

# **MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**

**DIRECÇÃO-GERAL DE INOVAÇÃO E DE DESENVOLVIMENTO CURRICULAR**

**ENSINO RECORRENTE DE NÍVEL SECUNDÁRIO**

## **MATEMÁTICA A**

**10º, 11º e 12º anos**

**Cursos Científico-humanísticos:  
Curso de Ciências e Tecnologias  
Curso de Ciências Socioeconómicas**

### **Autores**

Arsélio Almeida Martins  
Cristina Maria Cruchinho da Fonseca  
Ilda Maria Couto Lopes  
Jaime Carvalho e Silva (Coordenador)  
Maria Graziela Fonseca

Homologação

25/08/2005

**ÍNDICE**

PARTE1 .....	3
INTRODUÇÃO.....	3
PARTE 2 .....	4
APRESENTAÇÃO DO PROGRAMA.....	4
ORIENTAÇÕES GERAIS .....	5
AVALIAÇÃO.....	7
ORGANIZAÇÃO POR MÓDULOS CAPITALIZÁVEIS.....	7
QUADRO RESUMO .....	8
PARTE 3 .....	9
MÓDULO 1 .....	9
MÓDULO 2 .....	11
MÓDULO 3 .....	14
MÓDULO 4 .....	17
MÓDULO 5 .....	21
MÓDULO 6 .....	25
MÓDULO 7 .....	29
MÓDULO 8 .....	32
MÓDULO 9 .....	36
BIBLIOGRAFIA E OUTROS RECURSOS .....	39

**PARTE1**

**Introdução.**

Pelos princípios e métodos de trabalho praticados, a Matemática é uma componente essencial da formação para o exercício da cidadania em sociedades democráticas e tecnologicamente avançadas, as quais têm por base a autonomia e a solidariedade. O conhecimento científico em geral, e o matemático em particular, é uma ferramenta essencial da independência empreendedora de cada cidadão que tem de ser responsável e consciente pelo ambiente em que vive e pelas relações em que está envolvido.

Genericamente, a Matemática é parte imprescindível da cultura humanística e científica que permite ao cidadão ganhar flexibilidade para se adaptar a mudanças tecnológicas ou outras e para se sentir motivado a continuar a sua formação ao longo da vida. A Matemática contribui para a construção da língua com a qual se relaciona, facilitando a selecção, avaliação e integração das mensagens necessárias e úteis, ao mesmo tempo que fornece acesso a fontes de conhecimento científico a ser mobilizado sempre que necessário.

Finalmente, a Matemática é uma das bases teóricas essenciais e necessárias de todos os grandes sistemas de interpretação da realidade que garantem a intervenção social com responsabilidade e dão sentido à condição humana.

São finalidades desta disciplina:

- Desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade;
- Promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística que constitua suporte cognitivo e metodológico tanto para o prosseguimento de estudos como para a melhoria da intervenção nos vários aspectos da vida activa;
- Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real;
- Contribuir para uma atitude positiva face à ciência;
- Promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e solidariedade;
- Contribuir para o desenvolvimento da existência de uma consciência crítica e interventiva em áreas como o ambiente, a saúde e a economia entre outras, formando para uma cidadania activa e participativa.

## PARTE 2

### Apresentação do Programa

A Matemática A aparece, para os Cursos Científico-humanísticos, como uma disciplina trienal da componente de formação específica a que é atribuída uma carga horária semanal de 4h 30m dividida em unidades lectivas de 90 minutos ao longo de 33 semanas.

A componente de formação específica destina-se a proporcionar uma formação científica consistente no domínio do respectivo curso, em que a Matemática é considerada uma das disciplinas essenciais.

A Matemática é uma disciplina muito rica que, num mundo em mudança, abrange ideias tão díspares como as que são utilizadas na vida de todos os dias, na generalidade das profissões, em inúmeras áreas científicas e tecnológicas mais matematizadas e, ao mesmo tempo, é uma disciplina que tem gerado contribuições significativas para o conhecimento humano ao longo da história.

O programa de Matemática é organizado por grandes temas. Por um lado, os temas matemáticos têm de ser escolhidos de tal modo que competências fundamentais que a aprendizagem matemática pode favorecer sejam contempladas. Por outro, eles têm de estar ligados a necessidades reais e fornecer instrumentos de compreensão do real com utilidade compreensível imediata. Devem ainda poder ser motor de compreensão da Matemática como um todo, em que cada tema se relaciona com outros e em que a aprendizagem de cada assunto beneficia a aprendizagem de outros. Cada assunto, embora desenvolvido mais detalhadamente dentro da leccionação de um tema, deve ser assunto interessante e útil na abordagem dos diversos temas.

Ao longo dos três anos do ensino recorrente de nível secundário, os estudantes abordarão os seguintes temas: números e geometria, incluindo vectores e trigonometria; funções reais e análise infinitesimal; estatística e probabilidades.

A abordagem da Geometria inclui assuntos de geometria sintética e métrica, geometria analítica e vectorial e trigonometria com as competências de cálculo numérico a elas associadas. A abordagem das funções reais considerará sempre estudos dos diferentes pontos de vista - gráfico, numérico e algébrico - sobre tipos simples de funções, desde as algébricas inteiras (que são as tratadas no 10º ano), passando pelas fraccionárias e acabando nas transcendentais - exponenciais e logarítmicas ou trigonométricas. Neste grande tema, será realizada uma abordagem ao cálculo de variações e de limites, bem como ao estudo da continuidade, sem recurso inicial às definições simbólicas rigorosas. A abordagem da Estatística e das Probabilidades completará as aprendizagens básicas, com algumas novas noções e ferramentas que não foram consideradas no ensino básico.

Cada conteúdo do ensino secundário de Matemática não está mais do que esboçado no desenvolvimento dos temas; para efeitos deste programa, as indicações metodológicas não são simples indicações e concorrem até para a definição dos conteúdos de ensino. De acordo com o desenvolvimento de cada tema e o grau de profundidade a atribuir à abordagem de cada conteúdo, faz-se corresponder um determinado número de horas à leccionação de cada tema. Embora isso não constitua uma instrução rígida, é uma referência para a planificação sugerindo tempos para a abordagem de cada tema, de modo a que, mesmo com prejuízo do aprofundamento deste ou daquele conteúdo específico, todos os temas sejam abordados com todos os estudantes. As indicações metodológicas, ao sugerir actividades e preocupações a ter, acabam também por sugerir diversificação de tipos de instrumentos e de oportunidades de avaliação das aprendizagens.

Neste programa, assumem importância significativa os temas transversais — Comunicação Matemática, Aplicações e Modelação Matemática, História da Matemática, Lógica e Raciocínio, Heurísticas na resolução de problemas — conceitos, técnicas, métodos e estratégias de que os estudantes se devem apropriar progressivamente ao longo de todo o ensino secundário.

A aprendizagem matemática dos estudantes passa por fases intuitivas e informais, mas, desde muito cedo, mesmo estas não podem deixar de ser rigorosas ou desprovidas de demonstrações correctas, bem como não podem passar sem um mínimo de linguagem simbólica. Na aprendizagem da matemática elementar dos ensinos básico e secundário são absolutamente necessárias as

## Matemática A

demonstrações matemáticas, mas estas não podem confundir-se com demonstrações formalizadas (no sentido de deduções formais em teorias formais). Neste capítulo, chama-se a atenção para alguns assuntos que, não constituindo em si mesmos conteúdos do programa, são alguma da essência de muitos passos da aprendizagem de diversos assuntos e constituem elementos que ajudam os estudantes a compreender demonstrações e a racionalizar os desenvolvimentos desta ou daquela teoria. Como se pode ver pelo corpo do programa, não se pretende que a matemática ou matemáticas sejam introduzidas axiomaticamente, mas pretende-se que os estudantes fiquem com a ideia de que as teorias matemáticas são estruturadas dedutivamente. Defende-se que os conceitos fundamentais e as suas propriedades básicas sejam motivados intuitivamente, mas defende-se que os alunos possam trabalhá-los até chegarem a formulações matemáticas precisas, sem que, em algum momento, se confunda o grau de precisão de um conceito matemático com qualquer grau de "simbolização". Um conceito matemático pode estar completa e rigorosamente compreendido expresso em língua natural ou em linguagem matemática ordinária que é uma mistura de linguagem natural, simbologia lógica e matemática. A escrita simbólica das proposições matemáticas há-de aparecer, se possível naturalmente, para efeitos de precisão, condensação, economia e clareza de exposição.

O trabalho com aspectos da História da Matemática é fundamental e deve ser realizado com os mais diversos pretextos. Ao longo do programa dão-se algumas pistas para esse trabalho, que amplia a compreensão dos assuntos matemáticos com os dados da sua génese e evolução ao longo do tempo.

Outro trabalho que assume um papel fundamental para o ensino e aprendizagem é todo aquele que esclareça conexões (aplicações, modelação) com outros ramos da ciência.

A utilização da tecnologia no ensino da Matemática obriga a que, à medida que for sendo necessário e se justifique, se vá esclarecendo o funcionamento das calculadoras e computadores e as características de cada aplicação informática útil à matemática, ao mesmo tempo que se devem revelar e explicar as limitações da tecnologia disponível.

O ensino de todos estes temas tem de ser suportado em actividades propostas a cada estudante e a grupos de estudantes que contemplem a modelação matemática, o trabalho experimental e o estudo de situações realistas sobre as quais se coloquem questões significativas e se fomente a resolução de problemas não rotineiros.

As questões de lógica e de teoria de conjuntos são referidas entre os temas transversais, com um determinado desenvolvimento. Procura-se, deste modo, influenciar os professores no sentido de não abordar estas questões como conteúdo em si, mas de as utilizar quotidianamente em apoio do trabalho de reflexão científica que os actos de ensino e de aprendizagem sempre comportam, e só na medida em que elas vêm esclarecer e apoiar uma apreensão verdadeira dos conceitos. Como temas transversais consideram-se as formas de organizar o pensamento e as actividades de resolução de problemas, as aplicações e a modelação matemática, aspectos da história da matemática, da comunicação matemática e da utilização da tecnologia. Não podem nem devem ser localizadas temporalmente na leccionação e muito menos num determinado ano de escolaridade, antes devem ser abordadas à medida que forem sendo necessárias e à medida que for aumentando a compreensão sobre os assuntos em si, considerando sempre o sentido de oportunidade, as vantagens e as limitações.

### **Orientações gerais**

As finalidades e objectivos enunciados determinam que o professor, ao aplicar este programa, equilibradamente contemple o desenvolvimento de atitudes e capacidades, a aquisição de conhecimentos e técnicas para a sua mobilização.

Tendo como pressuposto ser o estudante agente da sua própria aprendizagem, propõe-se uma metodologia em que os conceitos sejam construídos a partir da experiência de cada um e de situações concretas, com abordagens sob diferentes pontos de vista e progressivos níveis de rigor e formalização, em que seja estabelecida uma ligação da Matemática com a vida real, com a tecnologia e com as questões abordadas noutras disciplinas, ajudando a enquadrar o conhecimento numa perspectiva histórico-cultural.

Neste contexto, destaca-se a importância das actividades a seleccionar, as quais deverão contribuir

Matemática A

para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o estudante a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar e ainda para o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação. Cabe ao professor, de acordo com a realidade da turma, encontrar o equilíbrio entre o número de trabalhos individuais, trabalhos de grupo, trabalhos de projecto e actividades investigativas, a realizar dentro e fora da aula, assim como o espaço para a sua própria intervenção: dinamizando, questionando, fazendo sínteses, facultando informação ...

O programa pretende dar continuidade, sem mudança brusca de nível, às aprendizagens realizadas em anterior ciclo de estudos, ajustando-se ao nível de desenvolvimento e de cultura dos estudantes. Parte-se, quando possível, de problemas e situações experimentais para que, com o apoio na intuição, o estudante aceda gradualmente à formalização dos conceitos. São identificadas situações para estabelecer conexões entre os diversos temas de forma a proporcionar uma oportunidade de relacionar os vários conceitos, promovendo uma visão integrada da Matemática. Deu-se prioridade à criação de condições para uma grande diversidade de tipos de trabalho em Matemática, tanto de carácter geral como específicos de cada tema, em detrimento de um aprofundamento que na maioria das vezes é ilusório se não for cimentado na compreensão dos processos elementares. A utilização obrigatória da tecnologia que, além de ferramenta, é fonte de actividade, de investigação e de aprendizagem, pretende também preparar os estudantes para uma sociedade em que os meios informáticos terão um papel considerável na resolução de problemas de índole científica.

Não é possível atingir os objectivos e competências gerais deste programa sem recorrer à dimensão gráfica, e essa dimensão só é plenamente atingida quando os estudantes trabalham com uma grande quantidade e variedade de gráficos com apoio de tecnologia adequada (calculadoras gráficas e computadores). O trabalho de modelação matemática só será plenamente atingido se for possível trabalhar na sala de aula as diversas fases do processo de modelação matemática, embora não seja exigível que sejam todas tratadas simultaneamente em todas as ocasiões; em particular, recomenda-se a utilização de sensores de recolha de dados acoplados a calculadoras gráficas ou computadores para, nalgumas situações, os estudantes tentarem identificar “modelos matemáticos que permitam a sua interpretação”. Não se trata aqui de substituir o cálculo de papel e lápis pelo cálculo com apoio da tecnologia. As calculadoras gráficas (que são também calculadoras científicas completíssimas) devem ser entendidas não só como instrumentos de cálculo mas também como meios incentivadores do espírito de pesquisa e o seu uso é obrigatório neste programa. Há vantagens em que se explorem com a calculadora gráfica os seguintes tipos de actividade matemática: abordagem numérica de problemas, uso de manipulações algébricas para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos gráficos, uso de métodos gráficos para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos algébricos, modelação, simulação e resolução de situações problemáticas, uso de cenários visuais gerados pela calculadora para ilustrar conceitos matemáticos, uso de métodos visuais para resolver equações e inequações que não podem ser resolvidas, ou cuja resolução é impraticável com métodos algébricos, condução de experiências matemáticas, elaboração e análise de conjecturas, estudo e classificação do comportamento de diferentes classes de funções, antevisão de conceitos do cálculo diferencial, investigação e exploração de várias ligações entre diferentes representações para uma situação problemática.

Os estudantes devem ter oportunidade de entender que aquilo que a calculadora apresenta no seu écran pode ser uma visão distorcida da realidade; além do mais, o trabalho feito com a máquina deve ser sempre confrontado com conhecimentos teóricos, assim como o trabalho teórico deve ser finalizado com uma verificação com a máquina. É importante que os estudantes descrevam os raciocínios utilizados e interpretem aquilo que se lhes apresenta de modo que não se limitem a “copiar” o que vêem. A calculadora vai permitir que se trabalhe com um muito maior número de funções em que diversas características, como os zeros e os extremos, não se podem determinar de forma exacta; estas funções são importantes pois aparecem no contexto da resolução de problemas aplicados. É muito importante desenvolver a capacidade de lidar com elementos de que apenas uma parte se pode determinar de forma exacta; é importante ir sempre chamando a atenção dos estudantes para a confrontação dos resultados obtidos com os conhecimentos teóricos; sem estes aspectos não se pode desenvolver a capacidade de resolver problemas de aplicações da matemática e a capacidade de analisar modelos matemáticos. Com os cuidados referidos, e como experiências em Portugal e noutros países mostram, a calculadora gráfica dará uma contribuição positiva para a melhoria do ensino da Matemática.

## Matemática A

O computador, pelas suas potencialidades, nomeadamente nos domínios da Geometria Dinâmica, da representação gráfica de funções e da simulação, permite actividades não só de exploração e pesquisa como de recuperação e desenvolvimento, pelo que constitui um valioso apoio a estudantes e professores, devendo a sua utilização considerar-se obrigatória neste programa. Vários tipos de programas de computador são muito úteis e enquadram-se no espírito do programa. Os programas de Geometria Dinâmica, de Cálculo Numérico e Estatístico, de Gráficos e Simulações e de Álgebra Computacional fornecem diferentes tipos de perspectivas tanto a professores como a estudantes. O número de programas disponíveis no mercado português aumenta constantemente.

Neste sentido recomenda-se enfaticamente o uso de computadores, tanto em salas onde os estudantes poderão ir realizar trabalhos práticos, como em salas com condições para se dar uma aula em ambiente computacional (nomeadamente nos Laboratórios de Matemática), além do partido que o professor pode tirar como ferramenta de demonstração na sala de aula usando um “data-show” com retroprojector ou projector de vídeo. Os estudantes devem ter oportunidade de trabalhar directamente com um computador, com a frequência possível de acordo com o material disponível. Nesse sentido as escolas são incentivadas a equipar-se com o material necessário para que tal tipo de trabalhos se possa realizar com a regularidade que o professor julgar aconselhável.

Estando todas as Escolas Secundárias ligadas à Internet, o professor não deve deixar de tirar todo o partido deste meio de comunicação. Na bibliografia final são indicados alguns sítios recomendados que contêm ligações a outros de interesse. Para o trabalho com os estudantes apresentam-se como bons exemplos os de projectos do tipo "Pergunta Agora" em que os estudantes podem colocar dúvidas (este pode ser acedido a partir da página da APM-Associação de Professores de Matemática). Como exemplo de um projecto de interesse geral e para a divulgação da Matemática aponta-se o "Atrator-Matemática Interactiva" que pode ser visto em: <http://www.atractor.pt>.

Deve ser explorada a utilização da Internet como forma de criação de uma boa imagem da Matemática.

Estes recursos são tanto para utilizar no Laboratório de Matemática, como em salas de aulas indiferenciadas. É considerado indispensável o uso de calculadoras gráficas (para trabalho regular na sala de aula ou para demonstrações com todos os estudantes, usando uma calculadora com “view-screen”), uma sala de computadores com “software” adequado para trabalho tão regular quanto possível, um computador ligado a um “data-show” ou projector de vídeo (para demonstrações, simulações ou trabalho na sala de aula com todos os estudantes ao mesmo tempo).

### **Avaliação.**

Na modalidade de frequência presencial e para a avaliação sumativa, os professores devem “recorrer a uma variedade de instrumentos de avaliação adequados à diversidade de aprendizagens e aos contextos em que ocorrem”, dentro de cada módulo. Não podem, por isso, ser reduzidos a um “teste” tradicional no fim de cada módulo ou período. Dito de outro modo, a avaliação formativa e sumativa deve servir para dar informação ao “aluno e ao professor sobre o desenvolvimento e a qualidade do processo educativo, permitindo o estabelecimento de metas intermédias”.

### **Organização por módulos capitalizáveis**

Para o ensino recorrente de nível secundário, os temas de estudo são distribuídos por módulos capitalizáveis, mas concebidos de tal modo que precedências necessárias (ao nível da articulação de conhecimentos e técnicas) sejam garantidas na sequência da leccionação em ambiente de turma. Para além dos temas - Geometria, Álgebra e Análise, Estatística e Probabilidades e Números - que contêm o essencial dos diversos módulos, em cada um destes vão sinalizados os assuntos dos temas transversais que nele podem ser desenvolvidos. Estão ainda assinalados com (\*) itens que poderão ou não ser leccionados para a generalidade dos estudantes, mas constituem assuntos motivadores para os mais interessados.

Esta organização por módulos obriga os professores à leccionação de determinados temas por períodos lectivos e à avaliação sumativa dos alunos da modalidade de frequência presencial de cada módulo no final do período respectivo. Ao mesmo tempo, indica aos alunos da modalidade de frequência não presencial os temas de estudo de cada módulo (ou módulos) a capitalizar, bem como a

## Cursos Científico-humanísticos do Ensino Recorrente

Cursos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas

### Matemática A

sequência modular que é obrigatória para a capitalização.

Considera-se importante que no início do ensino secundário - primeiro módulo - as primeiras três semanas sejam para resolver problemas significativos que mobilizem conceitos prévios considerados verdadeiramente essenciais e estruturantes.

#### Quadro Resumo

Distribuição dos temas por módulos capitalizáveis

10º ano	11º ano	12º ano
<p><b>Módulo 1 - Geometria no Plano e no Espaço I</b> Resolução de problemas de Geometria no plano e no espaço. Geometria Analítica. O método cartesiano para estudar Geometria no plano e no espaço.</p>	<p><b>Módulo 4 - Geometria no Plano e no Espaço II</b> Problemas envolvendo triângulos. Círculo trigonométrico e funções seno, co-seno e tangente. Produto escalar de dois vectores e aplicações. Intersecção, paralelismo e perpendicularidade de rectas e planos. Programação linear (breve introdução).</p>	<p><b>Módulo 7 - Probabilidades e Combinatória</b> Introdução ao cálculo de probabilidades. Distribuição de frequências e distribuição de probabilidades. Análise combinatória.</p>
<p><b>Módulo 2 - Funções e Gráficos. Funções polinomiais. Função módulo.</b> Função, gráfico e representação gráfica. Estudo intuitivo de propriedades da: • função quadrática; • função módulo. Funções polinomiais (graus 3 e 4). Decomposição de polinómios em factores.</p>	<p><b>Módulo 5 - Funções racionais e com radicais. Taxa de variação e derivada.</b> Problemas envolvendo funções ou taxa de variação. Propriedades das funções do tipo <math>f(x)=a+b/(cx+d)</math>. Aproximação experimental da noção de limite. Taxa de variação e derivadas em casos simples. Operações com funções. Composição e inversão de funções.</p>	<p><b>Módulo 8 - Funções exponenciais e logarítmicas. Teoria de limites. Cálculo diferencial</b> Limites e Continuidade. Conceito de Derivada e Aplicações. Teoria de limites. Cálculo diferencial. Problemas de optimização.</p>
<p><b>Módulo 3 - Estatística</b> Estatística - Generalidades Organização e interpretação de caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos). Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva).</p>	<p><b>Módulo 6 - Sucessões reais.</b> Definição e propriedades. Exemplos (o caso das progressões). Sucessão <math>(1+1/n)^n</math> e primeira definição de e. Limites: infinitamente grandes e infinitamente pequenos. Limites reais e convergência.</p>	<p><b>Módulo 9 - Trigonometria e números complexos.</b> Funções seno, co-seno ; cálculo de derivadas. Introdução histórica dos números complexos. Complexos na forma algébrica e na forma trigonométrica; operações e interpretação geométrica.</p>
<b>Temas Transversais</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comunicação Matemática</li> <li>• História da Matemática</li> <li>• Resolução de Problemas e Actividades Investigativas</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aplicações e Modelação Matemática</li> <li>• Lógica e Raciocínio Matemático</li> <li>• Tecnologia e Matemática</li> </ul>

**PARTE 3**

**Módulo 1**

**Geometria no Plano e no Espaço I**

12 semanas - 36 unidades lectivas de 90 minutos

**Competências a desenvolver**

Neste módulo de Geometria no Plano e no Espaço I, a competência matemática inclui os seguintes aspectos:

- a capacidade para apreciar a geometria no mundo real e o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações e na comunicação;
- a aptidão para utilizar a visualização, a representação e o raciocínio espacial na análise de situações problemáticas realistas e na resolução de problemas;
- a aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente;
- a aptidão para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis e à tecnologia;
- a aptidão para descrever a realidade, enfrentar situações e resolver problemas utilizando diversos sistemas matemáticos (relações entre elementos do espaço e propriedades, coordenadas e vectores.)

**Objectivos de aprendizagem**

Neste módulo de Geometria, os objectivos de aprendizagem são os seguintes:

- problemas que envolvam proporções, semelhanças, áreas, volumes, números, operações, transformações geométricas, expressões algébricas, ...
- construir modelos (maquetes e desenhos) úteis e adequados à resolução de problemas, com recurso a medições e escalas;
- resolver problemas usando modelos físicos e geométricos (de incidência, paralelismo e perpendicularidade; secções, áreas e volumes);
- comunicar, oralmente e por escrito, aspectos dos processos de trabalho e crítica dos resultados;
- identificar as vantagens do uso de um referencial;
- instalar um referencial numa figura (ou uma figura num referencial) de forma a obter "as melhores coordenadas";
- escrever condições definidoras de conjuntos de pontos e lugares geométricos;
- utilizar vectores e operações em referencial ortonormado;
- resolver problemas de geometria no plano e no espaço, por vários processos e perspectivas de abordagem (sintética, analítica e vectorial).

**Temas/conteúdos**

**Resolução de problemas de Geometria no plano e no espaço**

(esta resolução de problemas tem por objectivo fazer a ponte entre o básico e o secundário e promover o aprofundamento da Geometria partindo da compreensão do plano, do espaço e

Matemática A

dos sólidos geométricos)

Alguns tópicos que poderão ser estudados na resolução de problemas ou em investigações:

- estudo das secções determinadas num cubo por um plano;
- poliedros obtidos por trancatura de um cubo;
- composição e decomposição de figuras tridimensionais;
- um problema histórico e sua ligação com a História da Geometria.

**Geometria Analítica**

*O método cartesiano para estudar geometria no plano e no espaço*

Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no plano e no espaço. Correspondência entre o plano e  $\mathbb{R}^2$ , entre o espaço e  $\mathbb{R}^3$ .

Conjuntos de pontos e condições.

Lugares geométricos: circunferência, círculo e mediatriz; superfície esférica, esfera e plano mediador.

(\*) Referência à elipse como deformação da circunferência.

Vectores livres no plano e no espaço:

componentes e coordenadas de um vector num referencial ortonormado; vector como diferença de dois pontos.

Colinearidade de dois vectores.

Equação vectorial da recta no plano e no espaço.

Equação reduzida da recta no plano e equação  $x=x_0$ .

**Recursos**

Na leccionação da geometria, o professor deve ter em atenção a observação de aspectos geométricos da realidade construída. E deve utilizar modelos geométricos pré-construídos e sempre que possível modelos construídos pelos estudantes, bem como deve recorrer a programas de geometria dinâmica ou vídeos.

O ensino e a aprendizagem da Geometria precisa de:

- material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso, transferidor, ...);
- material para o estudo da Geometria no espaço (sólidos geométricos, construídos em diversos materiais: placas, arames, palhinhas, acetatos, acrílico, plástico, "polydron", sólidos de enchimento,...);
- quadro quadriculado e papel milimétrico;
- meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, ...);
- livros para consulta e manuais;
- computadores e "software" de geometria dinâmica.

**Sugestões metodológicas**

Para resolver eventuais dificuldades na transição de ciclo ou no recomeço da escolaridade, após interrupção mais ou menos prolongada, neste módulo devem ser integradas algumas actividades para con-

## Matemática A

solidar e fazer uso de conhecimentos essenciais e básicos já adquiridos. Pretende-se que se detectem e corrijam falhas de conhecimentos em questões básicas, ao mesmo tempo que se estabelece uma articulação com o novo ciclo de vida escolar. Os problemas, que envolvam proporções, semelhanças, áreas, volumes, números, operações, transformações geométricas, expressões algébricas, contemplam conexões, procuram desenvolver capacidade de visualização, estando sempre que possível ligados à manipulação de modelos geométricos.

Os professores devem apresentar aos estudantes um conjunto de problemas motivadores que podem e devem ser adequados ao nível e às características de cada turma e curso.

Para além da manipulação de modelos geométricos, o professor deve insistir para que o estudante exprima correctamente os seus raciocínios, oralmente e por escrito, através de pequenas composições. A linguagem matemática utilizada deve ser rigorosa embora seja de excluir a linguagem formal.

Os problemas a propor aos estudantes não devem ser numerosos. Devem ser ricos e não se reduzir a propostas fragmentadas. É mais importante um problema bem explorado do que muitos tratados apressadamente.

Aconselha-se que o professor privilegie, se possível através de pequenas investigações, o estudo do cubo (incluindo as secções nele determinadas por planos que o intersectem) assim como o estudo de alguns poliedros cujas arestas ou vértices estão assentes nas suas faces.

É conveniente que o estudante fique a saber desenhar representações planas dos sólidos com que trabalha, a descrever a intersecção do cubo com um plano dado, a saber construir e a desenhar uma representação da intersecção obtida, utilizando as regras da perspectiva cavaleira (o estudante deve começar por modelar a situação, por exemplo, com sólidos de arestas, com sólidos transparentes ou de qualquer outro modo sugestivo).

Compondo e decompondo figuras planas (ou tridimensionais) o estudante deve saber calcular ou relacionar áreas (ou volumes).

Os problemas devem ser escolhidos de tal modo que possam sugerir outros e permitir abordagens segundo diferentes perspectivas (por exemplo, recorrendo primeiro às coordenadas e depois aos vectores).

O professor deve propor ao estudante actividades que o levem a sentir a necessidade e vantagem do uso de um referencial, quer no plano quer no espaço.

O professor pode fornecer figuras e/ou um referencial numa grelha e pedir a colocação da figura ou do referencial para obter “as melhores coordenadas” experimentando com várias figuras no plano e no espaço.

Será vantajoso que o professor aproveite os problemas com que iniciou o tema, recorrendo aos modelos já utilizados para fazer aparecer as novas noções} (referencial, coordenadas, vectores, ... ) levando o estudante a justificar determinadas proposições por mais de um processo. Só mais tarde deve recorrer a desenhos em perspectiva.

No plano, o estudante deve descobrir as relações entre as coordenadas de pontos simétricos relativamente aos eixos coordenados e às bissectrizes dos quadrantes pares e ímpares. No espaço, o estudante pode também descobrir algumas relações entre pontos simétricos relativamente aos planos coordenados, aos eixos coordenados e aos planos bissectores dos diversos octantes.

A circunferência e a superfície esférica devem ser tratadas essencialmente como lugares geométricos sem a preocupação de fazer múltiplos exercícios que envolvam apenas as suas equações (a definição de distância entre dois pontos no espaço aparecerá, naturalmente, ligada à determinação do comprimento da diagonal espacial de um paralelepípedo).

O mesmo para a mediatriz/plano mediador (neste contexto só se deve trabalhar com equações de rectas/planos paralelos a eixos/planos coordenados ou que sejam bissectrizes/planos bissectores de quadrantes/octantes).

A equação da elipse deve aparecer a partir da circunferência por meio de uma mudança afim de uma das coordenadas.

Matemática A

A soma de vectores, a soma de um ponto com um vector e o produto de um escalar por um vector devem ser abordadas em contexto de resolução de problemas.

Pretende-se que o estudante deduza propriedades de figuras geométricas (triângulos e quadriláteros) usando vectores e explore a ligação do cálculo vectorial com outras áreas.

A equação vectorial da recta surge naturalmente associada ao produto de um escalar por um vector e à colinearidade de dois vectores. Pretende-se que os estudantes saibam escrever a equação vectorial de uma recta e assim identifiquem pelas suas coordenadas os pontos que lhe pertençam.

O conhecimento da equação reduzida da recta deverá permitir que o estudante saiba escrever a equação de qualquer recta cujo gráfico lhe seja apresentado, sem para isso ser necessário fazer exercícios repetitivos.

**Sugestões de Avaliação**

Na modalidade de frequência presencial, a avaliação é contínua, estando os alunos integrados em turmas com sujeição ao dever de assiduidade.

Para a avaliação sumativa destes estudantes, os professores devem recorrer a vários instrumentos de avaliação (testes, trabalhos e relatórios, estudos e composições, etc) adequados à diversidade de aprendizagem e aos contextos em que ocorrem, não ocupando mais de 4 unidades lectivas de 90 minutos. Actividades como construção de modelos necessários para a compreensão e representação de situações em estudo e relatórios respectivos podem e devem ser apreciadas como provas de avaliação.

A forma de transformação dos dados recolhidos em classificações é da estrita competência do departamento curricular, sendo que esta classificação obtida é decisiva para a capitalização do módulo, ao fim das 12 primeiras semanas (ou do 1º período). Recomendamos vivamente que o peso dos testes escritos não ultrapasse metade do peso do conjunto dos diferentes momentos de avaliação.

**Módulo 2**

**Funções e Gráficos. Funções Polinomiais. Função Módulo.** 11 semanas - 33 unidades lectivas de 90 minutos

**Competências a desenvolver:**

Neste módulo de funções, a competência matemática inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso das tecnologias;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais utilizando diversos tipos de funções;
- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
- a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, ...
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas;
- a capacidade para resolver algébrica e graficamente equações e inequações envolvendo trabalho com polinómios.

**Objectivos de aprendizagem**

Neste módulo de funções, os objectivos de aprendizagem são os seguintes:

- elaborar modelos para situações da realidade e de outras ciências, utilizando diversos tipos de funções;
- usar modelos de regressão (com recurso à calculadora) na resolução de problemas;
- fazer o estudo de funções (domínio, extremos se existirem, zeros, intervalos de monotonia) descrevendo e interpretando no contexto da situação;
- reconhecer que o mesmo tipo de função pode ser um modelo de diferentes situações realistas;
- traduzir representações descritas por tabelas ou gráficos;
- analisar os efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos de funções;
- usar cenários visuais gerados pela calculadora para ilustrar conceitos matemáticos;
- utilizar a calculadora para realizar simulações e experiências matemáticas com elaboração e análise de conjecturas;
- uso de manipulações algébricas para resolver equações e inequações;
- usar métodos gráficos para resolver condições cuja resolução com métodos algébricos não esteja ao alcance dos estudantes;
- utilizar linguagem matemática adequada na elaboração, análise e justificação de conjecturas ou na comunicação de conclusões.

**Temas e conteúdos**

**Funções e gráficos. Resolução de problemas envolvendo funções polinomiais**

- Função, gráfico (gráfico cartesiano de uma função em referencial ortogonal) e representação gráfica.
- Estudo intuitivo de propriedades das funções e dos seus gráficos, tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica, para as seguintes classes de funções:
  - i) funções quadráticas;
  - ii) função módulo;

e recorrendo a:

a) análise dos efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das famílias de funções dessas classes (considerando apenas a variação de um parâmetro de cada vez);

b) transformações simples de funções: dada a função, esboçar o gráfico das funções definidas por  $y = f(x)+a$ ,  $y = f(x+a)$ ,  $y = af(x)$ ,  $y = f(ax)$ ,  $y = |f(x)|$ , com  $a$  positivo ou negativo, descrevendo o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas.

(\*) Referência breve à parábola, a algumas das suas principais propriedades e à sua importância histórica.

• Resolução de problemas envolvendo funções polinomiais (com particular incidência nos graus 2, 3 e 4).

• Possibilidade da decomposição de um polinómio em factores (informação).

Decomposição de um polinómio em factores em casos simples, por divisão dos polinómios e recorrendo à regra de Ruffini. Justificação desta regra.

(\*) Estudo elementar de polinómios interpoladores

## Recursos

O ensino e a aprendizagem das funções reais de variável real pressupõe a possibilidade de uso de materiais e equipamentos diversificados:

- material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso, transferidor,...);
- quadro quadriculado e papel milimétrico;
- meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, ...);
- livros para consulta e manuais;
- calculadoras gráficas com possibilidade de utilização de programas e “viewscreen”;
- computadores e projectores de vídeo, “datashow”; “software” de geometria dinâmica analítica e produção de gráficos;
- sensores de recolha de dados quer para as calculadoras gráficas quer para os computadores.

Prevê-se a possibilidade de recorrer a fontes para fornecimento de dados, incluindo CD-ROM e Internet.

## Sugestões metodológicas

Para todos os tipos de funções devem ser dados exemplos a partir de questões concretas (tanto de outras disciplinas que os estudantes frequentem — Física, Química, Economia, etc. — como de situações reais — por exemplo de recortes de jornais). Particular importância deverá ser dada a situações problemáticas, situações de modelação matemática e a exemplos de Geometria, devendo retomar-se alguns exemplos estudados no tema anterior.

As propriedades das funções e gráficos sugeridas são: domínio, contradomínio, pontos notáveis (intersecção com os eixos coordenados), monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos YY e à origem, limites nos ramos infinitos. Os estudantes devem determinar pontos notáveis e extremos tanto de forma exacta como de forma aproximada (com uma aproximação definida *a priori*) a partir do gráfico traçado na calculadora gráfica ou computador.

No estudo das famílias de funções os estudantes podem realizar pequenas investigações.

O estudo das transformações simples de funções deve ser feito tanto usando papel e lápis como calculadora gráfica ou computador; a função a transformar tanto pode ser dada a partir de um gráfico como a partir de uma expressão analítica.

Matemática A

A referência à parábola não pressupõe nenhuma propriedade em particular mas antes que os estudantes fiquem com uma visão culturalmente mais completa do assunto.

Na resolução de problemas deve ser dada ênfase especial à Modelação Matemática (por exemplo, usando dados concretos recolhidos por calculadoras gráficas ou computadores acoplados a sensores adequados). Deve ser dada ênfase especial à resolução de problemas usando métodos numéricos e gráficos, nomeadamente quando forem usadas inequações. A resolução numérica ou gráfica deve ser sempre confrontada com conhecimentos teóricos. Deve ser usada a resolução analítica sempre que a natureza do problema o aconselhar, por exemplo quando for conveniente decompor um polinómio em factores. O estudo analítico dos polinómios deve ser suscitado pela resolução de problemas e aí integrado. A resolução analítica de problemas deve ser sempre acompanhada da verificação numérica ou gráfica.

**Sugestões de Avaliação**

Na modalidade de frequência presencial, a avaliação é contínua, estando os alunos integrados em turmas com sujeição ao dever de assiduidade.

Para a avaliação sumativa destes estudantes, os professores devem recorrer a vários instrumentos de avaliação (testes, trabalhos e relatórios, estudos e composições, etc) adequados à diversidade de aprendizagem e aos contextos em que ocorrem, não ocupando mais de 4 unidades lectivas de 90 minutos. Actividades como construção de modelos necessários para a compreensão e representação de situações em estudo e relatórios respectivos podem e devem ser apreciadas como provas de avaliação.

A forma de transformação dos dados recolhidos em classificações é da estrita competência do departamento curricular, sendo que esta classificação obtida é decisiva para a capitalização do módulo, ao fim das 11 semanas lectivas (ou do 2º período). Recomendamos vivamente que o peso dos testes escritos não ultrapasse metade do peso do conjunto dos diferentes momentos de avaliação.

**Módulo 3**

**Estatística**

10 semanas - 30 unidades lectivas de 90 minutos

**Competências a desenvolver:**

Neste módulo de Estatística, a competência matemática incluiu os aspectos seguintes:

- a capacidade para usar da matemática, em combinação com outros saberes, na compreensão de situações da realidade, bem como o sentido crítico relativamente à utilização de procedimentos e resultados matemáticos;
- a capacidade para recolher e organizar dados relativos a uma situação ou a um fenómeno e de os representar de modo adequado, nomeadamente através de tabelas e gráficos e utilizando as novas tecnologias;
- a aptidão para ler e interpretar tabelas e gráficos à luz de situações a que dizem respeito e para comunicar os resultados das interpretações feitas;
- a capacidade para dar resposta a problemas com base na análise de dados recolhidos e de experiências planeadas para o efeito;
- a aptidão para realizar investigações que recorram a dados de natureza quantitativa, envolvendo a recolha e análise de dados e elaboração de conclusões;
- o sentido crítico face ao modo como a informação é apresentada.

**Objectivos de aprendizagem**

Neste módulo de Estatística, os objectivos de aprendizagem são os seguintes:

- definir o problema a estudar;
- realizar recolhas de dados;
- organizar e tratar os dados através do cálculo das medidas estatísticas (de centralidade e dispersão), sua interpretação e representação gráfica;
- seleccionar as formas de representação gráfica mais adequadas à estatística a trabalhar e interpretá-las criticamente;
- desenvolver o sentido crítico face ao modo como a informação é apresentada;
- comunicar raciocínios e/ou argumentos matemáticos quer na forma oral e/ou escrita.

Realizar um trabalho de projecto, partindo de uma situação problemática da vida real relacionada com percursos profissionais, com necessidades industriais ou comerciais (controle de qualidade da cadeia de produção), com rentabilização de recursos (negociado com os estudantes), garante a concretização dos objectivos que se pretendem. Por isso, recomenda-se que se desenvolva a aprendizagem usando metodologias de trabalho de projecto.

**Temas e conteúdos**

**Estatística-Generalidades**

- Objecto da Estatística e breve nota histórica sobre a evolução desta Ciência; utilidade na vida moderna.

Clarificação de quais os fenómenos que podem ser objecto de estudo estatístico; exemplificação de tais fenómenos com situações da vida real, salientando o papel relevante da Estatística na sua descrição.

- Recenseamento e sondagem.

As noções de população e amostra. Compreensão do conceito de amostragem e reconhecimento do seu papel nas conclusões estatísticas; distinção entre os estudos e conclusões sobre a amostra e a

correspondente análise sobre a população. Noções intuitivas sobre as escolhas de amostras, sobre a necessidade de serem aleatórias, representativas e livres de vícios de concepção.

- Estatística Descritiva e Estatística Indutiva.

### **Organização e interpretação de caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos)**

- Análise gráfica de atributos qualitativos (gráficos circulares, diagramas de barras, pictogramas); determinação da moda;
- Análise de atributos quantitativos: variável discreta e variável contínua. Dados agrupados em classes.
- Variável discreta; função cumulativa.
- Variável contínua: tabelas de frequências (absolutas, relativas e relativas acumuladas); gráficos (histograma, polígono de frequências); função cumulativa.
- Medidas de dispersão de uma amostra: amplitude; variância; desvio padrão; amplitude interquartis.
- Medidas de localização de uma amostra: moda ou classe modal; média; mediana; quartis.
- Discussão das limitações destas estatísticas.
- Diagramas de “extremos e quartis”

### **Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva)**

- Diagrama de dispersão; dependência estatística; ideia intuitiva de correlação; exemplos gráficos de correlação positiva, negativa ou nula.
- Coeficiente de correlação e sua variação em  $[-1, 1]$ .
- Definição de centro de gravidade de um conjunto finito de pontos; sua interpretação física.
- Ideia intuitiva de recta de regressão; sua interpretação e limitações.

### **Recursos**

O ensino e a aprendizagem da Estatística pressupõe a possibilidade de uso de materiais e equipamentos diversificados:

- quadro quadriculado e papel milimétrico;
- meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, ...);
- livros para consulta, manuais e dossiers do projecto ALEA/INE;
- outros materiais escritos (folhas com dados estatísticos, fichas de trabalho, fichas de avaliação, ...);
- calculadoras gráficas com possibilidade de utilização de programas;
- computadores, projectores de vídeo, datashow, “software” estatístico específico e folhas de cálculo;
- sensores de recolha de dados quer para as calculadoras gráficas quer para os computadores.

Prevê-se a possibilidade de recorrer a fontes para fornecimento de dados estatísticos (autarquias, clubes, hospitais, empresas, institutos, cooperativas,...) incluindo CD-ROM e Internet - <http://www.ine.pt>  
<http://alea-estp.ine.pt/>

### Sugestões metodológicas

Deve-se chamar a atenção para o papel relevante desempenhado pela Estatística em todos os campos do conhecimento. Sendo a Estatística a Ciência que trata dos "dados", num procedimento estatístico estão envolvidas, de um modo geral, duas fases: uma fase de organização dos dados recolhidos, em que se procura reduzir, de forma adequada, a informação neles contida - **Estatística Descritiva**, e uma segunda fase, em que se procura tirar conclusões e tomar decisões para um conjunto mais vasto, de onde se recolheram os dados - **Inferência Estatística**. Existe, no entanto, uma fase pioneira, que diz respeito à aquisição dos próprios "dados". Deve realçar-se a importância de, ao iniciar qualquer estudo estatístico, proceder cuidadosamente ao planeamento da experiência que conduz à recolha dos "dados" que serão objecto de tratamento estatístico.

Deve chamar-se a atenção para o facto de que a organização dos dados, consiste em resumir a informação neles contida através de tabelas, gráficos e algumas medidas, a que damos o nome de "estatísticas". Nesta fase, em que se substitui todo o conjunto dos dados, por um sumário desses dados, devem-se tomar as devidas precauções, pois nem todos os instrumentos de redução de dados se aplicam a todos os tipos de dados. Assim, de entre esses processos deve-se ter presente quais os mais adequados e em que situações é ou não convenientes aplicá-los. A título de exemplo referimos o facto de não ter qualquer sentido calcular a média para dados de tipo qualitativo, mesmo que as diferentes categorias assumidas pela variável em estudo estejam representadas por números.

Generalizando o estudo de uma única variável, faz-se uma introdução ao estudo dos dados bivariados, insistindo na representação gráfica sob a forma do diagrama de dispersão ou diagrama de pontos. Quando, a partir desta representação, se verificar uma tendência para a existência de uma associação linear entre as duas variáveis em estudo, identifica-se uma medida que quantifica o grau de associação - o coeficiente de correlação, assim como se apresenta um modelo matemático que permitirá, conhecido o valor de uma das variáveis, obter uma estimativa para o valor da outra

### Sugestões de Avaliação

Na modalidade de frequência presencial, a avaliação é contínua, estando os alunos integrados em turmas com sujeição ao dever de assiduidade.

Para a avaliação sumativa destes estudantes, os professores devem recorrer a vários instrumentos de avaliação (testes, trabalhos e relatórios, estudos e composições, etc) adequados à diversidade de aprendizagem e aos contextos em que ocorrem, não ocupando mais de 4 unidades lectivas de 90 minutos. Actividades como construção de modelos necessários para a compreensão e representação de situações em estudo e relatórios respectivos podem e devem ser apreciadas como provas de avaliação.

A forma de transformação dos dados recolhidos em classificações é da estrita competência do departamento curricular, sendo que esta classificação obtida é decisiva para a capitalização do módulo, ao fim das 10 semanas lectivas (ou do 3º período). Recomendamos vivamente que o peso dos testes escritos não ultrapasse metade do peso do conjunto dos diferentes momentos de avaliação.

**Módulo 4**

**Geometria no Plano e no Espaço II**

12 semanas - 36 unidades lectivas de 90 minutos

**Competências a desenvolver:**

Neste módulo de Geometria no Plano e no Espaço, a competência matemática inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais utilizando trigonometria básica e conceitos trigonométricos generalizados;
- a capacidade de apreciar a geometria no mundo real e o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações e na comunicação;
- a aptidão para utilizar a visualização, a representação e o raciocínio espacial na análise de situações problemáticas realistas e na resolução de problemas;
- a aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente;
- a aptidão para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas e relacioná-las com condições que as podem definir em referenciais o.n. ;
- a aptidão para descrever a realidade, enfrentar situações e resolver problemas utilizando diversos sistemas matemáticos (relações entre elementos do espaço e propriedades, coordenadas e vectores.)
- a aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso das tecnologias;
- a aptidão para elaborar modelos geométricos e gráficos para situações de planeamento de produção ou outras que exijam a procura de valores óptimos e apoio às tomadas de decisão;
- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
- a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, ...
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.

**Objectivos de aprendizagem**

Neste módulo de Geometria no Plano e no Espaço, os objectivos de aprendizagem são os seguintes:

- apropriar alguns conceitos e técnicas associadas para serem utilizados como "ferramentas" na resolução de problemas que envolvam razões trigonométricas do ângulo agudo, compreensão e intervenção sobre fenómenos periódicos e seu desenvolvimento;
- construir modelos (e maquetes) apropriadas, úteis à resolução dos problemas e à generalização das noções de ângulo e arco, bem como de conceitos como o de radiano, por exemplo, e as definições de seno, co-seno e tangente de um número real;
- identificar as vantagens do uso de referenciais e círculo trigonométrico;
- resolver problemas dentro de situações que exijam a resolução de equações trigonométricas simples, a compreensão das características das funções circulares (simetria, paridade e periodicidade);
- escrever condições definidoras de conjuntos de pontos e lugares geométricos, agora com o apoio acrescido da definição e propriedades do produto escalar de dois vectores;
- resolver problemas de geometria no plano e no espaço, por vários processos e perspectivas de abordagem (sintética, analítica e vectorial).
- determinar equações e inequações que representem rectas, planos e domínios;

Matemática A

- resolver problemas de programação linear;
- comunicar, oralmente e por escrito, aspectos dos processos de trabalho e crítica dos resultados.

**Temas e conteúdos**

- Resolução de problemas que envolvam triângulos.
- Ângulo e arco generalizados:
  - radiano;
  - expressão geral das amplitudes dos ângulos com os mesmos lados, em graus e radianos.
- Funções seno, co-seno e tangente:
  - definição; variação (estudo no círculo trigonométrico);
  - comparação de senos e co-senos de dois números reais.
- Expressão geral das amplitudes dos ângulos com o mesmo seno, co-seno ou tangente.
- Equações trigonométricas elementares.
- Produto escalar de dois vectores no plano e no espaço:
  - definição e propriedades;
  - expressão do produto escalar nas coordenadas dos vectores em referencial ortonormado.
- Perpendicularidade de vectores e de rectas; equação cartesiana do plano definido por um ponto e o vector normal.
- Intersecção de planos e interpretação geométrica:
  - resolução de sistemas;
  - equações cartesianas da recta no espaço.
- Paralelismo e perpendicularidade de rectas e planos (interpretação vectorial).
- Programação linear - breve introdução.
- Domínios planos - interpretação geométrica de condições

**Recursos**

O ensino e a aprendizagem da Geometria precisa de

- material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso, transferidor,...);
- material para o estudo da Geometria no espaço (sólidos geométricos, construídos em diversos materiais: placas, arames, palhinhas, acetatos, acrílico, plástico, "polydron", sólidos de enchimento,...);
- quadro quadriculado e papel milimétrico;
- meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, ...);
- livros para consulta e manuais;
- calculadoras gráficas com possibilidade de utilização de programas e "viewscreen";
- computadores e projectores de vídeo, "datashow"; "software" de geometria dinâmica analítica e produção de gráficos;
- sensores de recolha de dados quer para as calculadoras gráficas quer para os computadores.

Prevê-se a possibilidade de recorrer a fontes para fornecimento de dados, incluindo CD-ROM e Internet.

### Sugestões metodológicas

No ensino básico, os estudantes tiveram contacto com a semelhança de triângulos e com a trigonometria, logo o professor deve propor, agora, problemas variados, ligados a situações concretas, que permitam recordar e aplicar métodos trigonométricos (problemas ligados a sólidos, a moldes, à navegação, à topografia, históricos,...) bem como aperceberem-se da importância da Trigonometria para as várias Ciências. Os estudantes devem ser solicitados a deduzir as razões trigonométricas em  $\pi/6$ ,  $\pi/4$  e  $\pi/3$  radianos por se considerar que é importante que se conheçam alguns valores exactos das funções trigonométricas, nomeadamente para que mais tarde possam confirmar pontos do traçado de gráficos de funções trigonométricas. Isto não significa que se trabalhe preferencialmente com estes valores, até porque se usa a calculadora.

A compreensão do círculo trigonométrico é fundamental. A generalização das noções é intuitiva e sistematizada a partir de actividades que considerem movimentos circulares pretendendo-se, agora, que, ao resolver problemas, os estudantes recordem os conceitos básicos de trigonometria do ângulo agudo e se enfrentem situações novas em que a generalização das noções de ângulo e arco, bem como das razões trigonométricas, apareçam como necessárias e intuitivas.

Pretende-se que os estudantes aprendam os conceitos de função periódica e de funções trigonométricas como modelos matemáticos adequados a responder a problemas. É necessário que se apercebam da diferença em trabalhar por exemplo com  $\sin(1)$  em graus e radianos de modo a ter sempre bem presente em que modo está a calculadora e interpretar convenientemente os resultados. Recorrendo ao círculo trigonométrico as relações entre as funções circulares de ângulos suplementares

e complementares  $\alpha$ ,  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ,  $\frac{\pi}{2} + \alpha$ ,  $\pi - \alpha$ ,  $\pi + \alpha$  e  $\alpha$  aparecem naturalmente aos estudantes

mobilizando unicamente a compreensão dos conceitos já adquiridos. Não tem pois sentido que lhes sejam propostos exercícios rotineiros em que estas relações intervenham. Não vale a pena sequer privilegiar estes valores. Podem propor-se bons problemas que lhes permitam desenvolver a aptidão para reconhecer ou analisar propriedades de figuras geométricas. É importante verificar que se mantêm

as relações:  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ,  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$  e  $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  que devem ser usadas na

determinação de uma função trigonométrica, conhecida outra.

Recorrendo à compreensão, sempre ligada à interpretação do círculo trigonométrico, os estudantes desenvolvem a aptidão para mobilizar os conceitos já aprendidos com vista à resolução de condições simples. Assim as técnicas de resolução de equações não passam por listas exaustivas de fórmulas. Os estudantes desenvolvem a sua capacidade de transferir conhecimentos para novas situações (sempre ligadas à compreensão do círculo trigonométrico). Pode ser feita uma breve referência aos gráficos das funções trigonométricas

podendo utilizar-se uma actividade de movimento circular que permita, por exemplo, passar do círculo trigonométrico para os pontos  $(x, \sin x)$  do plano cartesiano.

Podem propor-se algumas situações do âmbito da Física como forma de recordar e ampliar alguns aspectos do cálculo vectorial, designadamente, o trabalho de uma força. Como actividades de aplicação do conceito estudado, aparecem a determinação do ângulo de duas rectas e do declive de uma recta como tangente da inclinação no caso da equação reduzida da recta no plano. Também, como aplicação importante deste novo conceito, os estudantes encontrarão a condição de perpendicularidade de vectores bem como novas formas de definir conjuntos seus conhecidos (no plano: mediatriz, circunferência ou recta tangente a uma circunferência num ponto dado; no espaço: plano mediador e superfície esférica). Poderá aparecer, ainda, como aplicação do conceito de produto escalar de dois vectores a dedução da fórmula do desenvolvimento de  $\cos(x - y)$ .

O estudante encontra a equação cartesiana de um plano como outra aplicação do mesmo conceito.

As equações cartesianas da recta decorrem do estudo da intersecção de planos, embora também os

Matemática A

estudantes as possam encontrar a partir da equação vectorial da recta estudada no 10º ano.

Os estudantes recorrem aos conhecimentos de cálculo vectorial já adquiridos para estabelecer, partindo sempre da visualização, as condições de paralelismo e perpendicularidade no espaço.

A programação linear vai permitir ao estudante aplicar na resolução de problemas de extrema simplicidade e utilidade (e que se apresentam hoje no domínio da Economia) conceitos aprendidos no 10º e ampliados no 11º ano.

*Recorda-se novamente que se dá a maior ênfase à análise e interpretação de figuras quer planas quer tridimensionais pois, o estudante, para resolver problemas da vida corrente ou relacionados com áreas da engenharia, arquitectura,... precisa de usar intuição e raciocínios geométricos. Ao professor compete assegurar que, neste estudo da Geometria, o estudante não se limita à "manipulação" de condições desligadas de situações concretas, sem qualquer esforço de interpretação. A aprendizagem dos novos conceitos aparece ligada à resolução de problemas como prolongamento da geometria estudada no ano anterior (agora o estudante poderá justificar propriedades das figuras usando as suas representações em coordenadas)*

**Sugestões de Avaliação**

Na modalidade de frequência presencial, a avaliação é contínua, estando os alunos integrados em turmas com sujeição ao dever de assiduidade.

Para a avaliação sumativa destes estudantes, os professores devem recorrer a vários instrumentos de avaliação (testes, trabalhos e relatórios, estudos e composições, etc) adequados à diversidade de aprendizagem e aos contextos em que ocorrem, não ocupando mais de 4 unidades lectivas de 90 minutos. Actividades como construção de modelos necessários para a compreensão e representação de situações em estudo e relatórios respectivos podem e devem ser apreciadas como provas de avaliação.

A forma de transformação dos dados recolhidos em classificações é da estrita competência do departamento curricular, sendo que esta classificação obtida é decisiva para a capitalização do módulo, ao fim das 12 primeiras semanas (ou do 1º período). Recomendamos vivamente que o peso dos testes escritos não ultrapasse metade do peso do conjunto dos diferentes momentos de avaliação.

**Módulo 5**

**Funções racionais e com radicais. Taxa de variação e derivada.**

11 semanas - 33 unidades lectivas de 90 minutos

**Competências a desenvolver:**

Neste módulo de Funções e Taxa de Variação, a competência matemática inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso das tecnologias;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais utilizando funções racionais e com radicais;
- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
- a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, ...
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas;
- a capacidade para resolver algébrica e graficamente equações e inequações envolvendo trabalho com polinómios e com expressões racionais e com radicais;
- a capacidade de utilizar o conceito de taxa média de variação e de taxa de variação/derivada para tirar conclusões sobre crescimento e rapidez de crescimento de funções na resolução de problemas em contexto de Matemática, Física, Economia e de outras ciências.

**Objectivos de aprendizagem**

Neste módulo de funções, os objectivos de aprendizagem são os seguintes:

- elaborar modelos para situações da realidade e de outras ciências, utilizando diversos tipos de funções;
- usar modelos de regressão (com recurso à calculadora) na resolução de problemas;
- fazer o estudo de funções (domínio, extremos se existirem, zeros, intervalos de monotonia, assíntotas) descrevendo e interpretando no contexto da situação;
- reconhecer que o mesmo tipo de função pode ser um modelo de diferentes situações realistas;
- traduzir representações descritas por tabelas ou gráficos;
- analisar os efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos de funções;
- usar cenários visuais gerados pela calculadora para ilustrar conceitos matemáticos;
- utilizar a calculadora para realizar simulações e experiências matemáticas com elaboração e análise de conjecturas;
- abordar, de forma experimental, o conceito de limite (a formalizar no 12º ano) e utilizá-lo de forma intuitiva para interpretar situações.
- usar manipulações algébricas para resolver equações e inequações, envolvendo polinómios, expressões racionais e irracionais;
- usar métodos gráficos para resolver condições cuja resolução com métodos algébricos não esteja ao alcance dos estudantes;
- compreender e utilizar a soma, diferença, produto, quociente e composição de funções no contexto do estudo de funções racionais;
- compreender e utilizar o conceito de função inversa;
- utilizar linguagem matemática adequada na elaboração, análise e justificação de conjecturas ou

na comunicação de conclusões.

### Temas e conteúdos

- Resolução de problemas envolvendo funções ou taxa de variação.
- Estudo intuitivo das propriedades das funções e dos seus gráficos, tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica, para a seguinte classe de funções:  $f(x) = a + \frac{b}{cx + d}$

Neste estudo enfatiza-se a análise dos efeitos das mudanças dos parâmetros nos gráficos das funções de uma mesma classe.

- Conceito intuitivo de limite, de  $+\infty$  e de  $-\infty$ .
- Noção de taxa média de variação; cálculo da taxa média de variação.
- Noção de taxa de variação; obtenção da taxa de variação (valor para que tende a t.m.v. quando a amplitude do intervalo tende para zero) em casos simples.
- Interpretação geométrica da taxa de variação; definição de derivada (recorrendo à noção intuitiva de limite).
- Determinação da derivada em casos simples: função afim, funções polinomiais do 2º e 3º grau, função racional do 1º grau, função módulo.

Constatação, por argumentos geométricos, de que:

*i.* se a derivada é positiva num intervalo aberto a função é crescente nesse intervalo e, se a derivada é negativa num intervalo aberto a função é decrescente nesse intervalo;

*ii.* se a função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto desse intervalo então a derivada é nula nesse ponto.

(\*) Referência à hipérbole; informação das suas principais propriedades e da sua importância histórica.

- Funções definidas por dois ou mais ramos (cujo domínio é um intervalo ou união de intervalos).
- Soma, diferença, produto, quociente e composição de funções no contexto do estudo de funções racionais, envolvendo polinómios do 2º e 3º grau.
- Inversa de uma função. Funções com radicais quadráticos ou cúbicos.
- Operações com radicais quadráticos e cúbicos e com potências de expoente fraccionário.
- Simplificações de expressões com radicais (não incluindo a racionalização).

### Recursos

O ensino e a aprendizagem das funções reais de variável real pressupõe a possibilidade de uso de materiais e equipamentos diversificados:

- material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso, transferidor,...);
- quadro quadriculado e papel milimétrico;
- meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, ...);
- livros para consulta e manuais;
- calculadoras gráficas com possibilidade de utilização de programas e “viewscreen”;
- computadores e projectores de vídeo, “datashow”; “software” de geometria dinâmica analítica e produção de gráficos;

- sensores de recolha de dados quer para as calculadoras gráficas quer para os computadores.

Prevê-se a possibilidade de recorrer a fontes para fornecimento de dados e informações, incluindo CD-ROM e Internet.

### Sugestões metodológicas

A resolução de problemas prolonga-se por todo este tema abrangendo progressivamente as novas classes de funções. Pretende-se que os estudantes recordem propriedades das funções e apreendam intuitivamente o conceito de taxa de variação de preferência num contexto de modelação matemática. Como exemplo sugerem-se as actividades *O Jogador de Ténis* ou *A bola no plano inclinado* — ver Brochura de Funções 11º ano (pp 99 e 100).

Ao resolverem problemas como *O volume constante*, *O comprimento de um vinco*, *Triângulo inscrito* ou *Intensidade da luz e CBL* — ver Brochura de Funções 11º ano (pp 90, 117, 118 e 139), os estudantes deparam-se com representantes de novas famílias de funções, que aparecem como boas oportunidades para discutir as noções de domínio de funções nos contextos das situações por elas modeladas.

Valem aqui indicações metodológicas semelhantes às dadas para o Módulo 2 – Funções e Gráficos, pelo que não serão repetidas.

Sugerem-se as seguintes propriedades:

*domínio, contradomínio, pontos notáveis, monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos YY e à origem, assíptotas, limites nos ramos infinitos.*

Afigura-se necessário propor problemas envolvendo as funções anteriores e as estudadas no Módulo 2, tanto sob os aspectos analíticos como numéricos e gráficos. A resolução de equações e inequações fraccionárias aparecem num contexto de resolução de problemas.

O conceito de limite, a ser formalizado mais tarde, deve ser utilizado de forma intuitiva (incluindo o de limite lateral esquerdo e direito). Neste contexto devem ser introduzidos os símbolos  $+\infty$  e  $-\infty$ , devendo chamar-se a atenção para o facto de não serem números reais, mas apenas símbolos com um significado preciso. Este conceito deve ser abordado de uma forma experimental.

Retomando os conhecimentos de polinómios, o estudante deverá ser capaz de transformar expressões como  $\frac{x^2+2}{x+1}$  em  $x-1+\frac{3}{x+1}$  ou  $\frac{x+3}{x+1}$  em  $1+\frac{2}{x+1}$  e observar que, do ponto de vista computacional, normalmente se ganha em precisão, pois se efectua um número mais reduzido de operações. Por outro lado esta simplificação permite que se estude o comportamento no infinito sem necessidade de recorrer ao gráfico. Contudo, os estudantes devem efectuar este tipo de transformações e simultaneamente confirmarem pelo gráfico da função, antes de concluírem sobre o limite no infinito de uma função racional.

Para calcular derivadas de funções simples, não é necessário invocar questões especiais sobre limites, basta recorrer à noção intuitiva. Poderemos pensar no intervalo  $[x_0, x]$  ou  $[x, x_0]$  e na função

$f(x) = mx + b$  e  $\frac{mx+b-(mx_0+b)}{x-x_0} = \frac{m(x-x_0)}{x-x_0}$  que, para  $x \neq x_0$ , vale  $m$  (qualquer que seja a distância  $|x-x_0|$ ). Do mesmo modo, se pode pensar para a derivada de outras funções. Por exemplo, para a

função  $f(x) = \frac{k}{x}$ , a taxa média de variação no intervalo  $[a, a+h]$  é dada por  $\frac{\frac{k}{a+h} - \frac{k}{a}}{h} = \dots = \frac{k}{a(a+h)}$  que tende a ser  $-\frac{k}{a^2}$ , quando  $h$  tende a ser 0. A esta abordagem, está sempre associada a interpretação

geométrica para a taxa média de variação e para a derivada (declives de secantes e tangentes às curvas das funções).

Podem ser propostos alguns problemas simples que envolvam derivadas num contexto de aplicações.

Constate-se que quando as tangentes à curva de uma função em todos os pontos de abcissas de um intervalo aberto do seu domínio têm declives positivos (correspondente à derivada da função ser positiva em todos os pontos do intervalo aberto) a função é crescente nesse intervalo. De modo análogo para os restantes casos. Lembre-se que se opta por considerar que uma função é derivável num ponto  $a$  do seu domínio quando o valor da derivada é real:  $f'(a) \in \mathbb{R}$ .

Não se pretende que os argumentos geométricos sejam apresentados como prova. Alguns resultados virão a ser demonstrados mais tarde.

Os casos  $x^3$  e  $|x|$  são bons e simples (contra-)exemplos para que os estudantes compreendam que há funções que têm derivada nula num ponto sem que nele haja extremo e que há funções com extremo que não têm derivada real no ponto em que tal acontece.

No caso da função inversa os estudantes precisam de analisar os casos em que será possível inverter uma função (poderá ser introduzida a noção de injectividade, apenas como noção auxiliar) e devem constatar a relação entre os gráficos de uma função e da sua inversa. Será necessário introduzir a noção de raiz índice  $n$ . Tal deverá ser feito de forma algébrica. Só depois se falará na função inversa da função potência. Grau de dificuldade a não ultrapassar:  $\sqrt{x+3}$ ,  $\sqrt[3]{x+4}$

A aplicação das operações com radicais a abordar pode ser a obtenção da equação de uma elipse a partir da sua propriedade focal (dados os focos).

### Sugestões de Avaliação

Na modalidade de frequência presencial, a avaliação é contínua, estando os alunos integrados em turmas com sujeição ao dever de assiduidade.

Para a avaliação sumativa destes estudantes, os professores devem recorrer a vários instrumentos de avaliação (testes, trabalhos e relatórios, estudos e composições, etc) adequados à diversidade de aprendizagem e aos contextos em que ocorrem, não ocupando mais de 4 unidades lectivas de 90 minutos. A modelação de funções é aqui considerada como tendo um papel importante para a compreensão e representação de situações em estudo; os relatórios respectivos podem e devem ser apreciadas como provas de avaliação.

A forma de transformação dos dados recolhidos em classificações é da estrita competência do departamento curricular, sendo que esta classificação obtida é decisiva para a capitalização do módulo, ao fim das 11 semanas lectivas (ou do 2º período). Recomendamos vivamente que o peso dos testes escritos não ultrapasse metade do peso do conjunto dos diferentes momentos de avaliação.

**Módulo 6**

**Sucessões Reais.**

10 semanas - 30 unidades lectivas de 90 minutos

**Competências a desenvolver:**

Neste módulo de Sucessões Reais, a competência matemática inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para representar relações funcionais de vários modos e passar de uns tipos de representação para outros, usando regras verbais, tabelas, gráficos e expressões algébricas e recorrendo, nomeadamente, à tecnologia gráfica;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais utilizando modelos discretos;
- a capacidade de identificar padrões e regularidades, em contextos numéricos e geométricos, e para formular generalizações em situações diversas;
- a capacidade para procurar exemplos e contra exemplos esclarecedores dos conceitos a abordar, incentivando o gosto para investigar propriedades;
- a capacidade para passar da escrita em linguagem corrente para linguagem simbólica dos diversos conceitos que devem ser aplicados em exercícios simples;
- a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, ...
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.

**Objectivos de aprendizagem**

Neste módulo de Sucessões Reais, os objectivos de aprendizagem são os seguintes:

- reconhecer e dar exemplos de situações em que os modelos de sucessões sejam adequados;
- utilizar, sempre que possível, os conhecimentos já adquiridos de funções reais de variável real;
- usar a calculadora gráfica, ou computadores, (folha de cálculo) para trabalhar numérica e graficamente com sucessões;
- reconhecer e dar exemplos de situações em que os modelos de progressões aritméticas ou geométricas sejam adequados;
- distinguir crescimento linear de crescimento exponencial;
- investigar propriedades de progressões aritméticas e geométricas, numérica, gráfica e analiticamente;
- compreender e utilizar as noções de sucessão monótona e de sucessão limitada;
- compreender e utilizar as noções de infinitamente grande, infinitamente pequeno e de limite de uma sucessão;
- resolver problemas usando propriedades de progressões aritméticas e de progressões geométricas;
- validar conjecturas; fazer raciocínios demonstrativos usando métodos adequados (método de redução ao absurdo, método dedutivo - em particular o método de indução matemática -, utilização de contra exemplos);
- usar noções de lógica indispensáveis à clarificação dos conceitos.

## Temas e conteúdos

### Sucessões

- Definição e diferentes formas de representação.
- Estudo de propriedades: monotonia e limitação.
- Progressões aritméticas e geométricas: termo geral e soma de  $n$  termos consecutivos.
- Estudo intuitivo da sucessão de termo geral  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  num contexto de modelação matemática; primeira definição do número  $e$ .

### Limites

- Infinitamente grandes e infinitamente pequenos.
- Limites de sucessões e convergência.
- Noção de limite real.  
Ilustração de alguns resultados que justifiquem a unicidade do limite seguida da demonstração desse teorema.
- A convergência das sucessões monótonas e limitadas .  
Exemplos de sucessões monótonas não convergentes.  
Exemplos de sucessões limitadas não convergentes.  
Critério de majoração e teorema das sucessões enquadadas.
- Problemas de limites com progressões .  
(\* ) Estudo de casos simples de caos usando sucessões definidas por recorrência.

### Recursos

O ensino e a aprendizagem das Sucessões Reais pressupõe a possibilidade de uso de materiais e equipamentos diversificados:

- material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso, transferidor,...);
- quadro quadriculado e papel milimétrico;
- meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, ...);
- livros para consulta e manuais;
- calculadoras gráficas com possibilidade de utilização de programas e “viewscreen”;
- computadores e projectores de vídeo, “datashow”; “software” de geometria dinâmica analítica e produção de gráficos;
- sensores de recolha de dados quer para as calculadoras gráficas quer para os computadores.

Prevê-se a possibilidade de recorrer a fontes para fornecimento de dados e informações, incluindo CD-ROM e Internet.

### Sugestões metodológicas

As sucessões aparecem como uma forma de organizar possíveis resoluções para situações

Matemática A

problemáticas que são apresentadas, com base em aspectos da realidade (social) e em aspectos do estudo das diversas ciências (Matemática incluída). O estudo das sucessões pode e deve servir para evidenciar conexões entre a matemática e as outras disciplinas: a introdução do conceito de sucessão e das suas propriedades pode ser feita propondo vários problemas. Exemplos sugestivos podem versar assuntos diversos: da geometria — por exemplo, comprimento da espiral construída a partir de quartos de circunferências; da economia — por exemplo, problemas com empréstimos ou depósitos bancários com juros sobre um capital constante (ou variável); da biologia — por exemplo, cálculo do número de elementos de uma população considerado um determinado modo de reprodução de cada elemento,...

O estudo das sucessões como funções de variável natural deve ser feito só depois de terem sido construídos vários exemplos/modelos. Mas a escrita de expressões para os termos gerais das sucessões deve ser procurada como forma de representar as situações que se vão descrevendo. Do mesmo modo se podem introduzir as noções de termo, de ordem, ou até de razão, etc. O estudo da monotonia, minorantes, majorantes, etc pode ser feito à medida que vão aparecendo como aspectos a considerar durante a resolução dos diferentes problemas. Do mesmo modo, podem ser abordadas as propriedades de certas sucessões (progressões). Estes problemas podem ainda servir para introduzir a definição por recorrência, para casos simples.

Os estudantes podem utilizar livremente a calculadora para procurar responder aos problemas que lhes são propostos e devem procurar formas próprias de organização e expressão para a modelação das situações. O professor deve explorar o uso da calculadora e ajudar a construir tabelas, a desenhar e a interpretar gráficos. Só depois de serem experimentadas variadas redacções, são introduzidas as redacções simbólicas consagradas. As redacções simbólicas serão testadas com exercícios rápidos.

Depois de se terem introduzido as noções de sucessão como função de variável natural, de ordem, de termo geral, etc. podem apresentar-se exemplos de sucessões definidas pelo seu termo geral e, utilizando a calculadora gráfica, através de cálculos e representações gráficas de sequências de termos chegar aos conceitos de infinitamente grande, de infinitamente pequeno e de limite de uma sucessão. Cada definição deve ser suportada por exemplos e contra-exemplos que esclareçam as ideias imediatas e corrijam eventuais concepções alternativas e erradas.

É bom que os estudantes utilizem conhecimentos já adquiridos sobre algumas funções reais de variável real e os transfiram com as devidas cautelas para as sucessões. É importante que se aproveitem momentos como este para obrigar os estudantes a reflectir (pedindo-lhes contra-exemplos em que os recíprocos nem sempre são válidos.). Deste modo, os estudantes ganham confiança nos seus próprios saberes e compreendem as novas aquisições como complementares e facilitadoras, aprofundamentos das suas competências para dar respostas a situações cada vez mais complexas.

As definições são estabelecidas em linguagem corrente seguindo as conclusões a tirar de cada exemplo e contra-exemplo. Após cada redacção em linguagem corrente deve ser estabelecida uma redacção em simbologia matemática e devem então ser aplicados exercícios rápidos em que as definições simbólicas sejam testadas.

O estudante poderá ser solicitado a estudar, por exemplo, a curva de Von Koch ou o poliedro fractal. Os estudantes encontrarão assim uma interessante característica das figuras fractais enquanto utilizam propriedades das progressões. Descobrirão que têm comprimento (ou superfície) infinito e uma superfície (ou volume) finita (quer a tratem no plano ou no espaço)

### Sugestões de Avaliação

Na modalidade de frequência presencial, a avaliação é contínua, estando os alunos integrados em turmas com sujeição ao dever de assiduidade.

Para a avaliação sumativa destes estudantes, os professores devem recorrer a vários instrumentos de avaliação (testes, trabalhos e relatórios, estudos e composições, etc.) adequados à diversidade de aprendizagem e aos contextos em que ocorrem, não ocupando mais de 4 unidades lectivas de 90 minutos. Actividades como construção de modelos necessários para a compreensão e representação de situações em estudo e relatórios respectivos podem e devem ser apreciadas como provas de avaliação.

Matemática A

A forma de transformação dos dados recolhidos em classificações é da estrita competência do departamento curricular, sendo que esta classificação obtida é decisiva para a capitalização do módulo, ao fim das 10 semanas lectivas (ou do 3º período). Recomendamos vivamente que o peso dos testes escritos não ultrapasse metade do peso do conjunto dos diferentes momentos de avaliação.

## Módulo 7

### Probabilidades e Combinatória.

12 semanas - 36 unidades lectivas de 90 minutos

#### Competências a desenvolver:

Neste módulo de Probabilidades e Combinatória, a competência matemática inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para compreender a diferença entre fenómeno determinístico e fenómeno aleatório;
- a capacidade para construir modelos de probabilidade para situações simples em que se admita como razoável a equiprobabilidade dos acontecimentos;
- a capacidade para compreender as propriedades básicas de uma função massa de probabilidade;
- a capacidade para compreender e utilizar a noção de probabilidade condicionada;
- a aptidão para conhecer as propriedades da probabilidade e aplicá-las no cálculo da probabilidade de acontecimentos ;
- a capacidade de conhecer e utilizar distribuições de frequências relativas e de probabilidades;
- a aptidão para conhecer e saber seleccionar métodos de contagem.

#### Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Probabilidades e Combinatória, os objectivos de aprendizagem são os seguintes:

- resolver problemas, envolvendo cálculo de probabilidades;
- identificar acontecimentos e respectivos conjuntos de resultados em espaços finitos;
- utilizar árvores de probabilidades como instrumento de organização de informação quando se está perante uma cadeia de experiências aleatórias;
- desenvolver raciocínios demonstrativos a partir da Axiomática de Probabilidades;
- conhecer os modelos Normal ou Gaussiano e o Binomial e suas propriedades e calcular probabilidades associadas utilizando tabelas e calculadoras sempre que necessário;
- resolver problemas de contagem.

#### Temas e conteúdos

##### Introdução ao cálculo de Probabilidades:

- Experiência aleatória; conjunto de resultados; acontecimentos.
- Operações sobre acontecimentos.
- Aproximações conceptuais para Probabilidade:
  - aproximação frequencista de probabilidade;
  - definição clássica de probabilidade ou de Laplace;
  - definição axiomática de probabilidade (caso finito); propriedades da probabilidade.
- Probabilidade condicionada e independência; probabilidade da intersecção de acontecimentos. Acontecimentos independentes.

**Distribuição de frequências relativas e distribuição de probabilidades.**

- Variável aleatória; função massa de probabilidade:
  - distribuição de probabilidades de uma variável aleatória discreta;
  - distribuição de frequências versus distribuição de probabilidades;
  - média versus valor médio;
  - desvio padrão amostral versus desvio padrão populacional.
- Modelo Binomial.
- Modelo Normal; histograma versus função densidade.

**Análise Combinatória**

- Arranjos completos, arranjos simples, permutações e combinações.
- Triângulo de Pascal.
- Binómio de Newton.
- Aplicação ao cálculo de probabilidades.

**Recursos**

O ensino e a aprendizagem das funções reais de variável real pressupõe a possibilidade de uso de materiais e equipamentos diversificados:

- material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso, transferidor,...);
- quadro quadriculado e papel milimétrico;
- meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, ...);
- livros para consulta e manuais;
- calculadoras gráficas com possibilidade de utilização de programas e “viewscreen”;
- computadores, projectores de vídeo e “datashow”;
- sensores de recolha de dados quer para as calculadoras gráficas quer para os computadores.

Prevê-se a possibilidade de recorrer a fontes para fornecimento de dados, incluindo CD-ROM e Internet.

**Sugestões metodológicas**

Experiências que permitam tirar partido de materiais lúdicos e de simulações com a calculadora contribuirão para esclarecer conceitos através da experimentação e para dinamizar discussões de tipo científico, bem como para incentivar o trabalho cooperativo. A simulação e o jogo ajudam a construir adequadamente o espaço dos resultados e a encontrar valores experimentais para a probabilidade de acontecimentos que estão a ser estudados. É importante incentivar o estudante, sempre que possível, a resolver os problemas por vários processos, discutindo cada um deles com o professor e com os restantes colegas de modo a poder apreciar cada uma das formas de abordar o problema. O professor deve solicitar, frequentemente, que descrevam com pormenor, oralmente e por escrito, os raciocínios efectuados. É aconselhável elaborar boas formas de registo para os resultados das suas experiências de modo a poderem ser partilhadas em grupo. A axiomática das Probabilidades, por ser curta, permite alguns exercícios de verificação simples, capazes de motivar a apropriação da utilidade deste tipo de abordagem matemática. O facto de tanto as definições frequentista e clássica de probabilidade como a probabilidade condicionada satisfazerem a axiomática das Probabilidades permite compreender melhor

## Matemática A

o papel de uma axiomática em Matemática.

Os estudantes já sabem como descrever os acontecimentos associados a uma experiência aleatória usando o espaço ou conjunto de resultados e sabem, ainda, como determinar a probabilidade de acontecimentos. Ora é muitas vezes necessário associar a uma experiência aleatória (associada a um modelo de probabilidade) valores numéricos pelo que é importante introduzir o conceito de variável aleatória bem como o de função massa de probabilidade. Os estudantes poderão utilizar simulações para construir distribuições empíricas de probabilidades. É importante que compreendam a relação entre as estatísticas e os parâmetros populacionais. Não é objectivo do programa entrar no estudo das variáveis contínuas mas o estudante poderá investigar se não haverá nenhuma representação que seja para a população o equivalente ao histograma na amostra. Das distribuições contínuas a mais conhecida foi obtida pelo matemático Gauss e tem hoje um papel importante já que muitos processos de inferência estatística a têm por base.

No caso das contagens que sejam facilitadas por raciocínios combinatórios, é aconselhável que os estudantes comecem por contar os elementos um a um, utilizando exemplos (desde os mais simples até aos mais complicados), até que reconheçam a utilidade dos diagramas e depois das organizações simplificadoras. Os exemplos de conjuntos para a contagem podem surgir de situações problemáticas que lhes forem sendo propostas. Mesmo o triângulo de Pascal pode ser introduzido a partir de problemas. Muitos problemas postos podem e devem resultar da análise de jogos conhecidos. Os raciocínios combinatórios facilitam a abordagem de propriedades envolvendo combinações, mas não deve ser desprezada a ideia de, caso seja possível, introduzir conexões matemáticas - com métodos recursivos e fazendo alguma demonstração por indução matemática.

Pascal, Tartaglia e Laplace são exemplos "interessantes" para realizar incursões na história dos conceitos matemáticos, na vida dos matemáticos, nas ligações da Matemática com outros ramos de saber e actividade. É importante referir que muitos resultados de contagens já eram conhecidos anteriormente noutras civilizações (por exemplo, o triângulo de Pascal era conhecido na China vários séculos antes de Pascal)

### **Sugestões de Avaliação**

Na modalidade de frequência presencial, a avaliação é contínua, estando os alunos integrados em turmas com sujeição ao dever de assiduidade.

Para a avaliação sumativa destes estudantes, os professores devem recorrer a vários instrumentos de avaliação (testes, trabalhos e relatórios, estudos e composições, etc) adequados à diversidade de aprendizagem e aos contextos em que ocorrem, não ocupando mais de 4 unidades lectivas de 90 minutos. Actividades como construção de modelos, recorrendo à simulação com base em material manipulável, jogo ou calculadora, para a compreensão e representação de situações em estudo e relatórios respectivos podem e devem ser apreciadas como provas de avaliação.

A forma de transformação dos dados recolhidos em classificações é da estrita competência do departamento curricular, sendo que esta classificação obtida é decisiva para a capitalização do módulo, ao fim das 12 semanas lectivas (ou do 1º período). Recomendamos vivamente que o peso dos testes escritos não ultrapasse metade do peso do conjunto dos diferentes momentos de avaliação.

**Módulo 8**

**Funções Exponenciais e Logarítmicas. Teoria de limites. Cálculo diferencial**

11 semanas - 33 unidades lectivas de 90 minutos

**Competências a desenvolver:**

Neste módulo de Funções Exponenciais e Logarítmicas, Teoria de limites e Cálculo diferencial, a competência matemática, que todos devem desenvolver, inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais utilizando modelos de crescimento não linear;
- a aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso das tecnologias;
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas;
- a aptidão para construir modelos de regressão exponenciais e logarítmicos;
- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
- a aptidão para usar equações e inequações como meio de representar situações problemáticas e para resolver equações, inequações e sistemas, assim como para realizar procedimentos algébricos que envolvam expressões exponenciais ou logarítmicas;
- a capacidade para apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, ...
- a capacidade de entender o uso de funções como modelos matemáticos de situações do mundo real, em particular nos casos em que traduzem situações de crescimento não linear;
- a aptidão para aplicar os conhecimentos de Análise Infinitesimal (teoria dos limites, continuidade e derivadas) na resolução de problemas e no estudo de funções reais de variável real.

**Objectivos de aprendizagem**

Neste módulo de Funções Exponenciais e Logarítmicas, Teoria de limites e Cálculo diferencial os objectivos de aprendizagem, que se pretende que os estudantes atinjam, são os seguintes:

- analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos – exponenciais e logarítmicos – que permitam a sua interpretação e resolução;
- usar as propriedades das exponenciais e das logarítmicas e as calculadoras gráficas ou um computador para encontrar valores ou gráficos que respondam a possíveis mudanças nos parâmetros;
- interpretar uma função e prever a forma do seu gráfico;
- descrever as regularidades e diferenças entre padrões lineares, quadráticos, exponenciais, logarítmicos e logísticos;
- definir o número  $e$  (segunda definição) e logaritmo natural;
- resolver equações e inequações, usando exponenciais e logaritmos (no contexto da resolução de problemas);
- resolver, pelo método gráfico, equações e inequações usando as funções exponenciais, logarítmicas e logísticas (no contexto da resolução de problemas) cuja resolução é impraticável pelos métodos algébricos;
- reconhecer propriedades das funções aplicando definições e teoremas do cálculo diferencial;
- reconhecer numericamente e graficamente a relação entre o sinal da taxa de variação e a monotonia de uma função;

Matemática A

- reconhecer a relação entre os zeros da taxa de variação e os extremos de uma função;
- resolver problemas de aplicações simples envolvendo a determinação de extremos de funções racionais, exponenciais, logarítmicas;
- reconhecer que diferentes situações podem ser descritas pelo mesmo modelo matemático.

**Temas e conteúdos**

**Funções exponenciais e logarítmicas**

- Função exponencial de base superior a um; crescimento exponencial; estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por  $f(x) = a^x$  com  $a > 1$ .
- Função logarítmica de base superior a um; estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por  $f(x) = \log_a x$  com  $a > 1$ .
- Regras operatórias de exponenciais e logaritmos.
- Utilização de funções exponenciais e logarítmicas na modelação de situações reais.

**Teoria de limites**

- Limite de função segundo Heine. Propriedades operatórias sobre limites (informação); limites notáveis (informação). Indeterminações. Assíptotas.
- Continuidade.
- Teorema de Bolzano-Cauchy (informação) e aplicações numéricas.

**Cálculo Diferencial**

- Funções deriváveis. Regras de derivação (demonstração da regra da soma e do produto; informação das restantes regras).
- Derivadas de funções elementares.
- (informação baseada em intuição numérica e gráfica). Segunda definição do número  $e$ . Teorema da derivada da função composta (informação).
- Segundas derivadas e concavidade (informação baseada em intuição geométrica).
- Estudo de funções em casos simples.
- Integração do estudo do Cálculo Diferencial num contexto histórico.
- Problemas de optimização.

(\*) Demonstração de alguns teoremas elementares do cálculo diferencial.

**Recursos**

O ensino e a aprendizagem das Funções Exponenciais e Logarítmicas, Teoria de limites e Cálculo diferencial, pressupõe a possibilidade de uso de materiais e equipamentos diversificados:

- material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso, transferidor,...);
- quadro quadriculado e papel milimétrico;
- meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, ...);
- livros para consulta e manuais;

- calculadoras gráficas com possibilidade de utilização de programas e “viewscreen”;
- computadores e projectores de video, “datashow”; “software” de geometria dinâmica analítica e produção de gráficos;
- sensores de recolha de dados quer para as calculadoras gráficas quer para os computadores.

Prevê-se a possibilidade de recorrer a fontes para fornecimento de dados, incluindo CD-ROM e Internet.

### Sugestões metodológicas

Com as novas famílias de funções surgem, também, novas oportunidades para cada estudante obter uma maior compreensão da matemática e suas aplicações, bem como para conectar e relacionar os novos conhecimentos com os já adquiridos em anos anteriores (quer dentro do mesmo tema quer com temas diferentes). É fundamental apresentar aos estudantes actividades diversificadas (ver, por exemplo, brochura de apoio ao programa sobre este tema) tendo-se em conta que a exploração com a utilização das várias tecnologias pode permitir discussões ricas, quer sobre o processo de modelação, quer sobre os conceitos matemáticos fundamentais, para além de facilitarem propostas aconselháveis de investigações.

Os estudantes precisam de desenvolver a compreensão de procedimentos algébricos e utilizá-los (a par da utilização da calculadora) sem que para isso tenham que fazer exercícios repetitivos.

A modelação com funções exponenciais e logarítmicas pode ser feita tanto usando capacidades específicas da calculadora gráfica (por exemplo, usando a regressão estatística a partir de dados recolhidos experimentalmente ou numa base de dados), como por análise algébrica da adequação de um modelo fornecido pelo professor.

As indeterminações são referidas apenas para mostrar as limitações dos teoremas operatórios. o programa apenas pressupõe que se levantem as indeterminações em casos simples.

Dificuldade a não exceder:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 - 2x + 1}{x^2 + 3}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}), \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

É aconselhável que os estudantes experimentem numérica e graficamente a relação entre os limites no infinito da exponencial, da potência e dos logaritmos.

Derivada da função composta: grau de dificuldade a não ultrapassar:  $f(ax)$ ,  $f(x+b)$ ,  $f(x^k)$

É importante analisar em todos os teoremas a necessidade das condições do enunciado através de contra-exemplos.

Deve ser adoptada a definição:  $f$  é derivável quando a derivada existe.

e é o único número real tal que  $(e^x)' = e^x$ .

O estudo de funções deve seguir o modelo que se encontra na página 149 da brochura de funções do 12º ano e que combina métodos analíticos com o uso da calculadora gráfica.

Dificuldade a não ultrapassar:

$$f(x) = 2^{-x} + 2^x, \quad f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x + 1}, \quad f(x) = \frac{x}{1 - \log x}$$

Os estudantes poderão realizar trabalhos individuais ou em grupo de História do Cálculo Diferencial referindo o trabalho de alguns matemáticos como Fermat, Newton, Leibniz, Berkeley, Anastácio da Cunha, Bolzano, Cauchy, etc. É obrigatória a referência a José Anastácio da Cunha; com esse pretexto referir um pouco de história da Matemática em Portugal desde o tempo dos descobrimentos até à actualidade.

Os problemas de optimização devem ser escolhidos de modo a que um estudante trabalhe de uma forma tão completa quanto possível a modelação. É uma boa oportunidade para discutir com os estudantes o processo de modelação matemática e a sua importância no mundo actual.

(\*) Os teoremas a demonstrar devem incluir:

- continuidade implica limitação numa vizinhança;
- continuidade e  $f(x) > 0$  ou  $f(x) < 0$  implicam permanência de sinal numa vizinhança de  $x$ ;
- derivabilidade implica continuidade;
- derivada da potência inteira e racional e do quociente.

### Sugestões de Avaliação

Na modalidade de frequência presencial, a avaliação é contínua, estando os alunos integrados em turmas com sujeição ao dever de assiduidade.

Para a avaliação sumativa destes estudantes, os professores devem recorrer a vários instrumentos de avaliação (testes, trabalhos e relatórios, estudos e composições, etc) adequados à diversidade de aprendizagem e aos contextos em que ocorrem, não ocupando mais de 4 unidades lectivas de 90 minutos. Actividades como construção de modelos necessários para a compreensão e representação de situações em estudo e relatórios respectivos podem e devem ser apreciadas como provas de avaliação.

A forma de transformação dos dados recolhidos em classificações é da estrita competência do departamento curricular, sendo que esta classificação obtida é decisiva para a capitalização do módulo, ao fim das 11 semanas lectivas (ou do 2º período). Recomendamos vivamente que o peso dos testes escritos não ultrapasse metade do peso do conjunto dos diferentes momentos de avaliação.

**Módulo 9**

**Trigonometria e Números Complexos.**

10 semanas - 30 unidades lectivas de 90 minutos

**Competências a desenvolver:**

Neste módulo de Trigonometria e Números Complexos, a competência matemática, que todos devem desenvolver, inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para analisar situações da vida real (simplificadas), que possam ser modeladas por funções trigonométricas;
- a aptidão para aplicar os conhecimentos de Análise Infinitesimal na resolução de problemas;
- a capacidade de formular hipóteses, prever resultados e fazer demonstrações simples;
- a aptidão para reconhecer diferentes representações da mesma entidade;
- a capacidade de utilizar a calculadora gráfica para modelar e resolver situações.

**Objectivos de aprendizagem**

Neste módulo de Trigonometria e Números Complexos, os objectivos de aprendizagem, que se pretende que os estudantes atinjam são os seguintes:

- aplicar a trigonometria em situações problemáticas que envolvam triângulos;
- aplicar conhecimentos de Análise Infinitesimal no estudo de funções trigonométricas;
- resolver equações trigonométricas;
- utilizar métodos gráficos para resolver equações e inequações que não podem ser resolvidas, ou cuja resolução é impraticável com métodos algébricos;
- utilizar a calculadora gráfica para elaborar e analisar conjecturas;
- escrever e representar o mesmo número complexo na forma algébrica e trigonométrica;
- operar com números complexos, na forma algébrica e trigonométrica, estabelecendo conexões com a geometria plana, o cálculo vectorial e as transformações geométricas;
- escrever (e interpretar), em  $\mathbb{C}$ , condições definidoras de conjuntos de pontos e lugares geométricos

**Temas e conteúdos**

**Funções seno, co-seno, tangente.**

- Estudo intuitivo com base no círculo trigonométrico, tanto a partir de um gráfico particular, como usando calculadora gráfica ou computador.
- Estudo intuitivo de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x}$ .
- Derivadas do seno, co-seno e tangente.
- Utilização de funções trigonométricas na modelação de situações reais.

**Números Complexos**

- Introdução elementar de problemas de resolubilidade algébrica e do modo como se foram considerando novos números. Apropriação de um modo de desenvolvimento da Matemática, através da evolução do conceito fundamental de número. Experimentação da necessidade de  $i$  à semelhança da aceitação da necessidade dos números negativos e fraccionários.

Matemática A

- Números complexos. O número  $i$ . O conjunto  $\mathbf{C}$  dos números complexos
- A forma algébrica dos complexos. Operações com complexos na forma algébrica.
- Representação de complexos na forma trigonométrica.
- Escrita de complexos nas duas formas, passando de uma para outra.
- Operações com complexos na forma trigonométrica.
- Interpretações geométricas das operações.
- Domínios planos e condições em variável complexa.

(\*) Demonstração de propriedades de Geometria usando números complexos

**Recursos**

O ensino e a aprendizagem das funções reais de variável real pressupõe a possibilidade de uso de materiais e equipamentos diversificados:

- material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso, transferidor,...);
- quadro quadriculado e papel milimétrico;
- meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, ...);
- livros para consulta e manuais;
- calculadoras gráficas com possibilidade de utilização de programas e “viewscreen”;
- computadores e projectores de vídeo, “datashow”; “software” de geometria dinâmica analítica e produção de gráficos;
- sensores de recolha de dados quer para as calculadoras gráficas quer para os computadores.

Prevê-se a possibilidade de recorrer a fontes para fornecimento de dados, incluindo CD-ROM e Internet.

**Sugestões metodológicas**

As propriedades a serem investigadas, recorrendo à calculadora gráfica, são: domínio, contradomínio, período, pontos notáveis, monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos YY e à origem, assíptotas, limites nos ramos infinitos. Os estudantes podem investigar, tal como o fizeram nas famílias de funções anteriores, qual a influência da mudança de parâmetros na escrita da expressão que define a função (em casos simples e se possível ligados a problemas de modelação).

As derivadas do seno e do co-seno podem ser obtidas a partir das fórmulas do seno e do co-seno da soma e de que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x}$

A modelação com funções trigonométricas pode ser feita tanto usando as capacidades específicas da calculadora gráfica (por exemplo, usando a regressão estatística a partir de dados recolhidos experimentalmente ou numa base de dados) como por análise algébrica da adequação de um modelo fornecido pelo professor.

O estudante precisa de explorar sempre que possível a ligação dos números complexos à geometria. Ela fornece uma perspectiva mais rica dos métodos geométricos com que se trabalha habitualmente — método das coordenadas, dos vectores e das transformações geométricas, bem como uma nova compreensão da demonstração, tornado possível ligar as características numéricas, algébricas e geométricas (ler a brochura referente a este tema).

Matemática A

A introdução dos complexos deve ser ancorada numa pequena abordagem histórica, do ponto de vista dos problemas/escolhos que foram aparecendo no desenvolvimento dos estudos matemáticos. Os estudantes podem realizar trabalhos sobre a extensão do conceito de número e sobre problemas de resolubilidade algébrica, quer do ponto de vista histórico, quer do ponto de vista da sua experiência com anteriores desenvolvimentos. Será interessante a referência à impossibilidade da extensão a  $\mathbf{C}$  de uma ordenação compatível com a adição e a multiplicação.

As operações com complexos podem ser definidas na base da manutenção das propriedades das operações e do quadrado de  $i$  ser  $-1$ . É aconselhável que  $|z|$  seja introduzido de modo intuitivo, estendendo a noção de valor absoluto de um real (distância de dois pontos no eixo, distância de dois pontos no plano cartesiano)

A passagem à forma trigonométrica pode ser feita com referência a outros sistemas de coordenadas. É importante explorar a multiplicação por  $i$  e as diversas operações ligadas a outras realidades matemáticas - vectores, operações com vectores, transformações geométricas.

A resolução e a interpretação das soluções de condições em  $z$  devem ajudar a compreender a utilidade dos diversos sistemas de representação analítica. O recurso a programas de geometria dinâmica pode ser motivadora para a realização de demonstrações. Assim o professor deve propor que depois de investigadas sejam demonstradas propriedades de polígonos.

**Sugestões de Avaliação**

Na modalidade de frequência presencial, a avaliação é contínua, estando os alunos integrados em turmas com sujeição ao dever de assiduidade.

Para a avaliação sumativa destes estudantes, os professores devem recorrer a vários instrumentos de avaliação (testes, trabalhos e relatórios, estudos e composições, etc) adequados à diversidade de aprendizagem e aos contextos em que ocorrem, não ocupando mais de 4 unidades lectivas de 90 minutos. Actividades como construção de modelos necessários para a compreensão e representação de situações em estudo e relatórios respectivos podem e devem ser apreciadas como provas de avaliação.

A forma de transformação dos dados recolhidos em classificações é da estrita competência do departamento curricular, sendo que esta classificação obtida é decisiva para a capitalização do módulo, ao fim das 10 semanas lectivas (ou do 3º período). Recomendamos vivamente que o peso dos testes escritos não ultrapasse metade do peso do conjunto dos diferentes momentos de avaliação.

### Bibliografia e outros recursos

Abrantes, P.; Ponte, J.P. *et al.* (1999) *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Grupo "Matemática para todos - investigações na sala de aula", Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Este livro reúne um conjunto de artigos elaborados no âmbito do Projecto "Matemática para Todos" à volta da incorporação, nas aulas e nos currículos de matemática, de actividades de natureza investigativa realizadas pelos estudantes. Segundo os organizadores dos volumes (este e seguinte), "as actividades de investigação podem ser inseridas, naturalmente, em qualquer parte do currículo, representando na verdade um tipo de trabalho que tem um carácter transversal na disciplina de Matemática". De acordo com os organizadores dos livros "o trabalho realizado por este projecto confirma as potencialidades da actividade investigativa para a aprendizagem da Matemática e dá muitas pistas sobre o modo como ela se pode inserir nas actividades das escolas".

Abrantes, P.; Leal, L. C.; Ponte, J.P. *et al.* (1996) *Investigar para aprender matemática*. Grupo "Matemática para todos - investigações na sala de aula", Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ver comentário a *Investigações matemáticas na aula e no currículo*.

Araújo, Paulo Ventura (1998). *Curso de Geometria*. (Trajectos Ciência, Vol. 5) Lisboa: Gradiva

É um excelente livro para complementar a forma de ensino de Geometria de qualquer professor de Matemática do Ensino Secundário (e do Ensino Básico). Escrito numa linguagem muito clara e sugestiva, o autor, ao longo de 26 capítulos, vai desde os primeiros axiomas da geometria euclidiana até aos surpreendentes meandros da geometria não euclidiana (em particular a geometria hiperbólica). A abordagem é a da chamada geometria métrica (em que os números reais, para medir distâncias, são introduzidos muito cedo) que é muito mais simples para um principiante. O livro tem ainda vários capítulos sobre transformações geométricas. São de salientar a definição geométrica rigorosa das funções trigonométricas, a discussão da noção de área, a demonstração da fórmula de Herão e uma introdução interessante à noção de centro de massa complementada com a recomendação de leitura do livro *A Física no dia-a-dia* (Ed. Relógio de Água, 1995) de Rómulo de Carvalho.

Caraça, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Col. Ciência Aberta, Vol. 98 (2ª ed., 1998). Lisboa: Gradiva

Neste livro, Bento de Jesus Caraça (1901-1948) mostra como a Matemática é "um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação" ao pôr em evidência como os fundamentos da Matemática "mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real". Trata-se sem dúvida de um dos melhores livros de Matemática escritos em língua portuguesa onde se pode assistir maravilhado à evolução dos conceitos de número, de função e de continuidade, através de numerosas discussões, reflexões, notas históricas e teoremas muitas vezes com demonstrações pouco vulgares.

Departamento de Educação Básica (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: ME- DEB.

Esta publicação do Departamento de Educação Básica constitui uma importante fonte de informação sobre a Matemática do ensino básico em Portugal absolutamente necessária para quem lecciona no ensino secundário.

Figueira, Mário R. S. (1997). *Fundamentos de Análise Infinitesimal* Textos de Matemática, Vol. 5, 2ª ed. Lisboa: Departamento de Matemática, FCUL

Este é um livro de texto para os estudantes da licenciatura em Matemática mas é de leitura acessível a todos os que procuram uma apresentação rigorosa dos temas elementares de funções reais de uma variável real. Começa com um estudo do conjunto dos números reais a partir de uma axiomática (referindo-se a relação entre  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R}$  assim como a representação decimal e a representação geométrica dos reais). O livro contém os temas clássicos de funções de uma variável com uma exposição muito clara, complementada com bastantes exemplos e exercícios. Alguns temas menos habituais aparecem ao longo deste volume, como o estudo dos desenvolvimentos assintóticos ou a definição das funções trigonométricas a partir da noção de comprimento de arco.

Grupo de trabalho T3-Portugal APM. (1999) *Estatística e Calculadoras Gráficas*. Grupo de trabalho T3-Portugal APM. Lisboa: APM

Esta publicação contém actividades sobre Estatística, redigidas tendo em vista uma possível utilização na sala de aula; contém ainda comentários sobre as actividades e propostas de resolução das mesmas.

Grupo de trabalho T3-Portugal APM (1999). *Geometria com Cabri-Géomètre*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém actividades de geometria para utilização na sala de aula utilizando o programa de geometria

Matemática A

dinâmica Cabri-Géomètre II; essas actividades são graduadas de modo que se tenha um domínio progressivo do programa a partir dos procedimentos mais elementares. Os conceitos matemáticos envolvidos nas actividades incluem elementos de geometria plana, fractais, cónicas, transformações geométricas e geometria analítica.

Grupo de trabalho T3-Portugal APM. (1999). *Modelação no Ensino da Matemática - Calculadora, CBL e CBR*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém actividades de modelação matemática para utilização na sala de aula; umas actividades são facilmente realizadas com a ajuda de uma calculadora gráfica e as outras necessitam da utilização de sensores para recolha de dados experimentais; são incluídos comentários e resoluções das actividades. Os conceitos matemáticos envolvidos nas actividades incluem funções definidas por ramos, regressão, optimização, funções exponenciais e trigonométricas e função quadrática. A publicação contém um texto introdutório sobre o processo de modelação matemática e a ligação entre a modelação matemática e a modelação no ensino da matemática; o texto situa ainda a modelação matemática no contexto dos actuais programas do ensino secundário.

Hughes-Hallett, Deborah; Gleason, Andrew M. *et al.* (1997) *Cálculo* vol. 1. Rio de Janeiro: LTC (1997).

Este livro de texto é um dos mais inovadores dos últimos anos e foi elaborado por uma equipa de matemáticos distintos e de educadores e professores com larga experiência. O livro apresenta os conceitos básicos de funções reais de uma variável real tendo como orientação dois princípios básicos: *A Regra de Três* (Todo o assunto deve ser apresentado geométrica, numérica e algebricamente) e o *Modo de Arquimedes* (Definições e procedimentos formais decorrem do estudo de problemas práticos). A apresentação dos conceitos, os inúmeros exemplos e os exercícios de tipo muito variado fornecerão seguramente boas inspirações a qualquer professor.

Junqueiro, M; Valente, S. (1998). *Exploração de construções geométricas dinâmicas*. Lisboa: APM

Este é um livro que contém uma série de materiais para a sala de aula, premiados no "IV Concurso de materiais de apoio à utilização e integração das TIC nos ensino Básico e Secundário" do Ministério da Educação. Os materiais estão divididos em dois grupos: 11 para utilizar com estudantes e 4 para os professores utilizarem na sua formação (totalmente adequados a auto-formação). Os materiais estão elaboradas para serem usadas com o Cabri-Géomètre mas podem ser usadas com qualquer outro Ambiente Geométrico Dinâmico (como o Geometer's Sketchpad). As actividades deste livro incluem temas como polígonos, cónicas, tangentes a uma circunferência e mediatriz. Uma excelente oportunidade para começar a trabalhar Geometria com um computador.

Loureiro, C. (coord.), Franco de Oliveira, A., Ralha, E. e Bastos, R. (1997). *Geometria: Matemática - 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME - DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o programa de Matemática A, pelo que é de consulta indispensável.

Martins, M. E. G. (coord.), Monteiro, C., Viana, J. P. e Turkman, M. A. (1997). *Estatística: Matemática -- 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME - DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o programa de Matemática A, pelo que é de consulta indispensável.

Moore, David (1966). *Introduction to the Practice of Statistics*. New York: Freeman

Livro recomendado pela Sociedade Portuguesa de Estatística para apoio aos professores de Matemática do Ensino Secundário

Moore, David (2000). *Statistics, The Science of Data For all Practical Purposes: Mathematical Literacy in Today's World, Part II*, 5th ed. New York: Freeman.

Livro recomendado pela Sociedade Portuguesa de Estatística para apoio aos professores de Matemática do Ensino Secundário

Moore, David (1966). *The Basic Practice of Statistics*. New York: Freeman

Livro recomendado pela Sociedade Portuguesa de Estatística para apoio aos professores de Matemática do Ensino Secundário

Oliveira, P. (2000). *Brevíssima História dos Números Complexos*. História da Matemática - Cadernos do GTHEM – 2 APM. Lisboa: APM.

A história dos complexos é uma referência obrigatória para a leccionação do tema.

Ponte, J. P.(coord.), Boavida, A. M., Graça, M. e Abrantes, P. (1997) *Didáctica: Matemática – ensino secundário*. Lisboa: ME -DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o programa de Matemática A, pelo que é de consulta indispensável.

Ponte, J.P.; Canavarro, A. P. (1997). *Matemática e Novas Tecnologias* (Universidade Aberta, Vol 128). Lisboa: UA.

Este livro fornece uma excelente panorâmica da utilização das novas tecnologias na Matemática e na aula de Matemática. É apresentada uma perspectiva histórica da utilização das tecnologias na matemática sendo discutidos bastantes exemplos em várias áreas curriculares (números, funções, geometria, estatística e probabilidades) e analisados com algum detalhe vários tipos de programas de computador (jogos, folhas de cálculo, linguagem LOGO, programas de geometria dinâmica). É certamente uma obra de muito interesse para qualquer professor de Matemática pela ampla perspectiva que oferece.

Ponte, J. P. (coord.), Brunheiro, L., Abrantes, P. e Bastos, R. (1998). *Projectos Educativos: Matemática - ensino secundário*. Lisboa: ME –DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o programa de Matemática A, pelo que é de consulta indispensável.

Sebastião e Silva, J. (1975-78). *Compêndio de Matemática* (5 vols). Lisboa: MEC - GEP.

Os Compêndios de Matemática de Sebastião e Silva são referências obrigatórias e constituem um bom recurso para estudar qualquer dos assuntos que são abordados no ensino secundário.

Sebastião e Silva, J. (1975-77). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (3 vols). Lisboa: MEC - GEP.

Estes livros são o ponto de referência de muitos aspectos deste programa e constituem material base indispensável para o trabalho dos professores. As "Normas Gerais" contidas no 1º volume do Guia devem ser objecto de reflexão por parte dos professores. Na primeira dessas Normas pode ler-se: "A modernização do ensino da Matemática terá de ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino. O professor deve abandonar, tanto quanto possível, o método expositivo tradicional, em que o papel dos estudantes é quase cem por cento passivo, e procurar, pelo contrário, seguir o método activo, estabelecendo diálogo com os estudantes e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta".

Stewart, Ian (1996). *Os Problemas da Matemática*. Ciência Aberta, Vol. 72, 2ª ed. Lisboa: Gradiva

O que é a Matemática? Segundo Ian Stewart a Matemática é sobre ideias não sobre símbolos e contas que são apenas ferramentas do ofício. O objectivo da matemática é perceber como diferentes ideias se relacionam entre si, pondo de lado o acessório e penetrando no âmago do problema. A Matemática não se preocupa apenas com a obtenção da resposta certa, mas sobretudo com o perceber de como uma resposta é de todo possível e porque tem determinada forma. Ainda segundo Ian Stewart há, pelo menos, cinco fontes distintas de ideias matemáticas: número, ordenação, forma, movimento e acaso. Os problemas são a força motriz da Matemática, sendo os exemplos outra fonte importante de inspiração da Matemática, conforme assinala o mesmo autor.

Struik, D. (s.d.). *História Concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

Este livro é uma referência clássica na História da Matemática, recomendando-se a segunda edição por conter um anexo relativo à História da Matemática em Portugal.

Teixeira, P. (coord.), Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C. e Nápoles, S. (1997). *Funções: Matemática - 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME - DES.

Teixeira, P. (coord.), Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C. e Nápoles, S. (1998). *Funções: Matemática - 11º ano de escolaridade*. Lisboa: ME - DES.

Teixeira, P. (coord.), Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C. e Nápoles, S. (1999). *Funções: Matemática - 12º ano de escolaridade*. Lisboa: ME - DES.

Estas três brochuras, editadas pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o programa de Matemática A, pelo que são de consulta indispensável.

Valadares, J.; Graça, M. (1998). *Avaliando ... para melhorar a aprendizagem*. Lisboa: Plátano.

Este livro, de muito interesse para qualquer professor de Matemática, analisa diversos aspectos teóricos e práticos da avaliação, sem esquecer uma perspectiva histórica. Contém numerosos exemplos de construção de variados tipos de itens de avaliação (e não só para a Matemática). Analisa com bastante pormenor as diferentes fases do processo de avaliação e as características fundamentais dos instrumentos de avaliação (como a validade e a fidelidade).

Veloso, Eduardo (1998). *Geometria - Temas actuais - Materiais para professores*. Col. "Desenvolvimento curricular no Ensino Secundário", vol. 11. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional

Este texto é uma ferramenta indispensável para qualquer pessoa que queira ensinar seriamente Geometria em Portugal. É uma obra que cobre inúmeros temas de Geometria elementar (e menos elementar) e contém um manancial de sugestões de trabalho para abordar os diferentes aspectos da Geometria. São de salientar os muitos exemplos de História da Matemática que ajudam a perceber a importância que a Geometria desempenhou na evolução da Matemática, ao mesmo tempo que fornecem excelentes exemplos para uso na sala de aula ou como proposta de trabalho para clubes de matemática ou ainda para estudantes mais interessados. É altamente recomendável a leitura do capítulo I que foca a evolução do ensino da geometria em Portugal e no resto do mundo e ajuda a perceber a origem das dificuldades actuais com o ensino da Geometria. A tecnologia é usada de forma "natural" para "resolver - ou suplementar a resolução - de problemas, proceder a investigações, verificar conjecturas, etc."

Vieira, A.; Veloso, E.; Lagarto, M. J. (org.).(1997). *Relevância da História no Ensino da Matemática*. História da Matemática - Cadernos do GTHEM – 1 APM. Lisboa: APM.

Este livro contém a tradução de três textos essenciais para quem queira reflectir nas vantagens do uso da História da Matemática na sala de aula: "Porquê estudar História da Matemática" de Dirk Struik, "A utilização da História em Educação Matemática" de John Fauvel e "Quer dar significado ao que ensina? Tente a História da Matemática" de Frank Swetz.

## CD-ROM

Fiolhais, C; Paiva, J.(coord.). (1998). *CD-ROM — Omniciência 98* Coimbra: SoftCiências.

Este CD contém dois programas de Matemática (relacionados com trigonometria e fractais), vários programas de Física com interesse para a Matemática (como o programa Kepler que simula o movimento de estrelas e planetas) e vários textos relacionados com a História da Matemática.

Teodoro, V. et al. CD-ROM — *Software Educativo para Física e Matemática*. Lisboa: DEP-GEF/ME.

Este CD contém 10 programas para ambiente "Windows", quase todos com muita relevância para o ensino da matemática no secundário. Destacamos um programa de Estatística, um de Geometria Descritiva (o GD) que, com uma linguagem simples, permite construir sólidos e rodá-los no espaço, o programa Thales e vários programas com interesse para o estudo das funções (envolvendo situações de modelação com funções).

## Páginas na INTERNET

Associação de Professores de Matemática

<http://www.apm.pt/>

Esta página contém a indicação dos projectos que a APM desenvolve e ligações para outras páginas de interesse.

Departamento do Ensino Secundário - Matemática no Secundário

<http://www.dgidc.me.pt/mat-no-sec>

O Departamento do Ensino Secundário do Ministério da Educação ao criar este espaço, pretende dar uma ajuda a todos os professores na recolha de informações úteis à sua prática pedagógica, contribuindo para a sua auto-formação e actualização. Nesta página poderá encontrar os Programas de Matemática do Ensino Secundário, as Brochuras de apoio à concretização das orientações curriculares, o InforMat, boletim de informação, divulgação e debate do ensino da Matemática, apresentação de actividades a desenvolver na sala de aula e de actividades interactivas prontas a serem utilizadas, os endereços de páginas da Internet com informações úteis sobre a Matemática e a Educação Matemática e destaques com notícias e informações úteis.

Miguel de Guzmán Ozámiz

<http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/guzman.htm>

Esta página é um manancial inesgotável de informação relacionada com a Matemática o seu ensino e a sua história. Salientamos o curso "Laboratório de Matemática", as actividades de Geometria com o DERIVE e os textos de divulgação da Matemática.

Mocho e Mocho Sábio - Centro de Competência Nónio século XXI "Softciências"

<http://www.mocho.pt>

Esta página contém um índice de páginas sobre Matemática em língua portuguesa; o Mocho Sábio contém páginas especialmente recomendadas pela sua qualidade científica e pedagógica.

*Modellus web page* - Vítor Teodoro (SCT da Educação e da Formação, FCT, UNL)

<http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/>

Esta página contém a última versão do programa Modellus para transferência gratuita. Contém ainda manuais e ficheiros de actividades que fazem com que este programa seja incontornável no ensino da matemática do secundário.

Projecto ALEA -Instituto Nacional de Estatística e Escola Secundária Tomaz Pelayo

<http://alea-estp.ine.pt/>

Esta página contém documentos destinados a apoiar o ensino da Estatística a nível do ensino secundário. Além de uma série de páginas com esclarecimentos sobre temas científicos, tem páginas com temas de actualidade relacionados com a Estatística, jogos didácticos, um forum de discussão e uma Galeria Virtual com trabalhos de escolas.

Sociedade Portuguesa de Matemática

<http://www.spm.pt/>

Esta página contém a indicação dos projectos que a SPM desenvolve e ligações para outras páginas de interesse.