângulo. Por estas razões, a extensão da definição de *tangente* é mais abstracta e baseia-se em argumentos puramente matemáticos e pouco intuitivos. Parece-nos que só a manutenção da relação $tg\, x = \dfrac{sen\, x}{cos\, x}$ justifica a definição que se adopta no círculo trigonométrico.

Temos aqui uma boa oportunidade para discutir com os alunos a natureza do conhecimento matemático. Podemos notar que uma das características deste conhecimento é a manutenção, sempre que possível, das relações e propriedades que caracterizam um conceito quando alargamos o seu universo.

Toda esta exploração, da extensão das razões trigonométricas e da leitura de relações e propriedades no círculo trigonométrico, aponta para que se gaste algum tempo neste tipo de questões e que se evite cair nos exercícios de pura manipulação simbólica a que se costumava dar uma importância exagerada. Por um lado, a pura manipulação simbólica nunca levou à compreensão dos conceitos e relações subjacentes e a nossa grande preocupação é exactamente essa compreensão. Por outro lado, hoje não há qualquer necessidade de destrezas de manipulação simbólica para resolver problemas, já que dispomos de calculadoras e computadores que nos dão imediatamente as razões trigonométricas de qualquer ângulo e que trabalham com todo o tipo de expressões.

Conhecer melhor as relações trigonométricas

- Qual é o ângulo do intervalo $]-\pi, \pi[$ que tem *tangente* –2?
  Representa-o geometricamente e obtém a sua medida com aproximação às centésimas de radiano.
- Recorda que $sen\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.
  Obtém valores exactos das razões trigonométricas de ângulos do intervalo $[0, 2\pi]$. Procura ser o mais exaustivo possível.
  Como farias para, a partir dos valores que já encontraste, determinar razões trigonométricas exactas para ângulos do intervalo $[2\pi, 4\pi]$?
- Na seguinte lista de afirmações, nem todas são verdadeiras. Encontra argumentos que provem ou refutem a validade de cada uma.
  - O *seno* do dobro de um ângulo é o dobro do *seno* do ângulo.
  - A *tangente* do simétrico de um ângulo é simétrica da *tangente* desse ângulo.
  - O *coseno* da soma de dois ângulos é a soma dos *cosenos* desses ângulos.

Estas são algumas questões que levam o aluno a descobrir e justificar algumas relações no círculo trigonométrico, com algum significado e sem cair em exageros.

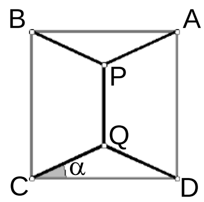
Queremos no entanto reforçar a ideia de que podemos encarar de uma forma nova o papel das relações trigonométricas e que podemos e devemos gastar mais tempo na resolução de problemas de trigonometria, em que é o contexto que nos leva a tomar determinadas decisões e a estabelecer conexões estimulantes.

Mais alguns problemas

Temos procurado seleccionar situações com significado em que o contexto e a sua interpretação ajudem os alunos a compreender as ideias matemáticas subjacentes. Assim, apresentamos mais alguns problemas que nos permitem avançar nas funções trigonométricas, na resolução de equações e na utilização da trigonometria.

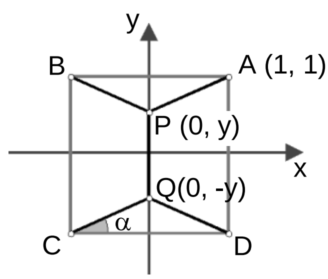
Ângulo desconhecido

No quadrado da figura o ponto P é equidistante de A, de B e de Q, e o ponto Q é equidistante de C, de D e de P. Quanto mede o ângulo α?



Há vários processos para resolver este problema, nomeadamente trigonométricos, analíticos e também o recurso a um ambiente geométrico dinâmico. Perante uma construção adequada, que o aluno tem que defender, o AGD dá uma solução aproximada mas não explica o porquê desse valor. Os outros processos esclarecem algumas relações que vão resultar naquele valor.

Numa resolução analítica, escolhemos o referencial com base nas propriedades da figura, e procurando que os cálculos sejam o mais simples possível. Os pontos P e Q têm que pertencer às mediatrizes dos lados [AB] e [CD], e aproveitando as simetrias do quadrado, o referencial pode ser o da figura.



$$\overline{AP} = \overline{PQ}$$

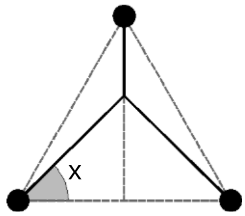
$$\sqrt{1^2 + (1-y)^2} = \sqrt{0^2 + (y+y)^2}$$

$$3y^2 + 2y + 2 = 0$$

O ângulo α encontra-se através de uma equação trigonométrica simples obtida a partir da solução positiva desta equação do 2º grau.

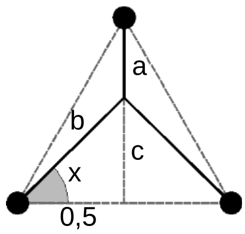
O cabo mais curto

Três aldeias situam-se em três vértices de um triângulo equilátero de lado 1km. A companhia que gere a televisão por cabo vai fazer a instalação de cabos ligando as três aldeias. A solução mais económica é do tipo da da figura.



Determina a solução óptima para o problema, isto é, o ângulo x que corresponde ao menor comprimento possível para o cabo.

O comprimento do cabo (C) é função do ângulo x. De acordo com a figura, tem-se

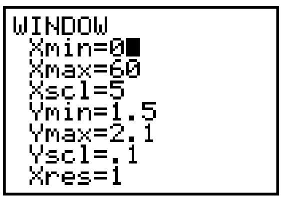


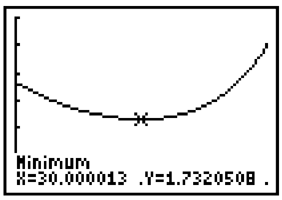
$$C = a + 2b$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} - c \qquad b = \frac{0,5}{\cos x} \qquad c = 0,5 \text{ tg } x$$

$$C(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 0,5 \text{ tg } x + \frac{1}{\cos x}$$

Utilizando uma calculadora gráfica podemos observar o gráfico desta função num intervalo apropriado, e determinar uma boa aproximação ao mínimo da função.

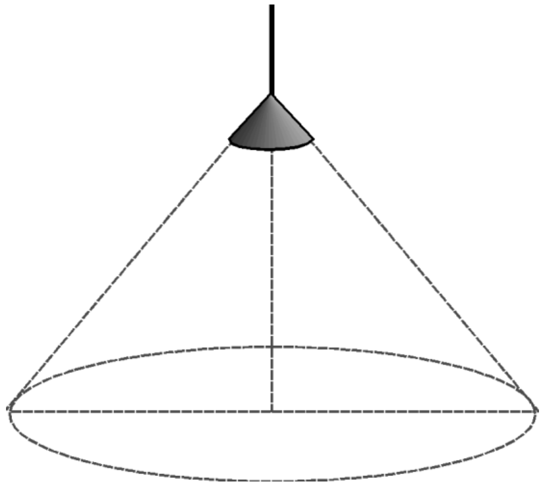




O cabo é mínimo quando o ângulo é de 30^o, isto é, quando o ponto onde convergem os três segmentos é o centro do triângulo equilátero. É interessante notar que, nesta situação, como em tantos outros problemas geométricos, a solução óptima corresponde à figura mais rica em simetrias.

Cone de luz

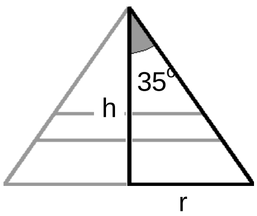
Um candeeiro, colocado na vertical, origina um cone de luz.



Relaciona intuitivamente a altura a que é colocado o candeeiro e a área iluminada para um ângulo de corte do cone de 70º. Faz um estudo analítico dessa relação.

Com um candeeiro deste tipo colocado a 3 m de altura, estuda a relação entre o ângulo de corte do cone e a área iluminada. Faz um estudo dessa relação recorrendo à calculadora gráfica.

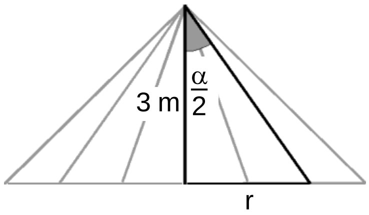
Intuitivamente vê-se logo que quanto maior for a altura **h** maior é a área iluminada. Também é fácil perceber que esta vai ser uma função quadrática, já que o raio do círculo iluminado é directamente proporcional à altura. Depois destas considerações, podemos deduzir a expressão que relaciona a área iluminada **A** com a altura do candeeiro **h**.



$$\frac{r}{h} = \text{tg } 35^{\circ} \qquad r = h \text{ tg } 35^{\circ}$$

$$A(h) = \pi r^2 = \pi h^2 \text{ tg}^2 35^{\circ} \approx 1{,}54 h^2$$

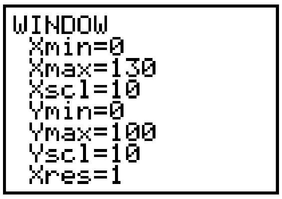
A variação da área iluminada em função do ângulo de corte do cone é uma situação bastante diferente, apesar de ser também uma função crescente: quanto maior for o ângulo maior será a área. No entanto esta variação já não é uma função quadrática simples.

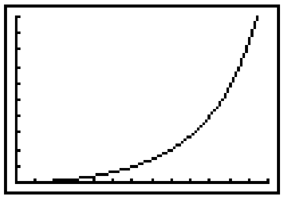


$r = 3 \text{ tg } \frac{\alpha}{2} \qquad \alpha \in]0^o, 180^o[$

$A(\alpha) = \pi \times 9 \text{ tg}^2 \frac{\alpha}{2}$

$A(\alpha) \approx 28{,}27 \text{ tg}^2 \frac{\alpha}{2}$

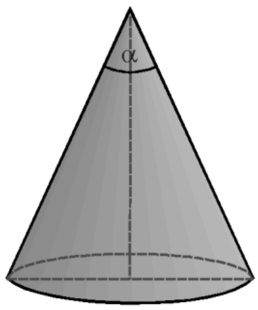




Em problemas deste tipo faz sentido pedir o valor do ângulo que ilumina uma dada área e assim surgir a necessidade de resolver uma equação trigonométrica num intervalo determinado.

Volume de um cone

O raio da base de um cone mede 1 metro.

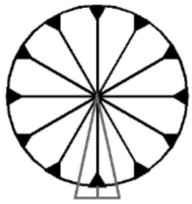


Se quisermos aumentar muito o volume sem mudar o raio da base, como devemos fazer variar o ângulo? E para obter um volume quase nulo?

Estuda a relação entre o ângulo de corte do cone e o seu volume.

Roda gigante

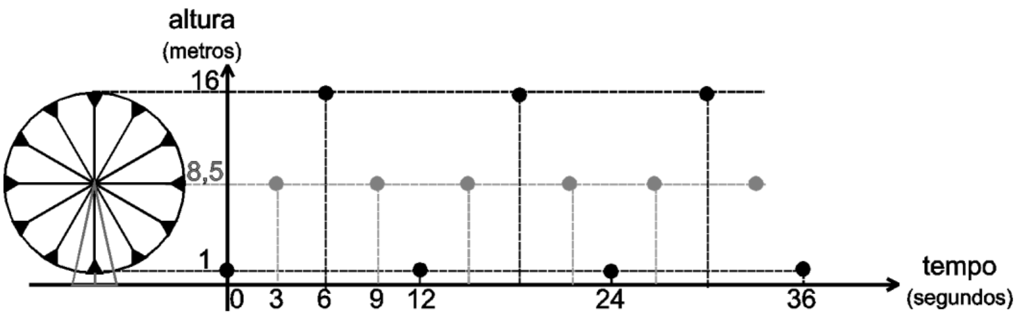
Supõe que uma roda gigante com 7,5 m de raio dá uma volta completa em 12 segundos. Constrói um modelo matemático que descreva a relação entre a altura ***h*** a que se encontra um passageiro, medida a partir do ponto mais baixo da roda (1 m acima do solo) e o tempo ***t***.



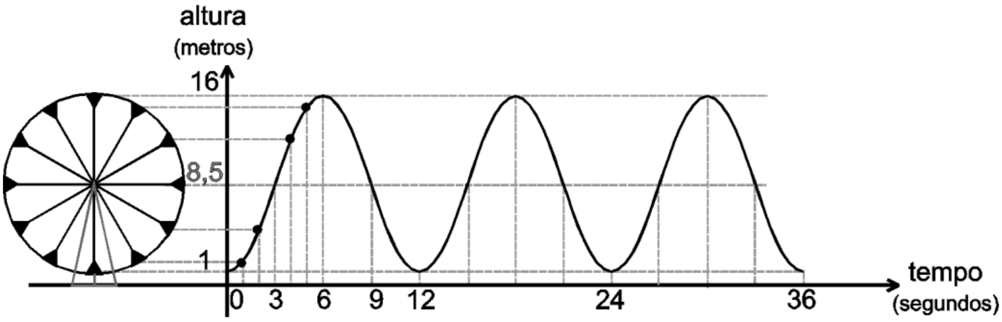
Adaptado de NCTM, Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar

A um primeiro nível, a exploração desta situação pode ser apenas geométrica sem recorrer a conhecimentos de trigonometria. Pela simples observação da roda e do seu movimento podem marcar-se pontos num gráfico, que é o modelo mais acessível para descrever a relação pedida.

Partindo do princípio que o movimento da roda começou quando o passageiro entrou, isto é, quando a altura era de 1 m, e que o movimento é uniforme, os pontos de marcação imediata são os que correspondem à altura mínima, 1 m, e esta repete-se de 12 em 12 segundos. Como o tempo de descida é igual ao de descida, a altura máxima é atingida pela primeira vez aos 6 segundos, e depois de 12 em 12 segundos. A expressão geral para estes valores de **t** é 6 + 12k, em que k é o número de voltas. Continuando nesta procura dos pontos cuja marcação é mais simples, observamos que entre a altura máxima e a altura mínima há uma altura intermédia pela qual, em cada volta, se passa duas vezes: é a altura de 8,5 m que é atingida aos 3 e 9 segundos na primeira volta.

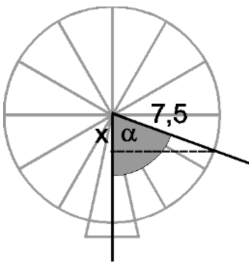


Até aqui, os pontos obtidos podem levar os alunos a pensar que o gráfico é constituído por segmentos de recta. No entanto uma observação mais cuidadosa da roda pode fazer notar que a diferença de alturas entre as posições da primeira e da segunda cadeiras é muito menor que a diferença entre a segunda e a terceira posições. Por isso o gráfico não pode ser linear, e torna-se indispensável continuar a marcação de pontos. A simetria da situação relativamente a cada meia volta, as alturas atingidas na subida são também as da descida, facilita a construção do gráfico após se terem marcado alguns pontos da primeira meia volta.



Este gráfico é já um modelo bastante aproximado da situação. Esta actividade pode servir para introduzir conceitos matemáticos como a periodicidade, por exemplo, e o estudo do significado das simetrias do gráfico.

Podemos partir para um estudo mais completo do modelo encontrando a fórmula que relaciona a altura com o tempo. Começamos por determinar a amplitude do arco percorrido em **t** segundos, visto que se trata de um movimento circular.



Como uma volta completa é percorrida em 12 segundos,

$$\alpha = \frac{\pi}{6}\,t \quad \text{radianos}$$

De acordo com a figura $\quad x = 7{,}5 \cos \alpha$

$$\text{altura} = 8{,}5 - 7{,}5 \cos\left(\frac{\pi}{6}\,t\right)$$

Esta fórmula mantém-se válida para ângulos não agudos. Quando $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, o coseno é negativo o que origina alturas maiores que 8,5 m.

Tendo obtido a expressão, faz sentido colocar questões do tipo “Em que instante o passageiro atinge a altura de 12 metros?”. Esta é uma situação em que a resolução de equações e a obtenção da expressão geral das soluções em R^+ tem significado.

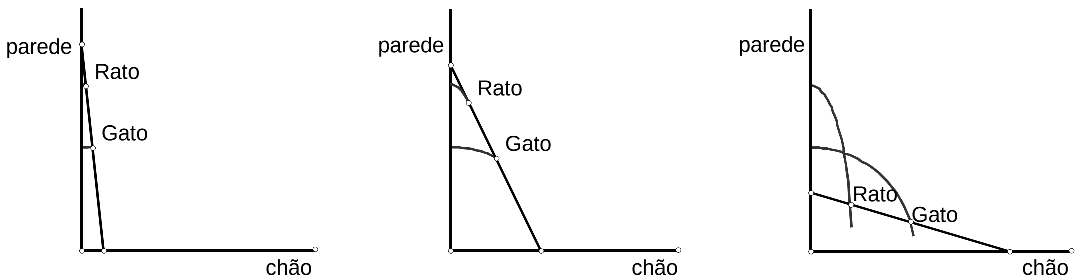
Uma escada, um gato e um rato

Uma escada de pedreiro com 9 degraus foi encostada a uma parede na vertical e deslizou, sempre com a parte superior encostada à parede, até ficar na horizontal.

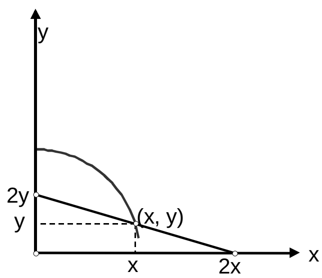
No 8º degrau estava um rato e no 5º degrau um gato, e ambos se aguentaram firmemente na sua posição na escada. Qual foi a curva descrita por cada um deles durante a 'escorregadela'?

Faz um estudo exploratório num programa de geometria dinâmica e depois demonstra a conjectura que fizeres.

Construindo uma simulação da situação no GSP, por exemplo, podemos ver as curvas



descritas pelo gato e pelo rato, que parecem ser quartos de uma circunferência e de uma elipse, respectivamente. Mas o que vemos não é suficiente para termos a certeza, nem para compreendermos porque é que obtemos estas curvas. Para fazer a demonstração, podemos recorrer à geometria analítica, escolhendo para referencial os eixos que representam o chão e a parede, e para unidade de comprimento a distância entre dois degraus da escada. Deste modo o comprimento da escada é 10 unidades.



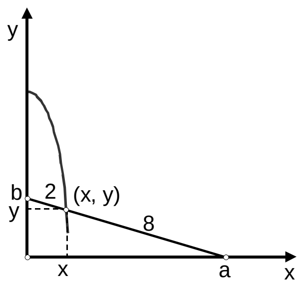
A figura ao lado ilustra a situação do gato. Quando a escada escorrega, a figura varia, mas o segmento que a representa é sempre a hipotenusa de um triângulo rectângulo cujos catetos medem 2x e 2y. Então, o conjunto de pontos (x, y), descrito pelo gato, é tal que

$$(2x)^2 + (2y)^2 = 10^2$$

Esta é a equação de uma circunferência de centro na origem e raio 5, tal como tínhamos conjecturado.

A curva descrita pelo rato é ligeiramente diferente, já que não se encontra no ponto médio do segmento. O ponto onde o rato se situa divide a hipotenusa dos triângulos rectângulos em dois segmentos que são, por sua vez, hipotenusas de triângulos rectângulos semelhantes ao primeiro. Obtêm-se assim as igualdades:

$$\frac{x}{2} = \frac{a}{10} \quad \text{e} \quad \frac{y}{8} = \frac{b}{10}$$



$$a = \frac{10\,x}{2} \quad \text{e} \quad b = \frac{10\,y}{8}$$

Como a e b são os catetos de um triângulo rectângulo de hipotenusa 10, vem

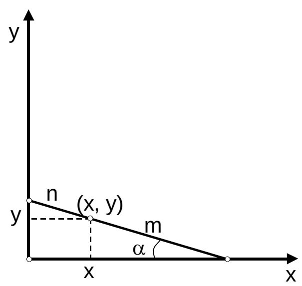
$$\left(\frac{10\,x}{2}\right)^2 + \left(\frac{10\,y}{8}\right)^2 = 10^2$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{64} = 1$$

Reconhecemos esta como a equação de uma elipse de semi-eixos 2 e 8.

É interessante ainda fazer uma extensão desta demonstração para qualquer ponto da escada, e relacionar os comprimentos dos segmentos em que esta fica dividida com os dos dois eixos da elipse.

Outra abordagem para estes problemas, que utiliza trigonometria, é partir da variação da inclinação da escada. Continuando a supor que o comprimento da escada é 10, dos triângulos rectângulos da figura vem:



$$\cos\alpha = \frac{x}{n} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{m} \qquad 0^o \le \alpha \le 90^o$$

e da fórmula fundamental da trigonometria,

$$\frac{x^2}{n^2} + \frac{y^2}{m^2} = 1$$

Um aspecto interessante desta abordagem é relacionar as equações paramétricas da elipse e da circunferência com as equações cartesianas.

Esta actividade sugere ainda ideias para a construção de um *compasso de elipses* ou para o estudo de outras curvas (ver *Educação e Matemática* n.os 46 e 47), que pode ser um trabalho de projecto muito interessante a levar a cabo com os alunos, e uma óptima oportunidade de estabelecer conexões entre vários temas da matemática.

Geometria analítica

Uma das ideias fundamentais no ensino da geometria analítica é a de que esta não é um ramo da geometria mas sim um método para resolver problemas de geometria. É importante que, ao estudar este método, nos apercebamos de que ele é mais um, a acrescentar aos outros, os que ensinamos e os que não ensinamos, e que não é melhor nem pior que os outros, apenas mais adequado à resolução de alguns problemas.

Numa determinada situação, uma demonstração analítica pode parecer mais fácil do que a correspondente demonstração sintética ou pela geometria das transformações, enquanto que noutra situação uma demonstração analítica pode parecer totalmente impossível e a demonstração sintética ou pelas transformações parecer mais fácil. Fica ao critério de cada um, como pessoa que resolve problemas de geometria, decidir que método é mais adequado às suas necessidades. (Wallace e West, p. 213)

Pensar matematicamente é procurar usar o caminho mais favorável, e o mais favorável será também o que nos permitir economia de meios e, consequentemente, em que haja menos possibilidade de errar. Usar métodos diversos e confrontá-los é dar aos alunos a possibilidade de poderem ser eles a escolher criticamente. Tudo isto aponta para que a ênfase nunca poderá estar nas manipulações rotineiras, mas sim nos significados, no conhecimento dos métodos e no poder de decisão.

Na essência da geometria analítica está o recurso à correspondência biunívoca entre os pontos de uma recta e o conjunto dos números reais, que permite estabelecer um sistema de coordenadas cartesianas para os pontos de um plano, ou do espaço. Wallace e West designam esta forma de representação por *coordinatization*. A representação do plano ou do espaço com pares ou ternos ordenados de números reais permite a aplicação de técnicas algébricas e analíticas na resolução de problemas de geometria. A estas técnicas podemos acrescentar também as do cálculo vectorial em referencial ortonormado. Estas vêm aumentar as possibilidades da geometria analítica, ao permitir-nos trabalhar também com transformações geométricas e com ângulos a partir das coordenadas dos vectores.

Não podemos perder de vista dois aspectos essenciais, a geometria e os problemas. Devemos evitar todos os exageros de utilização de técnicas de pura manipulação simbólica, sejam vectoriais ou algébricas, para dar ênfase aos conceitos geométricos, aos problemas, às investigações, ao poder dos métodos e das suas articulações. Nem a matemática, nem a tecnologia, nem os aspectos ligados com a própria aprendizagem justificam tais excessos.

Infelizmente não são assim tantos os problemas interessantes que vamos poder propor aos alunos. Quer porque a maior parte dos problemas do plano e do espaço acessíveis podem também ser resolvidos sinteticamente, ou estão fora do âmbito deste programa, quer porque é para além da terceira dimensão que este método ganha poder. Assim, pensamos que este tema é uma oportunidade para explorar o mais possível a visualização, tanto no plano como no espaço.

Algumas orientações didácticas que vamos seguir e ilustrar são apresentadas por Sebastião e Silva nos seus *Guias*, e vamos mesmo utilizar alguns dos exemplos por ele sugeridos. Fazemo-lo pois nunca é demais referir que muitas das nossas actuais preocupações didácticas eram já defendidas por Sebastião e Silva. O papel activo do aluno, o apelo à intuição e à imaginação criadora, a orientação do concreto para o abstracto, a presença das conexões matemáticas, a exploração do erro, a preocupação com a compreensão, bem como o recurso a instrumentos de cálculo, são, entre outras, referências que este professor sempre teve presentes e que orientaram os seus escritos sobre o ensino da Matemática.

Produto escalar

Quando uma definição nos é demasiado familiar, temos uma certa tendência para tomá-la como a única. Ora, em matemática, uma definição é muitas vezes escolhida conforme é mais conveniente para o desenvolvimento da teoria ou para a resolução de um determinado problema. O que é importante é não cair em contradições e não cometer erros de lógica ao definir um determinado conceito.

São poucas as oportunidades de apresentar aos alunos diferentes definições e discutir com eles as implicações de uma ou outra escolha. Trabalhar algumas destas questões é também ensinar alguma coisa acerca da natureza da matemática. O produto escalar oferece-nos precisamente a possibilidade de comparar duas definições e estudar as relações entre elas.

A definição que estamos mais habituados a adoptar para o produto escalar é a apresentada por Bento de Jesus Caraça (1960):

Dados dois vectores **u** *e* **v***, quaisquer, não nulos, dá-se o nome de produto escalar ou produto interno deles, e escreve-se* **u|v***, que se lê* **u** *interno* **v***, ao escalar definido pela igualdade*

$$u|v = \operatorname{mod} u \cdot \operatorname{mod} v \cdot \cos\theta$$

onde θ *é o ângulo dos dois vectores. É, como se vê, um escalar, ao contrário do produto externo que é, por definição, um vector.*(p.48)

Como se pode notar, esta definição aparece depois da de produto externo e são logo feitas comparações entre as duas. A seguir, são estabelecidas analogias e diferenças entre as propriedades das duas operações, e depois é deduzida a *expressão cartesiana do produto escalar* (p.51):

$$u|v = \sum_k a_k b_k \quad k = 1, 2, 3$$

Sebastião e Silva (1978) começa por definir produto interno de $\vec{u}$ por $\vec{v}$, que representa por $\vec{u} \bullet \vec{v}$ ou $\vec{u}|\vec{v}$ (p.134), como

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left|\vec{u} + \vec{v}\right|^2 - \left|\vec{u}\right|^2 - \left|\vec{v}\right|^2\right)$$

A partir desta definição, é deduzida a expressão cartesiana do produto interno num referencial ortonormado no plano e no espaço. Só um pouco mais à frente (p.136), na procura de um significado geométrico para a noção de produto interno, este autor deduz o que chama uma *nova definição geométrica de produto interno*, fazendo intervir o ângulo dos dois vectores e chegando à fórmula já nossa conhecida:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \left|\vec{u}\right| \left|\vec{v}\right| \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$$

Esta definição aparece para depois ser aplicada em questões da física e em problemas de geometria onde é importante considerar o ângulo dos dois vectores – o teorema do *coseno* ou de Carnot e aplicações do produto interno na geometria analítica.

Outros autores como J. Santos Guerreiro (1970) e Dias Agudo (1960) usam, para o espaço euclidiano ordinário, a definição usual $\vec{u}|\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\alpha$ (p.147 e p.173, respectivamente), mas definem mais geralmente para um espaço vectorial qualquer *E*, de dimensão *n*, produto interno como qualquer aplicação bilinear de $E \times E$ em R .

Achámos interessante ir buscar estes exemplos para ilustrar a discussão da definição em matemática, e aproveitamos para observar as diferenças nas notações utilizadas, contrariando a ideia que às vezes temos de que a simbologia matemática é universal e imutável.

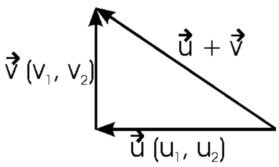
As formas como a definição de produto escalar é abordada pelos diversos autores mostra que a escolha da definição a adoptar como primeira deverá depender do contexto em que surge e da utilização que se pretende dar. Esta ideia também está discutida no primeiro texto desta brochura, na página 30.

Vectores e perpendicularidade

Em papel quadriculado, desenha alguns vectores, e determina as suas coordenadas e as suas normas para investigares relações entre estes valores e a posição relativa dos dois vectores.

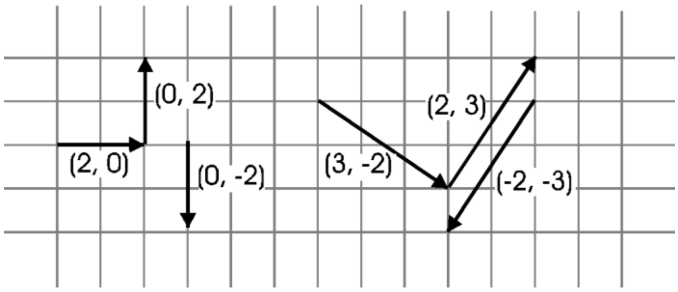
Com a exploração sistemática de várias situações, tenta encontrar respostas para as seguintes questões:

- Que relação têm as coordenadas de dois vectores paralelos?
- Que relação têm as coordenadas de dois vectores perpendiculares com a mesma norma?
- Tenta formular uma conjectura sobre a relação entre as coordenadas de dois vectores perpendiculares quaisquer.
- A partir da figura, e da relação entre as normas dos vectores representados, deduz uma relação entre as coordenadas de dois vectores perpendiculares.



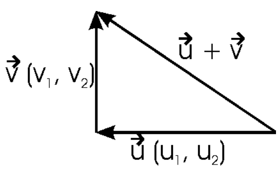
Pensamos que é possível começar pela definição de produto escalar a partir das coordenadas dos vectores em base o.n., porque esta sai naturalmente de uma condição de perpendicularidade que pode ser induzida e deduzida pelos alunos através das coordenadas dos vectores.

Esta actividade permite recordar a decomposição de um vector nas suas componentes na base ortonormada implícita no papel quadriculado, e a sua representação em coordenadas.



A exploração sistemática de alguns casos permite chegar rapidamente à conjectura de que, para dois vectores perpendiculares com a mesma norma, as coordenadas são do tipo (a, b) e (–b, a). A conjectura pode ser alargada para vectores que não têm a mesma norma, combinando as duas primeiras condições: se um vector é perpendicular a outro, é também perpendicular a todos os que lhe são paralelos.

Esta conjectura foi obtida de forma indutiva, isto é, por observação de alguns casos particulares, mas necessita de ser validada. A dedução de uma condição para que dois vectores quaisquer sejam perpendiculares, utilizando apenas o teorema de Pitágoras e a expressão da norma nas coordenadas, não só valida a conjectura mas também faz compreender melhor porque é que ela funciona, em que condições (ref. o. n.), e permite fazer a sua generalização para o espaço tridimensional, cuja exploração não é tão acessível.



$\vec{u} \perp \vec{v}$ se o triângulo for rectângulo

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

Em coordenadas de um referencial do plano:

$$(u_1+v_1)^2 + (u_2+v_2)^2 = u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2$$

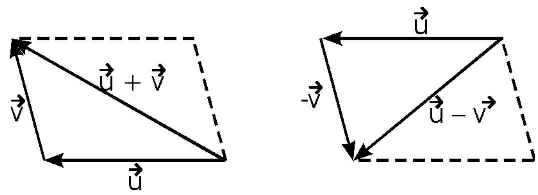
$$u_1v_1 + u_2v_2 = 0$$

A expressão que aparece no primeiro membro desta condição de perpendicularidade pode ser adoptada como definição de produto escalar do vector $\vec{u}$ pelo vector $\vec{v}$.

Posição relativa e coordenadas
Dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são tais que $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}-\vec{v}\|$. Investiga que relação existe entre os dois vectores.
Relaciona a conclusão a que chegaste com uma condição sobre as coordenadas dos dois vectores.

Este pode ser outro caminho para chegar à condição de perpendicularidade de dois vectores do plano ou do espaço. Começar pela interpretação geométrica desta situação é um bom princípio. Como dois vectores são sempre complanares, este é sempre um problema do plano, só temos que ter em atenção depois, na tradução para coordenadas, se estamos a trabalhar num referencial do plano ou num referencial do espaço.

Provavelmente, perante esta situação, surgirão várias figuras como tentativas de interpretação geométrica. Embora algumas delas possam ser casos particulares, são elas que preparam o caminho da generalização. Para esta é determinante perceber que, se os vectores não forem nulos, $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ e $\|\vec{u}-\vec{v}\|$ representam os comprimentos das diagonais de um paralelogramo, e são iguais se e só se o paralelogramo for um rectângulo.

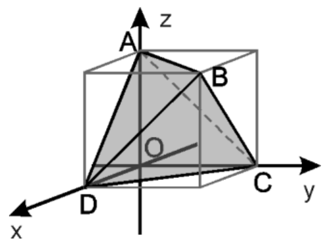


Traduzindo em termos de coordenadas, no plano ou no espaço, e com algum cálculo algébrico chega-se à condição de perpendicularidade de dois vectores.

Esta actividade tanto pode ser utilizada para introduzir as condições de perpendicularidade e uma definição de produto escalar, como para aplicação destes. A forma como abordámos aqui não implica qualquer conhecimento prévio, mas é só uma das abordagens possíveis. Parece-nos também interessante notar que a condição dada no enunciado, $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}-\vec{v}\|$, é uma condição de perpendicularidade de dois vectores, equivalente à que fomos obter com as coordenadas .

Perpendicularidade no espaço

Escolhendo um referencial adequado, mostra analiticamente que num tetraedro duas arestas não concorrentes são perpendiculares.



Como é habitual, a escolha de um referencial para o tetraedro parte do tetraedro dentro de um cubo e considerando para unidade a aresta do cubo.

A (0, 0, 1)   B (1, 1, 1)   C (0, 1, 0)   D (1, 0, 0)

Vamos demonstrar que a aresta AD é perpendicular a BC, a demonstração para os outros pares de arestas é análoga.

$\overrightarrow{AD}$ (1, 0, -1) $\overrightarrow{BC}$ (-1, 0, -1)

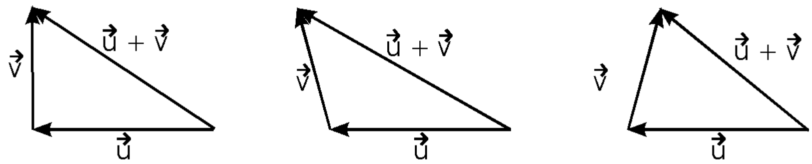
$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = -1 + 0 + 1 = 0$$

Como o produto escalar dos dois vectores é zero, os vectores são perpendiculares.

Uma relação entre normas

A norma de $\vec{u}+\vec{v}$ depende das normas de $\vec{u}$ e de $\vec{v}$ e do ângulo dos dois vectores. Procura obter uma fórmula que traduza essa relação de dependência.

A exploração geométrica desta relação leva-nos a considerar três casos:



Quando o ângulo dos dois vectores é recto, a relação entre as normas é dada pelo teorema de Pitágoras.

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

Para os outros casos, ao segundo membro desta igualdade há que acrescentar uma parcela positiva no caso do ângulo ser agudo e negativa no caso do ângulo ser obtuso. Como obter essa parcela? A exploração para o ângulo recto sugere-nos que na igualdade que procuramos esteja envolvido o quadrado da norma do vector soma. Recordando que $\|\vec{a}\|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a}$ e recorrendo às propriedades do produto escalar para o cálculo de $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$

$$\begin{aligned}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &= (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})\\ &= \vec{u}.\vec{u}+2(\vec{u}.\vec{v})+\vec{v}.\vec{v}\\ &= \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta\end{aligned}$$

Esta fórmula é coerente com a análise que tínhamos feito sobre a parcela em falta, já que o *coseno* de um ângulo agudo é positivo e o de um ângulo obtuso é negativo.

Como já afirmámos várias vezes, é importante aproveitar todas as oportunidades para discutir com os alunos formas de pensar matematicamente. Neste caso começámos por ter ideias sobre o que procurávamos e depois deduzimos a relação, verificando no fim a sua coerência com a análise inicial. É muitas vezes neste tipo de confronto que se encontram falhas ou contradições, que podem vir de erros, e por isso esta é uma forma de os controlar ou que pode indicar outros caminhos.

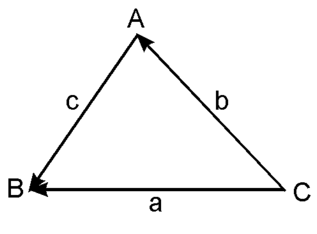
Uma extensão deste problema é ver o que acontece com a norma de $\vec{u}-\vec{v}$. Esta leva-nos a pensar como é que a relação geométrica entre os vectores $\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{u}-\vec{v}$, que podem ser representados pelas duas diagonais de um paralelogramo, fica traduzida em termos de fórmula.

Teorema de Carnot

Um triângulo fica definido se forem dados dois lados e o ângulo por eles formado. Obtém uma fórmula que permita calcular o terceiro lado.

Segundo Sebastião e Silva (1978, p.139) o significado geométrico do produto interno tem uma aplicação importante em trigonometria. O Teorema de Carnot, que generaliza o Teorema de Pitágoras para triângulos não rectângulos, permite-nos resolver triângulos que até aqui não era possível resolver. Por isso, reforçamos a pertinência de trabalhar com os alunos esta aplicação do produto escalar à geometria, embora ela não venha explicitamente recomendada no programa.

Esta relação é uma outra formulação da igualdade anterior, mas agora aplicada a triângulos. Se orientarmos os lados do triângulo ABC como na figura, verificamos que $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$ e o ângulo dos vectores $\vec{b}$ e $\vec{c}$ é o suplementar do ângulo A do triângulo.



Como cos (180º–Â) = – cos Â, da igualdade

$$\|\vec{b}+\vec{c}\|^2=\|\vec{b}\|^2+\|\vec{c}\|^2+2\|\vec{b}\|\|\vec{c}\|\cos(\widehat{\vec{b}\vec{c}})$$

obtém-se

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$$

Na página 32 é feita uma outra dedução desta fórmula, sem recorrer ao produto escalar.

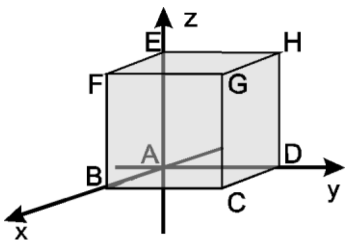
Do plano ao espaço

Representar analiticamente um conjunto de pontos é procurar condições que o definam, em termos de coordenadas, de uma forma simples e operacional. Tanto no plano como no espaço, esta preocupação de tradução entre as várias formas de representação é a mesma. Tudo o que estabelecemos no espaço pode ser restringido a um plano quando se anula uma das coordenadas, isto é, quando se faz uma intersecção por um plano coordenado. Reciprocamente, muito do que se estabelece no plano pode ser ampliado para o espaço ao acrescentarmos uma coordenada. A compreensão destas analogias e diferenças entre duas e três dimensões é fundamental para que o trabalho analítico seja feito com base na visualização e não no cálculo, e vai preparando os alunos para a compreensão de outros espaços de *n* dimensões.

Planos paralelos aos planos coordenados

Num referencial, como podem ser caracterizados analiticamente os planos que contêm cada uma das faces de um cubo?

Escolhido um referencial conveniente, a análise das características geométricas de cada um dos planos permite obter imediatamente a sua caracterização analítica.



A (0, 0, 0) B (1, 0, 0) C (1, 1, 0) D (0, 1, 0)

E (0, 0, 1) F (1, 0, 1) G (1, 1, 1) H (0, 1, 1)

Por exemplo, o plano EFGH é paralelo ao plano coordenado xOy por isso todos os seus pontos têm cota igual, neste caso 1, e as outras coordenadas podem ser quaisquer. A tradução deste facto em linguagem simbólica é **z = 1**. Qualquer ponto que não pertença a este plano tem cota diferente de 1. Por tudo isto, a condição **z = 1** caracteriza o plano EFGH.

Ao estabelecer estas equações, há todo o interesse em chamar a atenção para a analogia entre as equações que representam planos paralelos aos planos coordenados, num referencial do espaço, e as equações que representam rectas paralelas aos eixos coordenados num referencial do plano. Tanto no plano como no espaço, a condição obtida incide só sobre uma das variáveis. Poderíamos afirmar que a recta está para o plano como o plano está para o espaço, isto é, que a mesma condição que define uma recta num referencial do plano, define um plano num referencial do espaço.

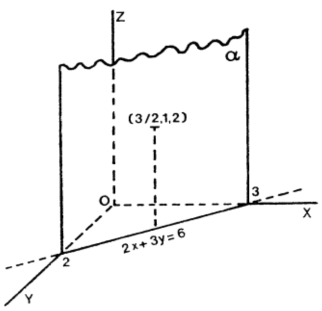
Planos paralelos aos eixos coordenados

Num referencial do plano, a equação 2x + 3y = 6 representa uma recta. Que conjunto representa esta equação num referencial do espaço?

De que tipo é a condição que define analiticamente um plano paralelo a Oz? E a Ox? E a Oy?

Representa num referencial o plano de equação z = 0,5 y + 3.

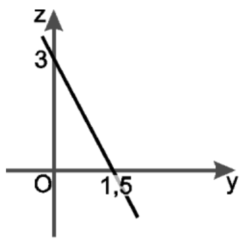
Escolhemos propositadamente a equação usada por Sebastião e Silva (1975, p.94) para poder apresentar um pequeno texto deste professor, que ilustra as ideias que temos vindo a defender.



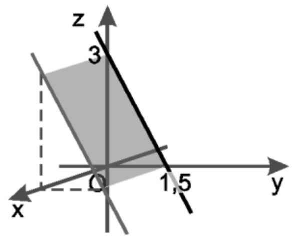
No plano XOY, a equação 2x + 3y = 6 representa uma recta desse plano. No espaço, a mesma equação representa o conjunto dos pontos (x, y, z) tais que 2x + 3y = 6, podendo z ser qualquer. O aluno deverá reconhecer por si mesmo que este conjunto é o plano vertical $\boldsymbol{\alpha}$ *que passa por* ***r****.*

Mais geralmente, o aluno deve ser levado a reconhecer, de modo intuitivo, que as equações da forma ax + by = c representam planos verticais (paralelos a OZ), que as equações ax + bz = c representam planos de topo (paralelos a OY) e que as equações ay + bz = c representam planos de rampa (paralelos a OX). Em particular, o plano x + 2y = 0 contém o eixo OZ, o plano 2x − z = 0 contém o eixo OY, etc.

Valorizamos esta abordagem porque ela facilita a visualização dos planos no referencial. O plano de equação $z = 0{,}5\ y + 3$ é paralelo a Ox. Para o representar começamos por traçar a recta $z = 0{,}5\ y + 3$ no referencial do plano yOz e depois arrastamo-la na direcção de Ox.



No referencial do plano yOz, a equação $\mathbf{z = -\,0{,}5\ y + 3}$ representa uma recta de declive $-0{,}5$ e ordenada na origem 3.



No referencial do espaço, a equação $\mathbf{z = -\,0{,}5\ y + 3}$ representa um plano paralelo a Ox.

Chamamos a atenção para o facto de Sebastião e Silva usar a linguagem da Geometria Descritiva para designar os planos, estabelecendo assim uma ligação útil entre os referenciais e a linguagem utilizados nas duas disciplinas. Para muitos alunos que têm essa disciplina, a confusão originada pelas disparidades de linguagem é muitas vezes obstáculo à aprendizagem. É bom estarmos cientes destas diferenças e discuti-las com os alunos.

Esta perspectiva indutiva prepara o caminho para a generalização, isto é, o estabelecimento de uma equação cartesiana do plano.

Planos no espaço

Num referencial do espaço, que conjunto representa a equação $4x + 3y + 4z = 12$?

De que tipo é a condição que define analiticamente um plano qualquer?

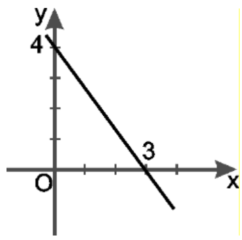
Uma equação do primeiro grau, num referencial do plano, representa sempre uma recta. Já vimos também que algumas equações do primeiro grau, num referencial do espaço representam planos. Por isso é natural pensarmos que todas as equações do primeiro grau num referencial do espaço representem planos.

Consideremos a intersecção deste conjunto de pontos e do plano xOy:

$$4x + 3y + 4z = 12 \quad \wedge \quad z = 0$$

$$4x + 3y = 12$$

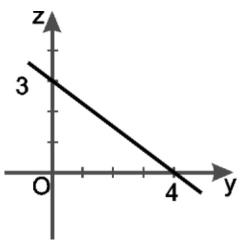
No referencial do plano xOy, esta é a equação de uma recta que intersecta o eixo Ox no ponto (3, 0) e o eixo Oy no ponto (0, 4).

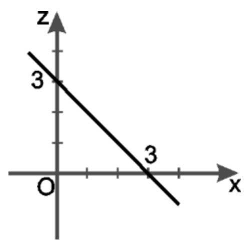


Da mesma maneira, podemos pensar nas intersecções com os outros dois planos coordenados:

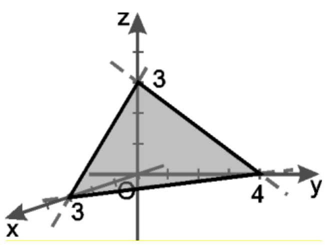
$$4x + 3y + 4z = 12 \quad \wedge \quad x = 0 \qquad\qquad 4x + 3y + 4z = 12 \quad \wedge \quad y = 0$$

$$3y + 4z = 12 \qquad\qquad 4x + 4z = 12$$





O conjunto de pontos que procuramos intersecta os três planos coordenados segundo três rectas. Isto vem reforçar a conjectura de que aquela condição define um plano, o que está representado na figura seguinte.



Não está ainda demonstrado que uma equação do primeiro grau defina sempre um plano, embora esta representação nos dê mais confiança na validade da nossa analogia.

A este propósito, ou mais adiante, deverá ser deduzida a equação do plano dados um ponto e um vector normal, e nessa altura teremos uma demonstração formal do que intuímos.

Na mesma linha do que defendemos anteriormente sobre as relações entre a geometria analítica e a disciplina de Geometria Descritiva, chamamos a atenção para o facto de em Geometria Descritiva ser usual designar as rectas de intersecção de um plano com os planos coordenados por traços do plano. Dado um plano pela sua equação, a maneira mais simples de o visualizar num referencial, é obter os seus traços.

Parâmetros

Um dos aspectos mais interessantes das condições, em geometria analítica, é o significado dos parâmetros e a informação que eles nos dão acerca dos conjuntos de pontos que definem. Pensamos que o estudo destes parâmetros é uma boa fonte para investigações dos alunos, em ambientes dinâmicos e não só, que promove a visualização. Para além disso, este estudo é revelador do poder do método analítico na matemática. No 10º ano houve já oportunidade de estudar a equação reduzida da recta no plano e a equação da circunferência e da elipse. Este ano amplia-se o estudo da equação da recta, passa-se ao espaço e uma das situações onde o significado dos parâmetros vai ter importância é na interpretação geométrica de sistemas de equações com duas ou com três incógnitas.

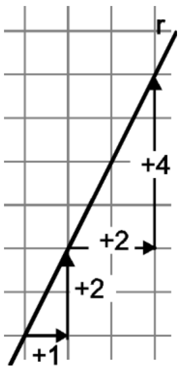
Equações da recta no plano

Obtém todas as informações sobre a recta de equação $y = 2x - 1$.
Explica o significado dos parâmetros **m** e **b** na equação reduzida da recta $y = mx + b$, e como é que, a partir deles podes obter outras informações úteis sobre a recta.

Obtém todas as informações sobre a recta de equação $x - 3y = 5$.
Explica o significado dos parâmetros **A**, **B** e **C** na equação geral da recta $Ax + By = C$, e como é que, a partir deles podes obter outras informações úteis sobre a recta.

A partir da equação reduzida de uma recta, temos informações imediatas – o declive e a ordenada na origem – de que decorre logo a sua posição relativamente aos eixos e a outras rectas. Mas também podemos obter outras informações úteis: as coordenadas de um vector director, a inclinação, os declives das rectas que lhe são paralelas e das que lhe são perpendiculares, o ponto de intersecção com o eixo das abcissas e as coordenadas dos pontos de cada semiplano em que a recta divide o plano.

O conhecimento de um vector director de uma recta é uma das informações mais úteis que se pode ter sobre ela, e é um conhecimento equivalente ao do seu declive. Para isso é importante trabalhar o significado geométrico de declive, a sua visualização. Dizer que o declive da recta é 2 significa que a variação nos yy é o dobro ($2\times$) da variação nos xx, isto é, quando a variável x varia 1 a variável y varia 2, quando a variável x varia 2 a variável y varia 4, etc, e por isso (1, 2), (2, 4), (k, 2k) são vectores directores da recta ($k \neq 0$).



$$m = \frac{+2}{+1} = \frac{+4}{+2} = \frac{2k}{k} = 2$$

As equações de uma recta são todas equivalentes e por isso contêm todas as mesmas informações. A diferença está na leitura imediata que nos permitem. No caso da equação geral da recta, os parâmetros **A** e **B** são as coordenadas de um vector perpendicular à recta. Embora o estudo deste tipo de equações da recta não seja referido no programa, consideramos que ele é importante porque permite fazer analogias plano/espaço quando se for fazer o estudo da equação cartesiana do plano no espaço.

Investigações sobre a influência dos parâmetros na posição da recta no referencial podem também ser feitas muito sugestivamente num programa de geometria dinâmica.

Equações do plano no espaço

Obtém todas as informações sobre o plano de equação $x - 3y + z = 5$. Procura ser o mais completo possível e recorre a algumas analogias com o estudo que fizeste para a equação geral da recta no plano.

Explica o significado dos parâmetros **A**, **B**, **C** e **D** na equação cartesiana do plano $Ax + By + Cz = D$, e como é que, a partir deles, podes obter outras informações úteis sobre o plano.

Se há alguns aspectos análogos entre as equações da recta no plano e do plano no espaço, isso não se verifica quanto à equação reduzida da recta. No espaço, não se define declive do plano, nem é habitual escrever equações do plano na forma reduzida. Mas a equação cartesiana de um plano no espaço já tem analogias com a equação geral da recta no plano. Isto prende-se com o facto de tanto uma recta no plano, como um plano no espaço, poderem ser definidos por um ponto e um vector perpendicular.

Na equação cartesiana do plano, os parâmetros **A**, **B** e **C** são as coordenadas de um vector normal ao plano. Se o aluno estiver habituado a fazer analogias, é natural que faça essa conjectura e que tente prová-la. Para isso bastar-lhe-á mostrar que o vector (A, B, C) é perpendicular a dois vectores do plano que não sejam paralelos entre si. Estes vectores são facilmente obtidos a partir das coordenadas de três pontos não colineares do plano, e os pontos que nos dão garantias imediatas de estarem nestas condições são as intersecções do plano com os eixos coordenados.

Intersecção com Oz: $\begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ x = 0 \quad \wedge \quad y = 0 \end{cases}$ $\qquad P\left(0, 0, -\frac{D}{C}\right)$

Intersecção com Oy: $\begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ x = 0 \quad \wedge \quad z = 0 \end{cases}$ $\qquad Q\left(0, -\frac{D}{B}, 0\right)$

Intersecção com Ox: $\begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ y = 0 \quad \wedge \quad z = 0 \end{cases}$ $\qquad R\left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right)$

Dois vectores do plano (não paralelos):

$$\overrightarrow{PQ}\left(0, -\frac{D}{B}, \frac{D}{C}\right) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{PR}\left(-\frac{D}{A}, 0, -\frac{D}{C}\right)$$

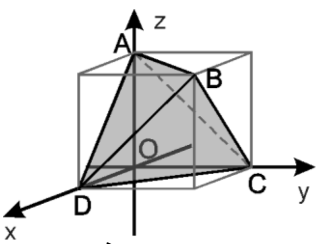
O produto escalar de cada um destes vectores com o vector de coordenadas (A, B, C) é nulo e por isso este vector é perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$ e a $\overrightarrow{PR}$, logo é perpendicular ao plano dado.

Esta demonstração não serve para planos que sejam paralelos a um eixo coordenado nem para planos que passem pela origem. Estes casos particulares podem ser demonstrados de outras formas, muitas vezes mais apoiadas na visualização.

Uma das utilidades do conhecimento dos parâmetros destas equações é a interpretação geométrica de sistemas de equações sem os resolver.

Planos e rectas num tetraedro

Define analiticamente os planos das faces e as rectas que contêm as arestas de um tetraedro num referencial.



Vamos partir do conhecimento de que cada face do tetraedro é perpendicular a uma diagonal espacial do cubo, embora esta informação não seja indispensável para obter as equações das faces do tetraedro.

A face [ACD] é perpendicular à diagonal [OB] e portanto ao vector $\overrightarrow{OB}$ (1, 1, 1). A equação do plano ACD é $x + y + z = 1$.

Do mesmo modo se encontram as equações dos outros planos:

BCD: $x + y - z = 1$ ABD: $x - y + z = 1$ ABC: $-x + y + z = 1$

Se tivéssemos obtido as equações das faces do tetraedro a partir dos três vértices que definem cada uma, poderíamos usar essas equações para concluir que cada face do tetraedro é perpendicular a uma diagonal espacial do cubo.

Obtidas as equações dos planos e observando que cada aresta é a intersecção de duas faces, as rectas que contêm as arestas ficam definidas por conjunções de duas destas equações:

AB: $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$ AC: $\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ AD: $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

BC: $\begin{cases} -x+y+z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$ BD: $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$

CD: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$

Como cada par de faces do tetraedro define uma aresta, há precisamente ${}^4C_2$ maneiras de combinar as 4 faces, que são as 6 rectas que contêm as arestas.

Esta maneira de caracterizar as rectas, como intersecção de dois planos, não nos dá outras informações sobre as rectas, como sejam pontos e vectores directores. Por isso a necessidade das chamadas equações cartesianas da recta.

A representação de rectas por sistemas de duas equações a três incógnitas, é uma oportunidade para a discussão do significado geométrico de um sistema de duas equações a duas incógnitas ou de três equações a três incógnitas. Embora o programa não seja muito explícito sobre este assunto, toda a filosofia subjacente aponta para que o tratamento dos sistemas de equações seja feito na base da interpretação geométrica e recorrendo à tecnologia para a sua resolução. Apresentamos dois programas, da autoria de José Paulo Viana, que estão feitos para as calculadoras gráficas TI-83, mas que podem ser adaptados à linguagem de outra calculadora.

Programa para resolver sistemas de duas equações a duas incógnitas

```
Programa"EQUA2"
ClrHome
Disp "AX+BY=C"
Disp "DX+EY=F"
Input "A=?",A
Input "B=?",B
Input "C=?",C
Input "D=?",D
Input "E=?",E
Input "F=?",F
ClrHome
AE-DBüU
If U=0
Then
Disp "IMPOSSIVEL OU","INDETERMINADO"
Else
Disp "X=",((CE-BF)/U)åFrac
Disp "Y=",((AF-CD)/U)åFrac
```

```
End
```

Programa para resolver sistemas de três equações a três incógnitas

```
Programa"EQUA3"
ClrHome
Disp "AX+BY+CZ=D"
Disp "EX+FY+GZ=H"
Disp "IX+JY+KZ=L"
Input "A=?",A
Input "B=?",B
Input "C=?",C
Input "D=?",D
Input "E=?",E
Input "F=?",F
Input "G=?",G
Input "H=?",H
Input "I=?",I
Input "J=?",J
Input "K=?",K
Input "L=?",L
ClrHome
AFK+BGI+CJE-CFI-BEK-AJGüU
If U=0
Then
Disp "IMPOSSIVEL OU","INDETERMINADO"
Else
Disp "X=",(DFK+BGL+CJH-CFL-BHK-DJG)/UåFrac
Disp "Y=",(AHK+DGI+CLE-CHI-DEK-ALG)/UåFrac
Disp "Z=",(AFL+BHI+DJE-DFI-BEL-AJH)/UåFrac
End
```

Condições e conjuntos / Programação linear

Trabalhar com conjuntos definidos por condições sem significado é um mero exercício de manipulação simbólica. Recordamos a este propósito Sebastião e Silva que já recomendava (1977, p.7):

1) *É preciso combater o excesso de exercícios que, como um cancro, acaba por destruir o que pode haver de nobre e vital no ensino.*

2) *É preciso evitar certos exercícios artificiosos ou complicados, especialmente em assuntos simples.*

Então como dar significado às operações com conjuntos e condições? Que tipo de exercícios e problemas podem ser acessíveis e interessantes?

Trabalhar nesta perspectiva é valorizar o poder de síntese de informação de uma condição. Por isso faz sentido trabalhar este assunto com os alunos quando as condições são de facto simples e úteis.

Condições e conjuntos

Compara os conjuntos definidos, num referencial do plano, pelos seguintes pares de condições:

- $x = y \quad \vee \quad x = -y$ com $|x| = |y|$
- $|x| + |y| \leq 1$ com $|x + y| \leq 1$
- $(x + y)^2 = 1$ com $x^2 + y^2 = 1$

São condições extremamente simples, mas muito ricas para discutir. Esta actividade não serve em abstracto para exercitar condições e conjuntos sem propósito algum, mas ao comparar as soluções das condições ajuda o aluno a melhorar a sua compreensão das propriedades das operações criando imagens visuais que lhes dão sentido. Simultaneamente proporcionam-lhe um instrumento geométrico para apoiar o estudo da equivalência de condições. Para nós é um dado adquirido que duas condições são equivalentes se e só se definem o mesmo conjunto, mas será que isso está sempre presente no pensamento dos nossos alunos?

Conjuntos e condições

Escolhe um referencial adequado e caracteriza por uma condição as seguintes figuras:

- Um quadrado
- Um cubo

- Um círculo
- Uma esfera
- Um rectângulo
- Um paralelepípedo

Propositadamente não indicamos medidas, para fazer surgir a discussão da solução a adoptar de modo que a condição defina uma figura qualquer daquele tipo. Quem sabe representar um quadrado de lado 1, saberá representar um quadrado qualquer. Por outro lado, evidencia-se a utilidade dos parâmetros nas condições.

Um outro aspecto que não está claro é se estamos a considerar, ou não, o interior da figura, mas esta discussão também deve ser feita com os alunos, até porque não é consensual em matemática que quando falamos de um quadrado estejamos a considerar o interior do quadrado. Isto remete para as questões que levantámos sobre a definição em matemática, a propósito do produto escalar.

Para além deste tipo de exercícios que têm a preocupação de trabalhar a visualização e a compreensão, é interessante usar os conhecimentos de geometria analítica plana para resolver problemas de programação linear. O programa faz uma referência a esta introdução, com carácter facultativo, mas o interesse deste tipo de problemas é referido no texto de Elfrida Ralha, desta brochura, com alguns exemplos de problemas comentados. Para além disso sugerimos a leitura da discussão deste assunto feita por Sebastião e Silva (1975, p.45 e seguintes).

Referências bibliográficas

Caraça, B. Jesus, 1960. *Cálculo Vectorial*, 3ª edição. Lisboa.

Dias Agudo, F. R., 1968. *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica*, 3ª edição, fascículo 2. Lisboa.

Fey, James T., 1991. Tecnologia e Educação Matemática – uma revisão de desenvolvimentos recentes e problemas importantes. *O Computador na Educação Matemática*, 45 – 79. Lisboa, APM.

Guerreiro, J. Santos, 1970. *Curso de Matemáticas Gerais*, IV volume. Lisboa, Livraria Escolar Editora.

Maor, Eli, 1998. *Trigonometric Delights*. Princeton, New Jersey, Princeton University Press.

Shaffer, David, 1995. *Exploring Trigonometry with the Geometer's Sketchpad*. Berkeley, Key Curriculum Press.

Silva, J. Sebastião, 1975. *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (1º volume). Lisboa, GEP.

Silva, J. Sebastião, 1977. *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (2º e 3º volumes). Lisboa, GEP.

Silva, J. Sebastião, 1978. *Compêndio de Matemática*, 3º volume. Lisboa, GEP.

Veloso, Eduardo, 1998. *Geometria – Temas Actuais*. Lisboa, IIE.

Wallace, Edward C. e West, Stephen F., 1998. *Roads to Geometry.* Upper Saddle River, Prentice-Hall.