METAS CURRICULARES PARA O ENSINO SECUNDÁRIO – MATEMÁTICA A

GOVERNO DE PORTUGAL

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Caderno de Apoio

12.º ANO

António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira, Luísa Loura, Maria Clementina Timóteo

INTRODUÇÃO

Este Caderno de Apoio constitui um complemento ao documento *Metas Curriculares de Matemática do Ensino Secundário – Matemática A*. Na elaboração das Metas Curriculares utilizou-se um formato preciso e sucinto, não tendo sido incluídos exemplos ilustrativos dos descritores. Neste documento apresentam-se várias sugestões de exercícios e de problemas, comentários relativos a algumas opções tomadas no documento principal e informações complementares para os professores.

Procurou-se realçar os descritores que se relacionam com conteúdos e capacidades atualmente menos trabalhados no Ensino Secundário embora se tenham incluído também outros de modo a dar uma coerência global às abordagens propostas. Estas escolhas não significam, porém, que se considerem menos relevantes os descritores não contemplados. Longe de se tratar de uma lista de tarefas a cumprir, as atividades propostas têm um caráter indicativo, podendo os professores optar por alternativas que conduzam igualmente ao cumprimento dos objetivos específicos estabelecidos nas metas. Aos exemplos apresentados estão associados três níveis de desempenho. Os que não se encontram assinalados com asteriscos correspondem a um nível de desempenho regular, identificando-se com um ou dois asteriscos os exemplos que correspondem a níveis de desempenho progressivamente mais avançados.

Para além das sugestões de exercícios e problemas a propor aos alunos entendeu-se incluir também textos de apoio para os professores. Destinam-se a esclarecer questões de índole científica que fundamentam os conteúdos do Programa e que poderão ajudar à seleção das metodologias mais adequadas à lecionação.

12.º ANO Níveis de Desempenho

Cálculo Combinatório CC12

<table>
<tr><th>Descritor</th><th>Texto de Apoio</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>

Comentário

O reconhecimento da primeira propriedade referida neste descritor pode ser efetuado, a nível elementar, observando um diagrama de Venn. Uma demonstração mais formal pode ser obtida, por exemplo, resolvendo o exercício seguinte, em que se pretende utilizar explicitamente a definição de inclusão e as propriedades conhecidas das operações lógicas.

1. *Demonstre sucessivamente os resultados expressos nas seguintes alíneas:
   1.1 Sendo p e q proposições, $p \Rightarrow q$ é equivalente a $(p \wedge q) \Leftrightarrow p$ e também a $(p \vee q) \Leftrightarrow q$.
   1.2 Dados conjuntos A e B, $A \subset B$ se e somente se $A \cap B = A$ e se e somente se $A \cup B = B$.
   1.3 O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

</td></tr>
<tr><td>2.1</td><td>

Informação Complementar para o professor

Inicia-se o objetivo geral relativo aos factos mais elementares da Combinatória enunciando a relação básica entre a noção de cardinal de um conjunto e a noção de bijeção, fundamento de todas as “operações de contagem” que constituem o Cálculo combinatório. Ao dizer-se que «dois conjuntos A e B têm o mesmo cardinal se e somente se existir uma bijeção de A sobre B» enuncia-se, na linguagem das aplicações entre conjuntos, um princípio que é utilizado desde que, no primeiro ano de escolaridade, se começaram a introduzir os números naturais e a efetuar contagens.

A relação de «equipotência» assim definida entre conjuntos pode ser interpretada como uma relação binária num dado domínio e é fácil concluir que se trata sempre de uma relação de equivalência (é reflexiva porque a aplicação identidade num dado conjunto é uma bijeção, é simétrica porque a inversa de uma bijeção é uma bijeção e é transitiva uma vez que a composição de bijeções é uma bijeção); cada classe de equivalência para uma dessas relações num domínio pré-fixado é constituída por conjuntos que, por definição, têm todos o mesmo cardinal.

Note-se que nunca definimos concretamente o que é o “cardinal de um conjunto A” e neste descritor apenas se formaliza finalmente o que significa dois conjuntos terem “o mesmo cardinal”, embora esta ideia, como foi referido, já venha a ser utilizada, na prática e de forma intuitiva, desde o início do 1.º ciclo do ensino básico. Se fosse possível considerar o “conjunto de todos os conjuntos” poderíamos identificar o cardinal de um dado conjunto A como a classe de equivalência de A para a relação de equipotência definida para todos os conjuntos; foi essa a tentativa de formalização da aritmética que esteve subjacente a uma primeira versão dos Principia Mathematica de Alfred North Whitehead e Bertrand Russel (obra publicada em três volumes entre 1910 e 1913). Pouco antes da publicação do primeiro volume, Russel apercebeu--se da incongruência lógica da teoria “ingénua” dos conjuntos (baseada na obra anterior de Gottlob Frege), subjacente a esta definição, ao descobrir o célebre paradoxo a que deu o nome (*cf.* Caderno de Apoio – 10.º ano, texto de apoio ao descritor LTC10-2.1), também concretizado no conhecido “paradoxo do barbeiro”. Ainda a tempo, a obra foi remodelada com a introdução da teoria dos tipos lógicos, com a qual se procurou ultrapassar as dificuldades inerentes ao paradoxo de Russel.

</td></tr>
</table>

	Outra possibilidade, adotada em algumas das atuais teorias dos fundamentos da Matemática, consiste em começar por considerar a relação de equipotência como uma condição com duas variáveis, embora não exista o conjunto dos pares ordenados que satisfazem essa condição (caso contrário existiria, por exemplo, o conjunto das respetivas primeiras coordenadas que seria o conjunto de todos os conjuntos…). Dado um conjunto A qualquer, o cardinal de A, $\#A$, é então definido a partir da condição (em X) «X é equipotente a A», aplicando-lhe o chamado "símbolo de escolha de Hilbert", muitas vezes representado pela letra grega τ com a variável da condição em índice e cujo resultado, intuitivamente, consiste em "escolher" ou seja, fixar de uma vez por todas, um dos objetos que satisfaz a condição a que se aplica o referido símbolo, se a condição for possível, ou (em certas formulações) um objeto sem qualquer restrição se a condição for impossível. Assim, por definição teríamos: $$\#A = \tau_X(X \text{ é equipotente a } A).$$ Os números naturais, neste quadro, podem então ser definidos simplesmente como os cardinais dos conjuntos finitos não vazios (e o número 0 como o cardinal do conjunto vazio), definindo-se conjunto finito como um conjunto que não é equipotente a uma sua parte estrita (o conjunto dos números naturais, de acordo com esta definição, é de facto "infinito", ou seja, não é finito, já que, por exemplo, é equipotente ao conjunto dos números pares). Note-se que, com esta formulação, uma vez que o único conjunto equipotente ao conjunto vazio é o próprio conjunto vazio, como facilmente se prova, temos mesmo: $$0 = \#\emptyset = \emptyset.$$ No que diz respeito aos resultados básicos da combinatória, importa assinalar que o processo geral para "contar" o número de elementos de determinado conjunto é estabelecer uma correspondência biunívoca (ou seja, definir uma bijeção) entre o conjunto que se pretende contar e um conjunto cujo cardinal é, de algum modo, já conhecido. Trata-se muito simplesmente de uma extensão natural dos processos mais elementares de contagem, que utilizam, para conjuntos-padrão, por exemplo, os dedos das mãos ou a lista dos "nomes dos números", que se obtêm pela memorização de um conjunto de palavras-base e de regras de formação dos nomes dos números consecutivos a partir dessas palavras, ou ainda as respetivas representações simbólicas, utilizando um dado sistema de numeração.
2.2	**Informação Complementar para o professor** Uma vez que a adição de números naturais foi introduzida num nível muito elementar de escolaridade (de facto logo no 1.º ano do Ensino Básico) e portanto, necessariamente, de modo informal (ainda que traduzindo as características essenciais desta operação), este descritor pode considerar-se como uma possível definição rigorosa de adição, até para quaisquer cardinais, embora aqui nos interessem particularmente os finitos, ou seja os que se identificam com números naturais ou com o zero. Com efeito, dados dois quaisquer conjuntos A e B é fácil definir conjuntos A' e B' respetivamente equipotentes a A e a B mas agora, garantidamente, com interseção vazia, bastando, por exemplo, tomar $A' = A \times \{0\}$ e $B' = B \times \{1\}$; assim, a igualdade $$\#(A' \cup B') = \#A' + \#B' = \#A + \#B,$$ quando lida "da direita para a esquerda", pode ser interpretada como uma definição de soma do cardinal de A com o cardinal de B (e portanto, se, em particular, A e B forem finitos, da soma de dois números inteiros não negativos). Com efeito, é fácil verificar que $\#(A' \cup B')$ não depende da escolha dos conjuntos A' e B', desde que se mantenham as propriedades de serem respetivamente equipotentes a A e a B e de terem interseção vazia.

2.3	**Comentário**

Tal como a adição, também a multiplicação de números naturais foi introduzida logo na fase inicial do 1.º ciclo do Ensino Básico (no 2.º ano), apresentando-se essencialmente dois processos para se obter o produto $m \times n$ de um número natural n por um número natural m: considerar a soma de m parcelas iguais a n ou considerar o número de pares que se podem formar escolhendo um dos elementos do par num conjunto com m elementos e o segundo num conjunto, disjunto do primeiro, com n elementos (*cf.* Metas curriculares de Matemática para o Ensino Básico, NO2-7.1 e 7.3).

No programa do 2.º ano de escolaridade (*cf.* Metas curriculares de Matemática para o Ensino Básico, NO2-7.5) considerou-se a disposição, numa malha retangular, de um certo número de objetos, mostrando-se que esse número pode ser calculado como o produto, por qualquer ordem, do número de linhas pelo número de colunas; do mesmo modo, cada um dos "nós" dessa malha, pode representar um par formado por um objeto associado à coluna e por um objeto associado à linha que se intersetam nesse "nó". Nessa fase consideraram-se conjuntos disjuntos para se efetuarem os emparelhamentos, por não se dispor ainda da noção de par ordenado, pelo que os pares aqui referidos eram apenas entendidos como conjuntos com dois elementos que podiam assim ser materializados pela conjugação, com algum objetivo prático, de dois objetos distintos (por exemplo, conjuntos calça-camisola).

Assim, com estas observações elementares, chegou-se à noção de produto de números naturais e à respetiva utilização para contagens de conjuntos de pares, que podem agora ser assimilados a conjuntos de pares ordenados, associando à primeira posição do par ordenado um dos conjuntos em que se escolhem os objetos a emparelhar e a segunda posição ao outro conjunto. Podemos portanto, agora, traduzir os resultados a que se chegou nessa fase inicial do Ensino Básico dizendo que "o cardinal do produto cartesiano é igual ao produto dos cardinais dos conjuntos fatores".

Esta última asserção pode mesmo ser tomada como definição do produto de cardinais, finitos ou infinitos; nesse caso nada haveria a provar quanto ao resultado expresso no descritor 2.3, que seria o caso particular da definição geral de produto de cardinais em que os conjuntos são finitos e não vazios.

No entanto, considerando a definição usual algébrica de produto de números naturais acima referida, ou seja, $m \times n$ como a soma de m parcelas iguais a n ($m, n \in \mathbb{N}$), identificando-se uma soma "com uma parcela" com a própria parcela, há que demonstrar o que foi informalmente justificado no 1.º ciclo do Ensino Básico, a saber que, dados conjuntos finitos A e B, se $\#A = m$ e $\#B = n$, então $\#A \times B = m \times n$. Para o efeito, podemos agora utilizar o Princípio de indução matemática e propriedades elementares da adição de números naturais (a própria definição de produto pode ser formalizada pelo método de recorrência, caso não se disponha previamente de uma definição rigorosa de "soma de m parcelas", a qual também poderia ser dada por recorrência).

Com efeito, fixado $n \in \mathbb{N}$, o resultado é trivial para $m = 1$, já que, nesse caso, por definição, $m \times n = 1 \times n = n$ e, considerando um conjunto unitário (*i.e.* com exatamente um elemento) $A = \{a\}$ e um conjunto B qualquer, é imediato que os conjuntos $A \times B$ e B são equipotentes, pois é obviamente uma bijeção a aplicação de $A \times B$ em B que ao par (a, b) de $A \times B$ associa o elemento b de B.

	Para provar que a propriedade é hereditária, suponhamos que vale para conjuntos finitos A e B tais que $\#A = m$ e $\#B = n$ e provemos que, nesse caso, vale também para quaisquer conjuntos A' e B tais que $\#A' = m+1$ e $\#B = n$. Para isso, dados conjuntos A' e B nessas condições, fixemos um elemento qualquer a de A' e seja $A = A' \backslash \{a\}$; é óbvio que $A' = A \cup \{a\}$ e que $A \cap \{a\} = \emptyset$, pelo que $m+1 = \#A' = \#A + \#\{a\} = \#A + 1$ e portanto $\#A = m$. Podemos assim aplicar a hipótese de indução aos conjuntos A e B ($\#(A \times B) = m \times n$) e obtemos: $$\#(A' \times B) = \#\big((A \cup \{a\}) \times B\big) = \#\big((A \times B) \cup (\{a\} \times B)\big) = \#(A \times B) + \#(\{a\} \times B) = = m \times n + n = (m+1) \times n,$$ onde se utilizou o facto evidente $(A \times B) \cap (\{a\} \times B) = \emptyset$ (nenhum par (a, b) pode estar em $A \times B$ porque a não é elemento de A). Nesta demonstração utilizou-se, em particular, o resultado expresso no descritor 1.5, que é consequência imediata das propriedades distributivas da disjunção em relação à conjunção e da conjunção em relação à disjunção. Esta propriedade pode naturalmente estender-se a um qualquer número de fatores. Com efeito, começando por três fatores: $$\#\big((A \times B) \times C\big) = \#(A \times B) \times \#C = \#A \times \#B \times \#C$$ Além disso, podemos representar $(A \times B) \times C$ por $A \times B \times C$ identificando cada elemento $\big((a, b), c\big)$ de $(A \times B) \times C$ com o elemento (a, b, c) de $A \times B \times C$. Utilizando uma definição por recorrência do produto cartesiano de $p \in \mathbb{N}$ conjuntos poderia depois demonstrar-se facilmente por indução o resultado geral para o cardinal desse produto cartesiano: $$\#\big(A_1 \times \ldots \times A_p\big) = \#A_1 \times \ldots \times \#A_p$$
2.4	**Comentário** O resultado expresso no descritor 2.4 leva a que se utilize a notação B^A para representar o conjunto das aplicações do conjunto A no conjunto B. Este conceito também se pode relacionar com o de produto cartesiano; com efeito, o produto cartesiano de p conjuntos $A_1, \ldots, A_p$ (noção referida no final do texto de apoio ao descritor 2.3) pode identificar-se com o conjunto das sequências $\big(x_1, \ldots, x_p\big)$ tais que $x_i \in A_i$ para todo o $i = 1, \ldots, p$ e, com esta definição, se os conjuntos A_i (para $i = 1, \ldots, p$) coincidirem todos com determinado conjunto A, então podemos escrever: $$A_1 \times \ldots \times A_p = A^{\{1,\ldots,p\}}$$ já que este último símbolo representa as aplicações de $\{1, \ldots, p\}$ em A que são exatamente as sequências $\big(x_1, \ldots, x_p\big)$ de elementos de A. Assim $A^{\{1,\ldots,p\}}$ acaba por representar o "produto cartesiano iterado de p fatores iguais a A" que poderia naturalmente também ser representado pela "potência cartesiana" A^p. Esta identificação já permite reconhecer o resultado expresso neste descritor como caso particular da extensão a p fatores do resultado expresso no descritor 2.3, também referida no final do texto de apoio a esse descritor.

	Mais geralmente, dado um conjunto J pode introduzir-se a expressão "família indiciada em J" como outro modo de designar os gráficos das aplicações com domínio J, e pode representar-se uma tal família com uma notação semelhante à das sequências ou sucessões, ou seja, por $(x_j)_{j\in J}$, sendo x_j a imagem de j pela referida função. Assim, dada uma família de conjuntos $(A_j)_{j\in J}$ podemos definir o produto cartesiano da família com sendo o conjunto: $$\prod_{j\in J} A_j = \left\{(x_j)_{j\in J} : \forall j \in J, x_j \in A_j\right\}$$ Deste modo, no caso particular em que os A_j são todos iguais a determinado conjunto A, a notação A^J representa, coerentemente, o produto cartesiano de uma família indiciada em J "constantemente igual a A". Apresentam-se em seguida exemplos de exercícios que também podem ser utilizados para o reconhecimento da propriedade expressa neste descritor, com diferentes níveis de generalidade e profundidade nas abordagens. 1. Conte quantas sequências diferentes se podem formar inserindo 4 missangas num fio, sabendo que as missangas têm 3 cores possíveis: vermelho, verde e azul. 2. Considere todas as possíveis funções de domínio $\{1,2,3\}$ e conjunto de chegada $\{1,2\}$. 2.1 Represente-as por diagramas de setas. Mostre que o número destas funções pode ser escrito na forma de uma potência de base 2 e expoente natural. 2.2 Represente-as utilizando a notação habitual das sequências. 2.3 Construa uma bijeção do produto cartesiano $\{1,2\} \times \{1,2\} \times \{1,2\}$ sobre o conjunto destas funções. 2.4 *Generalizando o processo utilizado na alínea anterior mostre que, dados números naturais n e p, existem n^p funções de domínio $\{1, \dots, p\}$ e de conjunto de chegada $\{1, \dots, n\}$, ou seja, n^p sequências de p elementos com valores em $\{1, \dots, n\}$. 2.5 *Justifique que, dados n objetos, existem exatamente n^p formas distintas de efetuar p extrações sucessivas de um desses objetos, repondo o objeto escolhido após cada uma das extrações. 3. **Fixado um número natural n, prove por indução matemática (em p) que para todo o número natural p, existem exatamente n^p funções de domínio num dado conjunto com p elementos e de conjunto de chegada com n elementos e conclua que dados n objetos, existem exatamente n^p formas distintas de efetuar p extrações sucessivas de um desses objetos, repondo o objeto escolhido após cada uma das extrações.
2.5	1. Considere um conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ com 3 elementos. 1.1. Determine em extensão todas as partes não vazias de X. Quantos subconjuntos tem X? 1.2. Mostre que se obtêm todas as partes de X associando a cada sequência (k_1, k_2, k_3) de termos iguais a 0 ou a 1 o subconjunto de X constituído pelos elementos x_i tais que $k_i = 1$ (por exemplo, à sequência $(1,0,1)$ associa-se o conjunto $\{x_1, x_3\}$). 1.3. Justifique que existem exatamente 2^3 sequências das referidas na alínea anterior, sem as construir explicitamente; compare o resultado obtido com o resultado da alínea 1.1. 1.4. Utilizando argumentos inspirados nas duas alíneas anteriores justifique que se um conjunto X tiver $p \in \mathbb{N}_0$ elementos ($\#X = p$) então $\mathcal{P}(X)$ tem 2^p elementos.

	2. *Prove por indução que, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$, um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos. 3. Considere um conjunto X qualquer e seja $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X. 3.1. **Mostre que é bijetiva a aplicação de $\mathcal{P}(X)$ no conjunto das aplicações de X em $\{0,1\}$ que a cada $A \subset X$ associa a aplicação $\chi_A: X \longrightarrow \{0,1\}$ tal que, para cada $x \in X$: $$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \notin A \\ 1 \text{ se } x \in A \end{cases}.$$ 3.2. *Atendendo à alínea anterior, justifique que se X tiver $p \in \mathbb{N}_0$ elementos ($\#X = p$) então $\mathcal{P}(X)$ tem 2^p elementos. **Informação Complementar para o professor** O resultado expresso na alínea 3.1 acima mostra que para qualquer conjunto X, finito ou infinito, $\#\mathcal{P}(X) = \#(\{0,1\}^X)$, onde $\{0,1\}^X$ representa o conjunto das aplicações do conjunto X em $\{0,1\}$. Ora, podemos estender a noção de potência a cardinais não necessariamente finitos tomando, por definição: $$\#B^{\#A} = \#(B^A)$$ (demonstra-se que esta definição é coerente, ou seja, não depende da escolha dos conjuntos A e B mas apenas dos respetivos cardinais, pois é fácil construir uma bijeção entre B^A e $B'^{A'}$ desde que sejam dadas bijeções respetivamente entre A e A' e entre B e B'). Então podemos dizer que, para qualquer conjunto X, $$\#\mathcal{P}(X) = \#(\{0,1\}^X) = 2^{\#X}.$$ Não é difícil concluir que $\mathcal{P}(X)$ não é nunca equipotente a X; se estendermos a todos os cardinais a relação de ordem (lata) dos números naturais, considerando que $\#A \leq \#B$ se A for equipotente a uma parte de B, é óbvio que $\#X \leq \#\mathcal{P}(X)$, já que X é obviamente equipotente à parte de $\mathcal{P}(X)$ constituída pelos subconjuntos de X com um único elemento. Assim, se provarmos que $\#X \neq \#\mathcal{P}(X)$, teremos sempre $\#X < \#\mathcal{P}(X)$, e como consequência, podemos concluir que não há um cardinal maior ou igual a todos os outros (existe sempre um cardinal estritamente superior a um dado cardinal). Para provarmos que um conjunto X não pode ser equipotente a $\mathcal{P}(X)$ basta provar que não pode existir nenhuma aplicação sobrejetiva de X sobre $\mathcal{P}(X)$; com efeito, dada uma aplicação $f: X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, podemos facilmente concluir que o conjunto $A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$ é um elemento de $\mathcal{P}(X)$ que não está no contradomínio de f. De facto, se existisse $a \in X$ tal que $f(a) = A$, se tivéssemos $a \in A = f(a)$, por definição de A teríamos $a \notin A$, pelo que essa hipótese conduz a uma contradição. A existir um tal a, resta então apenas a hipótese de se ter $a \notin A$, ou seja, $a \notin f(a)$ mas nesse caso, mais uma vez por definição de A, teríamos $a \in A$, nova contradição que mostra finalmente que não pode existir um tal a, ou seja, A não pode estar no contradomínio de f. Portanto f não pode ser sobrejetiva: não existem aplicações sobrejetivas de X sobre $\mathcal{P}(X)$.
2.6 2.7	**Comentário** A definição de $n!$ pode ser dada por recorrência, caso não se disponha previamente de uma definição rigorosa do produto de n fatores, neste caso particular representado por $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$, definição essa que, evidentemente, também pode ser dada por recorrência, no caso geral. Neste caso podemos simplesmente apresentar essa definição, englobando os casos tratados nos descritores 2.6 e 2.7, através de:

	$$0! = 1$$ $$(n+1)! = (n+1) \times n! \; (n \in \mathbb{N}_0)$$ Tal como está expresso no descritor 2.7, para que a igualdade $n! = n(n-1)!$ tenha lugar também para $n = 1$, obviamente, teremos forçosamente $1 = 1! = 1(1-1)! = 0!$, ou seja a definição dada de $0!$ é a única que permite manter aquela igualdade também nesse caso. Que $n!$ é o número de permutações de $n \in \mathbb{N}$ elementos pode demonstrar-se por indução ou, de modo mais informal, notando que, para definir uma permutação de n elementos, podemos simplesmente enumerar os sucessivos termos da referida permutação, os quais, por definição, devem ser dois a dois distintos, pelo que há n hipóteses distintas para a escolha do primeiro termo, em seguida sobram apenas $n-1$ hipóteses para a escolha do segundo, pelo que no total há $n(n-1)$ escolhas possíveis para os dois primeiros termos da permutação. De modo análogo há $n(n-1)(n-2)$ escolhas possíveis para os três primeiros termos da permutação e prosseguindo este raciocínio, concluímos que há exatamente $n(n-1)(n-2)\dots 2.1 = n!$ escolhas possíveis para os n termos da permutação, ou seja, há exatamente $n!$ permutações de n elementos. **Informação Complementar para o professor** Embora a utilização do método de recorrência para definir a sucessão $n!$ em $\mathbb{N}_0$, seja intuitivamente fácil de aceitar, uma vez que para definir $(n+1)!$ apenas utilizámos o conhecimento pressuposto da mesma expressão para a ordem anterior (n em lugar de $n+1$) e o próprio número $n+1$, se atendermos à formulação desse método apresentada em SUC11-3.2, a tradução do princípio geral enunciado nesse descritor para este caso particular de definição por recorrência não é tão direta como pode parecer à primeira vista. Com efeito, uma vez que a definição de $u_{n+1} = (n+1)!$ a partir de $u_n = n!$ envolve o produto por $n+1$, a função f utilizada nesta definição por recorrência não pode aplicar-se simplesmente a u_n, pois nesse caso a definição do próprio f dependeria também de n, ou seja, precisaríamos de uma sucessão de funções e não apenas de uma função. Uma solução é considerar $f: A \longrightarrow A$ onde $A = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ e $f(m,n) = (m(n+1), n+1)$ (no fundo é um modo de representar a sucessão de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $f_n: \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ dada por $f_n(x) = (n+1)x$, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, através de apenas uma função); assim, podemos definir por recorrência em primeiro lugar a sucessão de pares ordenados $x_n = (u_n, v_n)$, por: $$x_0 = (u_0, v_0) = (1,0)$$ $$x_{n+1} = (u_{n+1}, v_{n+1}) = f(x_n) = f(u_n, v_n) = (u_n(v_n+1), v_n+1).$$ Agora, por definição, $\forall n \in \mathbb{N}_0, n! = u_n$.
2.8	**Comentário** Trata-se aqui de generalizar o resultado do descritor 2.6, no sentido em que se pretende contar o número de "amostras ordenadas" com $p \in \mathbb{N}$ elementos distintos que é possível recolher de um conjunto com $n \geq p$ elementos, enquanto no descritor 2.6 se considerou apenas o caso $p = n$, já que recolher sucessivamente todos os elementos de um dado conjunto corresponde a considerar uma ordenação particular desse conjunto, ou seja, o que se designou por uma "permutação". Um raciocínio informal como o que foi sugerido no texto de apoio ao referido descritor 2.6 pode ser utilizado também para obter o resultado expresso neste descritor: o

	primeiro termo de uma sucessão particular de p elementos distintos de determinado conjunto com $n \geq p$ elementos pode ser escolhido de n maneiras distintas, em seguida sobram apenas $n-1$ objetos para escolher como segundo elemento, ou seja, há no total $n(n-1)$ maneiras distintas de escolher os dois primeiros elementos da sucessão e reproduzindo este raciocínio até se chegar ao termo de ordem p da sucessão haverá no total $n(n-1)\dots(n-p+1)$ maneiras de escolher todos os termos de uma tal sucessão (quando se vai fazer a p-ésima escolha já só sobram $n-(p-1)$ elementos no conjunto, já que se fizeram previamente $p-1$ escolhas), número que pode evidentemente ser representado por $\frac{n!}{(n-p)!}$. Apresentam-se em seguida exemplos de exercícios que também podem ser utilizados para um reconhecimento desta propriedade com diversos níveis de profundidade e generalidade. 1. Dez atletas vão fazer uma corrida. Conte de quantas maneiras diferentes se poderão colocar três deles no pódio. 2. *Considere todas as possíveis funções injetivas de domínio $\{1,2\}$ e conjunto de chegada $\{1,2,3,4\}$ (sequências de dois elementos distintos do conjunto $\{1,2,3,4\}$). 2.1 Represente-as utilizando a notação habitual das sequências. Para cada escolha do primeiro termo de uma dessas sequências, quantas escolhas possíveis sobram para o segundo termo? 2.2 *Generalizando o resultado da alínea anterior mostre que, dados números naturais n e p, $p \leq n$, existem $n(n-1)\dots\left(n-(p-1)\right)=\frac{n!}{(n-p)!}$ funções injetivas de domínio $\{1,\dots,p\}$ e de conjunto de chegada $\{1,\dots,n\}$, ou seja, $\frac{n!}{(n-p)!}$ sequências de p elementos com valores dois a dois distintos em $\{1,\dots,n\}$. 2.3 Justifique que, dados n objetos, existem exatamente $\frac{n!}{(n-p)!}$ formas distintas de efetuar p extrações sucessivas de um desses objetos, sem reposição do objeto escolhido após cada uma das extrações. 3. **Fixado um número natural p, prove por indução matemática (em n) que, para todo o número natural $n \geq p$, existem exatamente $\frac{n!}{(n-p)!}$ funções injetivas de domínio num dado conjunto com p elementos e de conjunto de chegada com n elementos e conclua que dados n objetos, existem exatamente $\frac{n!}{(n-p)!}$ formas distintas de efetuar p extrações sucessivas de um desses objetos, sem reposição do objeto escolhido após cada uma das extrações.
2.9	**Comentário** A justificação pedida pode muito simplesmente resultar da observação segundo a qual os subconjuntos com $p \in \mathbb{N}$ elementos de um conjunto A com $n \geq p$ elementos podem ser encarados como os contradomínios das funções injetivas de $\{1,\dots,p\}$ em A. Com efeito, tais contradomínios têm p elementos, e, para qualquer subconjunto X com p elementos de A, existe, por definição, uma bijeção de $\{1,\dots,p\}$ sobre X, que, evidentemente, determina uma função injetiva de $\{1,\dots,p\}$ em A, com o mesmo gráfico. Esta observação pode ser formulada, numa linguagem mais intuitiva, em termos de sequências, que é outro modo de designar as funções de domínio $\{1,\dots,p\}$ para um dado número natural p; ou seja, o que acabámos de verificar pode exprimir-se dizendo que um subconjunto de A com p elementos é exatamente o conjunto dos termos de uma sequência $\left(a_1,\dots,a_p\right)$ de elementos distintos de A. Estas sequências são o que se chama "arranjos sem repetição de n elementos p a p", de acordo com o descritor 2.8, sendo os "elementos" escolhidos em A.

Ora as funções injetivas de $\{1, \dots, p\}$ em A de contradomínio X (ou seja, as sequências de p elementos com valores em A, com um dado conjunto X de p termos distintos) podem ser todas obtidas de uma delas compondo-a com as diferentes permutações do conjunto $\{1, \dots, p\}$. Com efeito, dadas duas dessas funções injetivas, considerando as bijeções que determinam de $\{1, \dots, p\}$ sobre X, a composta da inversa de uma com a outra é evidentemente uma permutação de $\{1, \dots, p\}$; são portanto em número de $p!$. Por outras palavras, novamente numa linguagem mais intuitiva, podemos observar que para cada subconjunto $\{a_1, \dots, a_p\}$ de A com p elementos existem exatamente $p!$ sequências $(x_1, \dots, x_p)$ tais que $\{x_1, \dots, x_p\} = \{a_1, \dots, a_p\}$, cada uma delas resultante de uma "permutação dos termos da sequência $(a_1, \dots, a_p)$": cada subconjunto com p elementos de A pode associar-se aos $p!$ arranjos sem repetição formados com esses p elementos.

Assim, para se obter o número de subconjuntos de A com $p \in \mathbb{N}$ elementos basta dividir por $p!$ o número total de sequências de p termos distintos de elementos de A (arranjos sem repetição dos n elementos de A p a p), que sabemos ser $\frac{n!}{(n-p)!}$ (de acordo com o resultado expresso no descritor 2.8), ou seja, obtemos $\frac{n!}{(n-p)!p!}$. No caso em que $p = 0$, o único subconjunto de A em questão é o vazio e, também nesse caso, obtemos o resultado pretendido, pois $\frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n!}{n!0!} = 1$.

Note-se que também se provou, indiretamente, que $\frac{n!}{(n-p)!p!}$ é um número natural, o que pode não parecer claro à partida.

2.10

1. Exprima cada uma das seguintes somas algébricas como uma única fração e simplifique-a tanto quanto possível.
   1.1. $\frac{5}{4!} - \frac{4}{5!}$
   1.2. $\frac{2}{3!\,6!} + \frac{3}{4!\,5!}$
   1.3. $\frac{1}{(n+1)!} - \frac{3}{2n!}$, para n número natural
   1.4. $\frac{2}{(n+1)!} - \frac{n}{(n+2)!} + \frac{1}{n!}$, para n número natural
   1.5. ${}^{n}A_2 + {}^{n+1}A_2$, para n número natural superior a 1
2. Justifique que $\frac{180 \times 179 \times \ldots \times 142 \times 141}{40!}$ é um número natural.
3. Prove, para n e p números naturais tais que $p < n$, que $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)$ é múltiplo de $p!$
4. Determine para que valor natural de n se verifica:
   4.1. $\frac{(n+2)!}{n!} = 6$
   4.2 ** ${}^{2n+1}C_3 + {}^{2n+1}C_4 - {}^{2n+3}C_5 + {}^{2n+2}C_{n+1} = 0$

3.1

1. Considere a experiência de repartir um baralho de 52 cartas pelo João e pela Joana. Ao João dão-se 10 cartas e a Joana fica com as restantes.
   1.1. Quantos conjuntos diferentes, de 10 cartas, pode o João receber?
   1.2. Quantos conjuntos diferentes pode a Joana receber?
   1.3. Justifique que as duas alíneas anteriores têm o mesmo resultado e traduza essa igualdade usando combinações.

	2. Prove que, dados números naturais n e p, $p \leq n$, ${}^{n}C_{p} = {}^{n}C_{n-p}$, de dois modos distintos: 2.1. Estabelecendo uma correspondência um a um entre os subconjuntos com p elementos e os subconjuntos com $n-p$ elementos de um dado conjunto com n elementos. 2.2. Através da fórmula que permite calcular cada um dos membros da igualdade.
3.3	1. Considere um baralho de 52 cartas. 1.1. Determine quantos conjuntos de 7 cartas se podem constituir. 1.2. Determine quantos conjuntos de 7 cartas têm o Rei de Copas. 1.3. Determine quantos conjuntos de 7 cartas não têm o Rei de Copas. 1.4. Justifique, sem efetuar explicitamente os cálculos, que o resultado obtido na alínea 1.1. é igual à soma dos resultados obtidos nas alíneas 1.2. e 1.3. e traduza essa igualdade usando combinações. 2. Prove que, dados números naturais n e p, $p < n$, ${}^{n+1}C_{p+1} = {}^{n}C_{p} + {}^{n}C_{p+1}$, por dois processos distintos: 2.1. *Recordando que ${}^{n}C_{p}$ é o número de subconjuntos com p elementos de um conjunto com n elementos e interpretando o segundo membro da igualdade que se pretende provar como o cardinal de uma união de conjuntos disjuntos, que se pode pôr em correspondência biunívoca com o conjunto das partes com $p+1$ elementos de um conjunto com $n+1$ elementos. 2.2. Utilizando as fórmulas que permitem calcular o valor de cada uma das expressões que intervêm na igualdade a provar como funções racionais de fatoriais de números conhecidos e, no segundo membro, reduzindo ao mesmo denominador as frações assim obtidas.
3.4	**Comentário** Este resultado pode ser demonstrado por indução, mas também se pode obter examinando as diferentes parcelas que ocorrem por aplicação a $(x+y)^n$ da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (ou, mais propriamente, a definição do produto de polinómios aqui expresso na forma de potência). Com efeito, aplicando esta propriedade (ou definição) a esse produto de n fatores obtêm-se parcelas em que o fator x pode ocorrer entre 0 e n vezes; obviamente, quando o fator x ocorre k vezes, y tem de ocorrer $n-k$ vezes, pois, no total, cada parcela resultante de se aplicar a propriedade distributiva corresponde ao produto de n fatores, cada um deles igual a x ou a y. Basta-nos agora contar o número de parcelas iguais a $x^k y^{n-k}$, para cada $k = 0, \dots, n$; numerando de 1 até n os n fatores iguais do produto inicial, obtém-se cada uma das parcelas correspondentes a determinado k escolhendo k dos números naturais de 1 até n e tomando, dos correspondentes fatores $x+y$, o valor x e dos restantes o valor y para, efetuando o produto dos n fatores assim fixados, obter uma das parcelas resultantes da aplicação da propriedade distributiva. Ora o número de maneiras distintas de escolher k dos números naturais de 1 até n é, por definição, ${}^{n}C_{k}$, pelo que é esse o número de parcelas iguais a $x^k y^{n-k}$ que se obtêm aplicando a propriedade distributiva a $(x+y)^n$. Portanto, de facto: $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^{n}C_{k}\, x^k y^{n-k},$$ igualdade que, evidentemente, implica a seguinte (pela comutatividade generalizada da adição ou, mais propriamente, pela noção de igualdade de polinómios, no sentido em que admitem uma mesma forma reduzida):

	$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k\, x^{n-k}y^k$$ Apresentam-se em seguida exemplos de exercícios que podem ser propostos aos alunos para reconhecerem a validade do binómio de Newton, tanto em casos particulares como no caso geral. 1. Considere os polinómios nas variáveis a e b, $A=(a+b)^3$ e $B=(a+b)^4$. 1.1. Determine formas reduzidas dos polinómios A e B. 1.2. Indique os valores de n, p, q, r, s e t na seguinte expressão, de modo que se torne numa igualdade verdadeira entre polinómios: $$(a+b)^4={}^nC_p\, a^4b^0+{}^nC_q\, a^3b^1+{}^nC_r a^2b^2+{}^nC_s\, x^1y^3+{}^nC_t\, x^0y^4$$ 1.3. Escreva as formas reduzidas obtidas para A e B em 1.1 na forma de somatório. 1.4. Determine uma forma reduzida para o polinómio, nas variáveis a e b, $A=(a+b)^5$ e escreva-a também na forma de somatório. 2. *Considere $n\in\mathbb{N}$ e o polinómio nas variáveis x e y, $(x+y)^n$. Utilizando a definição de produto de polinómios, pretende-se obter uma forma reduzida deste polinómio; para o efeito resolva as seguintes questões, justificando todas as respostas: 2.1. Ao aplicar-se sucessivamente a definição de produto de polinómios ao produto de n fatores iguais a $x+y$, no resultado final qual é o grau de cada monómio parcela do polinómio produto? 2.2. Quais os valores possíveis para k na expressão x^ky^l, parte literal de um dos monómios parcelas de uma forma reduzida de $(x+y)^n$? Para cada um desses valores de k que valores pode ter l? 2.3. Numerando de 1 até n os n fatores do produto representado por $(x+y)^n$ (ou seja, considerando a sequência indiciada em $\{1,\dots,n\}$ com os termos todos iguais a $x+y$) mostre que, para cada $k\in\{0,\dots,n\}$, existe uma correspondência biunívoca entre os subconjuntos com k elementos de $\{1,\dots,n\}$ e as parcelas da forma x^ky^l que resultam da aplicação da definição de produto de polinómios a $(x+y)^n$. 2.4. Conclua das alíneas anteriores que se obtêm formas reduzidas do polinómio $(x+y)^n$, expressas nas igualdades: $$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k\, x^ky^{n-k}=\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k\, x^{n-k}y^k$$ 3. ** Prove por indução que: $$(x+y)^n= x^n+nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2+\cdots+\frac{n(n-1)}{2!}x^2y^{n-2}+nxy^{n-1}+y^n = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k\, x^{n-k}y^k.$$
4.1	1. Considere subconjuntos A e B de um conjunto U. Simplifique as seguintes expressões, nomeando as propriedades aplicadas. 1.1 $B\cup(\bar{B}\cup A)$ 1.2 $A\cap(B\cap\bar{A})$ 1.3 $A\cup(B\cap\bar{A})$ 1.4 $(B\cap A)\cup(B\cap\bar{A})$ 1.5 $*\left[A\cap\left(\overline{B\cap\bar{A}}\right)\right]\cup\bar{A}$

	2. Indique, justificando, para cada uma das seguintes igualdades, se é verdadeira para quaisquer conjuntos A, B e C, subconjuntos de um dado conjunto U e, caso contrário, apresente um contraexemplo. 2.1 $B\backslash A = B \cap \bar{A}$ 2.2 $(A \cup B)\backslash A = B$ 2.3 $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$ 3. Um conjunto tem 8 elementos. Determine o número de subconjuntos que pode definir a partir deste conjunto que tenham: 3.1 2 elementos; 3.2 6 elementos; 3.3 8 elementos. 4. Seis jovens, a Ana, a Beatriz, o Carlos, a Dália, o Eduardo e a Filipa vão concorrer a um sorteio de seis viagens, a saber, a Barcelona, Berlim, Londres, Madrid, Paris e Roma. Supondo que cada jovem vai ganhar uma viagem, de quantas maneiras diferentes pode resultar este sorteio? 5. Os 25 alunos de uma turma vão participar num torneio de andebol de cinco, sendo distribuídos por cinco equipas, identificadas pelas letras A, B, C, D e E. De quantas maneiras diferentes poderá ser feita a distribuição dos alunos pelas equipas? 6. Lançou-se um dado cúbico com as faces numeradas de 1 a 6 e um dado octaédrico com as faces numeradas de 1 a 8 e registaram-se os números das faces que ficaram voltadas para cima. Identifique o número de resultados possíveis para esta experiência. 7. *Um conjunto tem 4096 subconjuntos. Quantos desses subconjuntos tem exatamente 6 elementos? 8. **Justifique, sem utilizar o Princípio de indução matemática, que $2^n > n$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}_0$.
4.2	1. Determine quantos códigos de 4 algarismos é possível formar. 2. Um código é formado por sete caracteres dos quais quatro têm de ser algarismos e três têm de ser vogais. Quantos códigos diferentes é possível formar tais que: 2.1. os algarismos e as vogais sejam dispostos de forma alternada? 2.2. os símbolos iniciais e finais sejam algarismos e as vogais estejam juntas? 2.3. as vogais fiquem nos lugares centrais e os algarismos sejam todos ímpares? 2.4. *haja unicamente dois algarismos iguais a 3? 2.5. *não haja qualquer restrição à forma como se dispõem? 3. Utilizando os algarismos do conjunto $A = \{1,2,3,4,5,8,9\}$, quantos números de três algarismos é possível formar de modo que: 3.1. tenham exatamente dois algarismos iguais a 3? 3.2. os números sejam múltiplos de 5? 3.3. *o produto dos algarismos seja um número par? 4. **De quantas maneiras se podem colocar 6 fichas distintas em 9 caixas, podendo haver mais do que uma ficha por caixa, mas não mais de quatro em cada caixa?

5. Foram extraídas sucessivamente e com reposição quatro cartas de um baralho de 52 cartas. Determine de quantas maneiras diferentes é possível obter:
   5.1. por esta ordem, um ás, duas figuras e um número superior a 5.
   5.2. primeiro duas cartas vermelhas e depois duas cartas de espadas.
   5.3. um rei e três cartas pretas, não necessariamente por esta ordem.

6. Considere o conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Quantos números de quatro algarismos diferentes é possível formar que sejam:
   6.1. superiores a 3000?
   6.2. pares?
   6.3. múltiplos de 5?
   6.4. *inferiores a 5840?

7. A turma da Beatriz tem 28 alunos dos quais 12 são rapazes. De quantas maneiras diferentes pode resultar a eleição do delegado e subdelegado de turma se:
   7.1. O delegado for rapariga e o subdelegado for rapaz?
   7.2. O delegado e o subdelegado forem do mesmo sexo?
   7.3. A Beatriz, for eleita?

8. Um saco contém sete cartões indistinguíveis ao tato e numerados de 1 a 7. Foram extraídos sem reposição três cartões e dispostos por ordem formando um número.
   8.1. Quantos números é possível formar?
   8.2. Dos números que é possível formar, quantos
      a) têm dois algarismos pares?
      b) são ímpares?

9. Duas prateleiras estão vazias e cada uma tem espaço para 12 livros. De quantas maneiras diferentes é possível dispor 16 livros nas duas prateleiras de forma que fiquem juntos e encostados a um dos extremos da prateleira e
   9.1. *oito em cada prateleira?
   9.2. *dez numa prateleira e seis na outra?

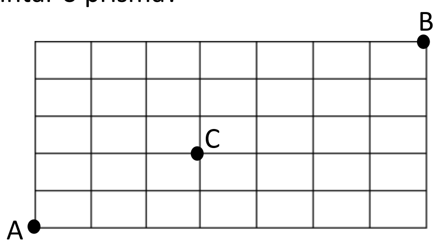
10. *Num debate participam 8 pessoas havendo dois representantes por cada uma das quatro organizações convidadas. De quantas maneiras se podem dispor numa mesa quadrada se o moderador ficar num dos lados e os participantes em lados opostos de modo que os elementos da mesma organização fiquem juntos e haja o mesmo número de pessoas em ambos os lados?

11. Uma sequência de letras diz-se um «anagrama» de uma outra se o número de ocorrências de qualquer letra for igual em ambas. Quantos anagramas existem da palavra *margarida*?

12. Considere todos os números que se podem obter alterando a ordem dos algarismos do número 2344451.
    12.1. Quantos números é possível formar?
    12.2. Quantos desses números são ímpares?

13. **Dez livros de Matemática e cinco de Física vão ser dispostos, lado a lado, numa prateleira. De quantas formas distintas se poderão arrumar os livros de modo que não fiquem dois livros de Física lado a lado?

14. De quantas maneiras diferentes podem 8 automóveis ser arrumados num parque com 12 lugares disponíveis?

	15. Considere os pontos (distintos) A, B, C, D e E pertencentes a uma circunferência. Quantas cordas existem com extremos nestes pontos? 16. Numa gelataria há oito sabores diferentes, sendo cinco sabores de fruta e ainda sabor a café, a chocolate e a amêndoa. De quantas maneiras é possível escolher três sabores diferentes para um copo, se: 16.2. não houver qualquer restrição? 16.3. unicamente dois dos sabores forem de fruta? 16.4. pelo menos um dos sabores for de fruta? 16.5. o sabor a café e a kiwi não forem pedidos simultaneamente? 16.6. os sabores a café e a amêndoa forem sempre pedidos em conjunto? 17. De quantas maneiras é possível selecionar cinco cartas de um baralho de 52 cartas de forma que: 17.2. quatro sejam figuras e uma seja ás? 17.3. *duas sejam figuras e três sejam cartas de espadas? 18. Quantos divisores naturais tem o número $2400 = 2^5 \times 3 \times 5^2$? 19. Considere um prisma hexagonal reto. 19.2. *Quantas retas distintas passam por dois vértices do prisma e não contêm qualquer aresta do prisma? 19.3. Das retas identificadas na alínea anterior, quantas são paralelas às bases? 19.4. Um vértice de uma base e dois vértices da outra base são vértices de um mesmo triângulo. a) *Quantos desses triângulos existem? b) **Desses triângulos, quantos são retângulos? 19.5. *Pretende-se pintar as faces do prisma de modo que duas faces com arestas comuns não tenham a mesma cor. Sabendo que existem seis cores disponíveis, de quantas maneiras diferentes é possível pintar o prisma? 20. Quantos caminhos existem, seguindo as linhas da quadrícula, que liguem o ponto A ao ponto B passando por C e sem andar da direita para a esquerda nem de cima para baixo? 
4.3	1. Determine os valores possíveis de n tais que ${}^{11}C_{n+1} = {}^{11}C_8$. 2. O sexto e o sétimo elementos de uma linha do triângulo de Pascal são iguais. Qual é o elemento central da linha seguinte? 3. Determine ${}^{11}C_{p+1} + {}^{11}C_{p+2} + {}^{12}C_{p+3}$ sabendo que ${}^{13}C_{p+3} = 1716$ e que $p < 8$. 4. *Sabendo que, dados números naturais n e p, $p + 2 \leq n$, que ${}^{n}C_p = 3432$, ${}^{n}C_{p+2} = 2002$ e que ${}^{n+1}C_{p+1} = 6435$, determine ${}^{n}C_{p+1}$, ${}^{n+1}C_{p+2}$, ${}^{n+2}C_{p+2}$ e ${}^{n+2}C_{n-p}$.

5. Sabe-se que $\sum_{i=0}^{n} {}^{n}C_i = 4096$ (n ∈ ℕ). Determine:
   5.1. ${}^{n-1}C_4$
   5.2. * $\sum_{i=0}^{n+2} {}^{n+2}\boldsymbol{C_i}$

6. Determine o desenvolvimento das seguintes expressões utilizando a fórmula do binómio de Newton e simplificando tanto quanto possível cada uma das parcelas assim obtidas.
   6.1 $(x-2)^5$
   6.2 $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^4$
   6.3 $\left(\frac{x}{3}-x^2\right)^5$

7. Determine, para $x > 0$, o 6.º termo do desenvolvimento pelo binómio de Newton de cada uma das seguintes expressões e apresente-o na forma mais simplificada.
   7.1 $\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^6$
   7.2 * $\left(x\sqrt{x}-\frac{3}{x^2}\right)^8$

8. *Considere a seguinte expressão $A(x)=\left(\frac{2}{x}-\sqrt{x}\right)^6$. Determine, relativamente ao desenvolvimento de $A(x)$ pelo Binómio de Newton, o termo:
   8.1 independente de x.
   8.2 de grau 3.

9. Utilizando o desenvolvimento do binómio de Newton, determine o valor de cada uma das seguintes expressões, onde n é um número natural.
   9.1 $\sum_{k=0}^{12} {}^{12}C_k\, 4^{12-k}(-2)^k$
   9.2 $\sum_{k=0}^{n} {}^{n}C_k\, (-1)^k$

10. **Determine a soma dos coeficientes dos termos de uma forma reduzida do polinómio $(2x-3)^{11}$, utilizando o Binómio de Newton.

Descritor	Texto de Apoio
1.1 1.10	**Informação Complementar para o professor** No Programa optou-se por definir a função probabilidade em $\mathcal{P}(E)$, com E finito, e não numa álgebra de subconjuntos de um conjunto E, genérico, com o objetivo de fazer incidir a atenção dos alunos no novo ente matemático "probabilidade", evitando a introdução, em simultâneo, de mais uma outra noção ("álgebra de conjuntos") que pouco desenvolvimento poderá ter num programa que não inclui o tópico de estruturas algébricas. No entanto, em turmas mais interessadas, não será de descurar uma discussão que leve à construção de domínios mais variados para a probabilidade P, partindo, por exemplo, do menor possível e examinando de que maneiras pode ser progressivamente estendido. De facto, uma vez que interessa que seja possível formular determinadas propriedades subjacentes ao conceito intuitivo de probabilidade ($P(E) = 1$, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ e $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, para A, B disjuntos), facilmente se mostra que, dado um conjunto E (universo de resultados) o mais pequeno domínio onde será razoável definir uma probabilidade P, é a classe de conjuntos $\mathcal{A} = \{E, \emptyset\}$. Se, dos subconjuntos de E, só se conhecer (ou só interessar) a probabilidade de um certo acontecimento A (distinto de E e de $\emptyset$), então bastará tomar como domínio de P a classe $\mathcal{A} = \{E, A, \overline{A}, \emptyset\}$. Pode-se então pedir aos alunos que justifiquem que o mais pequeno domínio, admissível para uma probabilidade P, que contém dois subconjuntos A, B de E (distintos entre si e distintos de E e de $\emptyset$), é: $$\mathcal{A} = \{E, A, \bar{A}, B, \bar{B}, A \cup B, A \cap B, \bar{A} \cup B, A \cup \bar{B}, \bar{A} \cap B, A \cap \bar{B}, \overline{A \cup B}, \overline{A \cap B}, \emptyset\}$$ Ou seja, para além dos complementares, ao domínio de P terão também de pertencer todas as uniões e interseções de quaisquer dois conjuntos que pertençam a $\mathcal{A}$ (atendendo às Leis de De Morgan para conjuntos, basta exigir que $\mathcal{A}$ contenha, para além de E, o complementar de cada conjunto de $\mathcal{A}$ e a união de cada dois conjuntos de $\mathcal{A}$ ou, em alternativa, o complementar de cada conjunto de $\mathcal{A}$ e a interseção de cada dois conjuntos de $\mathcal{A}$). No caso em que o conjunto E é infinito, poderá conceber-se a possibilidade de determinada classe $\mathcal{A}$ contendo uma infinidade de subconjuntos de E constituir o domínio de uma função de probabilidade, mas nesse caso as condições a que $\mathcal{A}$ deve satisfazer e as próprias propriedades características de uma tal função de probabilidade são mais restritivas do que as impostas a uma probabilidade no caso em que $\mathcal{A}$ é finito. Nesse caso, para além de complementares e uniões e interseções de famílias finitas de conjuntos de $\mathcal{A}$, pretendemos que seja sempre possível efetuar uniões e interseções de famílias *numeráveis* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de tais conjuntos (para que $\mathcal{A}$ seja o que se designa por «σ-álgebra de subconjuntos de E»). Além disso exige-se, para além das propriedades habituais características das funções de probabilidade no caso finito, uma propriedade de P que, no caso infinito, não se pode deduzir das restantes. Pretende-se que seja possível calcular a probabilidade de um conjunto A união de uma cadeia numerável crescente de conjuntos de $\mathcal{A}$, $A_1 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ por passagem ao limite da sucessão de probabilidades $P(A_n)$ dos elementos da cadeia (o que se chama a "σ-continuidade" de P). A conjunção desta propriedade com a aditividade, que já se impunha a uma probabilidade no caso finito, é equivalente à chamada σ-aditividade, que consiste em pressupor que a probabilidade da união de uma família numerável de acontecimentos dois a

	dois incompatíveis pode ser calculada efetuando a "soma" das probabilidades desses acontecimentos, entendendo-se esta soma de uma infinidade de parcelas (que é o que chama a "soma de uma série") como o limite da sucessão cujo termo geral é a soma das probabilidades dos n primeiros acontecimentos da família, previamente ordenados de modo arbitrário.
3.1	1. O código de um cofre é formado por 3 vogais seguidas de 4 algarismos. Selecionando um código deste tipo ao acaso, qual a probabilidade de ter: 1.1 pelo menos duas vogais diferentes e os algarismos todos iguais? 1.2 unicamente uma letra a e dois algarismos iguais a 7? 1.3 *pelo menos um algarismo igual a 4? 2. Num saco existem bolas indistinguíveis ao tato, das quais cinco são azuis e numeradas de 1 a 5 e seis são vermelhas e numeradas de 6 a 11. 2.1. Extrai-se uma bola ao acaso e observou-se a cor e o número. Qual a probabilidade de obter: 2.1.1 uma bola com número par? 2.1.2 uma bola azul com número ímpar? 2.1.3 uma bola vermelha com um número primo? 2.2. Extraiu-se uma bola e depois outra bola repondo a primeira e observou-se a cor e o número de cada uma delas. Qual a probabilidade de obter: 2.2.1 duas bolas da mesma cor? 2.2.2 uma bola com número par e outra com número ímpar? 2.2.3 duas bolas iguais? 2.3. Extraiu-se simultaneamente três bolas e observou-se a respetiva cor e número. Qual a probabilidade de obter: 2.3.1 três bolas da mesma cor? 2.3.2 duas bolas com número par e uma com número ímpar? 2.3.3 uma bola azul e duas bolas vermelhas, ambas com números pares? 3. Considere todos os números compostos por três algarismos diferentes. Selecionando um deles ao acaso, qual a probabilidade de: 3.1. ter todos os algarismos pares? 3.2. ser divisível por 5? 3.3. *ser superior a 250? 4. A Joana e cinco amigos vão ao cinema e os bilhetes correspondem a seis lugares consecutivos de uma dada fila. Sabendo que vão distribuir os bilhetes aleatoriamente, qual a probabilidade de: 4.1. a Joana ficar com um bilhete correspondente a um lugar numa das pontas? 4.2. a Amélia e a Joana terem bilhetes correspondentes a lugares seguidos? 4.3. a Joana e a Luísa não ficarem ao lado uma da outra? 5. Considere uma grelha quadrada com 16 quadrículas. Nesta grelha vão ser colocadas aleatoriamente 8 fichas iguais, não mais do que uma por quadrícula. Qual a probabilidade de: 5.1. as duas diagonais ficarem preenchidas? 5.2. unicamente uma linha ficar totalmente preenchida? 5.3. ficarem preenchidas duas colunas?

	6. Considere um octógono regular. 6.1. Selecionando dois vértices ao acaso, qual a probabilidade de o segmento por eles determinado: 6.1.1 corresponder a um lado do octógono? 6.1.2 passar pelo centro do octógono? 6.2. *Selecionando três vértices ao acaso, qual a probabilidade de o triângulo por eles determinado ser retângulo? 7. *Uma urna tem 12 cartões numerados de 1 a 12. Retiram-se sucessivamente dez cartões e dispõem-se lado a lado. Qual a probabilidade de: 7.1. ficarem 5 cartões com números pares, seguidos de 5 cartões com número ímpares? 7.2. somente os últimos quatro cartões terem números pares? 7.3. os cartões com os números $7, 8$ e 9 ficarem seguidos? 8. *Escolheram-se aleatoriamente duas das parcelas do desenvolvimento pelo binómio de Newton da expressão $(x-2)^{11}$, com $x > 0$. Determine a probabilidade de que o respetivo produto seja negativo.
3.2	1. Dado um conjunto finito E, uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$ e dois acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tais que $P(A) = 0{,}3$, $P(A \cap B) = 0{,}2$ e $P(\bar{B}) = 0{,}3$, determine: 1.1. $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ 1.2. $P(A \cup B)$ 2. Dado um conjunto finito E, uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$ e dois acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$, prove que: 2.1. $P(A \cap B) + P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1$ 2.2. $P(A) + P(B) \geq P(A \cup B)$ 2.3. $*P(A) - P(\bar{B}) = P(A \cap B) - P(\bar{A} \cap \bar{B})$ 2.4. $*P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ 3. Dado um conjunto finito E, uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$ e dois acontecimentos possíveis e equiprováveis $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tais que $P(B \cap A) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$. Determine: 3.1. $P(A)$ 3.2. $P(\bar{A} \cup \bar{B})$
3.3	1. Prove, dado um conjunto finito E , uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$ e dois acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$, $P(A) \neq 0$, que $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A) \times P(B\|A)$. 2. Seja E um conjunto finito, P uma probabilidade em $\mathcal{P}(E)$ e $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tais que $P(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{8}$, $P(A) = 2P(B)$ e $P(A \cup B) = \frac{2}{5}$. 2.1. Justifique que os acontecimentos $A \cap B$ e $A \cap \bar{B}$ são disjuntos e exprima $P(A \cap B)$ em função de $P(A)$. 2.2. Determine: 2.2.1. $P(A)$. 2.2.2. $P(A\|B)$. 3. Seja E um conjunto finito, P uma probabilidade em $\mathcal{P}(E)$ e $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tais que $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, $P(A) = 2P(B)$ e $P(A\|B) = \frac{1}{6}$. Averigúe se A e B são acontecimentos independentes.

4. Seja E um conjunto finito, P uma probabilidade em $\mathcal{P}(E)$ e $A, B \in \mathcal{P}(E)$, $P(A) \neq 0$.
   Prove que $P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A)$.

5. * Seja E um conjunto finito, P uma probabilidade em $\mathcal{P}(E)$ e $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Prove que se A é independente de B então também $\bar{A}$ é independente de B.

6. **Seja E um conjunto finito, P uma probabilidade em $\mathcal{P}(E)$ e $A, B \in \mathcal{P}(E)$, A possível mas não certo.
   Prove que se A é independente de B se e somente se $P(B|A) = P(B|\bar{A})$.

7. Duas urnas A e B têm bolas verdes e pretas. A urna A tem 5 bolas verdes e 2 bolas pretas e a urna B tem 4 bolas verdes e 3 bolas pretas.
   7.1. Foi retirada uma bola da urna B e colocada na urna A e, de seguida, foi tirada uma bola da urna A. Determine a probabilidade de:
      7.1.1. obter bola verde sabendo que a bola retirada da urna B era preta.
      7.1.2. obter bola preta.
   7.2. Foi selecionada uma urna ao acaso e tirada uma bola dessa urna. Determine a probabilidade de:
      7.2.1. ser bola verde sabendo que saiu da urna A.
      7.2.2. ser bola preta sabendo que saiu da urna B.
      7.2.3. ser bola verde.
      7.2.4. ter saído da urna A sabendo que é bola preta.

8. Num saco existem duas moedas falsas e cinco moedas verdadeiras. Vão ser tiradas aleatoriamente duas moedas do saco, uma a seguir à outra. Qual a probabilidade de:
   8.1. as duas moedas serem verdadeiras?
   8.2. pelo menos uma delas ser verdadeira?
   8.3. a segunda ser falsa sabendo que a primeira era verdadeira?

9. *O João tem duas moedas no bolso, sendo uma equilibrada e a outra viciada. Sabe que a probabilidade de sair cara na moeda viciada é $\frac{2}{3}$. Ele retira do bolso uma moeda ao acaso e lança-a, tendo obtido coroa. Qual a probabilidade de ter lançado a moeda viciada?

10. *Uma caixa tem 20 bolas, das quais 5 são brancas e um saco tem 15 bolas das quais algumas são brancas. Ao tirar ao acaso uma bola da caixa e uma bola do saco, a probabilidade de se obter pelo menos uma bola branca é igual a 75%. Quantas bolas brancas existem no saco?

11. Uma fábrica utiliza três máquinas diferentes para produzir um tipo de peças mas que têm níveis diferentes de eficiência. A máquina A produz metade do total da produção e as máquinas B e C dividem a restante produção em partes iguais. Cerca de 98,5% da produção da máquina A não tem qualquer defeito; a máquina B produz cerca de 2% de peças defeituosas e a máquina C tem uma eficiência de 97%.
   11.1. Selecionando aleatoriamente uma peça desse tipo produzida nessa fábrica qual é a probabilidade de que seja defeituosa?
   11.2. Foi selecionada uma dessas peças ao acaso e era defeituosa. Qual é a probabilidade de ter sido produzida pela máquina C?

Descritor	Texto de Apoio
1.1	**Comentário** Relativamente a este descritor e aos seguintes deste objetivo geral apresentam-se exemplos que podem ser propostos aos alunos para chegarem às demonstrações requeridas. Em alguns casos (como no que se segue) poderá chamar-se a atenção dos alunos para a conveniência em representar graficamente as posições numa reta numérica dos valores auxiliares considerados. 1. Considere sucessões (u_n) e (v_n) convergentes respetivamente para l e l' tais que, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$. Pretendemos provar que $l \leq l'$; para o efeito resolva as seguintes alíneas: 1.1 Suponha que $l > l'$ e, sendo $\delta = \frac{l-l'}{2}$, justifique, recordando a definição de limite de uma sucessão, que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq p$ então $u_n > l - \delta$. 1.2 Deduza da alínea anterior que, supondo $l > l'$, existe uma ordem a partir da qual $v_n > \frac{l+l\prime}{2}$, ou seja, $v_n > l' + \delta$ e conclua que, nessa hipótese, não se poderia ter $v_n \longrightarrow l'$. 1.3 Conclua da alínea anterior que $l \leq l'$.
1.2 1.3	1. Considere sucessões (u_n) e (v_n) tais que a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$. 1.1 Suponha que $\lim u_n = +\infty$, relembrando o que significa esta afirmação. Fixado um número real $L > 0$, mostre a existência de uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p$, $v_n > L$, e conclua que $\lim v_n = +\infty$. 1.2 Suponha agora que $\lim v_n = -\infty$. O que pode concluir quanto a $\lim u_n$?
1.4	1. Considere sucessões (u_n) e (v_n) convergentes com o mesmo limite l e uma sucessão (w_n) tal que, a partir de certa ordem, $u_n \leq w_n \leq v_n$. Seja $\varepsilon > 0$. 1.1 Utilizando o facto de $\lim u_n = l$, mostre que a partir de uma certa ordem p_1, $l - \varepsilon < w_n$. 1.2 Utilizando o facto de $\lim v_n = l$, mostre que a partir de uma certa ordem p_2, $w_n < l + \varepsilon$. 1.3 Conclua quanto à existência e ao valor do limite $\lim w_n$. 2. *Considere sucessões (u_n) e (v_n) convergentes com o mesmo limite l e uma sucessão (w_n) tal que, a partir de certa ordem, $u_n \leq w_n \leq v_n$. Prove que $\lim w_n = l$.
1.5 1.6	**Comentário** A demonstração dos resultados expressos nestes descritores é consequência simples dos resultados análogos para sucessões e das definições de limite de uma função.
2.1	**Informação Complementar para o professor** O Teorema dos Valores Intermédios constitui uma propriedade central das funções contínuas. A respetiva prova, que necessita em particular do princípio do supremo ou de alguma propriedade equivalente, não é requerida neste Programa, sendo aqui apresentada a título informativo.

	Dada uma função f contínua num intervalo $[a,b]$ e tal que $f(a) \neq f(b)$ (podemos supor, por exemplo, que $f(a) < f(b)$, pois, caso contrário, a demonstração seria idêntica, *mutatis mutandis*), seja $\lambda \in]f(a), f(b)[$ e $A = \{x \in [a,b]: f(x) \leq \lambda\}$. O conjunto A é não vazio ($a \in A$) e majorado (por b), pelo que admite supremo S. Tem-se $S \in [a,b]$, porque b é majorante de A e portanto, por definição de supremo, $S \leq b$ e porque, por outro lado, como $a \in A$, $a \leq S$. É fácil verificar que existe então uma sucessão (x_n) de pontos de A que converge para S. Basta observar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, por definição de supremo, $S - \frac{1}{n}$ não é majorante de A, pelo que existe pelo menos um elemento x_n desse conjunto tal que $S - \frac{1}{n} < x_n \leq S$. Pelo teorema das sucessões enquadradas, a sucessão assim construída converge para S e, por definição de A, satisfaz a $f(x_n) \leq \lambda$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Assim, por continuidade da função f, passando ao limite na desigualdade $f(x_n) \leq \lambda$, $f(S) \leq \lambda$. Tem-se $f(S) \leq \lambda < f(b)$, pelo que $S \neq b$. Por outro lado, como S é majorante de A, para todo o $x \in]S, b]$, x é estritamente superior a todos os elementos de A e portanto não pode ser elemento deste conjunto, donde, por definição de A, $f(x) > \lambda$. Passando ao limite, por continuidade de f em S, $$f(S) = \lim_{x \to S^+} f(x) \geq \lambda,$$ donde resulta que $f(S) = \lambda$ pelo que λ é um valor tomado por f num ponto S estritamente situado entre a e b (S não pode ser igual a a nem a b, já que $f(a) < f(S) < f(b)$). Para uma discussão da legitimidade de se definir uma sucessão como (x_n) acima, efetuando uma infinidade de escolhas de elementos satisfazendo a determinadas propriedades, *cf.* a "Informação Complementar para o professor" na parte final do texto de apoio ao descritor 4.3.
3.1	1. Considere sucessões (u_n) e (v_n) tais que $\lim u_n = +\infty$ e $v_n \leq 5 - u_n$ para $n \geq 10$. Indique, justificando, qual o limite de v_n. 2. Utilize o teorema das sucessões enquadradas para calcular o limite de cada uma das sucessões cujo termo geral se indica. 2.1 $u_n = \frac{\sin(n\frac{\pi}{6})}{2n+3}$ 2.2. $v_n = \frac{cos^2(n\alpha)}{2n+1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ 2.3. $w_n = \left(\frac{2n}{5n+1}\right)^n$ [*cf.* FEL12-4.3 exemplo 8.1 para outra abordagem ao cálculo deste limite] 3. Sabe-se que $\lim v_n = +\infty$ e que $w_n = \begin{cases} \frac{5}{n+1} & se \quad n < 100 \\ 2v_n & se \quad n \geq 100 \end{cases}$. Justifique que $\lim w_n = +\infty$.

4. Considere a função f definida por $f(x) = \frac{x^2+4x}{x+3}$.
   4.1 Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
   4.2 Sabe-se que uma função h é tal que $\forall x \in \mathbb{R}^+, h(x) > f(x)$. Indique o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

5. Considere a função g definida por $g(x) = \frac{\sin x}{x^2+1}$
   5.1 Determine funções f e h tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ em $\mathbb{R}$ e de modo que: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.
   5.2 Justifique que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x^2+1} = 0$.

6 *Considere funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ tais que f é limitada e $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. Mostre a existência de uma função h definida em $\mathbb{R}$ e de limite nulo tal que $\forall x \in \mathbb{R}, -h(x) \leq f(x)g(x) \leq h(x)$ e conclua que $\lim\limits_{x\to 0}\big(f(x)g(x)\big) = 0$.

7. Mostre que a sucessão de termo geral $u_n = n^4(\cos n - 2)$ tende para $-\infty$.

8. **Seja, para $x \in \mathbb{R}$, $E(x)$ a «parte inteira de x», isto é, o maior inteiro menor ou igual a x, ou seja, o único número inteiro $E(x)$ tal que $x \in [E(x), E(x) + 1[$.
   Calcule o valor de $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(xE\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

9. *Calcule o limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x+\cos x}$.

10. Considere uma função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(0) = 1$ e $f(1) = 0$. Mostre que existe $c \in]0,1[$ tal que $f(c) = c$.

11. Sejam f e g duas funções contínuas num intervalo $[a,b]$, $b > a$.
    11.1 Mostre que se $g(a) \geq f(a)$ e $f(b) \geq g(b)$ então existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = g(c)$.
    11.2 Utilize a alínea anterior para mostrar que se $g(a) = f(b)$ e $f(a) = g(b)$, então existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = g(c)$.

12. Dada uma função f continua num intervalo $[a,b]$, $b > a$, mostre que se $f(a)f(b) < 0$ a equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]a,b[$.

13. Dê um exemplo de uma função f definida num intervalo $[a,b]$, $b > a$, tal que $f(a)f(b) < 0$ e, para todo o $x \in [a,b]$, $f(x) \neq 0$.

14. Dê um exemplo de uma função f contínua no intervalo $]0,1]$ tal que:
    14.1 f não tenha máximo;
    14.2 f não tenha mínimo;
    14.3 *f não tenha nem máximo nem mínimo.

15. Considere a função real de variável real definida em $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x-1}-1}{x^2-1} & \text{se } x < 1 \wedge x \neq -1 \\ k-1 & \text{se } \quad x = 1 \\ \frac{\ln(x)}{2x-2} & \text{se } \quad x > 1, \end{cases}$$

onde k é um número real.

	15.1 *Determine k de modo que f seja contínua em $x = 1$. 15.2 **Indique o valor lógico da afirmação: «Existe um zero da função f no intervalo $[-2{,}0]$.» 16. Considere a função g real de variável real definida por $g(x) = \begin{cases} \frac{2\sin(x-1)}{\ln x} & \text{se } x > 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-7x+6} & \text{se } x < 1 \end{cases}$ Estude a continuidade da função g. 17. *Prove que de todos os círculos de diâmetro inferior a 10 existe um cuja área é igual a 50. 18. Considere a função g definida por $g(x) = x^2 e^x$ em $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$. Determine o contradomínio da função g.
4.3	**Comentário**

Nas condições enunciadas neste descritor (f duas vezes diferenciável num intervalo $I =]a, b[$, $a < b$, e $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$, $f''(c) > 0$),

$$f''(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{f'(x)}{x - c} > 0,$$

donde se conclui a existência de um intervalo da forma $]c, c + \delta[$ ($\delta > 0$) no qual f' é positiva.

Com efeito, caso contrário, é fácil verificar que existiria uma sucessão (x_n) de limite c, tal que para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x_n > c$ e $f'(x_n) \leq 0$, o que é absurdo já que, nesse caso, $\frac{f'(x_n)}{x_n - c} \leq 0$, pelo que não poderia ter-se $\lim \frac{f'(x_n)}{x_n - c} > 0$, nem, consequentemente, $\lim_{x \to c^+} \frac{f'(x)}{x - c} > 0$.

A existência da sucessão (x_n) pode ser justificada, em rigor, da seguinte forma: como estamos a supor que não existe nenhum intervalo da forma $]c, c + \delta[$ no qual f' é sempre positiva, podemos construir a sucessão (x_n), escolhendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in]c, c + \frac{1}{n}[\cap I$ tal que $f'(x_n) \leq 0$ (existe pelo menos um x_n nestas condições, já que f', por hipótese, não é positiva em todos os pontos do intervalo $]c, c + \frac{1}{n}[\cap I$). Por construção, $f'(x_n) \leq 0$, $c < x_n < c + \frac{1}{n+1}$, pelo que, pelo Teorema das sucessões enquadradas, $x_n \longrightarrow c$.

A função f é portanto crescente em $[c, c + \delta[$ pelo que, para todo o x nesse intervalo, $f(c) \leq f(x)$.

Um raciocínio análogo à esquerda de c permite mostrar que $f(c) \leq f(x)$ para todo o número real x num intervalo da forma $]c - \delta, c[$, $\delta > 0$.

A função f admite portanto um mínimo local em c.

Note-se que o mínimo é «estrito», no sentido em que $f(c) < f(x)$ para qualquer $x \neq c$ em $]c - \delta, c + \delta[$, atendendo a que as monotonias acima referidas para a função f nos intervalos $[c, c + \delta[$ e $]c - \delta, c]$ são também estritas, o que se pode justificar invocando os sinais da derivada de f em cada um desses intervalos.

Informação Complementar para o professor

A definição da sucessão (x_n) na demonstração que acabámos de apresentar envolve uma infinidade de "escolhas" de elementos satisfazendo a determinadas propriedades (uma escolha por cada $n \in \mathbb{N}$), mas sem se apresentar um processo construtivo para determinar cada x_n. A possibilidade de utilizar em Matemática sucessões assim definidas é contestada pelos matemáticos ditos "intuicionistas", os quais, por esse motivo, não aceitam as demonstrações que utilizam estes processos nem os resultados para cuja demonstração é necessário recorrer a este tipo de abordagem. A legitimação destes processos pode ser formalizada através do chamado «Axioma da escolha»; utilizando a definição geral de produto cartesiano introduzida no texto de apoio ao descritor CC12-2.4, esse axioma pode ser formulado através da asserção:

«É não vazio o produto cartesiano de uma família não vazia de conjuntos não vazios»

Ou seja, se considerarmos um produto cartesiano:

$$\prod_{j \in J} A_j$$

onde $J \neq \emptyset$ e, para cada $j \in J$, $A_j \neq \emptyset$, o referido axioma garante a existência de pelo menos um elemento desse produto cartesiano, ou seja, de uma família $\left(x_j\right)_{j \in J}$ tal que, para cada $j \in J$, $x_j \in A_j$, o que corresponde à ideia intuitiva de que podemos "escolher" um x_j em cada A_j (mesmo que J e os A_j sejam conjuntos infinitos) e com eles formar a família $\left(x_j\right)_{j \in J}$ (gráfico de uma aplicação de domínio J). No caso em que $J = \mathbb{N}$ este axioma permite justificar a existência de sucessões como a que foi definida na demonstração acima. Nas formulações da Teoria dos Conjuntos em que se admite o uso do símbolo de escolha de Hilbert (*cf.* texto de apoio ao descritor CC12-2.1) a proposição que designámos por «Axioma da escolha» é um Teorema, ou seja, pode ser demonstrada, muito simplesmente utilizando as propriedades inerentes ao uso do referido símbolo de Hilbert.

O raciocínio que utilizámos acima é semelhante ao que se utiliza para demonstrar que são equivalentes as duas definições usuais de limite de uma função num ponto, ditas "à Heine" (a adotada no presente Programa) e "à Cauchy"; mais precisamente, para demonstrar que a existência de limite à Heine implica a existência de limite à Cauchy. Prova-se que, de facto, o Axioma da escolha ou algum recurso equivalente é essencial para que essa implicação tenha lugar; assim, os matemáticos intuicionistas não aceitam a equivalência das duas definições, mas apenas que a definição de Cauchy implica a definição de Heine. Segundo Cauchy, diz-se que uma função real de variável real f tem limite l num ponto a aderente ao respetivo domínio D_f se para qualquer $\delta > 0$ existir $\varepsilon > 0$ tal que, para todo o $x \in D_f$,

$$|x - a| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l| < \delta.$$

É bastante óbvio, atendendo á definição de limite de uma sucessão, que, admitida esta condição, se (x_n) for uma sucessão de elementos de D_f convergindo para a, então $f(x_n)$ tende para l; ou seja, se uma função f tiver limite l em a "à Cauchy" então terá limite l em a "à Heine". Já para demonstrar a recíproca, utilizando o método de contrarrecíproco, supondo que f não tem limite l em a "à Cauchy", podemos utilizar o Axioma da escolha para considerar uma sucessão (x_n) de elementos de D_f (analogamente ao que atrás foi feito) que tende para a mas tal que $f(x_n)$ não tende para l, pelo que f não tem limite l em a "à Heine". Esta última demonstração depende assim diretamente do referido Axioma da escolha e prova-se que, de facto, essa dependência não é fortuita, mas antes que a referida equivalência das duas

	definições de limite é em certo sentido equivalente ao referido axioma (qualquer das duas proposições pode ser tomada como axioma, excluindo a outra, de modo a obter-se uma axiomática equivalente).
4.4	**Comentário** Dada uma função f diferenciável num intervalo I e dados quaisquer três pontos P, Q e R do respetivo gráfico, de abcissas em I, $x_P < x_Q < x_R$, o Teorema de Lagrange garante a existência de pontos $c_1 \in]x_P, x_Q[$ e $c_2 \in]x_Q, x_R[$ tais que $f'(c_1) = \frac{f(x_Q)-f(x_P)}{x_Q-x_P}$ e $f'(c_2) = \frac{f(x_R)-f(x_Q)}{x_R-x_Q}$. Observando que $c_1 < c_2$, obtém-se assim que o gráfico de f tem a concavidade virada para cima (respetivamente para baixo) se f' for crescente (respetivamente decrescente). Inversamente, se f tem a concavidade virada para cima, dados pontos $x < y$ do respetivo domínio e $h > 0$ tal que $x + h < y$, obtém-se, considerando os pontos do gráfico de f de abcissas $x, x + h, y$ e $y + h$, que $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} < \frac{f(y)-f(x+h)}{y-(x+h)} < \frac{f(y+h)-f(y)}{h}$, donde se conclui, por passagem ao limite quando $h \to 0$, que $f'(x) \leq f'(y)$. Na verdade, é fácil observar que esta desigualdade é estrita. Caso contrário, como já ficou provado que f' é crescente no sentido lato, f' seria constante no intervalo $[x, y]$, o que contradiz, por nova aplicação do Teorema de Lagrange, a hipótese feita sobre o sentido da concavidade do gráfico de f.
5.1	1. Mostre que o polinómio $P(x) = 18x^6 - 3x^4 + 1$ tem, no máximo, um zero no intervalo $\left[0, \frac{1}{3}\right]$. 2. Mostre que cada uma das seguintes equações tem uma única solução e determine-a: 2.1 $e^x = 1 + x$; [Sugestão: estude a função $f(x) = e^x - 1 - x$] 2.2 $\sin x = x$. [Sugestão: estude a função $f(x) = \sin x - x$] 3. *Um polinómio P de grau 5 tem 5 zeros distintos. Mostre que P' tem 4 zeros. 4. **Admitindo que arcsin é diferenciável, mostre que para todo o $x \in]-1,1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 5. **Admitindo que arctan é diferenciável, mostre que para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Utilize este resultado para mostrar que para todo o $x > 0$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. 6. Considere as funções f e g definidas pelas expressões $f(x) = \ln(3x + 2)$ e $g(x) = e^{-x}$. 6.1 Justifique que f é estritamente crescente e que g é estritamente descrescente, começando por determinar os respetivos domínios. 6.2 Justifique que as funções f e g são bijetivas quando se toma para conjunto de chegada o respetivo contradomínio, forneça uma expressão para f^{-1} e g^{-1} e mostre que f^{-1} é estritamente crescente e que g^{-1} é estritamente decrescente. 6.3 Esboce os gráficos de f, g, f^{-1}e g^{-1}.

5.2

1. Esboce o gráfico das funções definidas pelas seguintes expressões:
   1.1 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
   1.2 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$
   1.3 $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$
   1.4 $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$
   1.5 $f(x) = \sqrt{x^2-1}$
   1.6 $f(x) = \frac{|x+3|}{2x+1}$

5.3

Nota: Alguns dos seguintes exercícios só devem ser propostos aos alunos após o estudo das funções trigonométricas, exponenciais ou logarítmicas.

1. Mostre que se x for um número real não negativo então $x > x^3$ se e somente se x estiver situado estritamente entre 0 e 1. Justifique que existe um e um só número positivo que excede o seu cubo no máximo valor possível e determine-o bem como esse excesso máximo.

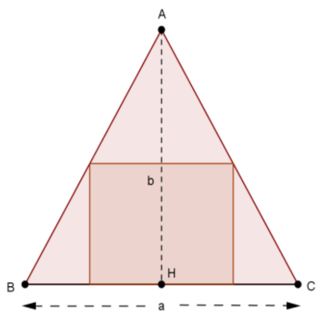
2. Considere um triângulo isósceles $[ABC]$ em que $\overline{AB} = \overline{BC} = 4$. Sendo $\alpha = B\hat{A}C$ (medido em radianos), justifique que existe um valor real de α para o qual é máxima a área do triângulo e determine esse valor.

3. **Mostre que de todas as retas de declive negativo que passam pelo ponto $A(a,b), a > 0, b > 0$, existe uma que determina com os eixos coordenados um triângulo de área mínima. Determine-a, mostre que essa reta é paralela à reta r que passa pelos pontos de coordenadas $(0,b)$ e $(a,0)$ e que, consequentemente, a reta r e as retas paralelas aos eixos que passam pelo ponto A decompõem esse triângulo em quatro triângulos iguais.

4. *Considere a função f definida por $f(x) = e^{x^2} - ex^2 - 2$.
   4.1 Determine para que valores de k a equação $f(x) = k$ é impossível.
   4.2 A condição $f(x) > a$ tem como conjunto solução a reunião de três intervalos disjuntos. Determine os possíveis valores reais de a.

5. Considere a função g definida por $g(x) = e^{-2x}$, P um ponto de abcissa positiva pertencente ao respetivo gráfico e Q a projeção ortogonal de P sobre o eixo Ox. Determine para que valor real da abcissa de P é máxima a área do triângulo $[OPQ]$.

6. Numas águas-furtadas, pretende-se abrir uma janela retangular de área máxima. A janela deve ser aberta numa fachada em forma de triângulo isósceles, e dois dos respetivos lados devem ser paralelos à base do triângulo, como se ilustra na figura. Representando esta fachada por $[ABC]$, $\overline{AB} = \overline{AC}$, determine as dimensões da janela em função da base $a = \overline{BC}$ e da altura $b = \overline{AH}$ do triângulo (onde H é, portanto, o ponto médio do segmento de reta $[BC]$).



	7. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = e^{2x} - x^2$. 7.1 Determine o declive da reta secante ao gráfico de f nos pontos A e B de abcissa, respetivamente, -1 e 0. 7.2 Justifique a existência de um ponto C do gráfico de f em que a reta tangente tem declive igual ao da reta AB. 7.3 *Determine, utilizando a calculadora gráfica, um valor, aproximado às centésimas, da abcissa de um ponto C nas condições da alínea anterior, justificando a validade do resultado obtido [ver comentário relativo à utilização das calculadoras que figura no descritor 5.5].
5.4	1. Uma partícula desloca-se sobre uma reta numérica cuja unidade é o metro. A abcissa (nessa reta) da respetiva posição no instante t, em segundos, é dada por $p(t) = 4t^2 + 20t$. 1.1 Determine a velocidade média entre os instantes $t = 0$ e $t = 2$. 1.2 Calcule a velocidade no instante $t = 2$. 1.3 Supondo que a partícula esteve em movimento entre os instantes $t = 0$ e $t = 8$, qual a velocidade máxima atingida? Qual a aceleração da partícula nesse instante? 2. Um ponto P desloca-se numa reta numérica no intervalo de tempo $I = [0,4[$ (medido em segundos), de tal forma que a respetiva abcissa, como função de $t \in [0,4[$, é dada pela expressão $x(t) = 5\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right)$. 2.1 Indique a abcissa do ponto P nos instantes $t = 0$ e $t = 2$. 2.2 Determine a velocidade média do ponto P nos dois primeiros segundos. 2.3 Determine a velocidade no instante $t = 3$. 2.4 Estude a variação da velocidade do ponto P, determinando os instantes em que atinge a velocidade máxima e indicando a aceleração nesses instantes. 2.5 Determine a aceleração média entre os instantes $t = 2$ e $t = 3$. 3. Um projétil foi lançado verticalmente a partir de um avião e a sua altura a (em metros) em função do tempo t decorrido após o lançamento (em segundos) é dada por $a(t) = -5t^2 + 100t + 1500$. 3.1 Determine a altura máxima atingida pelo projétil. 3.2 Determine a velocidade média do projétil nos primeiros 5 segundos. 3.3 Determine a velocidade no instante em que atingiu o solo. 4. *Uma partícula α é introduzida num acelerador linear de partículas e submetida desde o instante inicial a uma aceleração constante de tal forma que a respetiva velocidade sofre um acréscimo de 1000m/s para 5000m/s em $0{,}001$ segundos, instante em que choca com a parede do acelerador. Determine: 4.1 a aceleração da partícula. 4.2 o espaço percorrido pela partícula no referido período de $0{,}001$ segundos.
5.5	**Comentário** Uma vez que as calculadoras gráficas e outros recursos tecnológicos apenas permitem obter valores (em geral aproximados) de abcissas e ordenadas de um número finito de pontos do gráfico de uma dada função, o facto de se observar com um desses recursos uma interseção de representações de gráficos de duas dadas funções f e g não garante só por si que os gráficos se intersetem de facto ou que as coordenadas desses pontos de interseção, observados nas

referidas representações gráficas, sejam aproximações adequadas das coordenadas de eventuais reais pontos de interseção dos gráficos de f e g.

Inversamente, o facto de não se observar nenhuma interseção numa dessas representações, não garante que os gráficos não se intersetem de facto no intervalo considerado. Como exemplo da primeira situação basta pensar no gráfico da função e^x; como é sabido, não interseta o eixo dos xx, mas é fácil escolher um intervalo de extremos negativos ainda passível de ser representado nas calculadoras gráficas e no qual o gráfico da função se confunde com um segmento do referido eixo dos xx, mesmo alterando arbitrariamente as escalas dos eixos, dadas as limitações acima referidas destes meios tecnológicos. Quanto às outras situações, é possível que se observem determinadas interseções que de facto representam apenas pontos suficientemente próximos dos gráficos para que se confundam na referida representação (como no caso referido da exponencial e da constante igual a 0) enquanto existem interseções reais dos gráficos em regiões em que nada se deteta na representação gráfica porque, por exemplo, uma ou ambas as funções sofrem "grandes oscilações" na vizinhança de determinados pontos, mas que não são detetadas por ocorrerem em intervalos do domínio situados entre dois valores consecutivos das abcissas dos pontos dos gráficos efetivamente representados no ecrã.

No entanto, é possível em muitos casos garantir *a priori* que o que se observa nas representações gráficas obtidas, por exemplo, nas calculadoras, corresponde, de facto a aproximações, até determinada ordem decimal, de abcissas e ordenadas de pontos de interseção de gráficos de duas dadas funções f e g. Um dos instrumentos teóricos que pode ser utilizado para esse efeito é o Teorema dos valores intermédios para funções contínuas; por exemplo, se f e g forem contínuas em determinado intervalo $[a, b]$ e $f(a) < g(a)$, mas $f(b) > g(b)$ então é seguro que os gráficos de f e g se intersetam em pelo menos um ponto do intervalo $]a, b[$. Com efeito, nesse caso, a função $f - g$ é negativa em a e positiva em b, pelo que o referido Teorema garante que tem de se anular em algum ponto de $]a, b[$. Nesse caso, a e b são, portanto, em particular, aproximações, respetivamente por defeito e por excesso, de qualquer solução da equação $f(x) = g(x)$ nesse intervalo, como é óbvio. Assim, se a e b forem suficientemente próximos, podemos obter uma aproximação de uma tal solução (que sabemos *a priori* existir), com determinado número de casa decimais exatas.

Deste modo, com a informação *a priori* de que as funções f e g são contínuas, podemos depois utilizar um recurso tecnológico para examinar os gráficos de f e g e, se detetarmos intervalos como o intervalo $[a, b]$ acima referido, podemos concluir que determinados pontos de interseção observados nas representações obtidas para os gráficos de f e g têm por abcissa aproximações de soluções da equação $f(x) = g(x)$ até uma determinada casa decimal.

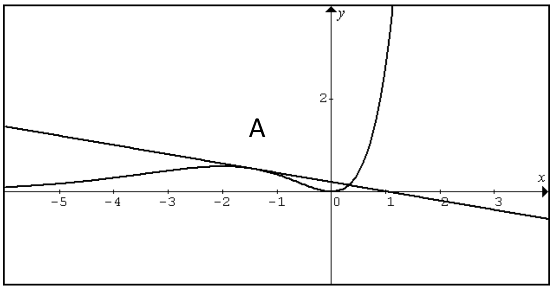
Note-se que, apenas com as informações referidas, não é ainda possível concluir, em geral, que os valores das ordenadas dos pontos de interseção observados nas representações gráficas sejam aproximações adequadas dos valores de f e g nos reais pontos de interseção dos gráficos, já que os valores dessas funções poderiam oscilar fortemente na vizinhança de uma solução da referida equação $f(x) = g(x)$. Um caso interessante em que, pelo contrário, tais conclusões se podem extrair ocorre quando, além do que se supôs, f e g são estritamente monótonas em $[a, b]$, já que, nesse caso, os valores de f e g em a e b enquadram eles próprios os valores das funções numa solução da referida equação; além disso, essa monotonia permite garantir a unicidade do ponto de interseção dos gráficos no referido intervalo e utilizar com confiança os resultados observados em intervalos contendo o ponto de interseção, tão pequenos quanto a capacidade da calculadora o permitir, já que nesses intervalos teremos os mesmos resultados de monotonia e de comparação das duas funções nos respetivos extremos que supusemos para o intervalo inicial $[a, b]$.

Nos exemplos seguintes exploram-se algumas situações afins das que se acabaram de descrever.

1. Considere as funções f e g definidas por $f(x) = \ln(2x^2 - 1)$ e $g(x) = 2 - e^{(x+1)^2}$. Pretende-se estudar as possíveis interseções dos gráficos de f e g no intervalo $]-2,-1[$, obtendo valores aproximados para as abcissas e ordenadas dos pontos de interseção. Para o efeito resolva as seguintes alíneas:
   1.1 Mostre que a função f é decrescente e a função g crescente no intervalo $]-2,-1[$.
   1.2 *Utilizando a alínea anterior, prove que os gráficos das funções se intersetam num único ponto de abcissa no intervalo $]-2,-1[$ e, utilizando a calculadora gráfica, determine um valor aproximado às centésimas para as coordenadas desse ponto, explicando por que razão se pode garantir a validade do resultado obtido.

2. Considere as funções f e g definidas por $f(x) = 1 + 2\sin x$ e $g(x) = \frac{x+1}{2}$.
   2.1 Determine o contradomínio de f.
   2.2 Justifique que se o gráfico de g intersetar o gráfico de f, a abcissa do ponto de interseção pertencerá ao intervalo $[-3,5]$.
   2.3 Considere a função h definida por $h(x) = f(x) - g(x)$. Determine $h(-3), h(-2)$, $h(0)$ *e* $h(3)$ *e* identifique três intervalos disjuntos de números reais aos quais pertença pelo menos um zero da função h.
   2.4 Utilizando a calculadora gráfica, determine valores aproximados às décimas para as soluções da equação $f(x) = g(x)$.

3. No gráfico junto está representado o gráfico da função f definida por $f(x) = x^2e^x$ e uma reta t com declive $-0{,}2$ e tangente ao gráfico de f no ponto A de abcissa no intervalo $]-2,-1[$.



   3.1 *Prove que o ponto do gráfico que admite reta tangente com o menor declive possível tem abcissa $-2+\sqrt{2}$ e indique um valor aproximado às décimas desse declive.
   3.2 Justifique que existe pelo menos um ponto do gráfico no qual a reta tangente tem declive $-0{,}2$ e determine as coordenadas do ponto A, recorrendo à calculadora gráfica e apresentando valores aproximados às centésimas.

4. Prove que a equação $\sin(x) = x + 1$ tem uma solução no intervalo $[-\pi, 0]$ e, utilizando uma calculadora gráfica, indique, justificando, um valor, aproximado às décimas, dessa raiz.

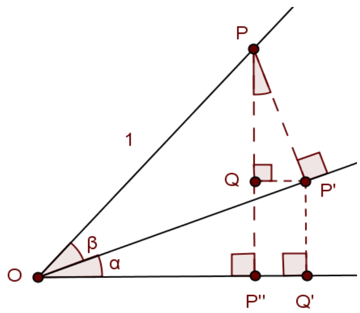
Descritor	Texto de Apoio
1.1	**Comentário**

Antes de se abordarem as demonstrações das fórmulas trigonométricas para o seno e o cosseno da soma de ângulos é conveniente ter bem presente como se obtêm imediatamente as medidas de comprimento dos catetos de um triângulo retângulo através da medida de comprimento da hipotenusa e do seno e cosseno de um dos ângulos agudos do triângulo. É óbvio, da própria definição destas razões trigonométricas, que se for dado um triângulo $[ABC]$, retângulo em B, e sendo α o ângulo interno de vértice em A e h a medida de comprimento da hipotenusa, então a medida de comprimento do cateto adjacente a α é dada por $h\cos\alpha$ e a medida de comprimento do cateto oposto a α é dada por $h\sin\alpha$. Ou seja, em certo sentido podemos dizer que para obter o comprimento da projeção ortogonal de um segmento em determinada direção basta multiplicar a medida do comprimento do segmento pelo cosseno do (menor) ângulo entre a reta suporte do segmento e essa direção e para obter o comprimento da projeção do mesmo segmento numa direção perpendicular à inicial basta multiplicar a medida do respetivo comprimento pelo seno do referido ângulo. Assim, em construções envolvendo direções mutuamente perpendiculares torna-se fácil exprimir rapidamente o comprimento de projeções de segmentos em pares de tais direções usando apenas razões trigonométricas de um ângulo.

As fórmulas trigonométricas expressas neste descritor e no seguinte, em conjunto com as que permitem calcular as razões trigonométricas de um ângulo de amplitude igual a metade da amplitude de um outro ângulo do qual se conhecem as razões trigonométricas (facilmente dedutíveis destas), permitiram, desde a Antiguidade (com Hiparco, por exemplo, matemático da Escola de Alexandria, que viveu no século II a.C.) a elaboração de tabelas trigonométricas com precisão suficiente para as inúmeras aplicações em que desde então se utilizou a Trigonometria, nomeadamente em Astronomia, Cartografia, etc. Nos exemplos 4, 5 e 6 do texto de apoio ao descritor 4.1 abaixo exploram-se estas questões, estabelecendo-se as fórmulas para o seno e cosseno “do meio ângulo” e requerendo-se a construção de uma pequena tabela trigonométrica, partindo de valores exatos facilmente dedutíveis de alguns ângulos e utilizando em seguida fórmulas trigonométricas para se passar para os restantes ângulos da tabela.

Apresentam-se em seguida exercícios tendo por objetivo a justificação das referidas fórmulas para o seno e o cosseno da soma de ângulos; nestes exemplos utilizam-se apenas argumentos de geometria sintética mas no texto de apoio ao descritor 1.2 apresenta-se outro exemplo em que se obtêm as fórmulas (tanto as que constam do descritor 1.1 como do descritor 1.2) utilizando o conceito e propriedades do produto interno de vetores.

1. Considere dois ângulos adjacentes α e β de vértice O cuja união é um ângulo agudo. Pretendemos deduzir as fórmulas que permitem calcular o seno e o cosseno de $\alpha+\beta$ em função do seno e do cosseno de α e β. Para o efeito, no lado do ângulo β que não é comum ao ângulo α, considere um ponto P tal que $\overline{OP}=1$, sejam P' e P'' as projeções ortogonais do ponto P nas retas suporte respetivamente do lado comum aos dois ângulos e do outro lado do ângulo α e resolva as seguintes questões:



1.1 Justifique que os pontos P' e P'' estão, respetivamente, nos referidos lados dos ângulos β e α e que $\overline{PP''} = \sin(\alpha+\beta)$, $\overline{OP''} = \cos(\alpha+\beta)$, $\overline{PP'} = \sin\beta$ e $\overline{OP'} = \cos\beta$.

1.2 Justifique que o ângulo $P'PP''$ é igual ao ângulo α.

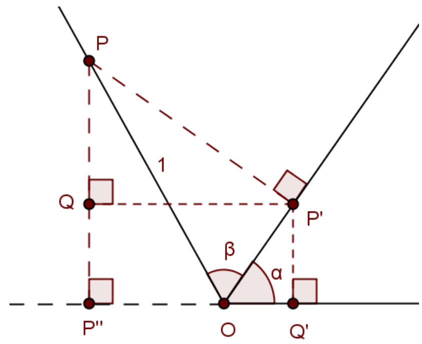
1.3 Considere o ponto Q, projeção ortogonal do ponto P' na reta PP'', justifique que fica situado entre os pontos P e P'' e, utilizando o triângulo retângulo $[PQP']$, prove que $\overline{PQ} = \sin\beta\cos\alpha$.

1.4 Considere o ponto Q' projeção ortogonal do ponto P' na reta OP'', justifique que o ponto P'' fica situado entre os pontos O e Q', utilizando o triângulo retângulo $[OQ'P']$, prove que $\overline{P'Q'} = \cos\beta\sin\alpha$ e conclua que $\overline{QP''} = \cos\beta\sin\alpha$.

1.5 Conclua das alíneas anteriores que $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \, . \cos\beta + \cos\alpha \, . \sin\beta$.

1.6 Utilizando novamente os triângulos retângulos $[PQP']$ e $[OQ'P']$ prove que $\overline{P''Q'} = \overline{QP'} = \sin\beta\sin\alpha$, que $\overline{OQ'} = \cos\beta\cos\alpha$ e conclua que $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \, . \cos\beta - \sin\alpha \, . \sin\beta$.

2 **Considere dois ângulos agudos adjacentes α e β, de vértice O, cuja união é um ângulo obtuso. Utilizando uma construção idêntica à do exercício 1, ilustrada na figura ao lado, e as extensões a ângulos obtusos das definições do seno e do cosseno, demonstre que $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \, . \cos\beta + \cos\alpha \, . \sin\beta$ e que $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \, . \cos\beta - \sin\alpha \, . \sin\beta$, começando por justificar que o ângulo $PP'Q$ é igual ao ângulo $OP'Q'$ e comparando os respetivos seno e cosseno com o seno e o cosseno do ângulo α.



3 *Com base nos resultados do exercício 1, mostre que dados dois ângulos adjacentes α e β, de vértice O, α obtuso, cuja união é um ângulo convexo, podem obter-se, também para estes ângulos, as fórmulas $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \, . \cos\beta + \cos\alpha \, . \sin\beta$ e $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \, . \cos\beta - \sin\alpha \, . \sin\beta$, começando por exprimir α como $\alpha' + \rho$, α' agudo e ρ reto, comparando o seno e o cosseno de $\alpha+\beta$ com o seno e o cosseno de $\alpha'+\beta$ e o seno e o cosseno de α com o seno e o cosseno de α'.

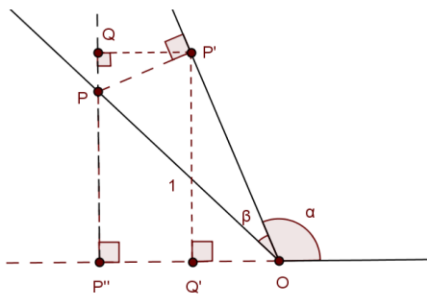
4 **Considere dois ângulos adjacentes α e β, de vértice O, α obtuso, cuja união é um ângulo convexo. Utilizando uma construção idêntica à dos exercícios 1 e 2, ilustrada na figura ao lado, e as extensões a ângulos obtusos das definições do seno e do cosseno,

4.1 Justifique que o ângulo $PP'Q$ é igual ao ângulo $OP'Q'$ e compare os respetivos seno e cosseno com o seno e o cosseno do ângulo α.

4.2 Demonstre que:

4.2.1 $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \, . \cos\beta + \cos\alpha \, . \sin\beta$

4.2.2 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \, . \cos\beta - \sin\alpha \, . \sin\beta$



Comentário

Uma vez demonstrada, para quaisquer ângulos α e β tais que $\alpha+\beta$ é um ângulo convexo, a relação $\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha \, . \sin\beta + \sin\alpha \, . \cos\beta$, também seria possível provar rapidamente a identidade análoga para o cosseno da soma utilizando as igualdades referidas no descritor 1.13. Com efeito, sendo ρ um ângulo reto:

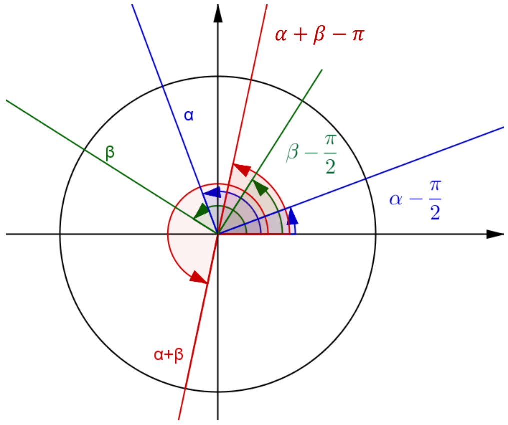
	• Se $\alpha+\beta$ é um ângulo agudo (em particular α e β são agudos): $\cos(\alpha+\beta) \ = \sin(\alpha+\beta+\rho) \ = \sin\alpha\,.\cos(\beta+\rho)+\cos\alpha\,.\sin(\beta+\rho)$. Como $\beta+\rho$ é obtuso, $\cos(\beta+\rho)=-\cos(\rho-\beta)=-\sin\beta$ e $\sin(\beta+\rho)=\sin(\rho-\beta)=\cos\beta$. • Se $\alpha+\beta$ é obtuso (em particular $2\rho-\ (\alpha+\beta)$ é agudo): $\cos(\alpha+\beta) \ = -\cos(2\rho-\ \alpha-\beta)=-\sin(3\rho-\ \alpha-\beta)$. Um dos ângulos α ou β é agudo. Suponhamos que é o ângulo α. Então, $-\sin(3\rho-\ \alpha-\beta)=-\sin\big((\rho-\ \alpha)+(2\rho-\beta)\big)=$ $=-\sin(\rho-\alpha)\,.\cos(2\rho-\beta)-\cos(\rho-\alpha)\,.\sin(2\rho-\beta)$ $=-\cos\alpha\,.(-\cos\beta)-\sin\alpha\,.\sin\beta$. Em ambos os casos, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\,.\cos\beta-\sin\alpha\,.\sin\beta$.
1.2	**Comentário** Dado um ângulo convexo α de amplitude superior à de um ângulo convexo β e sendo γ tal que $\beta+\gamma=\alpha$, ou seja, por definição, tal que $\gamma=\alpha-\beta$ (γ, obviamente, é convexo), as fórmulas enunciadas neste descritor são equivalentes às igualdades (1) $\cos\gamma=\cos(\gamma+\beta)\cos\beta+\sin(\gamma+\beta)\sin\beta,\ \sin\gamma=\sin(\gamma+\beta)\cos\beta-\cos(\gamma+\beta)\sin\beta$, que podem ser facilmente verificadas utilizando as identidades referidas no descritor 1.1 e a fórmula fundamental da trigonometria. Por exemplo: $\cos(\gamma+\beta)\cos\beta+\sin(\gamma+\beta)\sin\beta$ $=(\cos\gamma\cos\beta-\sin\gamma\sin\beta)\cos\beta+(\sin\gamma\cos\beta+\cos\gamma\sin\beta)\sin\beta$ $=\cos\gamma\cos^2\beta-\sin\gamma\sin\beta\cos\beta+\sin\gamma\cos\beta\sin\beta+\cos\gamma\sin^2\beta$ $=\cos\gamma\,(\cos^2\beta+\sin^2\beta)=\cos\gamma$ De modo análogo, admitindo os resultados expressos no descritor 1.2 seria fácil provar as fórmulas do descritor 1.1. Com as notações acima introduzidas, estas últimas fórmulas podem escrever-se (para a soma dos ângulos γ e β): (2) $\cos\alpha=\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta,\sin\alpha=\sin(\alpha-\beta)\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)\sin\beta$ o que pode ser verificado reproduzindo, *mutatis mutandis*, os cálculos anteriores, relativos às fórmulas em (1), desde que se admitam os resultados do descritor 1.2. Assim, recorrendo também aos argumentos apresentados na parte final do texto de apoio ao descritor 1.1, basta demonstrar uma das fórmulas em (1) ou em (2) para obter as restantes e portanto todas as que constam dos descritores 1.1 e 1.2. No exemplo seguinte explora-se um método de demonstração da primeira fórmula em (1), acima, que tira partido da noção e propriedades do produto interno de vetores do plano. Para que a alínea 1.2 possa ser resolvida com facilidade é conveniente fazer preceder a resolução deste exercício de considerações como as que se acabaram de apresentar. 1. Considere dois ângulos convexos γ e β tais que $\alpha=\gamma+\beta$ é um ângulo convexo. Fixado um referencial ortonormado do plano considere os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de coordenadas respetivamente $(\cos\alpha\,,\sin\alpha)$ e $(\cos\beta\,,\sin\beta)$. 1.1 Mostre que o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem amplitude igual à de γ e obtenha uma equação envolvendo razões trigonométricas dos ângulos α, β e γ exprimindo o

	produto interno $\vec{u}.\vec{v}$ de dois modos distintos: fazendo intervir o ângulo entre os dois vetores e utilizando diretamente as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. 1.2 *Deduza da alínea anterior as fórmulas trigonométricas para a soma e diferença de ângulos, no quadro dos ângulos convexos.

1.3

Comentário

Tendo em conta as fórmulas conhecidas para ângulos convexos, estas igualdades generalizadas são consequências simples da definição do seno e do cosseno de um número real.



Por exemplo, tomando $\alpha, \beta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, por definição,

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= -\sin(\alpha+\beta-\pi)\\
&= -\sin\left(\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= -\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)\\
&\quad -\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right) =\\
&= \sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha.
\end{aligned}
$$

Estas fórmulas generalizadas também poderiam ser obtidas invocando as propriedades do produto interno de vetores, por um processo análogo ao utilizado no exemplo do texto de apoio ao descritor 1.2. Inversamente, uma vez demonstradas estas fórmulas generalizadas (o que, como se viu, também pode ser feito sem invocar conhecimentos de cálculo vetorial) poderiam ser utilizadas para obter a expressão do produto interno de dois vetores do plano a partir das respetivas coordenadas, adotando, em certo sentido, o caminho inverso ao descrito no referido exemplo. Para o efeito bastaria notar que, dados dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do plano podemos sempre representá-los na forma:

$$\vec{u} = \|\vec{u}\|\overrightarrow{u'}\,, \vec{v} = \|\vec{v}\|\overrightarrow{v'},$$

onde $\overrightarrow{u'}$ e $\overrightarrow{v'}$ são vetores de norma 1 e têm portanto coordenadas (em dado referencial ortonormado) da forma $(\cos\alpha\,,\sin\alpha)$ e $(\cos\beta\,,\sin\beta)$ para certos ângulos de medida de amplitude respetivamente α e β em radianos, sendo então o produto interno dos dois vetores dado por:

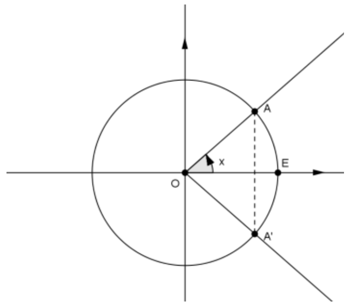
$$
\begin{aligned}
\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha-\beta) &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|(\cos\alpha\,.\cos\beta+\sin\alpha\,.\sin\beta)\\
&= \|\vec{u}\|\cos\alpha\,.\|\vec{v}\|\cos\beta+\|\vec{u}\|\sin\alpha\,.\|\vec{v}\|\sin\beta = u_1v_1+u_2v_2
\end{aligned}
$$

onde (u_1, u_2) e (v_1, v_2) são as coordenadas respetivamente de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no referido referencial.
A partir desta fórmula para o cálculo do produto interno seria agora possível voltar a obter a conhecida propriedade algébrica do produto interno relativamente à soma de vetores (*cf.* descritor GA11-2.9) que no 11.º ano foi utilizada precisamente para em seguida demonstrar a fórmula para o cálculo do produto interno a partir das coordenadas.

2.1

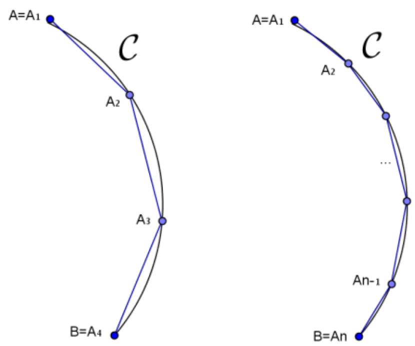
Informação Complementar para o professor

Consideremos, fixado um referencial ortonormado, o ângulo orientado de medida $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ radianos cujo lado origem coincide com o semieixo positivo das abcissas.
Consideremos ainda a interseção A do lado extremidade deste ângulo com a circunferência trigonométrica e o ponto A' simétrico de A relativamente ao eixo da abcissas.



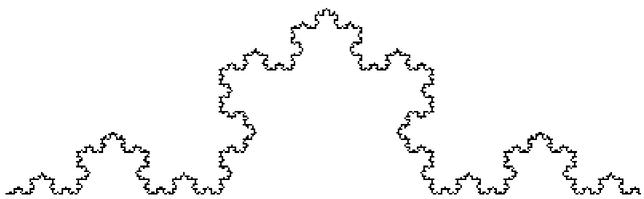
É bastante intuitivo reconhecer que uma corda tem comprimento inferior ao arco que subtende. Assim, sendo $2\sin x$ a medida do comprimento de $[AA']$ e, por definição de radiano, $2x$ a medida do comprimento do arco AA' conclui-se que $2\sin x \leq 2x$, ou seja, que $\sin x \leq x$.

Este resultado pode ser tornado mais rigoroso se definirmos adequadamente o que se entende por comprimento de um arco. Em geral, o comprimento $l(\mathcal{C})$ de uma linha $\mathcal{C}$ de extremidades A e B, é definido como o supremo dos comprimentos das linhas poligonais de extremidades A e B cujos vértices pertencem a $\mathcal{C}$, e estão ordenados por um processo que corresponde intuitivamente a um percurso ao longo da linha em determinado sentido, adiante designadas por «linhas poligonais inscritas em $\mathcal{C}$».



Este conceito já foi abordado no caderno de apoio do 11.º ano, a propósito do descritor TRI11-6.1, no caso particular de arcos de circunferência e, nesse caso, que é o que será invocado para obter o resultado expresso neste descritor, a "ordenação dos vértices da linha poligonal" pode ser facilmente definida através da ordenação de ângulos ao centro da circunferência, como se explica no referido texto de apoio.

Note-se que nada impede, à partida, que um tal supremo não exista. Nesse caso, existem linhas poligonais inscritas em $\mathcal{C}$ de medida de comprimento arbitrariamente grande. Diz-se então que a linha $\mathcal{C}$ tem «comprimento infinito».

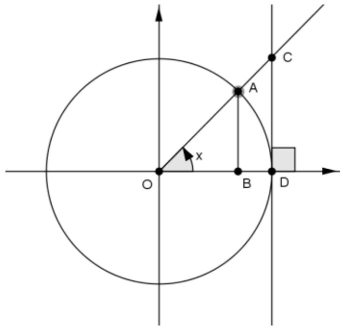


É por exemplo o caso da linha conhecida como «floco de von Koch», ou «curva de Koch», que é uma linha contínua obtida com "limite uniforme" de uma sucessão de linhas poligonais nela inscritas, das quais se apresenta um exemplar na figura acima, e que têm comprimentos a tender para mais infinito.

Não é, no entanto, o caso dos arcos de circunferência, como iremos confirmar mais adiante.

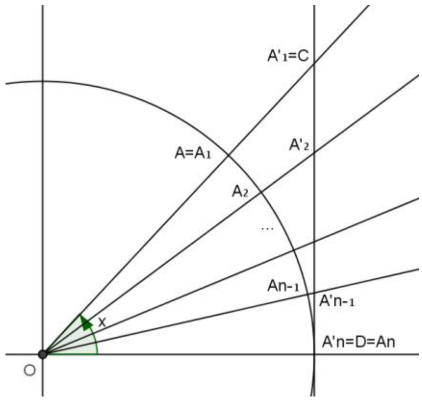
É imediato, com esta definição, que a medida de comprimento de qualquer linha poligonal inscrita em $\mathcal{C}$ é inferior ou igual à medida de comprimento de $\mathcal{C}$. Sendo $[AA']$, em particular, uma linha poligonal inscrita no arco AA', $\overline{AA'} \leq l\left(\widehat{AA'}\right)$ o que justifica a desigualdade acima obtida: $\sin x \leq x$, para $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Resta-nos ainda verificar que $\tan x \geq x$.



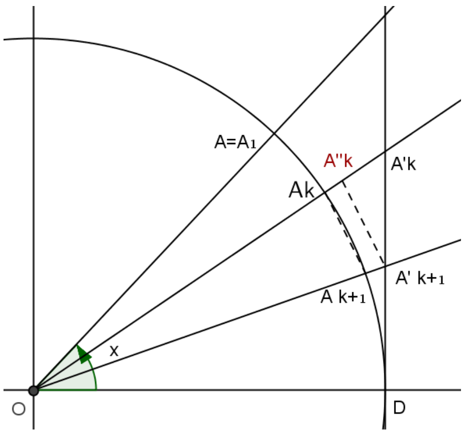
Esta desigualdade é relativamente imediata fazendo considerações sobre as áreas. Designando por B a projeção ortogonal de A no eixo das abcissas e por C o ponto da semirreta $\dot{O}A$ cuja projeção ortogonal no eixo das abcissas é o ponto $D(1{,}0)$, a medida da área do triângulo $[OCD]$ é superior à do setor circular OAD. Tem-se portanto $\frac{1}{2}\tan x \geq \frac{x}{2}1^2$, ou seja, $\tan x \geq x$.

Este último resultado pode igualmente ser obtido recorrendo diretamente à definição de comprimento do arco $\widehat{AD}$, evitando-se assim o recurso a propriedades das áreas que, sendo bastante intuitivas, requerem, para a respetiva justificação rigorosa, uma teoria mais complexa.



Traçando uma sequência de $n \geq 2$ semirretas S_k ($1 \leq k \leq n$) de origem em O e de declive decrescente, com $S_1 = \dot{O}C$ e $S_n = \dot{O}D$, designando por A_k e A'_k as interseções respetivamente de S_k com o arco $\widehat{AD}$ e com o segmento de reta $[CD]$, poderá mostrar-se que para $1 \leq k < n$, $\overline{A_kA_{k+1}} < \overline{A'_kA'_{k+1}}$. Com efeito, fixado k ($1 \leq k < n$) o segmento $[A_kA_{k+1}]$é "base" do triângulos isósceles $[OA_kA_{k+1}]$; além disso, considerando o ponto A''_k da semirreta $\dot{O}A_k$tal que $\overline{OA''_k} = \overline{OA'_{k+1}}$, o triângulo $[OA''_kA'_{k+1}]$ é um triângulo isósceles semelhante ao triângulo $[OA_kA_{k+1}]$ (pelo critério LAL), pelo que, em particular, é agudo o ângulo $OA'_{k+1}\,A''_k$.

Em contrapartida é obtuso o ângulo $OA'_{k+1}A'_k$ por ser ângulo externo adjacente a um dos ângulos agudos do triângulo retângulo $[ODA'_{k+1}]$, pelo que o ponto A''_k situa-se entre o ponto O e o ponto A'_k.



Então temos, por um lado $\overline{A'_kA'_{k+1}} > \overline{A''_kA'_{k+1}}$, já que o lado $[A'_kA'_{k+1}]$ do triângulo $[A'_kA''_kA'_{k+1}]$ nele se opõe ao ângulo obtuso $A'_kA''_kA'_{k+1}$ (suplementar do ângulo agudo $OA''_kA'_{k+1}$), pelo que é o maior dos lados desse triângulo e, por outro, $\overline{A''_kA'_{k+1}} \geq \overline{A_kA_{k+1}}$, pela semelhança dos triângulos isósceles $[OA''_kA'_{k+1}]$ e $[OA_kA_{k+1}]$ (com efeito, para $1 \leq k < n-1$, tem-se obviamente $\overline{OA'_{k+1}} > \overline{OA_{k+1}}$ porque $[OA'_{k+1}]$ é hipotenusa do triângulo retângulo $[ODA'_{k+1}]$ e $\overline{OA_{k+1}} = \overline{OD}$). Concluímos assim que, de facto, $\overline{A'_kA'_{k+1}} > \overline{A_kA_{k+1}}$.

Somando estas N desigualdades obtém-se então que o comprimento da linha poligonal de vértices A_1, A_2,… A_n é inferior a $\overline{CD}$.

A medida de comprimento $\overline{CD}$é portanto superior à medida de comprimento de qualquer linha poligonal inscrita no arco AD. Por definição de supremo, tem-se $l(\widehat{AD}) \leq \overline{CD}$. Este resultado, assim demonstrado com rigor, tem também como consequência que os arcos de circunferência têm efetivamente um comprimento (finito). A majoração obtida permite mesmo concluir facilmente que os arcos de circunferência de amplitude igual a metade do ângulo reto (caso em que o triângulo $[ODA'_1]$ é isósceles), têm comprimento majorado pelo comprimento do raio da circunferência, pelo que, em particular $\pi < 4$.

3.2	1. Esboce o gráfico das seguintes funções nos intervalos indicados, indicando, para cada uma delas, o período positivo mínimo, o contradomínio e os zeros. 1.1. $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ em $[0,2\pi]$; 1.2. $f(x) = 2\sin(3x) - \sqrt{2}$ em $[-\pi,\pi[$; 1.3. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ em $[-2\pi,2\pi[$; 1.4. $f(x) = 1 - \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ em $[-\pi,\pi[$; 1.5. $f(x) = \cos(2x) + 1$ em $[\pi,3\pi]$; 1.6. $f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ em $[0,2\pi]$; 1.7. $f(x) = \tan(4x) - 1$ em $[0,\pi[\backslash\left\{\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8},\frac{5\pi}{8},\frac{7\pi}{8}\right\}$; 1.8. $f(x) = 3\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3}$ em $[-\pi,\pi[\backslash\left\{-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right\}$.
3.3	**Comentário** Este descritor refere, no caso unidimensional, a Relação Fundamental da Dinâmica. Esta Relação estabelece a proporcionalidade, em cada instante, entre a força a que se encontra submetido um ponto material e a respetiva aceleração, com constante de proporcionalidade igual à massa desse ponto. Sendo um resultado que está, historicamente, na génese do próprio cálculo diferencial, e tendo em conta a importância que o presente Programa confere à modelação do real, este princípio deve ser conhecido pelos alunos, mesmo por aqueles que não frequentaram a disciplina de Física. A Relação Fundamental da Dinâmica, em conjunção com a Lei de Hooke, permite evidenciar de forma simples um comportamento de oscilação harmónica. Esta lei diz essencialmente que uma mola, fixada numa extremidade, exerce sobre um ponto material P, de massa $m > 0$, colocado na outra extremidade, uma força de intensidade proporcional à distância $d(P, P_e)$ e de sentido igual ao do vetor $\overrightarrow{PP_e}$, onde P_e é a posição de equilíbrio que o ponto P ocupa quando a mola se encontra em repouso. Designando por $p(t)$ e por p_e as abcissas dos pontos P e P_e respetivamente, por $x(t)$ a diferença $p(t) - p_e$ e por $k > 0$ a constante de proporcionalidade entre a intensidade da força exercida pela mola e a distância $d(P, P_e)$, a intensidade algébrica da força exercida sobre P no instante t é dada por $F(t) = -kx(t)$. Tem-se assim: $$mx''(t) = m(p(t) - p_e)'' = mp''(t) = F(t) = -kx(t).$$ O deslocamento $x(t)$ satisfaz portanto a equação diferencial $x''(t) = -\alpha x(t)$, onde $\alpha = \frac{k}{m} > 0$. É imediato verificar que as funções da forma $x(t) = a\cos(\sqrt{\alpha}t + b)$, onde a e b são constantes reais, são soluções desta equação diferencial. Prova-se também que todas as soluções são desta forma, pelo que esta classe de funções descreve completamente os possíveis movimentos de um ponto material nas condições acima descritas, ou seja, apresentou-se assim um modelo matemático, fundamentado em leis da Física, que descreve o movimento oscilatório do ponto P.

4.1

1. Determine os valores exatos de:

   1.1 $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$ 1.2 $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$ 1.3 $\sin\frac{5\pi}{8}\cos\frac{5\pi}{8}$

2. Calcule $\sin(2\alpha), \cos(2\alpha)$ e $\tan(2\alpha)$ sabendo que $\cos(\alpha) = \frac{3}{5}$ e $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

3. Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações:

   3.1 $\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1$;

   3.2 $\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{1}{2}$;

   3.3 $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

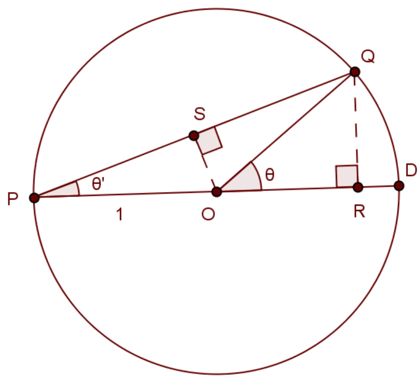
   3.4 $*\sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$;

   3.5 $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$;

   3.6 $*\cos(2x) - 3\sin(x) - 2 = 0$;

   3.7 $**\ \frac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)} = \sqrt{3}$.

4. *Dado um ângulo convexo θ pretendemos obter fórmulas para o seno e o cosseno de $\frac{\theta}{2}$ em função do cosseno de θ. Para o efeito considere uma circunferência de raio 1 centrada no vértice O do ângulo θ e o ângulo θ' de vértice P, inscrito na circunferência, com um dos lados contendo um dos lados do ângulo θ e compreendendo entre os seus lados o mesmo arco de circunferência que o ângulo θ, tal como representado na figura (representa-se o caso em que θ é agudo, mas o argumento vale para qualquer ângulo convexo).



Sendo Q o ponto interseção com a circunferência dos lados não colineares dos ângulos θ e θ' resolva as seguintes alíneas:

   4.1 Justifique que $\widehat{\theta'} = \frac{\hat{\theta}}{2}$.

   4.2 Considere a projeção ortogonal R do ponto Q na reta suporte dos lados colineares dos ângulos θ e θ' e a projeção ortogonal S do centro O da circunferência no outro lado do ângulo θ'. Invocando o teorema de Pitágoras relativo ao triângulo $[PRQ]$ prove que $\text{sen}^2\,\theta + (1+\cos\theta)^2 = \left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2$.

   4.3 Deduza da alínea anterior que $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ e conclua que $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$.

5. **Utilizando a fórmula $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha$ com $\alpha = \frac{\theta}{2}$ e exprimindo ambas as razões trigonométricas de $\frac{\theta}{2}$ envolvidas na fórmula apenas no seno ou no cosseno do mesmo ângulo, deduza que $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ e que $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ para qualquer ângulo convexo θ.

6. Utilize as fórmulas do seno e do cosseno da metade do ângulo (*cf.* exercícios 4. e 5. acima) e do seno e do cosseno da soma de ângulos para cumprir as seguintes tarefas:
   6.1 Construa uma tabela trigonométrica com os valores exatos dos senos, cossenos e tangentes dos ângulos agudos de amplitude múltipla de 7,5° e, utilizando uma máquina de calcular, compare os valores obtidos com os fornecidos pela máquina.
   6.2 *Utilizando a alínea anterior determine o valor exato das razões trigonométricas do ângulo de $18^{o}\ 45'$.

7. Determine o domínio e os zeros da função g definida por $g(x) = \sin(2x) - \tan x$.

8. Estude a monotonia e os extremos relativos da função f definida no intervalo $[0, \pi]$ por $f(x) = 3\sin x - \frac{\cos(2x)}{2}$ e indique o respetivo contradomínio.

9. Averigúe se o gráfico da função f definida por $f(x) = \frac{x - \sin x}{2\sin\frac{x}{2}}$ em $]0{,}2\pi[$ admite assíntotas verticais.

10. Considere a função f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{|x|} & se\ \ x \neq 0 \\ 1 & se\ \ x = 0 \end{cases}$
    10.1 Averigúe se f é contínua em $x = 0$.
    10.2 Prove que a reta de equação $y = -\frac{x}{\pi} + 1$ é tangente ao gráfico de f em $x = \pi$.

11. Considere a função g definida por $g(x) = \begin{cases} \frac{4\cos(x)}{\pi - 2x} & se\ \ x \neq \frac{\pi}{2} \\ k & se\ \ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$, sendo k um número real.
    Determine o valor de k de modo que g seja contínua em $x = \frac{\pi}{2}$.

12. *Considere a função h definida por $h(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 5x - 3}{\sin(3 - x)} & se\ \ 3 - \pi < x < 3 \\ 7\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) & se\ 3 \leq x < 3 + \pi \end{cases}$
    Averigúe se h é contínua em $x = 3$.

13. Determine, utilizando a definição, a derivada de cada uma das seguintes funções em $x = 0$ e em $x = \pi$.
    13.1 $f(x) = \sin(2x)$ 13.2. $f(x) = \cos(2x) - 1$ 13.3. $f(x) = \tan(2x)$

14. Calcule, nos pontos em que existe, uma expressão da derivada da função definida por:
    14.1 $f(x) = 3\cos x \sin(2x)$;
    14.2 $f(x) = \frac{3\cos x}{1 + \sin x}$;
    14.3 $f(x) = \tan x + \frac{1}{\tan x}$.
    14.4 $f(x) = \sqrt{\frac{3 - \cos x}{3 - \sin(5x)}}$.
    14.5 *$f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1 + \cos(5x)}{x \sin x}} + 1\right)$.

15. Mostre que a função definida pela expressão $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ é decrescente em qualquer intervalo em que se encontre definida.

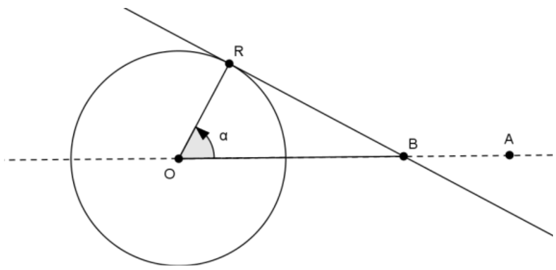
16. Depois de reduzir o intervalo de estudo, sempre que possível, por argumentos de paridade e de periodicidade, estude os intervalos de monotonia das seguintes funções.

16.1 *$f(x) = \sin^2 x \sin(2x)$

16.2 $f(x) = \frac{\cos x}{1+\cos x}$

16.3 **$f(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$

17. Um ponto R desloca-se numa circunferência de centro O e raio 2 cm, no sentido anti-horário e a uma velocidade constante, ou seja, percorrendo distâncias iguais (medidas como comprimentos de arcos de circunferência) em tempos iguais. Sabe-se que R completa uma volta inteira em 3 minutos e, à medida que R se desloca, a reta tangente à circunferência em R interseta, quando não lhe é paralela, a reta OA no ponto B (onde A é um dado ponto distinto de O).



17.1 Designe a medida em radianos de $A\hat{O}R$ por α, exprima a medida em cm de $\overline{OB}$ em função de α, designando a expressão obtida por $f(\alpha)$, indicando qual o maior intervalo I de extremo esquerdo igual a 0 em que f está definida.

17.2 Suponha que se inicia a contagem do tempo num instante em que o ponto R está situado na semirreta $\dot{O}A$. Exprima α em função do tempo t (medido em segundos) e indique como se pode obter dessa função e da função f determinada na alínea anterior (com domínio igual a I) a função posição p do ponto B no deslocamento que efetua na reta numérica OA (tomando o centímetro para unidade de medida do comprimento) começando no instante inicial e de modo a percorrer todos os pontos da semirreta $\dot{O}A$ que não são interiores ao círculo de centro O e raio 2 cm.

17.3 Determine a função velocidade do movimento do ponto B, descrito na alínea anterior.

17.4 *Determine o instante t_1 em que $\alpha = \frac{\pi}{3}$ e determine a velocidade do ponto B nesse instante, indicando a unidade em que está expressa. Apresente o resultado arredondado às décimas.

4.2

1. Um ponto P desloca-se numa reta numérica no intervalo de tempo $I = [0,4[$ (medido em segundos), de tal forma que a respetiva abcissa, como função de $t \in [0,4[$, é dada pela expressão $x(t) = 5\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) - 1$.

1.1 Indique a abcissa do ponto P nos instantes $t = 0$ e $t = 1$.

1.2 Determine a amplitude do movimento do ponto P.

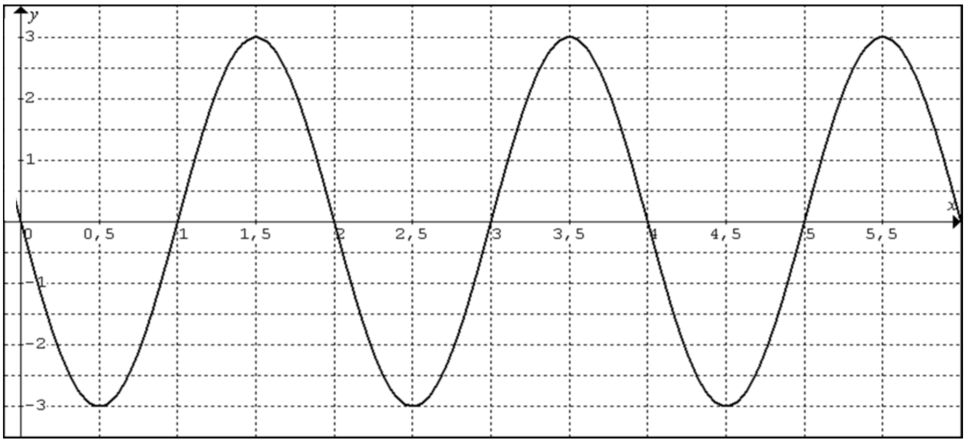
1.3 Determine o período e a frequência deste oscilador harmónico.

1.4 Determine os valores de t para os quais a abcissa do ponto P dista da origem 2,5 unidades.

1.5 *Determine em que instantes o ponto P atinge a distância máxima da origem.

2. Uma mola está suspensa por uma extremidade, tendo na outra extremidade um corpo C. Após ter sido alongada na vertical, a mola inicia um movimento oscilatório no instante $t = 0$. A distância ao solo do corpo C (em metros) é dada em cada instante t (em segundos) pela expressão: $D(t) = 3 + 2\cos(\pi t + \pi)$ para $t \in [0,4[$.
   2.1 Determine a distância máxima e mínima do corpo C ao solo.
   2.2 Indique o valor da amplitude do movimento de C.
   2.3 Determine o período e a frequência deste oscilador.
   2.4 Esboce o gráfico da função D e determine a respetiva fase.
   2.5 Determine os instantes em que o corpo C está à distância de 4 metros do solo.

3. A representação gráfica do movimento de um oscilador harmónico f no intervalo $[0,6]$ é a seguinte:



   3.1 Determine a amplitude A, a pulsação ω , o período T e a fase φ.
   3.2 Escreva uma expressão analítica $f(t)$ da função f representada.
   3.3 Utilizando a expressão obtida em 3.2. determine os valores de t tais que $f(t) = 1$.

4. Um ponto P move-se no eixo das abcissas de forma que a sua abcissa no instante t (em segundos) é dada por $x(t) = \sin(\pi t) - \sqrt{3}\cos(\pi t)$
   4.1 *Prove que se trata de um oscilador harmónico.
   4.2 Indique a amplitude, o período, a frequência do movimento, bem como o respetivo ângulo de fase.
   4.3 *Determine os instantes em que o módulo da velocidade de P é nulo.
   4.4 Determine o valor real de k tal que $x''(t) = -k \times x(t)$.

5. Para $t \geq 0$, a abcissa $x(t)$ de um ponto material P no instante t (em segundos) que se desloca num eixo r satisfaz a equação diferencial $x''(t) = -5x(t) + 2$.
   Apresente todos os resultados com arredondamento às décimas da unidade.
   5.1 Mostre que a função y definida pela expressão $y(t) = x(t) - \frac{2}{5}$ satisfaz a equação diferencial linear $y''(t) = -5y(t)$.
   5.2 *Que ponto R deve ser tomado como origem do referencial por forma que a abcissa do ponto P seja dada por $y(t)$?
   Considere esse referencial até ao final do exercício.
   5.3 Mostre que a função $y(t) = a\cos(\sqrt{5}t) + b\sin(\sqrt{5}t)$, onde a e b são constantes reais, satisfaz a equação diferencial $y''(t) = -5y(t)$.
   5.4 Admitindo que a função y é de facto da forma indicada em 5.3, calcule as constantes a e b, sabendo que no instante $t = 0$ o ponto P se encontra no ponto de abcissa 4 e que no instante $t = 10$ a velocidade do ponto P é de 10 unidades por segundo, no sentido contrário ao eixo.

	5.5 Calcule em que instantes o módulo da velocidade de P é máximo e em que instantes é nulo. 5.6 *Calcule a amplitude do movimento de P. 5.7 *Prove que existem constantes reais A e φ tais que para todo $t \geq 0$, $y(t) = A\cos(\sqrt{5}t + \varphi)$ e determine-as.

Descritor	Texto de Apoio
1.4	**Comentário** Para $0 \leq x \leq 1$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se: $$(1-x)^n \geq 1-nx.$$ Esta desigualdade, dita por vezes «desigualdade de Bernoulli», pode ser justificada da seguinte forma: $$n = 1+1+\cdots+1 \geq 1+(1-x)+(1-x)^2+\cdots+(1-x)^{n-1} = \frac{1-(1-x)^n}{1-(1-x)},$$ donde se conclui o resultado. A monotonia da sucessão de termo geral $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pode agora ser verificada calculando, para $n > 1$, o quociente $\frac{u_n}{u_{n-1}}$: $$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{n+1}{n}\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right)^{n-1} = \frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1}.$$ Aplicando a desigualdade de Bernoulli com $x = \frac{1}{n^2}$, $\frac{u_n}{u_{n-1}} \geq \frac{n+1}{n}\left(1-\frac{n-1}{n^2}\right) = 1+\frac{1}{n^3} > 1$, donde se conclui que a sucessão de termo geral u_n é crescente. Trata-se, igualmente, de uma sucessão majorada: Pelo binómio de Newton, $$u_n = 1 + {}^nC_1\frac{1}{n} + {}^nC_2\frac{1}{n^2} + \cdots + {}^nC_n\frac{1}{n^n}.$$ Observando que, para $2 \leq p \leq n$, $${}^nC_p\frac{1}{n^p} = \frac{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-p+1)}{p!\,n^p} = \frac{1}{p!}\times\frac{n}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n}\times\ldots\times\frac{n-p+1}{n} \leq \frac{1}{p!}$$ e que, para $p \geq 4$, $p! \geq 2^p$ (o que é óbvio, já que $p!$ pode ser expresso como um produto de p fatores não inferiores a 2, bastando para o efeito substituir 4 por 2×2 no produto que ocorre na definição de $p!$; este resultado pode também ser facilmente verificado por indução), temos: $$u_n \leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n} = \frac{8}{3}+\frac{1}{2^4}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}}{1-\frac{1}{2}} \leq \frac{8}{3}+\frac{1}{2^3} = \frac{67}{24}.$$ Assim, a sucessão u_n, sendo crescente e majorada, é convergente. Observando que $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq u_1 = 2$, o limite de u_n, designado por «e», satisfaz $2 \leq e \leq \frac{67}{24} < 2{,}8$, ou seja, $e = 2, \ldots$.

Em alternativa à utilização da desigualdade de Bernoulli, pode obter-se a monotonia da sucessão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ utilizando também o binómio de Newton e escrevendo as respetivas parcelas, neste caso, como:

$$^{n}C_p\,\frac{1}{n^p}=\frac{1}{p!}\times\frac{n}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n}\times\ldots\times\frac{n-p+1}{n}=\frac{1}{p!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)$$

Examinando o efeito de substituir em cada parcela destas (com $p=2,\ldots,n$) n por $n+1$, facilmente se conclui que se obtém um valor superior, já que, com essa substituição, efetuamos o produto de uma mesma constante pelo mesmo número de fatores, cada um deles superior ao que veio substituir, pois aumentámos o denominador da fração, ou seja, diminuímos o respetivo valor, e esta figura como subtrativo, aumentando assim o valor da diferença. Ora o desenvolvimento de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pelo binómio de Newton, para além destas parcelas, que comparámos uma a uma com as parcelas correspondentes do desenvolvimento de Newton de $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, tem apenas mais duas parcelas (para $p=0$ e $p=1$), iguais às correspondentes parcelas do desenvolvimento de $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, ao passo que o desenvolvimento desta última potência ainda tem a parcela positiva correspondente a $p=n+1$. Assim, forçosamente, $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

As majorações obtidas para as parcelas do desenvolvimento de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pelo binómio de Newton serão também utilizadas mais adiante, num caso ligeiramente mais geral, para se obter a derivada na origem da função exponencial, embora essa demonstração não seja requerida aos alunos (*cf.* texto de apoio ao descritor 2.9) e uma técnica semelhante pode também ser utilizada para obter a monotonia em $\mathbb{Q}^+$ da função $f(y)=\left(1+\frac{1}{y}\right)^y$ (*cf.* texto de apoio ao descritor 2.7).

De um ponto de vista dos juros compostos, u_n representa o montante disponível ao fim de um ano, dividindo esse ano em n períodos iguais e capitalizando-se um juro de $\frac{100\%}{n}$ no final de cada um deles, relativamente a um capital inicial de $C_0=1$ e a uma taxa anual de juros de 100%.

A monotonia de u_n significa, neste quadro, que quantas mais capitalizações ocorrerem durante o ano maior será o rendimento final.

Podemos interpretar o limite, em $+\infty$, desta quantidade, como o capital final obtido distribuindo o juro de 100% de forma uniforme durante o ano e capitalizando-o "a cada instante". Neste caso, o capital final não será infinito, mas antes igual a $e\approx 2{,}72$.

2.1 **Comentário**

Que a função definida no conjunto dos números racionais por $f(x)=a^x$ é decrescente se $0<a<1$ e crescente se $a>1$ é uma consequência simples do caso em que $a>1$. Basta utilizar as propriedades conhecidas das potências de expoente racional e notar que, para $a>0$, tem-se $a<1$ se e somente se $a^{-1}>1$.

Para $a > 1$, podemos começar por mostrar que para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$:

$$m < n \Longrightarrow \; a^m < a^n$$

Este resultado é consequência da seguinte cadeia de implicações, cuja justificação pode ser formalizada utilizando o método de indução:

$$a > 1 \Longrightarrow a^2 > a \Longrightarrow a^3 > a^2 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow a^{n+1} > a^n,$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, torna-se depois óbvio, pela transitividade da relação de ordem, que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

$$a^n > a^{n-1} > \cdots > a^2 > a$$

o que é outro modo de exprimir o resultado acima.

É também fácil agora estender sucessivamente o resultado de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}^+$ e em seguida a $\mathbb{Q}$. Comecemos por notar que, das propriedades das potências de expoente natural relativamente à relação de ordem expressas nos descritores ALG10-1.1 e 1.2 e da tricotomia dessa mesma relação de ordem, facilmente se conclui que a função raiz de índice n (para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) é crescente para valores não negativos (esse resultado também poderia ser obtido agora invocando o sinal da derivada). Utilizando esse resultado temos então, para quaisquer $m, n, p, q \in \mathbb{N}$:

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{q} \Longrightarrow mq < np \Longrightarrow a^{mq} < a^{np} \Longrightarrow \sqrt[q]{a^{mq}} < \sqrt[q]{a^{np}} \Longrightarrow a^m < \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^n \Longrightarrow \sqrt[n]{a^m} < a^{\frac{p}{q}}$$
$$\Longrightarrow a^{\frac{m}{n}} < a^{\frac{p}{q}},$$

o que prova o resultado pretendido em $\mathbb{Q}^+$. Podemos agora estender o resultado a todo o $\mathbb{Q}$; começando por analisar o caso de dois racionais de sinais contrários, se $r, r' \in \mathbb{Q}^+$, temos, obviamente, $-r < r'$, $a^r > 1$ e $a^{r'} > 1$ (já que, por hipótese, $a > 1$), donde:

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} < 1 < a^{r'}.$$

Resta assim provar o resultado para dois racionais negativos ou para um racional qualquer e o racional nulo; excluindo este último caso, que é trivial, temos, para quaisquer $r, r' \in \mathbb{Q}^+$, se $-r < -r'$ então $r' < r$, donde $a^{r'} < a^r$ e portanto $\frac{1}{a^r} < \frac{1}{a^{r'}}$, ou seja, como pretendíamos, $a^{-r} < a^{-r'}$.

2.2

Comentário

Para um dado $a > 0$, comecemos por demonstrar que a função f definida nos racionais por $f(x) = a^x$ é contínua em 0; para o efeito provemos que os limites de f à esquerda e à direita de 0 existem e são ambos iguais a $1 = a^0$.

Seja então (q_n) uma sucessão de números racionais positivos, de limite nulo. Sabemos já (*cf.* SUC11-6.30) que $\lim\; a^{\frac{1}{n}} = 1$; fixado $\varepsilon > 0$, existe portanto $p \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq p \Rightarrow \left|a^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \varepsilon$. Considerando, para já, que $a > 1$, tem-se, em particular, que $1 \leq a^{\frac{1}{p}} < 1 + \varepsilon$. Então, para n suficientemente grande, $0 < q_n \leq \frac{1}{p}$, e, por monotonia, $1 \leq a^{q_n} \leq a^{\frac{1}{p}} < 1 + \varepsilon$, ficando assim provado, por definição, que $\lim\; a^{q_n} = 1$.

O mesmo se pode concluir no caso $0 < a < 1$, observando simplesmente que $a^{q_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{q_n}}$, e que esta sucessão tem por limite 1, já que $\frac{1}{a} > 1$. Acabámos portanto de concluir que, em qualquer caso:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} a^x = 1.$$

Resta agora provar que a^x também tende para 1 à esquerda de 0; considerando uma sucessão (p_n) de números racionais negativos, de limite nulo, $(-p_n)$ é obviamente uma sucessão de números racionais positivos de limite nulo, pelo que:

$$a^{p_n} = \frac{1}{a^{-p_n}} \longrightarrow \frac{1}{1} = 1.$$

Mostrou-se assim que a função f definida nos racionais por $f(x) = a^x$ é contínua em 0, uma vez que existe $\lim\limits_{x \to 0} a^x$.

Considerando agora um qualquer número racional q,

$$f(x) = a^x = a^{x-q+q} = a^q\, a^{x-q}.$$

Então, a existência do limite de $f(x)$ em q resulta imediatamente da existência do limite da função a^{x-q} em q que, por sua vez, é consequência imediata da existência do limite de $f(x) = a^x$ em 0, já que, obviamente, $x - q \underset{x \longrightarrow q}{\longrightarrow} 0$ (*cf.* FRVR11-1.11). Conclui-se assim que f é contínua em $\mathbb{Q}$.

2.3

Comentário

A prova da propriedade expressa neste descritor pode seguir linhas muito semelhantes à da propriedade enunciada no descritor anterior. Dado $a > 1$ e $L > 0$, como $\lim a^n = +\infty$ (*cf.* SUC11-6.29), existe em particular $p \in \mathbb{N}$ tal que $a^p \geq L$.

Considerando uma sucessão de racionais (q_n) de limite $+\infty$, a partir de certa ordem, $q_n \geq p$. Por monotonia, tem-se a partir dessa mesma ordem que $a^{q_n} \geq a^p \geq L$, ficando assim demonstrado que $\lim a^{q_n} = +\infty$.

2.5

Comentário

Nos descritores 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4 foi cuidadosamente estudada a função f definida nos racionais por $f(x) = a^x$, $a > 0$. No presente descritor, faz-se a extensão de f ao conjunto dos números reais, mantendo-se as propriedades de monotonia, os limites e as propriedades algébricas da função inicial.

Essa extensão é feita de forma intuitiva. Em rigor, para definir $f(x)$, quando $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, seria necessário tomar uma sucessão (q_n) de números racionais, de limite x, mostrar que $f(q_n)$ converge, e que esse limite é independente da sucessão (q_n) escolhida.

Pode motivar-se esta definição utilizando as aproximações dos números reais por dízimas finitas dadas pela representação habitual destes números na forma de dízima finita ou infinita.

Sabemos, por exemplo, que $\frac{1}{3} = 0,(3)$, pelo que, da continuidade e monotonia da função exponencial com domínio $\mathbb{Q}$, podemos garantir que, por exemplo para $a > 1$:

$$a^{0,3} < a^{0,33} < a^{0,333} < \cdots < a^{0,333\ldots3} < \cdots \longrightarrow a^{\frac{1}{3}},$$

ou seja,

$$\sqrt[10]{a^3} < \sqrt[100]{a^{33}} < \sqrt[1000]{a^{333}} < \cdots < \sqrt[1000\ldots0]{a^{333\ldots3}} < \cdots \longrightarrow \sqrt[3]{a}\,.$$

Ora, se considerarmos agora um número irracional e a respetiva representação como dízima infinita não periódica, seja por exemplo, $\pi = 3{,}14159265358979323846 26\ldots$ podemos considerar a sucessão crescente das potências de expoente racional:

$$a^3 < a^{3,1} < a^{3,14} < a^{3,141} < \cdots < a^{3,1415926} < \cdots,$$

ou seja:

$$a^3 < \sqrt[10]{a^{31}} < \sqrt[100]{a^{314}} < \sqrt[1000]{a^{3141}} < \cdots < \sqrt[10000000]{a^{31415926}} < \cdots.$$

Sendo esta sucessão crescente e majorada (por qualquer a^q, q racional, $q > \pi$, por exemplo por a^4), concluímos que é necessariamente convergente em $\mathbb{R}$; e é esse limite que pretendemos identificar como a^π.

Em seguida, tendo em conta as propriedades conhecidas dos limites, poder-se-iam demonstrar, uma a uma, as propriedades pretendidas.

Por exemplo, tomando $a > 0$, números reais x e y e sucessões de racionais (q_n) e (q'_n) de limites respetivos x e y,

$a^x a^y = \lim a^{q_n} \lim a^{q'_n}$ (definição)
$= \lim a^{q_n} a^{q'_n}$ (propriedade dos limites de sucessões convergentes)
$= \lim a^{q_n + q'_n}$ (propriedade algébrica das potências de expoente racional)
$= a^{x+y}$ (definição, uma vez que $q_n + q'_n \longrightarrow x + y$).

2.7	**Informação Complementar para o professor**

Seja f a função definida em $\mathbb{R}\backslash[-1{,}0]$ por $f(y) = \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$.
É possível mostrar que f é crescente em $\mathbb{R}^+$, começando por mostrar que a restrição de f ao conjunto dos números racionais positivos é crescente e estendendo em seguida essa propriedade a $\mathbb{R}^+$, por passagens ao limite, com técnicas semelhantes às referidas a propósito do descritor 2.5.

Provemos então que f é crescente em $\mathbb{Q}^+$. Sejam $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ tais que $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$; temos:

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{q} \Longrightarrow mq < np$$

e pretendemos provar que:

$$\left(1 + \frac{1}{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{m}{n}} < \left(1 + \frac{1}{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p}{q}},$$

ou seja,

$$\left(1+\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{n}} < \left(1+\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{q}},$$

o que é ainda equivalente (elevando ambos os membros a qn) a:

$$\left(1+\frac{n}{m}\right)^{mq} < \left(1+\frac{q}{p}\right)^{np}.$$

Basta agora comparar estas duas potências utilizando o Binómio de Newton (analogamente ao que se fez no texto de apoio ao descritor 1.4, num dos processos de demonstração da monotonia da sucessão exponencial); temos:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{n}{m}\right)^{mq} &= 1+mq\frac{n}{m}+\sum_{k=2}^{mq}\frac{mq(mq-1)\dots\big(mq-(k-1)\big)}{k!}\frac{n^k}{m^k}\\ &= 1+nq+\sum_{k=2}^{mq}\frac{mq(mq-1)\dots\big(mq-(k-1)\big)}{k!}\frac{(nq)^k}{(mq)^k}\\ &= 1+nq+\sum_{k=2}^{mq}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{mq}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{mq}\right)(nq)^k\end{aligned}$$

e, analogamente:

$$\left(1+\frac{q}{p}\right)^{np} = 1+nq+\sum_{k=2}^{np}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{np}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{np}\right)(nq)^k.$$

Uma vez que, por hipótese, $mq < np$, o somatório no desenvolvimento da primeira potência tem menos parcelas do que o somatório no desenvolvimento da segunda e cada uma das parcelas do primeiro somatório é inferior à correspondente parcela do segundo somatório, pelo que, de facto:

$$\left(1+\frac{n}{m}\right)^{mq} < \left(1+\frac{q}{p}\right)^{np},$$

como pretendíamos mostrar.

Para podermos estender a $\mathbb{R}^+$ a propriedade de monotonia de f é conveniente, em primeiro lugar, justificar que f é contínua. Para o efeito convém começar por definir a função logarítmica $\ln$, tal como se indica nos descritores 3.1 e 3.3. Que uma tal função é contínua pode justificar-se invocando um resultado geral de continuidade da função inversa de uma função real de variável real bijetiva e contínua definida num intervalo mas veremos uma demonstração direta desse facto no texto de apoio ao descritor 3.11; sendo assim, a continuidade de f resulta da simples observação de que é composta de funções contínuas, como fica patente ao notar-se que:

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e^{y\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)}.$$

Agora, se $0 < x < y$, podemos considerar racionais r e s tais que $x < r < s < y$, sucessões de racionais (p_n) e (q_n) a convergir respetivamente para x e y e podemos já supor que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $0 < p_n < r < s < q_n$, pois estas desigualdades têm de verificar-se pelo menos a partir de certa ordem. Então, de $\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} < \left(1+\frac{1}{r}\right)^r < \left(1+\frac{1}{s}\right)^s < \left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$ deduzimos que $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1+\frac{1}{r}\right)^r < \left(1+\frac{1}{s}\right)^s \leq \left(1+\frac{1}{y}\right)^y$, donde, em particular, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{y}\right)^y$, como pretendíamos. A função f também é monótona em $]-\infty,-1[$, mas tal resultado não é necessário para o que se segue e pode ser demonstrado mais tarde recorrendo já ao estudo da função f, utilizando o cálculo diferencial (*cf.* o exemplo 4 do texto de apoio ao descritor 6.3).

Agora, como $\lim f(n) = e$, em particular, para todo o $\varepsilon > 0$, existe um número natural p tal que $e - \varepsilon < f(p)$.

Tomando então uma qualquer sucessão (x_n) de limite igual a $+\infty$, existe uma ordem a partir da qual $x_n \geq p$. A partir dessa ordem, por monotonia, $f(x_n) \geq f(p) > e - \varepsilon$.

Por outro lado, como para todo o $n \in \mathbb{N}$, $f(n) < e$, é imediato que para todo o $y \in \mathbb{R}^+$, $f(y) \leq f(m) < e$, onde m é um inteiro qualquer superior ou igual a y.

Mostrou-se assim que a partir de certa ordem, $e - \varepsilon < f(x_n) < e$ pelo que, para qualquer sucessão (x_n) de limite igual a $+\infty$, $\lim f(x_n) = e$.

Por definição, temos assim:

$$\lim_{y \to +\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Observando que, para $y < -1$,

$$f(y) = \left(1+\frac{1}{y}\right)^y = \left(\frac{y}{y+1}\right)^{-y} = \left(1-\frac{1}{y+1}\right)^{-y-1}\left(1-\frac{1}{y+1}\right) = f(-(y+1))\left(1-\frac{1}{y+1}\right),$$

temos:

$$\lim_{y \to -\infty} f(y) = \lim_{y \to -\infty} f(-(y+1)) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = e.$$

Tomando agora $x \neq 0$ (o caso $x = 0$ é imediato),

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x = f\left(\frac{n}{x}\right)^x.$$

Como $\lim \frac{n}{x} = \pm\infty$, consoante o sinal de x, $\lim f\left(\frac{n}{x}\right) = e$. Por continuidade da função $g\colon y \longrightarrow y^x$ (*cf.* 2.6),

$$\lim f\left(\frac{n}{x}\right)^x = e^x,$$

ou seja,

$$\lim \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

2.9

Informação Complementar para o professor

Embora não se requeira a demonstração do resultado expresso neste descritor, convém referir que essa demonstração pode ser levada a cabo utilizando diretamente os resultados já conhecidos de aproximação da função exponencial, nomeadamente o que ficou expresso no descritor 2.7. Com efeito, se, começando por supor $h > 0$, substituirmos e^h por $\left(1+\frac{h}{n}\right)^n$, para um $n \in \mathbb{N}$ arbitrário, na expressão $\frac{e^h-1}{h}$, obteremos, utilizando o binómio de Newton (e exprimindo as respetivas parcelas de modo análogo ao que foi feito no texto de apoio aos descritores 1.2 e 2.7 atrás):

$$\frac{\left(1+\frac{h}{n}\right)^n-1}{h}=\frac{1}{h}\left(1+h+\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)h^p-1\right)=$$
$$=1+\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)h^{p-1}$$

Podemos agora utilizar uma majoração análoga à que se utilizou para obter uma estimativa do número e (e para, em particular, verificar que a sucessão exponencial é limitada), começando por notar que, para $p > 1$, $p! \geq 2^{p-1}$ (analogamente ao que se observou no referido texto de apoio ao descritor 1.2, $p!$ pode nesse caso escrever-se como o produto de $p-1$ parcelas não inferiores a 2), donde, finalmente, uma vez que supusemos $h > 0$, e supondo agora também que $h < 2$, obtemos, da igualdade anterior, o enquadramento:

$$1 \leq \frac{\left(1+\frac{h}{n}\right)^n-1}{h} \leq 1+\sum_{p=2}^{n}\frac{h^{p-1}}{2^{p-1}}=\sum_{p=0}^{n-1}\left(\frac{h}{2}\right)^p=\frac{1-\left(\frac{h}{2}\right)^n}{1-\frac{h}{2}}<\frac{2}{2-h}.$$

Uma vez que $\lim_n \left(1+\frac{h}{n}\right)^n = e^h$, passando ao limite em n as desigualdades acima obtemos, para $0 < h < 2$:

$$1 \leq \frac{e^h-1}{h} \leq \frac{2}{2-h};$$

Então, passando agora ao limite quando h tende para 0^+ estas desigualdades, concluímos que $\lim_{h\to 0^+}\frac{e^h-1}{h}=1$. Para obter o limite quando h tende para 0^-, temos, ainda para $h > 0$:

$$\frac{e^{-h}-1}{-h}=e^{-h}\frac{e^h-1}{h}\underset{h\to 0^+}{\rightarrow} 1\,,$$

donde se deduz imediatamente que, de facto,

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1.$$

3.1
3.2
3.3
3.4
3.5

Comentário

Conhecidas as propriedades das funções exponenciais e definindo as funções logarítmicas como as respetivas funções inversas, é possível deduzir todas estas propriedades com bastante facilidade.

3.6 3.7 3.8 3.9 3.10	A título de exemplo, tomando $a > 1$ e dados números reais positivos x e y: • Se $\log_a x \leq \log_a y$, então, como a função exponencial de base a é crescente, $a^{\log_a x} \leq a^{\log_a y}$, ou seja, $x \leq y$. Por contra-recíproca, $x > y \Longrightarrow \log_a x > \log_a y$, e acabámos de provar que a função $\log_a$é crescente. • Tem-se $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy = a^{\log_a (xy)}$. Sendo a função exponencial de base a bijetiva, $\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$. • $\log_a x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
3.11	**Comentário** A diferenciabilidade e a fórmula para o cálculo da derivada da função $\log_a$ $(a > 0)$ pode deduzir-se diretamente do resultado para o caso particular da função $\ln$ e este último de um teorema geral relativo à diferenciabilidade, num ponto de continuidade, da função inversa de uma dada função diferenciável com derivada não nula (no ponto correspondente). Se f for diferenciável num ponto a do domínio, uma vez provada a diferenciabilidade de f^{-1} no ponto $b = f(a)$, da igualdade $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ e do Teorema de derivação da função composta aplicado no ponto $x = b$ poderá obter-se $$f'\left(f^{-1}(b)\right)(f^{-1})'(b) = 1,$$ donde resulta, em particular, que, necessariamente, $f'(a) \neq 0$ e que $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$. Embora não se requeira a demonstração da diferenciabilidade da função inversa, esta pode ser obtida diretamente a partir da definição de derivada; pretendemos provar que existe o limite quando $y \to b$ da razão incremental: $$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b};$$ Em particular temos de verificar que $b = f(a)$ é ponto aderente a $D_{f^{-1}} \backslash \{b\}$; esse facto resulta de, por hipótese, a ser ponto aderente a $D_f \backslash \{a\}$, pois isso significa que existe uma sucessão $x_n \to a$ de termos no domínio de f e distintos de a, donde, por continuidade, $f(x_n) \to f(a) = b$ e, obviamente, $f(x_n) \in D_{f^{-1}} \backslash \{b\}$, já que f é injetiva. Considerando agora uma sucessão de termos em $D_{f^{-1}}$, distintos de b, $y_n \to b$, pondo $x_n = f^{-1}(y_n)$, os x_n são distintos de a e (por continuidade de f^{-1} em b) $x_n \to f^{-1}(b) = a$, tendo-se $y_n = f(x_n)$, pelo que: $$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \left(\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\right)^{-1} \to \frac{1}{f'(a)}.$$ Onde o limite é, de facto, finito e igual ao valor indicado porque, por hipótese, f é diferenciável em a e $f'(a) \neq 0$. Concluímos assim, como pretendíamos, que f^{-1} é diferenciável em $b = f(a)$ e: $$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$ Daqui resulta, para a função $\ln y$, inversa de e^x, que:

$$(\ln y)'_y = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

Esta demonstração pressupõe, no entanto, que se conhece a continuidade da função ln, propriedade que tem de ser previamente demonstrada para se provar de maneira simples o que é requerido no descritor 3.11. Admitida essa continuidade, podemos também, evidentemente, dispensar o teorema geral relativo à diferenciabilidade da função inversa que acabámos de examinar e muito simplesmente utilizar diretamente a definição de derivada para o caso particular desta função; assim teremos:

$$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{h}\ln\frac{x+h}{x} = \frac{1}{x}\frac{x}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right).$$

Ora, para cada $x > 0$, o argumento do logaritmo no último membro desta cadeia de equações, como sabemos, converge para e quando h tende para 0, quer por valores positivos, quer por valores negativos, já que, nesse caso, $\frac{x}{h}$ converge para $+\infty$ ou para $-\infty$. Portanto o limite em 0 do primeiro membro da cadeia existe sempre e é igual a $\frac{1}{x}$.

Agora é fácil calcular a derivada de qualquer $\log_a$, pois de $x = a^{\log_a x} = e^{\ln a \log_a x}$ obtemos $\ln x = \ln a \ \log_a x$ e portanto:

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a}\ln x,$$

donde:

$$\log'_a x = \frac{1}{\ln a}\ln' x = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}.$$

Resta apenas provar a continuidade da função ln. Para o efeito seja $x > 0$ e (h_n) uma sucessão a tender para 0 tal que $x + h_n > 0$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$; pretendemos provar que a sucessão de termo geral $\ln(x + h_n)$ converge para $\ln x$. Ora:

$$\ln(x+h_n) - \ln x = \ln\frac{x+h_n}{x} = \ln\left(1+\frac{h_n}{x}\right);$$

assim, temos de mostrar que, dado $\delta > 0$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq p$:

$$-\delta < \ln\left(1+\frac{h_n}{x}\right) < \delta.$$

Como a função e^x é crescente, esta cadeia de desigualdades é equivalente a:

$$e^{-\delta} < 1 + \frac{h_n}{x} < e^{\delta},$$

ou seja, a:

$$-\left(1-e^{-\delta}\right) < \frac{h_n}{x} < e^{\delta} - 1.$$

Ora, do que se conhece da função exponencial, deduz-se que $-\left(1-e^{-\delta}\right) < 0 < e^{\delta} - 1$; como a sucessão de termo geral $\frac{h_n}{x}$ tende para 0, por definição de limite sabemos que, a partir de certa ordem $p \in \mathbb{N}$, teremos simultaneamente $-\left(1-e^{-\delta}\right)<\frac{h_n}{x}<1-e^{-\delta}$ e $-\left(e^{\delta}-1\right)<\frac{h_n}{x}<e^{\delta}-1$. Portanto, de facto, atendendo às equivalências acima referidas, a sucessão de termo geral $\ln(x+h_n)$ converge para $\ln x$, o que termina a demonstração da continuidade de ln.

4.1
4.2

Comentário

Para calcular o limite em questão podemos começar por minorar a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $\frac{e^x}{x^k}$ (para um dado $k \in \mathbb{R}^+$) por uma função que tende para $+\infty$ em $+\infty$. Tem-se então, para esse efeito:

$$\left(\frac{x}{k+1}\right)^{k+1} \leq \left(1+\frac{x}{k+1}\right)^{k+1} = \left(\left(1+\frac{1}{\frac{k+1}{x}}\right)^{\frac{k+1}{x}}\right)^{x} = f\left(\frac{k+1}{x}\right)^{x} \leq e^x,$$

onde f é a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(y)=\left(1+\frac{1}{y}\right)^y$, que é crescente e tende para e em $+\infty$ (*cf.* texto de apoio relativo ao descritor 2.7). Ou seja,

$$\frac{e^x}{x^k} \geq \frac{1}{(k+1)^{k+1}}x\,,$$

donde se deduz (*cf.* FRVR12-1.5) o resultado pretendido.

Este resultado estende-se facilmente ao caso em que k é um qualquer número real,~~;~~ pois o caso em que $k \leq 0$ é trivial, já que, se $k<0$, obtemos o produto de duas funções que tendem para $+\infty$ em $+\infty$.

A justificação do resultado expresso no descritor 4.2 é bastante simples, bastando notar que:

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{\frac{e^{\ln x}}{\ln x}}$$

e aplicando em seguida o resultado expresso no descritor anterior, no caso $k=1$, atendendo a que $\ln x$ tem limite $+\infty$ em $+\infty$.

4.3

1. Calcule, caso existam, os seguintes limites:
   1.1. $\lim\left(1+\frac{1}{5n}\right)^n$;
   1.2. $\lim\left(\frac{n}{n-\frac{3}{2}}\right)^{2n}$;
   1.3. $\lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n^2}$;
   1.4. $\lim\left(\frac{4-n}{4+n}\right)^n$;
   1.5. $^*\lim\left(\frac{n^4+n+1}{n^4+2n^2}\right)^{n^2}$;

1.6. $\lim \left(1-\frac{2}{n^4}\right)^{n^2}$;

1.7. $\lim \left(\frac{4+3n}{2+n}\right)^{n}$.

2. Calcule, em a, o limite das funções definidas pelas seguintes expressões, utilizando mudança de variável sempre que lhe parecer conveniente.

2.1. $f(x)=\frac{2+3\ln x}{x-1}$, $a=+\infty$ e $a=1$.

2.2. $f(x)=3x-5\ln x$, $a=+\infty$.

2.3. $f(x)=\frac{e^x}{x^4+1}$, $a=+\infty$.

2.4. $f(x)=\frac{e^{4x}-1}{x^2}\ln(2x)$, $a=0$ e $a=+\infty$;

2.5. $*f(x)=x-\ln(|5-2e^x|)$, $a=-\infty$ e $a=+\infty$;

2.6. $*f(x)=\frac{\log((x-3)^3)}{x^2-3x-4}$, $a=4$;

2.7. $*f(x)=x(\ln(x^2-9)-2\ln x^2)$, $a=+\infty$

2.8. $f(x)=x^x$, $a=0$;

2.9. $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$, $a=0$;

2.10. $f(x)=\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a=1$ e $a=+\infty$;

2.11. $*f(x)=\sin x^{\tan x}$, $a=0$;

2.12. $f(x)=\frac{e^{2x}-e^x}{\ln(x+1)}$, $a=0$ e $a=+\infty$;

2.13. $f(x)=\frac{3^{2x}-9}{x^2-4x+3}$, $a=1$ e $a=+\infty$;

3. Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^k e^x\right)$, onde k é um número natural.

4. Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)$.

5. Dadas sucessões de termos gerais respetivamente x_n e y_n tais que x_n tem os termos todos positivos, $x_n\to a$ e $y_n\to b$ ($a>0$ e $b\in\mathbb{R}$) mostre que: ${x_n}^{y_n}\to a^b$
[Sugestão: comece por justificar que ${x_n}^{y_n}=e^{y_n\ln x_n}$]

6. *Com hipóteses adequadas demonstre resultados semelhantes ao expresso no exemplo 5. Admitindo que a possa também ser 0 ou $+\infty$ e b possa também ser $+\infty$ ou $-\infty$.

	7. Calcule os limites das seguintes sucessões: 7.1. $\left(\frac{3n-2}{4n+1}\right)^{\frac{2n-1}{n+1}}$ 7.2. $\left(\frac{4n-2}{3n+1}\right)^{\frac{3n-1}{n^2+1}}$ 7.3. $\left(\frac{2n^2-1}{n^2+3}\right)^{\frac{1-2n}{3n+4}}$ 8. Calcule os limites das seguintes sucessões: 8.1. $\left(\frac{2n}{5n+1}\right)^{n}$ [*cf.* FRVR12-3.1, exemplo 2.3] 8.2. $\left(\frac{3n^2-2}{n+3}\right)^{\frac{2n+1}{2-3n}}$ 8.3. $\left(\frac{2n^2-1}{n^3+3}\right)^{\frac{1-2n}{3n+4}}$
5.1	**Comentário** Neste descritor referem-se alguns problemas em diferentes áreas do conhecimento, cujo estudo pode levar a um modelo matemático envolvendo o que se chama uma «equação diferencial (ordinária) de 1ª ordem» de tipo muito particular, nomeadamente que pode ser escrita na forma $$f' = kf,$$ onde k é um dado número real. Ou seja, uma equação cujas soluções são funções reais de variável real definidas em intervalos, diferenciáveis, e satisfazendo, em cada ponto x do respetivo domínio $$f'(x) = kf(x).$$ Consideremos, para começar, o problema que consiste em determinar a evolução ao longo do tempo da massa de determinada substância radioativa. Desde a descoberta da radioatividade que se sabe que determinadas substâncias emitem continuamente partículas α, β e γ, o que corresponde a alterações da respetiva estrutura atómica, de tal modo que ao longo do tempo os átomos da substância inicial se vão transformando em átomos de outras substâncias (sofrem o chamado «decay», «decaimento» ou «desintegração radioativa»), numa cadeia característica de cada elemento radioativo. Da substância inicial sobra sempre uma porção, correspondente aos átomos que ainda não se desintegraram, e que, evidentemente, diminui progressivamente com o tempo. Designando por $m(t)$ a massa de substância que ainda não se desintegrou (proporcional ao número de átomos que não sofreram o chamado decaimento radioativo), o problema está em obter informações acerca da função $m(t)$ em dado intervalo de tempo. A análise do fenómeno físico que preside à variação de m com o tempo sugere que a probabilidade de um átomo de determinada substância iniciar o processo de desintegração radioativa durante um período de uma unidade de tempo é constante, ou seja, em cada um desses períodos a massa de substância que sofre desintegração é, em média, uma percentagem fixa da massa existente. Assim, obtém-se a massa total que se desintegra entre os instantes t e $t + \Delta t$ ($\Delta t > 0$) multiplicando por Δt essa percentagem da massa existente; este postulado está formulado com certo grau de imprecisão, uma vez que a massa deverá variar entre os instantes t e $t + \Delta t$, pelo que se pode pôr a questão de saber exatamente de que massa se deve considerar a percentagem. Podemos começar por supor que será da massa considerada

em certo instante intermédio $\xi \in [t, t + \Delta t\,]$; teremos então:

$$m(t + \Delta t) = m(t) - km(\xi)\Delta t$$

para certa constante $k > 0$, ou seja,

$$\frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} = -km(\xi)$$

Para podermos supor que a função m é solução de alguma equação diferencial, teremos de fazer a hipótese de se tratar de função diferenciável. Esta hipótese tem, evidentemente, algum grau de irrealismo, já que, em certo intervalo de tempo, o número de átomos que começou a desintegrar-se é inteiro, pelo que a variação de m se faz por múltiplos inteiros da massa de um átomo da substância, tratando-se portanto sempre de função "em escada", logo descontínua em muitos instantes, e portanto certamente não diferenciável. Como, no entanto, a massa de cada átomo é muito reduzida relativamente à massa total em estudo, podemos tentar aproximar a função massa por uma função diferenciável, pois, por exemplo, para intervalos de tempo reduzidos, mas significativos do ponto de vista experimental, temos a perceção de que a variação de massa será também reduzida, o que pelo menos justifica a hipótese de continuidade. Formalmente, poderíamos até justificar a continuidade através da equação acima, pois dela resulta que, para cada t, $m(t + \Delta t)$ é decrescente como função de Δt, pelo que poderíamos majorar $|m(t + \Delta t) - m(t)| = m(t) - m(t + \Delta t)$ por $km(t)\Delta t$ que tende para zero quando $\Delta t \longrightarrow 0^+$ e, analogamente, substituindo na referida equação, t por $t - \Delta t$, obtemos $m(t) = m(t - \Delta t) - km(\xi)\Delta t$, para $\xi \in [t - \Delta t, t\,]$, donde se deduz que $|m(t - \Delta t) - m(t)|$ tende para zero quando $\Delta t \longrightarrow 0^+$, ou seja, $|m(t + \Delta t) - m(t)|$ também tende para zero quando $\Delta t \longrightarrow 0^-$, o que mostra que m é de facto contínua em todo o t.

De qualquer modo, os pressupostos que se fazem ao procurar adotar um modelo matemático para estudar determinado fenómeno têm sempre algum grau de arbitrariedade, correspondendo a certa simplificação da realidade. Uma vez desenvolvidas as consequências matemáticas do modelo adotado e confrontados os resultados com a realidade em estudo, pode-se aferir o grau de precisão do modelo. Caso se verifiquem discrepâncias notáveis com os resultados da experiência, dever-se-ão reexaminar os pressupostos que lhes serviram de base, procurando eventualmente aproximá-los mais da realidade observada. Repete-se então o processo de desenvolver a teoria matemática, resultante agora dos novos pressupostos, e de confrontar com a realidade os resultados teóricos obtidos, podendo prosseguir-se do mesmo modo indefinidamente, o que constitui, no fundo, o progresso normal das ciências envolvendo processos de matematização.

No caso sobre o qual nos estamos a debruçar, feita a hipótese de continuidade de m, podemos passar ao limite quando $\Delta t \longrightarrow 0^+$ no segundo membro da última equação acima, pois essa continuidade garante que esse limite é igual a $m(t)$, já que, independentemente da escolha de ξpara cada Δt, ter-se-á sempre $\xi \longrightarrow t$ quando $\Delta t \longrightarrow 0^+$, já que, por construção $t \leq \xi \leq t + \Delta t$. Obtemos assim:

$$\lim_{\Delta t \longrightarrow 0^+} \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} = -km(t)$$

Raciocínio idêntico pode ser levado a cabo relativamente a cada intervalo $[t - \Delta t, t\,]$, o que permite obter também:

$$\lim_{\Delta t \longrightarrow 0^-} \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0^+} \frac{m(t - \Delta t) - m(t)}{-\Delta t} = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0^+} \frac{m(t) - m(t - \Delta t)}{\Delta t} = -km(t).$$

A igualdade destes dois limites garante que a função m é diferenciável e:

$$m'(t) = -km(t)$$

Examinemos agora outro exemplo de problema cuja resolução envolve uma equação do mesmo tipo. Pensemos na evolução de determinada população, por exemplo de seres humanos nacionais de determinado país. Designando por $P(t)$ o número de indivíduos existentes em dado instante t, pretendemos estudar a evolução da função $P(t)$, procurando fazer hipóteses tão realistas quanto possível acerca da população de modo a podermos, no entanto, supor que $P(t)$ é solução de determinada equação diferencial. Tal como para o caso da desintegração radioativa, também é claro agora que a população só aproximadamente se pode considerar como função diferenciável do tempo, ou mesmo contínua, uma vez que só pode tomar valores inteiros, e uma função contínua só tomando valores inteiros em dado intervalo seria necessariamente constante. Neste caso, porém, considerando populações constituídas por "grande número" de indivíduos, relativamente à variação que nessas populações ocorre em "pequenos" intervalos de tempo, podemos conjeturar que a aproximação por funções diferenciáveis será adequada, pelo menos em certos casos.

Comecemos por supor que a variação de P ao longo do tempo é apenas consequência das mortes e nascimentos que vão ocorrendo (ou seja supõe-se que a emigração e imigração se compensam); em primeira aproximação é razoável supor que o número de mortes que ocorre por unidade de tempo é proporcional à população total existente, com certa constante de proporcionalidade $M > 0$ (M diz-se taxa de mortalidade média por habitante), bem como o número de nascimentos, com certa constante de proporcionalidade $N > 0$ (taxa de natalidade média por habitante). Teremos então o seguinte cálculo aproximado para a população no instante $t + \Delta t$, dada a população no instante t:

$$P(t + \Delta t) = P(t) + N\Delta t P(t) - M\Delta t P(t) \Longrightarrow \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = (N - M)P(t)$$

(note-se que poderíamos começar por fazer uma análise "mais fina" destas hipóteses à imagem do que se fez como decaimento radioativo, substituindo $(N - M)P(t)$ por $(N - M)P(\xi)$, com $\xi \in [t, t + \Delta t\,]$ e seguindo o raciocínio acima desenvolvido). Com a hipótese de diferenciabilidade, teremos em cada instante t, por passagem ao limite quando $\Delta t \longrightarrow 0$:

$$P'(t) = (N - M)P(t)$$

equação já nossa conhecida, pois é, mais uma vez, da forma $f' = kf$. Muitas vezes designa-se $N - M$ por «taxa de crescimento médio por habitante».

Finalmente, consideremos a *lei de Newton do arrefecimento/aquecimento* que estabelece que a taxa de variação instantânea da temperatura de um corpo é diretamente proporcional à diferença entre a temperatura ambiente e a temperatura do corpo. Representando por $T(t)$ a temperatura do corpo no instante t e por T_a a temperatura ambiente, suposta constante, teremos então, para certa constante $k > 0$:

$$T'(t) = k\big(T_a - T(t)\big);$$

Embora esta equação não seja exatamente da mesma forma das anteriores, se definirmos $f(t) = T_a - T(t)$ teremos:

$$f'(t) = -T'(t) = -k\big(T_a - T(t)\big) = -kf(t).$$

	Note-se que poderíamos ter passado por uma dedução da equação mais cuidadosa, a exemplo do que se fez para a desintegração radioativa, começando por exprimir a lei de Newton do arrefecimento primeiramente não em temos da taxa de variação instantânea da temperatura (o que faz desde logo intervir uma derivada) mas da variação da temperatura em "pequenos" intervalos de tempo, postulando que a variação da temperatura por unidade de tempo é uma percentagem fixa da diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente (havendo arrefecimento ou aquecimento consoante o corpo está a uma temperatura superior ou inferior ao ambiente) e fazendo considerações semelhantes às efetuadas a propósito do decaimento radioativo ou do modelo apresentado de crescimento populacional.
5.2	**Comentário** Estabelecidos alguns modelos de fenómenos da natureza que conduzem a estudar as funções f definidas em intervalos de $\mathbb{R}$ que satisfazem, para t no respetivo domínio, a: $$f'(t) = kf(t)$$ (onde k é uma constante independente de t), podemos agora procurar caracterizar essas funções utilizando expressões analíticas nossas conhecidas. Ora, conhecemos uma função (a exponencial e^x) cuja derivada coincide com a própria função e facilmente se constroem a partir dela funções satisfazendo a equação acima para todo o $t \in \mathbb{R}$. Com efeito temos, obviamente: $$\left(e^{kt}\right)' = ke^{kt},$$ onde a diferenciação é feita naturalmente em ordem a t. Ou seja, a função $f(t) = e^{kt}$ é solução da primeira equação acima em todo o $\mathbb{R}$ o mesmo se podendo concluir para qualquer função dada por uma expressão analítica da forma Ce^{kt}, onde C é uma constante real qualquer. Põe-se agora a questão de saber que outras funções também serão soluções dessa mesma equação. Ora, se supusermos que uma dada função u é solução da referida equação em dado intervalo I de $\mathbb{R}$, ou seja se, para $t \in I, u'(t) = ku(t)$ e se multiplicarmos ambos os membros desta equação por e^{-kt}, obteremos, para todo o $t \in I$: $$u'(t)e^{-kt} = ku(t)e^{-kt} \Leftrightarrow u'(t)e^{-kt} - ku(t)e^{-kt} = 0 \Leftrightarrow \left(u(t)e^{-kt}\right)' = 0.$$ A última equação desta cadeia garante que a função $u(t)e^{-kt}$ é constante em I, ou seja, que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $t \in I$: $$u(t)e^{-kt} = C,$$ ou ainda: $$u(t) = Ce^{kt}.$$ Acabámos de demonstrar que as funções dadas pelas expressões analíticas Ce^{kt} em intervalos de $\mathbb{R}$ esgotam as soluções, definidas em intervalos, da equação diferencial $f' = kf$. Ainda podemos notar que, se conhecermos o valor u_0 de determinada solução em certo $t_0 \in I$, então teremos: $$u_0 = u(t_0) = Ce^{kt_0} \Rightarrow C = u_0e^{-kt_0},$$ e portanto existe uma e somente uma solução em I da equação considerada que é dada por: $$u(t) = u_0e^{-kt_0}e^{kt} = u_0e^{k(t-t_0)}.$$

	Um outro método que pode ser utilizado para se obter esta forma geral para as soluções da equação inicial, após a abordagem do domínio «Primitivas e Cálculo Integral», consiste em partir da equação $\left(u(t)e^{-kt}\right)'_t = 0$ e integrar ambos os membros num intervalo genérico da forma $[t_0, t]$. Utilizando a fórmula de Barrow obtemos imediatamente: $$0 = \int_{t_0}^{t} \left(u(s)e^{-ks}\right)' \, ds = u(t)e^{-kt} - u(t_0)e^{-kt_0} \Longrightarrow u(t) = u_0 e^{k(t-t_0)}$$ No texto de apoio ao descritor 6.4 veremos como aplicar estas conclusões aos problemas referidos no descritor 5.1 para, em cada caso, avançarmos na resolução de diversas questões que se podem colocar.
6.1	1. Foi efetuado um depósito a um ano de 5800€ num banco no regime de juro composto à taxa anual de $2{,}1\%$. 1.1. Qual o capital acumulado ao final de um ano? 1.2. Mostre que o capital acumulado ao fim de 5 anos é de aproximadamente $6435{,}12$€. 1.3. Justifique que a sucessão dos capitais acumulados em cada um dos anos a partir do primeiro é uma progressão geométrica de razão 1,021. 1.4. Obtenha a expressão que permite obter o capital acumulado ao fim de n anos. 1.5. Utilize a calculadora para determinar ao fim de quantos anos é possível obter um capital acumulado superior a 9000€. 1.6. Supondo que é dada a opção de capitalizar juros pagos proporcionalmente em cada período de três meses, mas com uma taxa de apenas 1,9% ao ano, determine se um tal depósito permite obter ao fim de um ano um capital acumulado maior ou menor do que o obtido na opção acima descrita. 2. *O senhor Esteves aderiu a um plano de poupança a uma taxa de juro semestral de 2,5%, em regime de juro composto. Para tal efetuou um depósito de 2000€ em janeiro de 2000 e comprometeu-se a efetuar reforços de 1000€ cada seis meses. Sabendo que este plano de poupança termina em janeiro de 2020, qual o capital acumulado ao fim deste período de tempo?
6.2	1. Considere números reais positivos a, b e c diferentes de 1 e tais que $\log_a b = -2$ e $\log_c b = 3$. Determine o valor de: 1.1. $\log_a(ab^2)$; 1.2. $\log_a\left(\frac{a}{\sqrt[3]{b}}\right)$; 1.3. $\log_b c + \log_b a$; 1.4. $\log_b\left(\frac{c^2\sqrt{b}}{a}\right)$; 2. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes condições, exprimindo as soluções como intervalos ou uniões de intervalos quando não forem em número finito ou numerável: 2.1 $\frac{3}{2^{x+3}} = 384$ 2.2 $x\, e^{x+1} - x^2\, e^x \leq 0$ 2.3 $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} < 25^{2-x}$; 2.4 $e^{-x} - 3e^x + 2 = 0$ 2.5 $4e^{2x} - 4e^x - 3 > 0$

	2.6 $7^{\frac{x^2-4}{x^2+5}} < 1$; 2.7 $\log_{\frac{1}{3}}(2x) < 2 - \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1-x}{x}\right)$; 2.8 $\log_2(x) > \log_8(3x-2)$; 2.9 $*5^{\cos x} + \frac{3}{5^{\cos x}} = 4$; 3. **Mostre que para todo o $x > 0$, $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$.
6.3	1. Considere as funções f e g definidas por $f(x) = 1 + e^{\frac{2}{x-1}}$ e $g(x) = \ln\frac{x-3}{x+2}$ 1.1 Indique o domínio de f e estude a existência de assíntotas ao gráfico de f. 1.2 Resolva a equação $f(x) = 3$. 1.3 Determine uma expressão analítica para a função inversa de f e o respetivo domínio. 1.4 Determine a função derivada de f e identifique os intervalos de monotonia de f. 1.5 Determine o domínio da função g. 1.6 Justifique que o eixo Ox é assíntota do gráfico de g em $+\infty$ e em $-\infty$. 1.7 Averigue se o gráfico da função g admite assíntotas verticais. 1.8 Resolva a condição $g(x) < 0$. 2. A partir do instante em que foi administrada uma medicação por via oral, a quantidade do medicamento X existente no sangue (em mg/l) é dada pela fórmula $f(t) = 50(e^{-0,3t} - e^{-2t})$, com t em horas 2.1 Qual a quantidade de medicamento existente no organismo ao fim de 5 horas? Apresente o resultado arredondado às décimas. 2.2 Ao fim de quanto tempo a quantidade de medicamento no organismo atinge o valor máximo? Apresente o resultado em horas e minutos, arredondados às unidades 2.3 Sabe-se que a eficácia do tratamento depende da existência de uma quantidade mínima de $5mg/l$ no organismo. Utilize a calculadora gráfica para determinar durante quanto tempo é garantida a quantidade mínima no organismo, efetuando um estudo prévio da função f que legitime o processo. Apresente o resultado em horas arredondado às décimas. 3. Esboce os gráficos das funções dadas respetivamente por cada uma das seguintes expressões analíticas, começando por determinar os respetivos domínios, intervalos de monotonia, extremos relativos, concavidades e inflexões. 3.1 $f(x) = x^2e^x$; 3.2 $f(x) = 3 + \log_{\frac{1}{3}}(4x-1)$ 3.3 $*f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ 3.4 $**f(x) = \ln(e^x - 1)$ 3.5 $f(x) = -x + 4 + e^{-x}$ 3.6 $*f(x) = x^3 \ln x$ 3.7 $f(x) = e^x \cos x$ 3.8 $*\frac{2x}{\ln x - 1}$;

3.9 ** x^x;

3.10 **$x^{\frac{1}{x}}$.

4. Considere a função f definida em $\mathbb{R}\backslash[-1,0]$ por $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.
   4.1 *Calcule a derivada de f.
   4.2 **Mostre que a derivada de f pode ser expressa como o produto de f por uma função que é crescente em $]-\infty, -1[$, decrescente em $]0, +\infty[$ e tende para zero em $-\infty$ e em $+\infty$ e conclua que f é crescente tanto em $]-\infty, -1[$ como em $]0, +\infty[$.
   4.3 Será f uma função crescente? Justifique.
   4.4 **Calcule os limites de f em -1 e em 0 e esboce o gráfico de f.

6.4

Comentário

Ao abordarem situações concretas do tipo das referidas no descritor 5.1, ou seja, as que podem ser modeladas recorrendo a equações diferenciais da forma $y' = ky$, onde k é uma constante real, é mais proveitoso que, pelo menos numa primeira fase, os alunos procurem seguir os processos descritos no texto de apoio ao descritor 5.2 em lugar de aplicarem apenas as conclusões finais então referidas. No entanto, dando sequência a essa exposição, vejamos, em cada um dos modelos referidos em 5.1, alguns exemplos do que pode ser interessante desenvolver a partir das conclusões referidas em 5.2, podendo as considerações que se seguem constituir uma fonte de inúmeros problemas concretos de aplicação destes conceitos.

No caso do decaimento radioativo, traduzindo diretamente a conclusão final do texto de apoio ao descritor 5.2, uma vez que as funções massa satisfazem $m' = -km$, ficamos a saber que tais funções $m(t)$ são todas da forma:

$$m(t) = m_0 e^{-k(t-t_0)},$$

onde m_0 é a massa da substância radioativa em determinado instante t_0. Para que esta solução possa ser utilizada para a resolução de problemas práticos, é necessário conhecer a constante k, característica de cada substância. A própria forma das soluções permite-nos chegar a um processo exequível para a determinação de k; com efeito, supondo conhecida a massa da substância radioativa presente em determinada amostra em dois instantes t_0 e t_1, se designarmos por m_1 a massa no instante t_1 teremos:

$$m_1 = m(t_1) = m_0 e^{-k(t_1-t_0)} \Longrightarrow k = -\frac{1}{t_1 - t_0} \ln \frac{m_1}{m_0},$$

ou seja, podemos agora escrever a solução apenas em função de t_0, t_1, m_0 e m_1:

$$m(t) = m_0 e^{-k(t-t_0)} = m_0 e^{\frac{t-t_0}{t_1-t_0} \ln \frac{m_1}{m_0}} = m_0 \left(\frac{m_1}{m_0}\right)^{\frac{t-t_0}{t_1-t_0}}.$$

Estas fórmulas permitem também notar que, no caso particular em que $m_1 = \frac{m_0}{2}$, obtemos:

$$k = -\frac{1}{t_1 - t_0} \ln \frac{1}{2} = \frac{\ln 2}{t_1 - t_0} \Leftrightarrow t_1 - t_0 = \frac{\ln 2}{k};$$

em particular, o tempo $t_1 - t_0$ que a massa leva a reduzir-se a metade, designado por «half-life» («semivida»), não depende da massa inicial e é uma quantidade característica da substância radioativa em questão. Se designarmos a semivida por t_h teremos então:

$$t_h = \frac{\ln 2}{k} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{t_h}$$

e obtemos também, em função da semivida:

$$m(t) = m_0 2^{-\frac{t-t_0}{t_h}}.$$

O fenómeno de decaimento radioativo permite em alguns casos determinar a idade de determinados objetos construídos com substâncias de origem orgânica (madeira, por exemplo), pelo facto de se saber que a percentagem de carbono 14, isótopo radioativo, no carbono existente nos seres vivos se mantém sensivelmente constante, já que estes seres, ao alimentarem-se, acabam por absorver o carbono 14 existente no dióxido de carbono da atmosfera, através da fotossíntese das plantas que direta ou indiretamente entram na cadeia alimentar; quanto ao carbono 14 existente na atmosfera, a respetiva percentagem no carbono total, devido aos bombardeamentos permanentes por raios cósmicos, mantém-se sensivelmente constante ao longo do tempo (as variações efetivas dessa percentagem podem ser levadas em conta numa análise mais fina). Quando um desses seres morre, o carbono 14 que continha começa a decair de acordo com a lei que acabámos de estudar, já que não há absorção de novas quantidades dessa substância. Comparando a taxa de desintegração radioativa na amostra que se pretende datar e num ser ainda vivo é possível saber há quanto tempo morreu o ser (a árvore, por exemplo) de onde foi colhido o material utilizado. Para o efeito basta utilizar a fórmula acima para k em função de t_0, t_1, m_0 e m_1 e, se quisermos exprimir o resultado em função da semivida, a fórmula que relaciona k com t_h:

$$k = -\frac{1}{t_1 - t_0}\ln\frac{m_1}{m_0} \Leftrightarrow t_1 - t_0 = -\frac{1}{k}\ln\frac{m_1}{m_0} = \frac{t_h}{\ln 2}\ln\frac{m_0}{m_1}.$$

Como, em geral, o que se mede diretamente são as taxas de decaimento e não as massas subsistentes de substância radioativa, podemos ainda notar que, da própria equação resulta imediatamente que:

$$\frac{m'(t_0)}{m'(t_1)} = \frac{m(t_0)}{m(t_1)},$$

pelo que a fórmula anterior para o lapso de tempo que se procura conhecer pode exprimir-se na forma:

$$t_1 - t_0 = \frac{t_h}{\ln 2}\ln\frac{m'(t_0)}{m'(t_1)},$$

fórmula que pode ser diretamente usada no chamado método de datação pelo Carbono 14.

Quanto ao modelo proposto de crescimento populacional, $P'(t) = (N - M)P(t)$, as soluções podem ser todas expressa na forma:

$$P(t) = P_0 e^{(N-M)(t-t_0)},$$

onde P_0 é a população no instante t_0. Assim, se a taxa de natalidade (média por habitante) for superior à taxa de mortalidade, a população terá crescimento exponencial, ao passo que no caso $N < M$ a população tenderá exponencialmente para a extinção. Este modelo, dito "Malthusiano", em homenagem a Malthus, eclesiástico inglês que, na viragem do século XVIII para o século XIX, apresentou este modelo, fazendo, a partir dele, previsões catastróficas para o futuro da Humanidade, tem, evidentemente, fortes limitações, pois não leva em conta a limitação dos recursos, a imigração e emigração, as variações das taxas de natalidade e mortalidade, os conflitos, etc.

Embora não sejam referidos nas metas, existem modelos populacionais, geralmente mais realistas que o precedente, que levam em conta as limitações de recursos, determinando que uma dada população não pode ultrapassar certo valor limite $P_\infty > 0$ e, nesse caso, supõe-se que a taxa de crescimento médio por habitante em dado instante é antes proporcional ao produto $P(t)\left(P_\infty - P(t)\right)$. Obtém-se assim a equação (dita «de crescimento logístico»), para certo $\alpha > 0$:

$$P'(t) = \alpha\, P(t)\left(P_\infty - P(t)\right).$$

Curiosamente podemos chegar a uma equação do mesmo tipo fazendo a hipótese de que, para além dos nascimentos e "mortes naturais", sujeitos a taxas médias constantes por habitante, há outras mortes que resultam da conflitualidade ou competição entre indivíduos, supondo-se, por exemplo, que cada encontro entre dois indivíduos tem determinada probabilidade constante de "ser fatal" o que determina que o número de mortes deste tipo por unidade de tempo seja suposto proporcional ao número de encontros possíveis entre dois indivíduos da população (ocorrendo estes encontros aleatoriamente, mas uniformemente em relação ao tempo), o qual evidentemente será, em determinado instante t, igual ao número de pares (não ordenados) que se podem formar com $P(t)$ indivíduos, que é (no caso em que $P(t)$ é um número natural) $P(t)(P(t)-1)/2$. Assim teríamos, com as aproximações habituais:

$$P(t+\Delta t) = P(t) + N\Delta t P(t) - M\Delta t P(t) - \beta\Delta t P(t)(P(t)-1)/2,$$

o que conduz à equação:

$$P'(t) = (N-M)P(t) - \frac{\beta}{2}P(t)(P(t)-1) = \alpha\, P(t)\left(P_\infty - P(t)\right),$$

com

$$P_\infty = \frac{2(N-M)}{\beta} + 1 \text{ e } \alpha = \frac{\beta}{2}.$$

Não estudaremos propriamente este tipo de equações, mas nada impede que se descreva o modelo aos alunos e que verifiquem, por exemplo, que determinada função é solução, propondo-se problemas envolvendo essa função. Note-se que o estudo desta equação pode reduzir-se a uma primitivação direta, pois, supondo que a população nunca atinge P_∞ nem se anula, a equação é equivalente a:

$$\frac{P'(t)}{P(t)\left(P_\infty - P(t)\right)} = \alpha$$

E podemos facilmente integrar ambos os membros entre dois instantes t_0 e t, obtendo a forma geral das soluções com aquelas características, desde que conheçamos uma primitiva da função de y:

$$\frac{1}{y\,(P_\infty - y)}.$$

Assim, este estudo pode corresponder a problemas de nível mais avançado, que podem também ser abordados a propósito do domínio «Primitivas e Cálculo Integral».

Tal como no caso do decaimento radioativo, também agora, no caso malthusiano, podemos dispensar o conhecimento prévio da constante $N-M$, desde que se tenha acesso a censos da população em dois instantes diferentes; assim, refazendo os cálculos acima efetuados no caso do decaimento obtemos, para valores P_0 e P_1 da população em instantes respetivamente t_0 e t_1:

$$N-M=\frac{1}{t_1-t_0}\ln\frac{P_1}{P_0}=\frac{\ln P_1-\ln P_0}{t_1-t_0}$$

e portanto:

$$P(t)=P_0\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{t-t_0}{t_1-t_0}}=P_0e^{\frac{\ln P_1-\ln P_0}{t_1-t_0}(t-t_0)}.$$

Finalmente, quanto ao modelo de Newton de aquecimento/arrefecimento, $T'(t)=k\big(T_a-T(t)\big)$, ou seja, $f'(t)=-kf(t)$, com $f(t)=T_a-T(t)$, teremos:

$$T_a-T(t)=(T_a-T_0)e^{-k(t-t_0)},$$

sendo T_0 a temperatura do corpo no instante t_0, e portanto:

$$T(t)=T_a-(T_a-T_0)e^{-k(t-t_0)}=T_0e^{-k(t-t_0)}+T_a\big(1-e^{-k(t-t_0)}\big),$$

ou seja, a temperatura em cada instante é uma média pesada entre a temperatura inicial do corpo e a temperatura ambiente, de modo que o "peso" associado à temperatura do corpo tende para zero exponencialmente e o "peso" associado à temperatura ambiente tende para 1 também exponencialmente. Tal como nos modelos anteriores, também se poderia determinar o valor de k conhecendo o valor T_0 e T_1 da temperatura em instantes, respetivamente t_0 e t_1:

$$k=-\frac{1}{t_1-t_0}\ln\frac{T_a-T_1}{T_a-T_0}.$$

Seguem-se alguns exemplos de problemas que podem ser propostos aos alunos, relacionados com estes modelos. Os enunciados e os níveis de desempenho poderão ser adaptados de acordo com o que tiver sido discutido previamente acerca dos diversos modelos abordados.

1. A população da Nova Zelândia era de $1{,}218\times10^6$ habitantes em 1921 e de $1{,}344\times10^6$ em 1926; supondo que a evolução da população deste país obedecia a uma lei Malthusiana (taxa constante de crescimento populacional por habitante) determine a população $P(t)$ para qualquer instante t. Sabendo que os valores reais eram, em milhões de habitantes, respetivamente 1,491 em 1935, 1,648 em 1945, 1,923 em 1953 e 3,14 em 1977, discuta a adequação do modelo adotado à realidade, no período de tempo considerado, calculando as percentagens de erro do modelo relativamente aos dados reais.

2. *Durante um certo período, a população de um dado país é dada, em milhões de habitantes, por $P(t)$, onde t é o tempo, em anos, decorrido desde o dia 1 de Janeiro de 1960. A taxa de mortalidade anual é, aproximadamente, de 1,5 para cada 100 habitantes e a taxa de natalidade de 2 para cada 100 habitantes. Todos os anos, chegam ainda ao país cerca de 100.000 novos imigrantes.
   - 2.1 Calcule $P(t+1)$ em função de $P(t)$.
   - 2.2 Supondo que as mortes e nascimentos se distribuem uniformemente ao longo do tempo, ou seja, que as taxas de mortalidade e natalidade por habitante em determinado período de tempo $\Delta t>0$ (medido em anos) são diretamente proporcionais a Δt, calcule $P(t+\Delta t)$ em função de $P(t)$.

2.3 Fazendo a aproximação $P'(t) \approx \frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}$, para Δt suficientemente pequeno, mostre que a função P satisfaz a equação diferencial $P'(t) = \frac{1}{200}P(t) + \frac{1}{10}$.

2.4 Determine uma expressão para a função Q definida por $Q(t) = P(t) + 20$, depois de estabelecer uma equação diferencial satisfeita por esta função, sabendo que em 1950 a população do país é de 35 milhões de habitantes.

2.5 Determine uma expressão para a função P. Neste regime, ao fim de quanto tempo duplicará a população?

3. Uma massa de $m_0 = 50$ gramas de Rádio 226 existente numa amostra no instante $t_0 = 0$ desintegra-se ao longo do tempo. Em todo o instante t, a taxa de variação instantânea da massa, $m'(t)$, é proporcional à massa $m(t)$ existente nesse instante. Sabendo que ao fim de 1 ano, a massa de Rádio é igual a $m(1) = 49{,}975$ gramas, calcule o tempo necessário à desintegração de metade da massa inicial. Apresente o resultado em anos, arredondado a unidade.

4. O Carbono 14 sofre desintegração radioativa de tal forma que a taxa de variação $Q'(t)$ da massa $Q(t)$ existente ao fim de t anos é diretamente proporcional a $Q(t)$, sendo a constante de proporcionalidade igual a $-0{,}00012$.

4.1 Prove que, a partir de uma massa inicial Q_0, a massa $Q(t)$ existente ao fim de t anos é dada pela fórmula $Q(t) = Q_0 e^{-0{,}00012t}$.

4.2 Uma amostra recolhida num túmulo contém apenas 30% do carbono 14 previsto em organismos vivos. Determine a idade aproximada dessa amostra, em anos, aproximada à unidade.

4.3 Uma amostra de origem vegetal foi datada de aproximadamente 15200 anos. Qual a percentagem de carbono 14 contida nessa amostra? Apresente o resultado arredondado às centésimas.

5. Durante um certo período, o número de ursos numa reserva natural é dado por $P(t)$, onde t é o tempo, em anos, decorrido a partir do dia 1 de Janeiro de 1990. A função P verifica $P'(t) = \frac{1}{125}P(t)(100 - P(t))$.

5.1 Mostre que a função P, dada pela expressão $P(t) = \frac{100}{1+Ae^{-\frac{4t}{5}}}$, $A \in \mathbb{R}$, satisfaz a equação diferencial. Admitiremos, até ao final do exercício, que P é de facto desta forma.

5.2 Calcule o valor da constante A em função da população inicial $P(0) = P_0$.

5.3 Qual a evolução da população se $P_0 = 100$? Interprete o resultado obtido.

5.4 **Considere que $P_0 = 10$. Em que instante t_1 a taxa instantânea $P'(t_1)$ é máxima? Esboce o gráfico de P, interpretando t_1 geometricamente, determinando valores aproximados dos eventuais pontos notáveis do gráfico com o auxílio de uma calculadora gráfica. [Sugestão: para o estudo da função, nomeadamente para estudar a monotonia e concavidades, pode utilizar a própria equação diferencial].

6. Uma substância desintegra-se de tal forma que uma massa inicial de 12mg se reduz a 4mg em meia hora. Sabe-se, por outro lado, que a taxa de variação instantânea da massa (ou «taxa de desintegração») em determinado instante t, $M'(t)$, é proporcional à massa $M(t)$ existente nesse instante.

6.1 Prove que, considerando a massa inicial indicada, a massa M, em mg, desta substância ao fim de t horas é dada pela expressão $M(t) = 4 \times 3^{-2t+1}$.

6.2 Definindo a «taxa de desintegração média» num dado intervalo $I = [t_1, t_2]$ por $v_I = \frac{M(t_2)-M(t_1)}{t_2-t_1}$, compare a taxa de desintegração média na primeira e na segunda hora.

6.3 Determine a taxa de desintegração ao fim de uma hora e meia e ao fim de 3 horas.

6.4 Determine a expressão de $M''(t)$, estude o respetivo sinal, descreva como varia a taxa de desintegração desta substância e explique o significado desse resultado no contexto da situação.

7. *Um copo com água acabada de ferver (portanto à temperatura de 100^{o}C) é deixado arrefecer numa sala à temperatura ambiente de 25^{o}C. Sabendo-se que ao fim de dois minutos a temperatura da água atinge 80^{o}C, ao fim de quanto tempo atingirá a temperatura de 50^{o}C?

Descritor	Texto de Apoio
1.6	**Comentário** Ainda que as justificações pedidas sejam bastante simples, há que ter em atenção que não se trata aqui de mostrar igualdades entre funções, mas igualdades entre famílias de funções. De facto, «$\int (f(x)+g(x))dx$» representa a família de funções dadas por expressões da forma $H(x)+c$, $c \in \mathbb{R}$, onde H é uma qualquer primitiva de $f+g$ e «$\int f(x)dx + \int g(x)dx$» representa a família de funções $F(x)+c' + G(x) + c''$, $c', c'' \in \mathbb{R}$, ou seja, $F(x)+G(x)+d$, $d \in \mathbb{R}$, onde F e G são, respetivamente, primitivas de f e de g. Assim, mostrar que $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ é equivalente a mostrar que H e $F+G$ diferem por uma constante, ou seja, uma vez que se trata de funções diferenciáveis num intervalo, que têm a mesma derivada: $H' = f + g = F' + G' = (F+G)'$. Da mesma forma, para $k \in \mathbb{R}$, mostrar que $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ é equivalente a mostrar que $kF' = (kF)'$, o que é verdade por linearidade da diferenciação.
1.7	1. Calcule, em intervalos convenientes, as seguintes primitivas: 1.1 $\int 3x^2 dx$ 1.2 $\int \sin x\, dx$ 1.3 $\int (2\sin x + 3\cos x)\, dx$ 1.4 $\int (x^3+x^2+1)\, dx$ 1.5 $\int e^{3x} dx$ 1.6 $\int 2xe^{x^2} dx$ 1.7 $\int \frac{x}{x^2+1} dx$ 1.8 $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$ 1.9 $\int x^3(x^4+1)^8 dx$ 1.10 $\int \sqrt{x+1}\, dx$ 1.11 $\int \sin x \cos^2 x\, dx$ 1.12 $* \int \cos^2 x\, dx$ 1.13 $* \int \cos^3 x\, dx$ 1.14 $** \int \cos^4 x\, dx$ 1.15 $\int \operatorname{tg} x\, dx$ 1.16 $** \int \frac{\ln 3x}{x} dx$ 1.17 $* \int \sin x \cos x\, e^{\cos 2x} dx$

2.1	**Comentário** Uma construção rigorosa do integral definido - recorrendo por exemplo a somas de Riemann ou de Darboux – encontra-se fora do âmbito do presente Programa. Desta forma, é efetuada, nos restantes objetivos gerais deste domínio, uma introdução à noção de integral recorrendo à noção de área. Note-se que, em rigor, a área de regiões do plano delimitadas por gráficos de funções contínuas e por retas verticais não se encontra devidamente definida, pelo que a presente abordagem deve ser considerada intuitiva.
2.2	**Informação complementar para o professor** O símbolo atualmente utilizado para representar o integral de uma função foi introduzido por Leibniz no século XVII e é muito simplesmente a forma então geralmente utilizada para a letra «s», exceto quando na posição final das palavras ou na segunda posição de um duplo «s» no interior de uma palavra. Pretendia-se assim abreviar a palavra latina “summa”, ou seja, “soma” que era a designação que Leibniz pretendia atribuir à “soma de quantidades infinitesimais”, embora tenha sido suplantada pela de “integral” que Johann Bernoulli popularizou. O símbolo era inicialmente utilizado sem a indicação dos extremos que, quando necessário, eram concretizados no decorrer da exposição. As “parcelas” $f(x)dx$ representavam o produto do valor de uma função em determinado ponto x do respetivo domínio pelo comprimento de um intervalo onde se situava x, considerado “infinitesimal”, ou seja de comprimento “desprezável” e onde portanto se supunha que o valor da função não variava, tomando sempre o valor $f(x)$. Quando a função f era positiva, $f(x)dx$ representava portanto a medida de área de um retângulo com um dos lados de medida “infinitesimal” e a “soma” das áreas de todos os retângulos assim considerados seria igual, deste modo, à área “abaixo do gráfico” da função f, em unidades quadradas. Uma notação então utilizada para a derivada (e ainda hoje bastante vulgarizada) consistia em representar a derivada de uma função $y(x)$ por $$\frac{dy}{dx}$$ O que recorda a origem da noção de derivada, que é o limite de uma razão entre o “acréscimo” da variável dependente o “acréscimo” a que corresponde na variável independente. Com esta notação, a representação utilizada para o integral e a respetiva interpretação fornecem de alguma maneira uma “mnemónica” para a fórmula de Barrow, já que, se “cortarmos” dx no denominador com o dx do símbolo de integração, como se a derivada fosse um verdadeiro quociente e o dx no símbolo de integral fosse uma verdadeira quantidade multiplicativa, obteríamos $$\int \frac{dy}{dx}\, dx = \int dy$$ Se a última expressão for interpretada como uma soma dos acréscimo dy correspondentes aos acréscimos “infinitesimais” sucessivos em x que imaginamos que se efetuam para que x percorra determinado intervalo de integração $[a, b]$, notamos que as “sucessivas parcelas” $dy = y(x + dx) - y(x)$, para x entre a e b, se anulam todas, com excepção de $-y(a)$ e $y(b)$, pelo que o resultado final é $y(b) - y(a)$, coerentemente com a fórmula de Barrow, já que y, evidentemente, é uma primitiva de $\frac{dy}{dx}$.

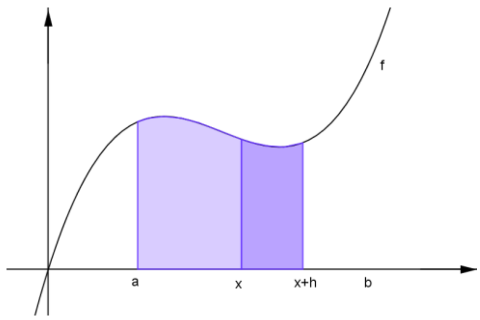
2.4
2.5

Comentário

A monotonia do integral definido, no caso considerado no descritor 2.4, pode ser considerada como consequência imediata de uma propriedade intuitiva da noção de área, que admitiremos: uma parte do plano tem sempre área superior ou igual a um seu subconjunto.

Quanto ao descritor 2.5, a prova pedida pode, por exemplo, ser a seguinte, baseando-se, mais uma vez, em propriedades intuitivas da noção de área que admitiremos para este efeito e utilizaremos quando necessário, sem as nomear explicitamente:

Seja então f uma função contínua não negativa num intervalo $[a,b]$, $(a < b)$, e F_a definida em $[a,b]$ por $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$. Fixado $x \in [a,b[$ e dado $h > 0$ tal que $x+h \in [a,b]$, $F_a(x+h) - F_a(x)$ é, pelo descritor 2.1, a medida da área da região do plano delimitada pelo gráfico de f, o eixo das abcissas e as retas verticais formadas pelos pontos de abcissas x e $x+h$.

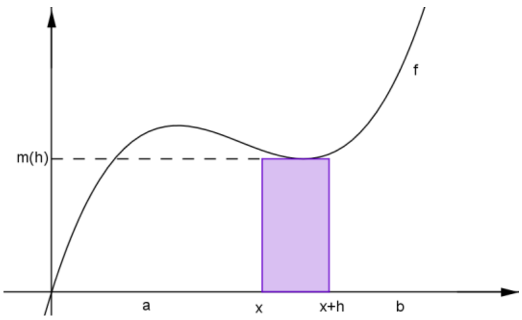


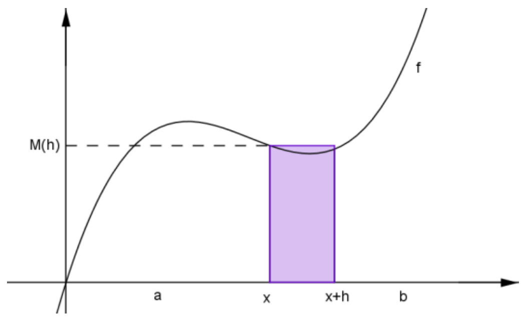
Tem-se assim $F_a(x+h) - F_a(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$.

Pelo Teorema de Weierstrass, f admite um mínimo $m(h)$ e um máximo $M(h)$ no intervalo $[x, x+h]$, ambos não negativos. Como, para t nesse intervalo, se tem $m(h) \leq f(t) \leq M(h)$, o resultado mencionado no descritor 2.4 implica que

$$\int_x^{x+h} m(h)dt \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq \int_x^{x+h} M(h)dt,$$

ou seja, $hm(h) \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq hM(h)$.



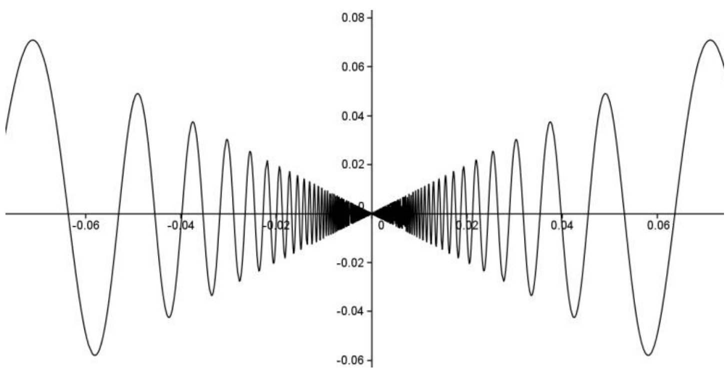


Destas desigualdades pode-se concluir que

$$m(h) \leq \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \leq M(h).$$

Observando que, por continuidade de f no ponto x, $\lim_{h \to 0} m(h) = \lim_{h \to 0} M(h) = f(x)$, pelo Teorema das funções enquadradas,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = f(x).$$

	Por um processo análogo, fixando $x \in]a,b]$ e considerando $h > 0$ tal que $x - h \in [a,b]$, facilmente se conclui que $$\lim_{h\to 0^-} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{F_a(x-h) - F_a(x)}{-h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{F_a(x) - F_a(x-h)}{h} = f(x),$$ pelo que, pelo resultado expresso no descritor FRVR11 1.7, F é diferenciável em x e $F'(x) = f(x)$. Tem-se ainda $F_a(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$, já que se trata da área de um segmento de reta (está contido em retângulos de área arbitrariamente pequena, pelo que tal área, majorada por números positivos arbitrariamente pequenos, só pode ser nula).
2.6	**Comentário** Com as notações do descritor anterior, basta observar, tomando $x = b$ na igualdade $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$, que $$F_a(b) = \int_a^b f(t)dt.$$ Tomando agora uma qualquer primitiva F da função f no intervalo $[a,b]$, o descritor 1.2 garante a existência de $c \in \mathbb{R}$ tal que $F = F_a + c$. Assim, $$F(b) - F(a) = F_a(b) + c - (F_a(a) + c) = F_a(b) = \int_a^b f(t)dt.$$
2.8 2.10	**Comentário** Nestes descritores estende-se o conceito de integral às funções contínuas definidas num dado intervalo $[a,b]$ para as quais existe uma «decomposição» $(c_0, \dots, c_{k+1})$ do intervalo $[a,b]$, $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_k < c_{k+1} = b$ ($k \in \mathbb{N}_0$), tal que, em cada intervalo $[c_j, c_{j+1}]$, f é não positiva ou não negativa. São essencialmente as funções que "alternam de sinal um número finito de vezes". Note-se que existem funções contínuas que não satisfazem este critério, como por exemplo a função definida no intervalo $[0,1]$ por $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$.  A integrabilidade de tais funções fica portanto fora do âmbito do presente Programa.

Para se chegar à definição expressa no descritor 2.10, uma primeira etapa (descritor 2.8) consiste em definir o integral de uma função f contínua e não positiva num intervalo $[a,b]$ como o simétrico da medida da área da região do plano delimitada pelo gráfico da função f, as retas de equação $x=a, x=b$ e o eixo das abcissas. Com esta definição, e reconhecendo intuitivamente que a área de uma dada região do plano é preservada pela reflexão de eixo Ox (assim como por qualquer isometria), facilmente se obtém que $\int_a^b f(t)dt = -\int_a^b \big(-f(t)\big)dt$. Poderá então definir-se o integral no intervalo $[a,b]$ de uma função que alterne de sinal, nesse intervalo, um número finito de vezes, como mencionado mais acima, pela fórmula

$$\int_a^{c_1} f(x)dx + \cdots + \int_{c_j}^{c_{j+1}} f(x)dx + \cdots + \int_{c_k}^{b} f(x)dx,$$

devendo naturalmente ter-se o cuidado de observar que esta quantidade não depende da escolha da decomposição $(c_0, \dots, c_{k+1})$.

É fácil verificar que, com esta definição, o Teorema Fundamental do Cálculo se estende a esta classe de funções:

Dado $x \in [a,b[$, existe $\delta > 0$ tal que f é não negativa ou não positiva no intervalo $[x, x+\delta]$.

Se f for não negativa nesse intervalo, sabemos já que $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h} = f(x)$, onde, como anteriormente, $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Se f for não positiva no intervalo $[x, x+\delta]$, a identidade $\int_a^x f(t)dt = -\int_a^x \big(-f(t)\big)dt$ permite reduzir o problema ao caso anterior.

Da mesma forma se mostra que, para $x \in]a,b]$, $\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h} = f(x)$, donde se conclui que $F_a' = f$.

Poderá então estender-se facilmente a estas funções a fórmula de Barrow, e, em seguida, as restantes propriedades elencadas no descritor 2.10.

3.1

1. Calcule o valor de cada um dos seguintes integrais:

   1.1 $\int_{-2}^{2} t^2 dt$;

   1.2 $\int_{-1}^{1} (5t^3 - 4t)dt$;

   1.3 $\int_0^{\ln 2} e^{2t} dt$;

   1.4 $\int_{-\ln 3}^{\ln 3} (e^t + e^{-t})dt$;

   1.5 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(2t)\, dt$;

   1.6 $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 2cos(t)dt$;

   1.7 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{t}\, dt$;

1.8 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{\sqrt{2t}} dt$;

1.9 $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{t}{t^2+1}\, dt$;

1.10 *$\int_{-2}^{2} |t+1| dt$;

1.11 *$\int_{-1}^{3} \left|-t^2+1\right| dt$;

2. Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

2.1 $\int_0^x e^{t^2} dt$;

2.2 $\int_0^{x^2} \cos(t^3)\, dt$;

2.3 *$\int_{2x}^{0} \tan \sqrt[3]{t}\, dt$;

2.4 **$\int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1-t^2} dt$.

3. Dada uma função f contínua num intervalo $I = [a,b]$ $(a < b)$, define-se a «média de f em $[a,b]$» por

$$m(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

3.1 Calcule a média das funções definidas pelas seguintes expressões, nos intervalos indicados:

3.1.1 $f(x) = \cos x$, $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $I = [0,2\pi]$;

3.1.2 $f(x) = x^2$, $I = [0,5]$;

3.1.3 $f(x) = A\sin(\omega t)$ $(A, \omega > 0)$ num intervalo de amplitude igual ao respetivo período positivo mínimo.

3.2 **Considere um ponto material P que se desloca ao longo de um eixo. Mostre que a média da função velocidade, segundo esta definição, coincide com a velocidade média.

3.3 *Seja f uma função afim. Determine um ponto c do intervalo $[a,b]$ tal que $m(f) = f(c)$.

4. **Considere a função F definida em $\mathbb{R}$ por $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

4.1 Mostre que F é ímpar.

4.2 Mostre que a função F é limitada, começando por justificar que para $t \geq 1$, $e^{-t^2} \leq e^{-t}$.

4.3 Estude a monotonia de F e o sentido da concavidade do respetivo gráfico.

4.4 Mostre que $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ existe e é finito.

4.5 Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de F nos pontos de abcissa $x = 0$ e $x = 1$.

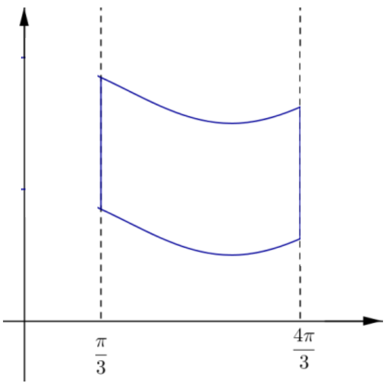
4.6 Mostre que para todo o $x \geq 0$, $F(x) \leq x$.

4.7 Esboce o gráfico de F.

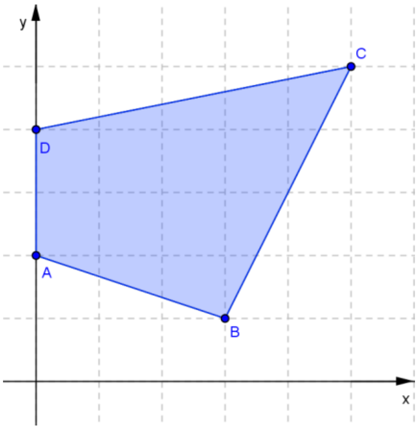
5. **Mostre que a primitiva nula em 0 de uma função par definida em $\mathbb{R}$ é impar.

	6. Calcule, num intervalo conveniente, a primitiva nula em $a = 1$ das funções definidas por 6.1 $f(x) = x^3 + 2x + \frac{1}{x^2} + 2\sqrt[3]{x}$; 6.2 $g(x) = \frac{\ln x}{x} + e^{3x}$. 7. Calcule constantes reais A e B não nulas tais que para todo o $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$ e deduza uma expressão da primitiva F nula em $a = 2$ da função definida no intervalo $]0, +\infty[$ por $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.
3.2	1. Sejam u e v funções definidas e primitiváveis num intervalo I. 1.1*Derivando o produto $u.v$, mostre que sendo $P(uv')$ uma primitiva de uv' então $uv - P(uv')$ é uma primitiva de $u'.v$. 1.2 Deduza da alínea anterior que: $$\int \big(u'(x)v(x)\big)\,dx = uv - \int \big(u(x)v'(x)\big)\,dx$$ 1.3 Utilizando o resultado da alínea anterior determine a primitiva das seguintes funções começando por escrevê-las adequadamente na forma $u'v$: 1.3.1 xe^x 1.3.2 ** $\ln x$ 1.3.3 $x \sin x$ 2. Um ponto material P desloca-se na reta numérica, estando, em cada instante $t \geq 0$, sendo o tempo medido em segundos, submetido à aceleração $a(t)$ igual a 4 unidades de comprimento por segundo quadrado. Calcule a posição que ocupa o ponto P no instante $t = 10$, sabendo que P se encontra no instante $t = 0$ na origem e que a velocidade de v é, no instante $t = 5$, de 10 unidades de comprimento por segundo, no sentido positivo. 3. Um ponto material P desloca-se na reta numérica, estando em cada instante $t \geq 0$ submetido à aceleração $a(t) = \cos(5t)$, na unidade de aceleração correspondente. 3.1 *Mostre que se a velocidade inicial (ou seja, no instante $t = 0$) de P for não nula, P atinge pontos arbitrariamente afastados da respetiva posição inicial. 3.2 Esta propriedade mantém-se quando a velocidade inicial de P é nula? 3.3 Calcule a velocidade e a posição inicial de P sabendo que nos instantes $t = \frac{5\pi}{2}$ e $t = 5\pi$ o ponto P se encontra na origem do referencial. 4. *Um ponto material P desloca-se na reta numérica, estando em cada instante $t \geq 0$ submetido à aceleração $a(t) = \cos(\omega t + \varphi)$, onde $\omega > 0$ e $\varphi \in \mathbb{R}$. Calcule para que velocidade(s) inicial(ais) (ou seja, no instante $t = 0$) a trajetória de P é limitada, isto é, todas as posições de P ao longo do tempo pertencem a um dado intervalo limitado. Calcule, nesse caso, a amplitude da trajetória de P, isto é, a maior distância entre dois pontos dessa trajetória.
3.3	1. Calcule a medida da área da região do plano formada pelos pontos $P(x, y)$ do plano tais que $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \wedge 0 \leq y \leq 4x + \tan x$. 2. *Calcule a medida da área da região do plano formada pelos pontos $P(x, y)$ do plano tais que $0 \leq x \leq \pi \wedge -\sin^3 x \leq y \leq \sin^3 x$. 3. Calcule a medida da área da região do plano delimitada pelos gráficos das funções definidas por $f(x) = x^2$ e $f(x) = \sqrt{x}$.

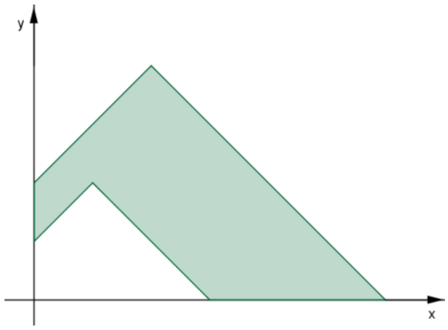
4. Na figura estão representadas partes dos gráficos das funções definidas por $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{2}$ e $g(x) = \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{7}{2}$. Calcule a medida da área da região do plano delimitada pelos gráficos e pelas retas paralelas ao eixo Oy e que intersetam o eixo Ox nos pontos de abcissa $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$.



5. *Na figura está representado um quadrilátero $[ABCD]$ num referencial de tal forma que $A(0,2), B(3,1), C(5,5)$ e $D(0,4)$.
Determine a medida da área do quadrilátero, utilizando integrais adequados.



6. *Na figura estão representadas partes dos gráficos das funções definidas por $f(x) = -|x-2| + 4$ e $g(x) = -|x-1| + 2$. Calcule a medida da área da região do plano delimitada pelos gráficos de f e g e pelos eixos coordenados, utilizando integrais adequados.



7. Calcule a medida da área da região do plano delimitada pelas parábolas de equação $y = x^2 - 3x + 3$ e $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}$.

8. *Calcule a medida da área da região do plano delimitada pela parábola de equação $y = -x^2 - 2x + 3$ e pelas tangentes ao gráfico de f nos pontos de interseção com o eixo das abcissas.

Descritor	Texto de Apoio
1.1 1.2	**Informação Complementar para o professor** A mudança de variável $y = x - \frac{a}{3}$ permite transformar a equação do terceiro grau $y^3 + ay^2 + by + c = 0$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, na equação $x^3 + px + q = 0$, com $p = b - \frac{a^2}{3}$ e $q = \frac{a}{3}\left(\frac{2}{9}a^2 - b\right) + c$. Desta forma, para determinar as raízes de uma qualquer equação do terceiro grau, bastará estudar as equações da forma $x^3 + px + q = 0$, em que o coeficiente de x^2 é nulo. Tratando-se de uma equação do terceiro grau, a determinação de uma única raiz permite conhecer todas as (eventuais) restantes raizes, por divisão de polinómios e utilização da fórmula resolvente para equações do segundo grau . É neste contexto que se insere a fórmula dita de Cardano: quando o discriminante $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ é positivo ou nulo, o número real $$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{D}}$$ é raiz da equação $x^3 + px + q = 0$. De facto, tomando $x = u + v$, esta última equação é equivalente a $$u^3 + 3uv^2 + 3u^2v + v^3 + p(u + v) + q = 0,$$ ou seja, $$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = -p(u + v) - q.$$ Desta forma, uma condição suficiente para se obter uma raiz $x = u + v$ da equação inicial consiste em resolver o sistema $$3uv = -p \wedge u^3 + v^3 = -q.$$ Substituindo na segunda equação $v = -\frac{p}{3u}$ e tomando $r = u^3$, obtém-se a equação do segundo grau $r^2 + qr - \frac{p^3}{27} = 0$, cujo discriminante é igual a $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} = 4D$. Desta forma, se $D \geq 0$, é possível escolher $u^3 = r = \frac{-q \pm 2\sqrt{D}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{D}$, ou seja, $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{D}}$. Tem-se então $v^3 = -q - u^3 = -\frac{q}{2} - (\pm\sqrt{D})$, isto é, $v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - (\pm\sqrt{D})}$. Obtém-se assim o resultado anunciado: $x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{D}}$ é uma raiz real da equação $x^3 + px + q = 0$. Os números complexos aparecem, historicamente, no decurso de uma tentativa de obter soluções reais de equações do terceiro grau de discriminante $D < 0$. Um exemplo característico, entre outros, é a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$. O discriminante é igual a $D = \frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27} = -121 = -11^2$, obtendo-se assim $$" x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-11^2}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-11^2}} = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} ".$$

	Esta expressão não tem obviamente qualquer significado, uma vez que o símbolo $\sqrt{-1}$ não tem significado. No entanto, operando formalmente com este símbolo e considerando que $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-1$, tem-se $$"(2\pm\sqrt{-1})^3=2^3\pm 3\times 2^2\times\sqrt{-1}+3\times 2\times\left(\sqrt{-1}\right)^2\pm\left(\sqrt{-1}\right)^3=2\mp\sqrt{-1}\text{ "},$$ ou ainda $$\text{" }x=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}=2-\sqrt{-1}+2+\sqrt{-1}=4\text{ ".}$$ Embora todos estes cálculos não tenham significado, obteve-se $x=4$ que é, de facto, uma raiz da equação $x^3-15x-4=0$. É com estes cálculos que nasce a motivação de se construir, de forma matematicamente correta, uma extensão de $\mathbb{R}$ (e das respetivas operações) que contenha um elemento «i» tal que $i\times i=-1$. **Comentário** Ainda que todos estes cálculos não sejam necessariamente apresentados aos alunos com todo o pormenor, é importante que associem historicamente o aparecimento dos números complexos à atividade prática de determinar raízes reais de polinómios do terceiro grau.
1.3	**Comentário** O conjunto dos números complexos é construído no segundo objetivo geral deste domínio. No presente descritor pretende-se apenas observar, previamente, que se estiver construída uma extensão de $\mathbb{R}$ (e das respetivas operações de adição e de multiplicação por forma a gozarem das propriedades usuais) designada por «C», se C contiver um elemento i tal que $i\times i=-1$, então, necessariamente, os elementos de C da forma $x+iy$, com $x,y\in\mathbb{R}$, operam-se da seguinte forma: dados $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $(a+ib)+(c+id)=a+c+i(b+d)$ e $(a+ib)\times(c+id)=ac-bd+i(ac+bd)$. Estes cálculos prévios permitem motivar adequadamente a definição que é dada, no descritor 2.1, do conjunto $\mathbb{C}$ e das respetivas operações de adição e de multiplicação. Depois desta construção feita, e de se acabar por dar, no descritor 2.5, um sentido à expressão «$a+ib$», $a,b\in\mathbb{R}$, pede-se a verificação, no descritor 2.8, de que efetivamente estas duas igualdades têm lugar.
2.1	**Comentário** Neste descritor é fornecida uma definição do conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ e das respetivas operações de adição e de subtração. Existem numerosas formas de se introduzir o conjunto $\mathbb{C}$. Optou-se por definir $\mathbb{C}$ como o conjunto $\mathbb{R}^2$ munindo-o de uma operação de adição, que coincide com a operação de adição de vetores do ponto de vista das respetivas coordenadas, e de uma operação de multiplicação "especial", motivada pelos cálculos prévios propostos no descritor 1.3. Uma outra possibilidade consistiria em começar por "postular a existência de uma solução para a equação $x^2+1=0$". No entanto, para a tornar minimamente adequada e credível, seria necessário um trabalho conceptual bem mais exigente. Não é possível, de maneira genérica, "decidir" que uma dada equação, à partida sem soluções nos conjuntos conhecidos, possui

	efetivamente uma solução num conjunto mais alargado e que as operações usuais se estendem a esse conjunto maior, mantendo as respetivas propriedades algébricas, pois esse processo poderia introduzir contradições no edifício da Matemática. Além disso, esta abordagem, levada a cabo de forma não sustentada, tem como consequência, frequentemente, que permaneça nos alunos a dúvida da "verdadeira existência" da unidade imaginária, mesmo depois de já manipularem os números complexos com alguma destreza. Um modo de evitar essas situações é precisamente o que aqui se propõe, ou seja, construir explicitamente, utilizando apenas objetos matemáticos conhecidos, um modelo concreto do conjunto mais alargado e das operações generalizadas que nele se definem, no quadro do qual se encontram soluções da referida equação. No descritor 2.3 efetua-se a identificação entre o complexo $(a,0)$ e o número real a, depois de se verificar que as operações, em $\mathbb{C}$, operam nos complexos com segunda coordenada nula da mesma forma do que a adição e a multiplicação operam no conjunto dos números reais. É agora possível (descritor 2.4) exibir genuinamente um número complexo cujo quadrado é igual a -1: tomando $i=(0,1)$, $$i^2=(0,1)\times(0,1)=(0\times 0-1\times 1{,}1\times 0+0\times 1)=(-1{,}0)=-1.$$
4.3	1. Escreva os seguintes números complexos na forma rw, com r real positivo e $\lvert w\rvert=1$: $-5; -3i;\quad 2+2i;\quad 3-5i$ 2. *Considere um número complexo não nulo z. 2.1 Mostre que z admite uma decomposição na forma $z=rw$, onde $r>0$ e |w|=1. 2.2 Mostre que a decomposição obtida na alínea anterior é única.
5.1	1. Resolva no conjunto dos números complexos as equações $z^2=1$, $z^3=1$e $z^4=1$. O que pode conjeturar quanto ao número de soluções da equação $z^n=1$, para $n\in\mathbb{N}$? 2. **Considere, para $w\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ e $n\in\mathbb{N}$, a equação $z^n=w$. 2.1 Mostre que se z é solução então $\lvert z\rvert=\sqrt[n]{\lvert w\rvert}$. 2.2 Mostre, para $\theta\in\mathbb{R}$, que o número complexo $z=\sqrt[n]{\lvert w\rvert}e^{i\theta}$é solução da equação se e somente se θ é da forma $\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}$, onde α é um argumento de w e $k\in\mathbb{Z}$. 2.3 Justifique que a equação $z^n=w$ tem exatamente n soluções.
6.1	1. Determine a parte real e a parte imaginária dos seguintes números complexos: 1.1 $-i(3+2i)^2$ 1.2 $(1+3i)^{-1}$ 1.3 $\frac{3+5i}{1+7i}$ 1.4 i^{191} 1.5 $\left(1-\sqrt{2}i\right)^3$ 2. Determine o conjunto dos números complexos z tais que 2.1 * $\frac{2z-i}{2+iz}$ é um número real; 2.2 $\frac{z-1-i}{z+1+i}$ é um número imaginário puro.

	3. *Considere números naturais a, b, c e d. 3.1 Determine números naturais α e β tais que $(a^2+\mathrm{b}^2)(\mathrm{c}^2+\mathrm{d}^2)=\alpha^2+\beta^2$. (Sugestão: utilize a igualdade, para números complexos z e z', $\lvert zz'\rvert=\lvert z\rvert\times\lvert z'\rvert$. 3.2 Utilize o resultado da alínea anterior e as igualdades $90=81+9$ e $68=64+4$, para escrever o número 6120 como soma de dois quadrados.
6.2	1. Para cada uma das seguintes funções, indique se se trata de uma translação, rotação, reflexão, reflexão deslizante ou homotetia (interpretando-as como transformações do plano complexo) e construa a imagem do afixo $M(x,y)$ de um número complexo genérico $z=x+iy$: 1.1 $f(z)=z+1+i$; 1.2 $f(z)=iz$; 1.3 $f(z)=-\bar{z}$; 1.4 $f(z)=3z$; 1.5 $*f(z)=iz+5$; 1.6 $**f(z)=i\bar{z}$ 2. Construa a imagem do triângulo de vértices $A(1{,}0)$, $B(0{,}1)$ e $O(0{,}0)$ por cada uma das transformações indicadas no exercício anterior. 3. Considere um determinado ponto M, afixo de um número complexo z e o ponto A afixo do número complexo $z_A=1+i$. 3.1 *Mostre que o afixo de $i(z-1-i)+1+i$ é a imagem de M pela rotação de centro A e de ângulo $\frac{\pi}{2}$. 3.2 **Dado $\theta\in\mathbb{R}$, proponha uma expressão para o número complexo cujo afixo é a imagem de M pela rotação de centro A e ângulo θ. 4. Num plano munido de um referencial cartesiano de origem O, considere as seguintes transformações: f: rotação de cento O e ângulo $-\frac{\pi}{2}$; g: translação de vetor $\vec{u}(1{,}2)$; h: translação de vetor $\vec{u}(-2{,}1)$. Mostre que $foh=gof$.
6.3	1. Determine o módulo e um argumento dos seguintes números complexos: 1.1 $(1-i)^3$ 1.2 $\left(1-i\sqrt{3}\right)^5$ 1.3 $i\,\frac{(1-i)^2}{1+i\sqrt{3}}$ 1.4 $*\ \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$, $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ 1.5 $*\ e^{i\frac{\pi}{4}}-e^{i\frac{\pi}{8}}$ 2. Apresente na forma algébrica o número complexo $z=\frac{i\left(1+\sqrt{3}i\right)^4}{(-1+i)^9}$. 3. Considere o número complexo $z=\sqrt{2+\sqrt{3}}-i\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Calcule z^2 e deduza uma representação de z na forma trigonométrica.

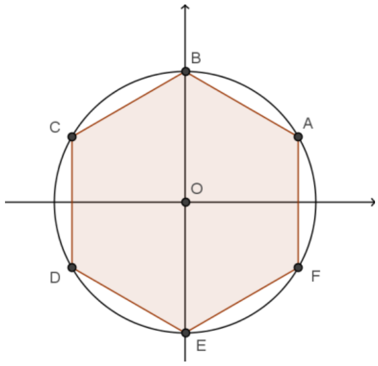
4. Considere o número complexo não nulo $z = re^{i\theta}$, onde $r \in \mathbb{R}^+$ e $\theta \in \mathbb{R}$. Determine, em função de r e de θ, o módulo e um argumento dos seguintes números complexos:
   4.1 $\bar{z}$;
   4.2 $\frac{1}{\bar{z}}$;
   4.3 * $1 + z$;
   4.4 * $1 - z$;
   4.5 $(1 - z)^2$;
   4.6 $\frac{(1-z)^3}{\bar{z}(1+z)^2}\,(z \neq -1)$.
5. * Mostre que $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.
6. ** Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, considere um número complexo z tal que $z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha$. Mostre que para todo o número natural n, $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\alpha$.

6.4

1. Considere os números complexos $z_1 = 3\sqrt{2}(1+i)$, $z_2 = 3\sqrt{2}i$ e $z_3 = 3\sqrt{2}(1-i)$ cujos afixos são, respetivamente, os pontos M_1, M_2 e M_3.
   1.1 Represente os pontos M_1, M_2 e M_3 no plano complexo.
   1.2 Mostre que o quadrilátero $[OM_1M_2M_3]$ é um trapézio retângulo.
2. Determine o conjunto dos pontos afixos dos números complexos z que verificam a condição $\left|\frac{z-1-i}{z+1+i}\right| = 1$.
3. Dado um número complexo z, considere os pontos M_1, M_2 e M_3, afixos, respetivamente dos números complexos z, z^2 e z^3.
   3.1 Determine para que valores de z os pontos M_1, M_2 e M_3 são dois a dois distintos.
   3.2 Determine para que valores de z o triângulo $[M_1M_2M_3]$ é retângulo em M_2.
4. *Determine o conjunto dos valores do número complexo z para os quais os pontos M_1, M_2 e M_3, afixos, respetivamente, dos números complexos $1 + i$, $z + i$ e $1 + iz$ estão alinhados.
5. Represente as regiões do plano definidas pelas seguintes condições:
   5.1 $|z| \leq 2 \wedge |z - i| > 1$;
   5.2 $|z - 1 - i| = |z + i|$;
   5.3 $-\pi < Arg(z) < \frac{\pi}{2} \wedge |z + 1| = 3$;
   5.4 $0 \leq Arg(z - 1) < \frac{\pi}{4} \wedge \left|z - \frac{1}{2}\right| < 2$;
   5.5 $|z - 1| < |z - i|$.
   5.6 $|z - 3 - i| \geq |z - i| \wedge \left|z - \frac{1}{2} - i\right| \geq 2$
   5.7 $-\frac{\pi}{3} \leq Arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) < \frac{\pi}{3} \vee |z + 1 - i| \leq 2$

6.5

1. Considere, em $\mathbb{C}$, a equação $z^6 = 2$.
   1.1. Resolva a equação e mostre que os pontos afixos das respetivas soluções são vértices de um polígono regular.
   1.2. Determine a área do polígono referido em 1.1.

	2. Fixado um plano munido de um referencial ortonormado, considere um pentágono regular inscrito numa circunferência de centro $A(2,2)$. 2.1 Sabendo que um dos vértices do pentágono é a origem O, determine as coordenadas dos restantes vértices. 2.2 *Indique uma equação cujas soluções sejam os números complexos cujos afixos são os vértices do pentágono. 3. Considere o hexágono regular $[ABCDEF]$ cujo centro é a origem O do referencial ortonormado representado. Sabe-se que o ponto C é o afixo do número complexo $z_1 = -3\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$. 3.1 Determine as coordenadas dos restantes vértices do hexágono. 3.2 Indique uma equação cujas soluções sejam os números complexos cujos afixos são os vértices do hexágono. 
6.6	1. Calcule a raiz quadrada do número complexo $z = -8 + 6i$. 2. Resolva as equações: 2.1 $2z^2 - 6z + 29 = 0$. 2.2 $z^3 + 2z^2 + 5z = 0$ 2.3 $z^4 - 2z^2 - 15 = 0$. 2.4 $iz^3 - z^2 - 2 = 0$, sabendo que $z_o = i$ é solução. 3. Determine números complexos z e w tais que $z + w = 2$ e $zw = 10$. 4. *Estabeleça uma condição necessária e suficiente sobre os reais b e c por forma que as soluções da equação $z^2 + bz + c = 0$ tenham módulo 1. 5. *Considere a equação $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 = 0$. 5.1 Mostre que se z_0 é solução da equação, $\overline{z_0}$ é igualmente solução. 5.2 Determine todas as soluções da equação, sabendo que uma delas é da forma ib, $b > 0$.