Uma Tarefa de investigação para MATB:

M
O
L
É
C
U
L
A
S

De

A r q u i m e d e s

Índice

Introdução

Preocupadas na organização de uma sequência de trabalho de formação de professores sobre o programa de MATB ao lermos nesse programa que:

"Entende-se aqui que cada competência implica um corpo coerente de conhecimentos, atitudes ou capacidades (e habilidades na escolha e depois no manejo das ferramentas, quaisquer que elas sejam), que só os resultados operados na acção autónoma dos estudantes pode permitir esperar que tenham sido desenvolvidas para ser úteis na vida." Pág 7

Procurámos propor aos nossos colegas tarefas que, mesmo para eles próprios, constituíssem desafios com esse tal espírito preconizado, pelo documento em causa, desenvolver nos estudantes.
Acresce que esse programa, mais à frente, prescreve:
"Estudo das pavimentações regulares" pág20 e ainda:

"Estes tópicos devem ser trabalhados recorrendo à manipulação de figuras geométricas. A análise de frisos e pavimentações ... .permite explorar as transformações geométricas ...".

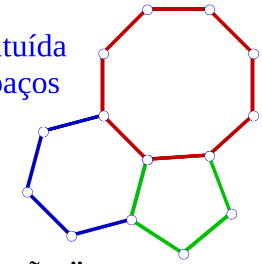
Ora havia que, servindo-nos das ideias anteriores como mote, encontrar uma tarefa a propor aos colegas que fosse suficientemente rica em conteúdos matemáticos a explorar, que fomentasse atitudes e capacidades e tornasse consistentes variadas competências matemáticas de modo integrado, quer pelo processo e recursos de ataque quer pelas inúmeras conexões oportunamente solicitadas.

A tarefa

Dado que se tratava do tema Geometria e feitas diversas consultas, encontrámos muita fundamentação para optarmos por uma tarefa investigação com formulação muito aberta e desafiadora. Essa tarefa é a seguinte:

Uma "Molécula de Arquimedes" é uma figura plana constituída por polígonos regulares à volta de um vértice sem espaços intermédios nem sobreposições.

Descubra essas moléculas!



Foi nossa intenção não haver um título tal como "pavimentações" ou outro que lembrasse de imediato qual a matemática a aplicar.
Também foi nossa intenção, deixar antever alguma ligação à história, pelo nome de Arquimedes.

A actividade

Organizamos e pusemos à disposição dos professores materiais sobre os quais eles próprios decidiriam a utilidade: polidrons, polígonos em cartão com elásticos para os unir, compasso e outro material de desenho, computador com programas de geometria dinâmica e a sempre presente calculadora gráfica.

Feita a proposta, os colegas partiram na sua descoberta sem mais nenhuma orientação.
Tal como previamos a utilização dos materiais tornou-se necessária embora o papel e lápis e, de seguida, o material de desenho, tenha sido o inicialmente utilizado. Os materiais manipulativos foram úteis, mas depressa, se tornaram insuficientes. Foi então que avançaram com o computador para experimentar fazer mais moléculas (construção de figuras geométricas) e a calculadora para prever (algebricamente) novas moléculas. Assim a conexão geometria/álgebra/aritmética/lógica tomava corpo sem ter sido anunciada!

Passado algum tempo resolvemos propor que fizessem um ponto de situação pois nesse momento, a nossa observação do trabalho dos diferentes grupos nos revelava já terem sido encontrados sub-problemas que tínhamos, nós próprias, encontrado e previsto. Organizamos esses sub-problemas e interrogações no seguinte roteiro que pusemos à discussão como elemento orientador do trabalho já feito e que convinha partilhar.

Tópicos para repensar e orientar a investigação:

I- Arranje polígonos regulares diferentes mas de lado igual, de cartolina ou de plástico.

Comece por agrupar três polígonos .... e depois de algumas experiências responda:

Será que a figura do enunciado é uma "molécula de Arquimedes"?

Prove a sua afirmação.

II -Pense bem no enunciado e transforme-o noutro enunciado

Fixe um ponto e chame-lhe vértice. O que significa fazer a partir desse vértice uma figura com polígonos regulares?

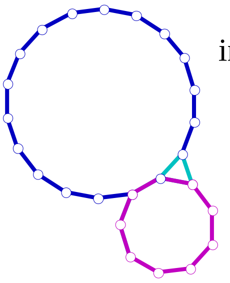
E sem espaços intermédios ? E sem sobreposição ?

Escreva um novo enunciado equivalente !

Será que vai precisar de determinar ângulos internos de polígonos regulares?

III -Trate exaustivamente o tipo de moléculas de três polígonos e estabeleça uma relação entre o número de lados dos distintos polígonos que pode usar para as montar.

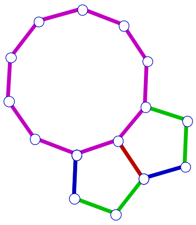
Exemplo:



Podem ser representadas por um nome constituído por números inteiros

a da direita por 5 : 5 : 10

a da esquerda por 3 : 9 : 18



Como encontrar todas as moléculas de três elementos?

IV- Trate agora de encontrar pelo menos algumas "moléculas " de 4 elementos.

Exemplo: A que tem o nome 3: 6 : 3 : 6

Ou a que tem o nome 3 : 4 : 4 : 6 que é isômera de 3 : 4 : 6 : 4. mas não da anterior

Diz-se que duas moléculas são isómeras se têm as mesmas características .

V- Será que existe a "molécula" de nome 3 : 4 : 5 : 3?

Será que existe a "molécula" de nome 4 : 5 : 5 : 4 ? Justifique!

De um modo geral todos tocaram todos os tópicos.

Reflectiu-se sobre o que se apresenta compilado como se segue:

Tópicos de um possível relatório da investigação:

Arranjei polígonos regulares diferentes mas de lado igual aos de plástico polidron.

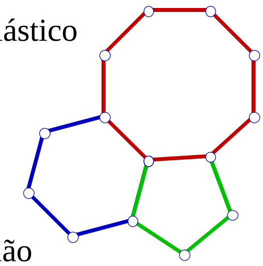


Figura 1

Fixei que ia começar com três peças.

Comecei por tentar unir três triângulos e verifiquei que "não chegavam" para ficar sem espaços intermédios e perguntei-me porquê .

De facto três triângulos unidos por um vértice, só preenchem uma parte do plano, correspondente a um ângulo de 180º. Como temos 60º para cada ângulo interno de cada triângulo, isto é, três triângulos num vértice, o ângulo preenchido nesse vértice é de 3x60º<360º.

Experimentar, manipular ludicamente gera atitude de pesquisa e conduz à necessidade da confirmação rumo à necessidade da prova .

Três quadrados unidos por um vértice, também não resultou dado que 3x90º <360º

E dois quadrados e um triângulo também não pois 2x90º+60<360º. E pior foi quando tentei unir dois triângulos e um quadrado, como era de esperar!

Tentei três pentágonos e verifiquei que não fechava, ficava "buraco" e para comprovar tinha que saber o ângulo interno do pentágono mas deixei esse problema para mais tarde .

Depois pensei que o "buraco" era pequeno e pensei substituir um dos pentágonos por um hexágono e pareceu-me que tinha finalmente "uma molécula de Arquimedes". Será?

Mas reparando melhor fiquei na dúvida pois para "unir", sem fazer "buraco", tinha de forçar. Seria verdade ou só defeito do material?

Então, fui mesmo determinar o ângulo interno do pentágono e do hexágono.

Ângulo interno de um pentágono regular.

Sub-problema: Quanto mede a amplitude de um ângulo interno de um pentágono?

Desenhei um pentágono com o GSP.

Comecei com uma circunferência de centro O e um dos seus pontos A que tomei para vértice do pentágono e depois com centro O e amplitude 360/5 executei a rotação de A, obtendo o vértice B e repeti o processo até ter todos os vértices do pentágono.

Desenhei-o e tracei os raios para os vértices.

O pentágono ficou dividido em triângulos isósceles em que um dos ângulos é o ângulo ao centro de 72º e os ângulos da base são iguais a metade do ângulo interno do pentágono.

Portanto a amplitude do ângulo interno mede 180-360/5 = 108 graus

Medi, confirmando, esse valor com o GSP!

Confirmar resultados com base em raciocínios lógicos é uma importante competência matemática na resolução de problemas.

E do hexágono? Logo percebi que bastava substituir o número 5

por 6 e assim obtinha 180-360/6=180-60=120
em graus.

Terei uma "molécula de Arquimedes" de três peças?

Com dois pentágonos e um hexágono fica no vértice um ângulo de 2x108+120=216+120=336 em
graus, ainda não consegui a "molécula"!

Será que substituindo os pentágonos por hexágonos resulta molécula? Logo se vê que resulta !

Mas as peças são todas iguais !

Resolvi pensar ao de modo inverso: dois pentágonos perfazem 216º e de 360º sobram 144º haverá algum polígono regular cujo ângulo interno é de 144º?

Sub-problemas:
Quais serão as moléculas de elementos todos iguais?
O que são pavimentações regulares ?

Recorri à fórmula que obtive para o pentágono e hexágono e escrevi 180-360/n =144 e resolvi a equação e encontrei para o número de lados n=10.
Tenho finalmente outra "molécula de Arquimedes" formada por dois pentágonos e um heptágono!

Será que a figura do enunciado é uma "molécula de Arquimedes"?

Uma generalização e um exercício de álgebra.

Parece mesmo!
Mas não é.

Como é constituída por um pentágono, um hexágono e um octógono temos 108+120+ 135 = 363>360 em graus,
logo existe uma sobreposição !

Uma prova analítica rectifica dados visuais

É um alerta para não me fiar só no que vejo, sem o apoio do raciocínio lógico !

II- Repensei o problema e tentei enunciar o problema de outro modo.

Fixei um ponto e chamei -lhe vértice O. A partir desse vértice desenho consecutivamente ângulos de polígonos regulares com um lado adjacente para ser “sem buraco”. O segundo lado do último ângulo a ser desenhado terá de coincidir com o outro lado do primeiro ângulo desenhado para ser “sem sobreposição”. Isto é se a , b e c forem os ângulos colocados em torno do vértice a+b+c não pode ser <360 para não haver “buraco” e não pode ser a+b+c >360 para não haver “sobreposição”.

É importante “viver” as fases da resolução de problemas .

Outro conteúdo da álgebra: equacionar problemas

Novo enunciado

Procure os valores dos ângulos internos de polígonos regulares que somados perfazem exactamente 360º.

Subproblema no âmbito da álgebra/geometria/aritmética.

Quais são esses ângulos?
Os ângulos internos dos polígonos regulares, em graus, são dados por 180-360/n, em que n é o número de lados

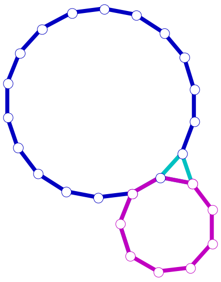
Tabelando

Nº de lados	3	4	5	6	7	8	9	10		
Ângulo	60	90	108	120	128,57	135	140	144		

III – “Moléculas de três polígonos”

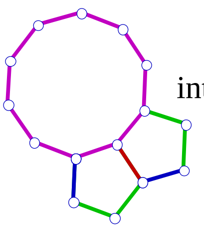
Suponhamos que n, p e q é o número de lados de cada um dos distintos polígonos que podemos usar para montar uma molécula de três peças.

Se n=3, p=9 e q=18 obtemos



Pode ser representada por um nome constituído por números inteiros: **3 : 9 : 18**

Se n=5, p=5 e q =10 obtemos



Pode ser representada por um nome constituído por números inteiros: **5 : 5 : 10**

Como encontrar <u>todas</u> as moléculas de três elementos?

Quer saber a Atitude de pesquisa: a necessidade da matemática para satisfazer

Se supusermos que $n \le p \le q$

A soma dos ângulos internos respectivos é 180 –360/n +180-360/p +180-360/q =360

Donde

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$$

Comecemos por procurar moléculas com um triângulo, isto é, n=3 então

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

como p e q são números positivos e qualquer deles superior a 6, pois

quer $\frac{1}{p}$ quer $\frac{1}{q}$ são ambos inferiores a $\frac{1}{6}$

como a sua soma é $\frac{1}{6}$ então o menor dos valores de $\frac{1}{q}$ é inferior a metade de $\frac{1}{6}$ ou seja $\frac{1}{12}$ donde $q \ge 12$

e o outro $\frac{1}{p}$ é maior que $\frac{1}{12}$ donde p é menor ou igual 12.

Resumindo p está entre 7 e 12 e q é dado por

$$q=\frac{6p}{p-6}$$

P	7	8	9	10	11	12
$q=\frac{6p}{p-6}$	42	24	18	15	13,2	12

As figuras

Para desenhar as figuras usei o GSP e para a experimentação usei polígonos de polidron ou polígonos de cartão .

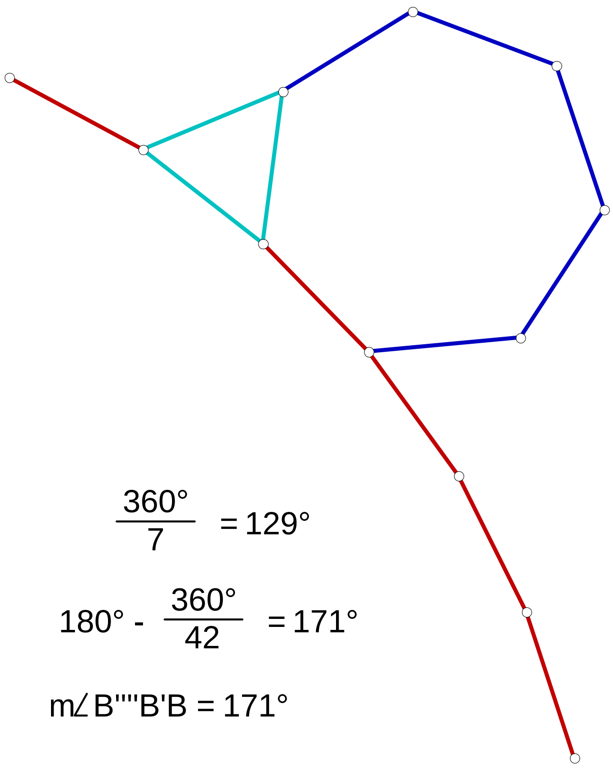
Construir figuras geométricas, usando diferentes propriedades dessas figuras e conceitos de transformações geométricas, é uma boa forma de fazer revisões ou remediar falta de pré-requesitos dos alunos que vêm do básico.

Modo de proceder com o GSP

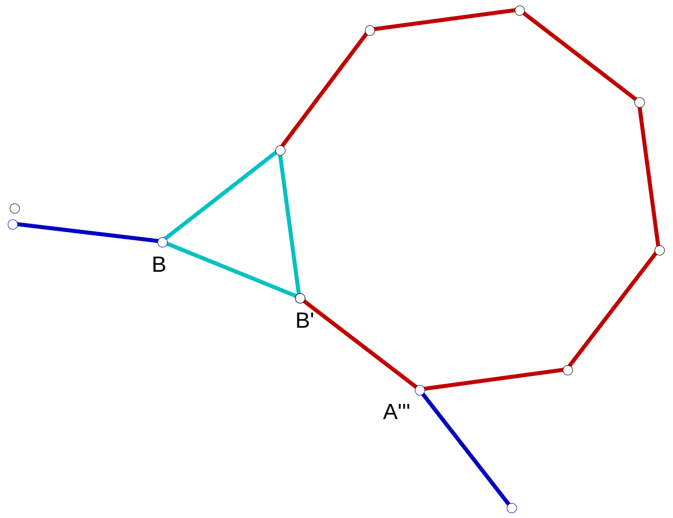
Comecei por desenhar um segmento que é o lado do triângulo.
Selecionei um dos extremos para centro de rotação com duplo clic.
Com **Transform** efectuei a rotação de 60º do segmento e do outro vértice . Obtenho um segundo lado do triângulo e o terceiro vértice .
Como quero construir o polígono de 7 lados vou calcular o a amplitude do ângulo interno .
Com **Mesure** abro a calculadora do GSP e digito sucessivamente 180 Units (dégres) –360 units (dégres)/7 OK.
Essa é a medida da amplitude do ângulo interno do heptágono em graus.
Escolho um vértice do triângulo para centro de rotação (duplo clic) e selecciono o lado que vou rodar; em **Transform** escolho **Rotate**. Abre-se uma caixa onde está assinalado o centro de rotação e me pede o ângulo que vou buscar selecionando a amplitude calculada . Esse cálculo aparece na referida caixa como ângulo de rotação.
Faço OK e logo me aparece o segundo lado do heptágono. Mudo-lhe a cor e procedo do mesmo modo para obter os restantes lados por rotação .
Para construir o polígono de 42 lados segui à risca o mesmo esquema. Verifiquei ainda que o valor da medida da amplitude do ângulo interno dado pela calculadora a partir da fórmula era o mesmo que obtenho medindo com a calculadora o ângulo forma pelo lado do heptágono e do triângulo, ambos lados do polígono de 42 lados.

Não o construí completamente por causa de limitações de papel.
Segui esquema idêntico para a construção das outras moléculas

Molécula 3 . 7. 42



Molécula 3.8.24



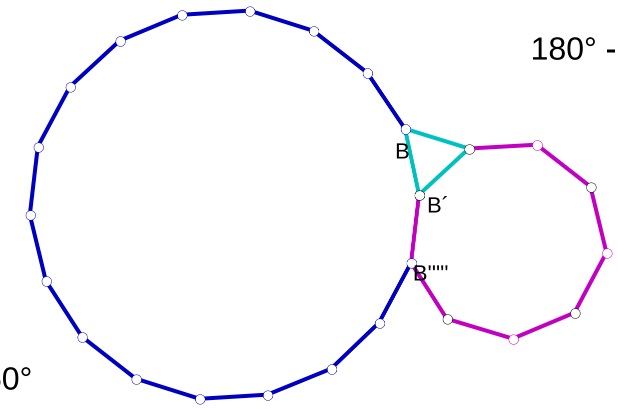
$$180° - \frac{360°}{8} = 135°$$

$m\angle A'''B'B = 165°$

$$180° - \frac{360°}{24} = 165°$$

Molécula 3.9.18.

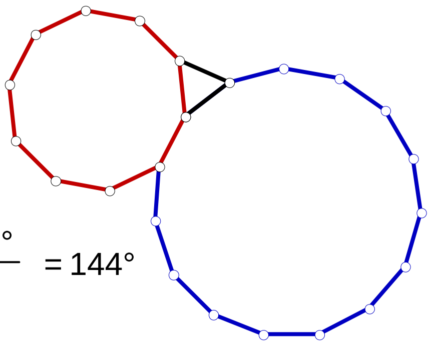
$$180° - \frac{360°}{9} = 140°$$



$m\angle B''''B'B = 160°$

$$\frac{360°}{18} = 160°$$

Molécula 3.10.15

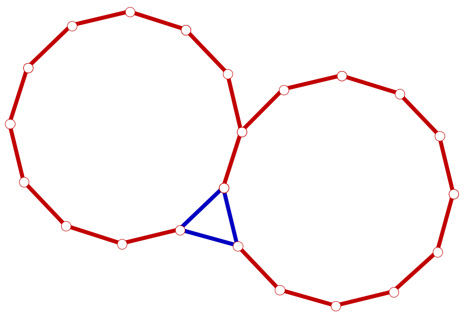


$$180° - \frac{360°}{10} = 144°$$

$$180° - \frac{360°}{15} = 156°$$

E surgem exercícios de repetição contextualizados numa necessidade de "mais saber".

Molécula 3.12.12



Tenho cinco moléculas sendo um dos elementos um triângulo!

MAIS MOLÉCULAS.....prova da sua existência!

Se em vez de começar com um triângulo começar com um quadrado, e ainda só três elementos, tínhamos n=4, como

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$$

comecemos por procurar moléculas com um quadrado, isto é, n=4 então

A necessidade da prova para lá dos dados sensoriais leva à demonstração matemática

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

como p e q são números positivos e qualquer deles superior a 4,

pois quer $\frac{1}{p}$ quer $\frac{1}{q}$ são ambos inferiores a $\frac{1}{4}$.

como a sua soma é $\frac{1}{4}$ então o menor dos valores de $\frac{1}{q}$ é inferior a metade de

$\frac{1}{4}$ ou seja $\frac{1}{8}$ donde q $\geq$ 8.

e o outro $\frac{1}{p}$ é maior que $\frac{1}{8}$ donde p é menor ou igual 8.
Resumindo p está entre 4 e 8 e q é dado por

$$q = \frac{4p}{p-4}$$

P	5	6	7	8
$q = \frac{4p}{p-4}$	20	12	28/3 não é inteiro	8

Quem são elas? São três

4.5.20 4.6.12 4.8.8

E fazia de igual modo para n =5
e obtinha 5.5.10

e depois finalmente para n=6 obtendo 6.6.6 !

Até agora temos dez moléculas com três elementos!

Executar demonstrações "sentindo" a sua utilidade.

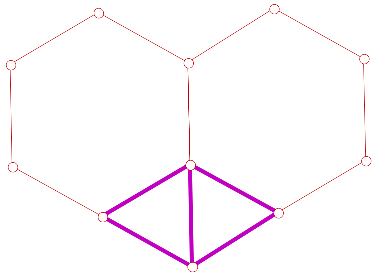
PROVA DA NÃO EXISTÊNCIA de mais...com três elementos!

O número n (o menor número lados dos polígonos que constituem a molécula) não pode ultrapassar 6 pois se não teríamos n$\geq$7 , p$\geq$7 e q$\geq$7 , o que significava que teríamos de reunir três ângulos iguais ou maiores que 180-360/7 graus!
E como 3x (180-360/7) >360 , em graus, teríamos sobreposições!

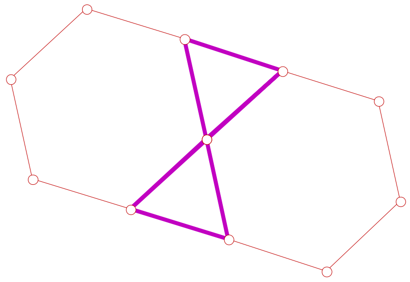
Ver programa para TI 83 (Anexo II)

IV- Tratei agora de encontrar pelo menos algumas "moléculas " de 4 elementos.
Exemplo: A que tem o nome 3: 6 : 3 : 6

molécula 3.3.6.6



molécula 3.6.3.6

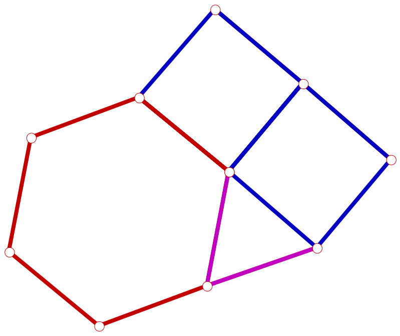


Encontrei outra molécula cujo nome tem os mesmos números mas são diferentes!
3.6.3.6 e 3.3.6.6

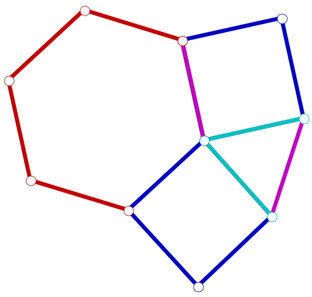
vi num livro que se dizem isómeras

Outro par é a que tem o nome 3 : 4 : 4 : 6 que é isómera da 3 : 4 : 6 : 4.
(Ver anexo em Excel Todas as moléculas de 4 elementos)

molécula 3.4.4.6



molécula 3.4.6.4



Diz-se que duas moléculas são isómeras se têm as mesmas características, são constituídas por elementos iguais mas a sua disposição é diferente.
(sei que não referi todas as possíveis moléculas).

Formular estratégias para controlar resultados é outra competência matemática da resolução de problemas

Ainda me perguntei:

V- Será que existe a "molécula" de nome 3 : 4 : 5 : 3?

Ora a cada número do nome da molécula corresponde um ângulo interno de um polígono regular
(aqui há uma função)

60º+90º+72º+60º=282º como é inferior a 360º podemos afirmar que não existe tal molécula.

Será que existe a "molécula" de nome 4 :5 : 5 : 4 ? Como tem a certeza?
Raciocinando do mesmo modo temos :

90º+108º+108º +90º= 396º como é superior a 360º também não existe tal molécula!

Poderia investigar quais as aplicações destas moléculas ou como e onde aparecem na natureza.
Por exemplo nos ladrilhos do chão ou paredes, nas moléculas da química....

Já foi feito muito trabalho mas ficamos com a ideia que ainda se pode explorar muito mais!

Mais alguns **problemas...**

Como cobrir todo o plano preenchendo-o com moléculas iguais cada uma das moléculas descobertas?
Teremos assim as pavimentações semi-regulares.
Porquê chamar-lhes moléculas de Arquimedes ?Quem foi Arquimedes?

CONCLUINDO....

Depois destas considerações e muitas outras não explicitadas, não é difícil concluir que se trata duma boa tarefa a ser explorada em MATB. Totalmente adequada pelos pré-requisitos que exige, pelas conexões que estabelece e por todas as competências que confere ou exercita a quem com ela desenvolve actividade matemática. Mais! Em cada momento dessa actividade surge produto e desafio!

Boa, desafiante, para propor a alunos de 10ºano nomeadamente nas aulas de turnos. Resta-nos acrescentar que vários professores a estudaram e houve quem fizesse um programa na calculadora (ver Anexo Programa para TI 83) para com ele obter todos os "nomes" de possíveis moléculas arquimedianas. Houve também quem a propusesse aos seus alunos, neste mesmo ano lectivo, obtendo sucesso nos seus propósitos.

Como recursos bibliográficos recomendamos

"Geometria" – temas actuais, materiais para professores, de EDUARDO VELOSO , editado pelo IIE.

Aconselhamos a consulta dos recursos que essa obra cita, quer bibliográficos quer informáticos.

No Jornal de Matemática Elementar nº201 existe um artigo "Mosaicos do plano" de Sérgio Alves de IME-USP e Mário Dalcin Montevidéu-Uruguai.

Outro recurso que permitirá muita manipulação com materiais de grande nobreza e muitas mais conexões, nomeadamente à geometria do espaço, aos sólidos arquimedianos, é a visita e estudo da Exposição do Atractor : SIMETRIA –JOGOS DE ESPELHOS.

ANEXO I

Programa para TI 83 para obter todas as moléculas de 3, 4 e 5 elementos e o seu número total!

Foi elaborado por

Maria Luisa de Sousa Vale

no âmbito de uma oficina de formação em 2002

Para obter as de 5 elementos

```
Program: ARQUIMEDES 5
:Input "N=" , N
:0->K
:For (A, 3, N)
:For (B, A, N)
:For (C, B, N)
:For (D, C, N)
:For (E, D, N)
```

$$: If\ \frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}+\frac{1}{E}=\frac{3}{2}$$

(para obter as de 4 elementos suprime-se todos os E e um dos :end e a soma é =1

para obter as moléculas de 3 elementos suprime-se o D e

o E e dois :end sendo a soma é 1/2)

```
:then
:Disp{A,B,C,D,E}
:K+1->K
:End
:End
:End
:End
:End
:End:
:Disp K
```

ANEXO II

Estudo em Excel da existência de moléculas de 3 e 4 elementos

Moléculas vistas pelo Excell

Nota : Desde que a soma de dois dos ângulos igualem ou sejam inferior a 180
não é possível construir-se moléculas de três elementos
Concluindo as moléculas de três elementos são :
3.742 3.8.24 3.9.18 3.10.15 3.12.12 4.5.20 4.6.12 4.8.8 5.10.5 6.6.6
ao todo dez!

nº de lados	ângulo interno	triângulo	2ºelement	3ºelement	nºde lados	moléculas de três elementos sendo pelo menos um deles triângulo		quadrado
3	60	60	60	240	-6			90
4	90	60	90	210	-12			90
5	108	60	108	192	-30			90
6	120	60	120	180	#DIV/0!			90
7	128,5714286	60	128,5714	171,4285	42	3.7.42		90
8	135	60	135	165	24	3.8.24		90
9	140	60	140	160	18	3.9.18		90
10	144	60	144	156	15	3.10.15		90
11	147,2727273	60	147,2727	152,7272	13,2			90
12	150	60	150	150	12	3.12.12		90
13	152,3076923	60	152,3076	147,6923	11,14285			90
14	154,2857143	60	154,2857	145,7142	10,5			90
15	156	60	156	144	10	3.15.10	repete	90
16	157,5	60	157,5	142,5	9,6			90
17	158,8235294	60	158,8235	141,1764	9,272727			90
18	160	60	160	140	9	3.18.9	repete	90
19	161,0526316	60	161,0526	138,9473	8,769230			90
20	162	60	162	138	8,571428			90
21	162,8571429	60	162,8571	137,1428	8,4			90
22	163,6363636	60	163,6363	136,3636	8,25			
23	164,3478261	60	164,3478	135,6521	8,117647			
24	165	60	165	135	8			
25	165,6	60	165,6	134,4	7,894736			

26	166,1538462	60	166,1538	133,8461	7,8		
27	166,6666667	60	166,6666	133,3333	7,714285		
28	167,1428571	60	167,1428	132,8571	7,636363		
29	167,5862069	60	167,5862	132,4137	7,565217		
30	168	60	168	132	7,5		
31	168,3870968	60	168,3870	131,6129	7,44		
32	168,75	60	168,75	131,25	7,384615		
33	169,0909091	60	169,0909	130,9090	7,333333		
34	169,4117647	60	169,4117	130,5882	7,285714		
35	169,7142857	60	169,7142	130,2857	7,241379		
36	170	60	170	130	7,2		
37	170,2702703	60	170,2702	129,7297	7,161290		
38	170,5263158	60	170,5263	129,4736	7,125		
39	170,7692308	60	170,7692	129,2307	7,090909		
40	171	60	171	129	7,058823		
41	171,2195122	60	171,2195	128,7804	7,028571		
42	171,4285714	60	171,4285	128,5714	7	3.42.7	repete
43	171,627907	60	171,6279	128,3720	6,972972		

Nota: Desde que a soma de três dos ângulos iguale ou seja inferior a 180 não é possível construir-se moléculas de 4 elementos. As Moléculas com 4 células constituem quatro grupos de isómeras :
grupo A : 3.6.3.6 e 3.3.6.6 ;
grupo B : 3.4.4.6 e 3.4.6.4 ;
grupo C : 3.4.3.12 e 3.3.4.12 ;
grupo D 4.4.4.4.

1ºelemento	2º elemento	3ºelemento	4º elemento	nºde lados		
60	90	60	150	12	3.4.3.12	
60	90	90	120	6	3.4.4.6	
60	90	108	102	4,615384		
60	90	120	90	4	3.4.6.4	
60	90	128,5714286	81,42857	3,652173		
60	90	135	75	3,428571		
60	90	140	70	3,272727		
60	90	144	66	3,157894		
60	90	147,2727273	62,72727	3,069767		
60	90	150	60	3	3.4.12.3	
60	90	152,3076923	57,69230	2,943396		
60	108	60	132	7,5		
60	108	90	102	4,615384		
60	108	108	84	3,75		
60	108	120	72	3,333333		
60	108	128,5714286	63,42857	3,088235		
60	120	60	120	6	3.6.3.6	
60	120	90	90	4	3.6.4.4	repete
60	120	108	72	3,333333		
60	120	120	60	3	3.6.6.3	
60	120	128,5714286	51,42857	2,8		
60	135	60	105	4,8		
60	135	90	75	3,428571		
60	135	108	57	2,926829		
60	128,5714	60	111,4286	5,250002		
60	128,5714	90	81,4286	3,652174		
60	128,5714	108	63,4286	3,088236		
60	128,5714	120	51,4286	2,800000		
60	140	60	100	4,5		

60	140	90	70	3,272727		
60	140	108	52	2,8125		
90	60	60	150	12	4.3.3.12	repete
90	60	90	120	6		
90	60	108	102	4,615384		
90	60	120	90	4	4.3.6.4	repete
90	60	128,5714286	81,42857	3,652173		
90	60	135	75	3,428571		
90	60	140	70	3,272727		
90	60	144	66	3,157894		
90	60	147,2727273	62,72727	3,069767		
90	60	150	60	3	4.3.12.3	repete
90	60	152,3076923	57,69230	2,943396		
90	90	60	120	6	4.4.3.6	repete
90	90	90	90	4	4.4.4.4	
90	90	108	72	3,333333		
90	90	120	60	3	4.4.6.3	repete
90	90	128,5714286	51,42857	2,8		
90	108	60	102	4,615384		
90	108	90	72	3,333333		
90	108	108	54	2,857142		
90	120	60	90	4	4.6.3.4	repete
90	120	90	60	3	4.6.4.3	repete
90	120	108	42	2,608695		