Igualdade entre áreas e perímetros

António Pereira Rosa

Escola Secundária Maria Amália Vaz de Carvalho
Rua Rodrigo da Fonseca, 115
1099-069 Lisboa

1. Introdução

O objectivo deste trabalho é mostrar como se pode resolver a nível de 11º ano um problema interessante, proposto em [3]:

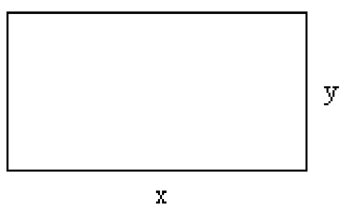
"*Determinar todos os rectângulos que verificam as seguintes propriedades:*

- *o perímetro é (numericamente, é claro) igual à área.*
- *as medidas dos lados são números naturais*."

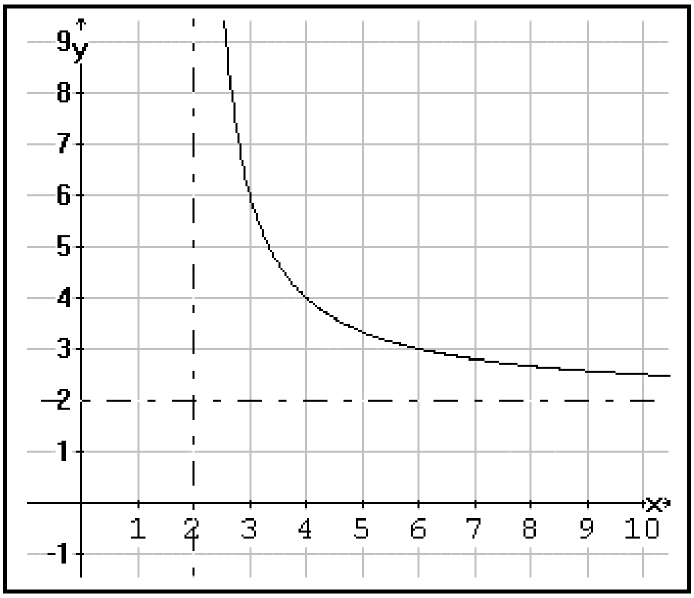
Veremos que este problema tem apenas duas soluções: o quadrado de lado 4 e o rectângulo de lados 3 e 6. A organização do trabalho é a seguinte: indico os pré-requisitos, a demonstração da propriedade referida, uma possível estratégia para a apresentação e uma proposta de trabalho de casa que consiste na resolução de um problema semelhante mas um pouco mais sofisticado: determinar todos os triângulos rectângulos de lados naturais e cuja área é igual ao perímetro. Ainda a propósito da questão dos rectângulos, procuro estabelecer uma ligação entre as disciplinas de Matemática e Introdução à Filosofia, pedindo um pequeno comentário sobre um texto conveniente. Termino referindo algumas possíveis extensões deste tema, a um nível mais avançado.

2. Resolução do problema

Considere-se um rectângulo de lados x e y.



O perímetro e a área são dados por $P = 2x + 2y$ e $A = xy$, respectivamente. Para que sejam iguais, deverá ser $xy = 2x + 2y$, ou, resolvendo em ordem a y, $y = \frac{2x}{x-2}$: se uma das dimensões do rectângulo for x, a outra deverá ser $\frac{2x}{x-2}$. É pois natural estudar a função definida por $f(x) = \frac{2x}{x-2}$, com domínio $]2, +\infty[$, já que tanto x como y devem ser positivos. O seu gráfico, já com as assíntotas marcadas, é:



Constata-se imediatamente que, para $x \geq 6$, se tem $2 < f(x) \leq 3$. Como estamos interessados apenas em soluções naturais, x só pode ser 3, 4, 5 ou 6. Destes valores, os únicos que conduzem a valores naturais para y são 3, 4 e 6, donde o resultado.

Observação

Este problema pode ser resolvido por outro processo:

$$xy = 2x + 2y \Leftrightarrow xy - 2x - 2y = 0 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 4 = 4 \Leftrightarrow (x-2)(y-2) = 4,$$

donde se conclui que os números naturais $x - 2$ e $y - 2$ devem ser divisores de 4 e portanto as soluções são (3, 6), (6, 3) e (4, 4), como anteriormente. Esta resolução, de carácter mais algébrico, é, no entanto, pouco apropriada para o actual Ensino Secundário.

3. A apresentação aos alunos

Pré-requisitos

Noções elementares de Geometria; funções racionais e seus gráficos (apenas o caso em que os termos da fracção são de grau não superior ao primeiro); propriedades simples dos radicais (para o TPC) e manipulação de expressões algébricas; conhecimentos sobre os Pitagóricos adquiridos na disciplina de Introdução à Filosofia, a nível de 10º ano.

Unidade do programa em que pode ser apresentada

Tema II do 11º ano.

Estratégia para a apresentação

a) Com alguns dias de antecedência, mandar fazer uma revisão sobre as doutrinas pitagóricas (em colaboração com o professor de Introdução à Filosofia, se possível).

b) Introduzir o problema e obter a condição $xy = 2x + 2y$ (1).

c) Sugerir aos alunos que, dada a dificuldade de lidar com uma expressão com duas variáveis, será de procurar caracterizar o lugar geométrico dos pontos do plano cujas coordenadas verificam (1).

d) Mandá-los resolver em ordem a y a expressão (1).

e) Traçar o gráfico da função definida por $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}$ (calculadora), determinar as suas assíntotas e estudá-la, dando particular atenção ao domínio a considerar (uma observação que prende a atenção dos alunos é: *Reparem que se uma das dimensões for* 1, *o perímetro será certamente diferente da área*).

f) Traçar na calculadora a recta horizontal y = 3 e, de novo a partir do gráfico, mostrar que para se obterem soluções naturais, terá de ser x igual a 3, 4, 5 ou 6.

g) Construir os rectângulos resultantes, calcular as suas áreas e perímetros e verificar que apenas em dois deles os comprimentos dos lados são números naturais.

h) Distribuir aos alunos o seguinte extracto do historiador grego Plutarco (sécs. I e II d.C.) e pedir-lhes um pequeno comentário, à luz dos resultado obtidos e tendo em conta o que aprenderam em Introdução à Filosofia.

> "Os Egípcios contam que a morte de Osíris ocorreu no décimo sétimo dia do mês, quando a Lua entra em quarto minguante. Os Pitagóricos chamam a este número o "separador" e abominam-no, já que separa os dois números 16 e 18, únicos números planos que têm o perímetro igual à área que delimitam..."

Trabalho para casa

Determine os triângulos rectângulos que verificam as seguintes propriedades: • o perímetro é igual à área. • as medidas dos lados são números naturais.

Resolução abreviada do TPC

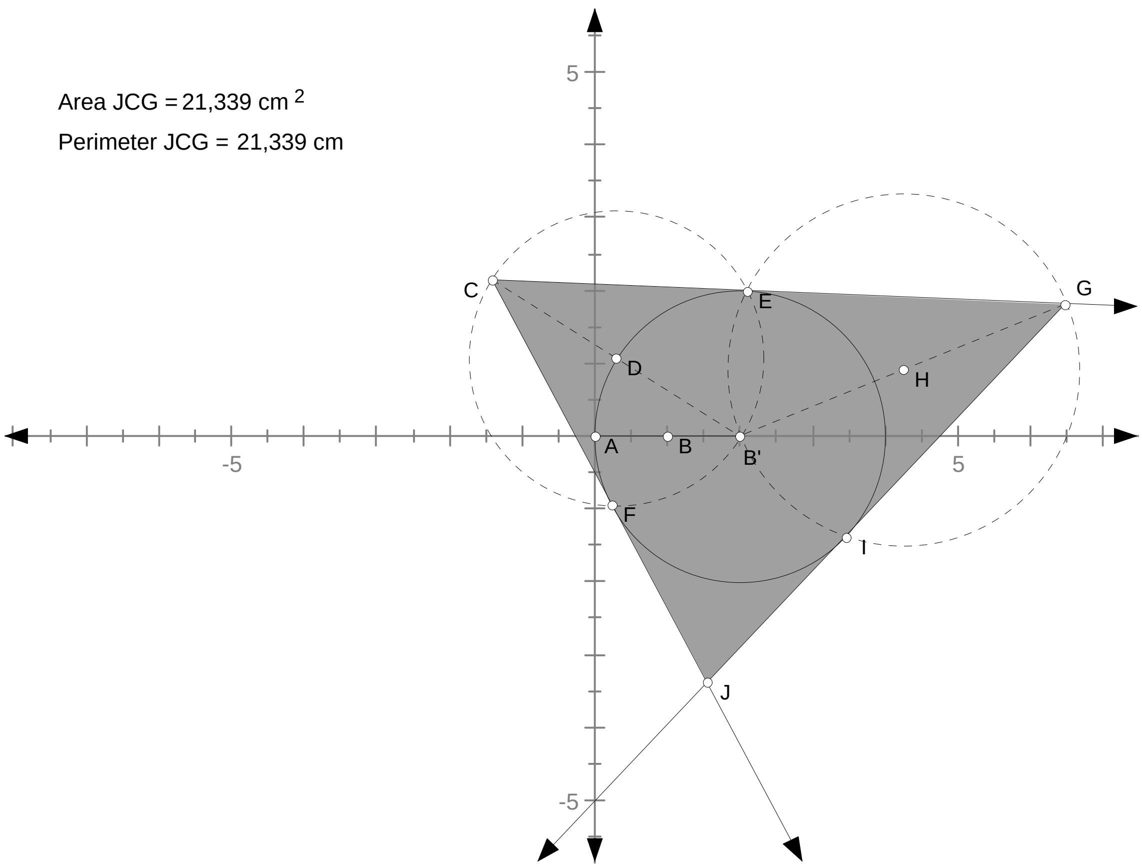
Se presentarmos por x e y as medidas dos catetos, somos conduzidos a $\frac{1}{2}xy = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$, ou, após simplificações, a $4x + 4y - xy = 8$. Resolvendo em ordem a y, basta estudar (de preferência a partir do gráfico) a função definida em $]0, 2[\cup]4, +\infty[$ por $f(x) = \frac{4x - 8}{x - 4}$ para se ver que há apenas duas soluções: o triângulo cujos catetos medem 6 e 8 e a hipotenusa 10 e o triângulo cujos catetos medem 5 e 12 e a hipotenusa 13.

4. Alguns resultados mais avançados

Uma questão que surge naturalmente é a da determinação dos triângulos não necessariamente rectângulos cuja área é igual ao perímetro. Uma condição necessária e suficiente simples é a seguinte: *A área de um triângulo é igual ao seu perímetro sse o raio da circunferência inscrita é* 2. Para ver isto, sejam a, b e c os lados do triângulo e p o seu semi-perímetro. Atendendo à fórmula de Herão, a igualdade entre área e perímetro traduz-se por

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 2p\,,$$

donde se tira que $\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = 2$; o membro esquerdo desta igualdade é precisamente o raio da círcunferência inscrita, e segue-se o resultado. Esta proposição permite traçar com facilidade triângulos cujo perímetro é igual à área, conforme mostra a figura seguinte.



Esta questão pode ser abordada a nível de 11º ano. Com efeito, a demonstração da fórmula de Herão por via trigonométrica (ver, por exemplo, [1]) está perfeitamente ao alcance dos alunos e a obtenção da fórmula do raio do círculo inscrito (ver [2]) não é mais complicada que a demostração do teorema de Varignon (*A área do paralelogramo que se obtém unindo os pontos médios dos lados de um quadrilátero é um quarto da área do quadrilátero original*), que vem na brochura de Geometria para o 10º ano ([4]) . Quanto à construção apresentada, ela baseia-se no traçado das tangentes a uma circunferência por um ponto exterior, estudada no 3º ciclo do Ensino Básico. Em todo o caso, creio que a resolução deste problema não deve ser feita numa aula, mas sim aproveitada para um trabalho para casa "mais desenvolvido" orientado pelo professor. Será sobretudo de tentar numa turma do 2º Agrupamento (Artes).

Para terminar, refira-se que o problema de determinar os triângulos cuja área é igual ao perímetro e cujas medidas dos lados são números naturais é muito mais complicado. Embora possa ser resolvido por métodos elementares, está bem ao nível de umas Olimpíadas Internacionais de Matemática. A título de curiosidade, indico na tabela abaixo as medidas dos lados das cinco soluções; para a prova, pode consultar-se [5].

Medidas dos lados dos triângulos
6, 25 e 29
7, 15 e 20
9, 10 e 17
5, 12 e 13
6, 8 e 10

As duas últimas soluções correspondem aos triângulos rectângulos deteminados anteriormente.

5. Referências

[1] Araújo, P. V. (1999) - *Curso de Geometria*, (2ª ed.), Gradiva, Lisboa.

[2] Ayres, F. (1971) - *Trigonometria*, Editora McGraw-Hill do Brasil, São Paulo.

[3] Loff, D. M. S. (1991) - *Polígonos e Pavimentações - uma abordagem elementar*, Sociedade Portuguesa de Matemática (Delegação Regional do Centro), Coimbra.

[4] Loureiro, C.; Franco de Oliveira, A.; Ralha, E.; Bastos, R. (1997) - *Geometria (10º ano de Escolaridade)*, Ministério da Educação - Departamento do Ensino Secundário, Lisboa.

[5] Shlarsky, D. O.; Chentzov, N. N.; Yaglom, I. M. (1993) - *The USSR Olympiad Problem Book*, Dover Editions, New York.

Consultei ainda os programas de Matemática para o terceiro ciclo do Ensino Básico e para o Ensino Secundário.

— — // — —