Metas Curriculares do Ensino Básico
Matemática – 3.º Ciclo

António Bivar
Carlos Grosso
Filipe Oliveira
Maria Clementina Timóteo

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Metas Curriculares

Produto e quociente de números racionais

NO7

Números racionais

1. *Multiplicar e dividir números racionais relativos*

1. Provar, a partir da carateriização algébrica (a soma dos simétricos é nula), que o simétrico da soma de dois números racionais é igual à soma dos simétricos e que o simétrico da diferença é igual à soma do simétrico do aditivo com o subtrativo: $-(q+r)=(-q)+\ (-r)$ e $-(q-r)=(-q)+\ r$.

Exemplo*

Dados dois números racionais q e r, mostra que o simétrico de $q+r$ é $-q+(-r)$.

R.: Para mostrar que os números em causa são simétricos, determina-se a respetiva soma:

$$(q+r)+(-q+(-r))=(q+(-q))+(r+(-r))=0+0=0.$$

Como a soma é nula, os números em causa são simétricos um do outro, ou seja

$$-(q+r)=-q+(-r).$$

Multiplicação e quociente de números racionais

Produto de um natural por um racional

2. Estender dos racionais não negativos a todos os racionais a identificação do produto de um número natural n por um número q como a soma de n parcelas iguais a q, representá-lo por $n \times q$ e por $q \times n$, e reconhecer que $n \times (-q) = (-q) \times n = -(n \times q)$.

Exemplo*

Dado um número racional q, mostra que $5 \times (-q) = -(5 \times q)$.

R.:

$$5 \times (-q) = -q + (-q) + (-q) + (-q) + (-q) = -(q + q + q + q + q)$$
$$= -(5 \times q).$$

Multiplicação e quociente de números racionais

Quociente de um racional por um natural

3. Estender dos racionais não negativos a todos os racionais a identificação do quociente entre um número q e um número natural n como o número racional cujo produto por n é igual a q e representá-lo por $q:n$ e por $\frac{q}{n}$ e reconhecer que $\frac{(-q)}{n} = -\frac{q}{n}$.

Exemplo*

Justifica que $(-3) : 5 = -\frac{3}{5}$ *(ou seja, que* $\frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$*).*

R.: Para justificar que $-\frac{3}{5}$ é igual ao quociente de -3 por 5, vamos verificar que o produto de $-\frac{3}{5}$ por 5 é igual a -3.

Tem-se $5 \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\left(5 \times \frac{3}{5}\right) = -3$ pelo que $(-3) : 5 = -\frac{3}{5}$.

Como «$\frac{-3}{5}$» é uma notação que designa o quociente $(-3) : 5$, tem-se $\frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$.

Multiplicação e quociente de números racionais

Produto de um racional por um racional positivo

4. Estender dos racionais não negativos a todos os racionais a identificação do produto de um número q por $r = \frac{a}{b}$ (onde a e b são números naturais) como o quociente por b do produto de q por a, representá-lo por $q \times r$ e $r \times q$ e reconhecer que $(-q) \times r = r \times (-q) = -(q \times r)$.

$$q \times \frac{a}{b} = (q \times a) : b$$

Produto de dois racionais

5. Estender dos racionais não negativos a todos os racionais a identificação do produto de -1 por um número q como o respetivo simétrico e representá-lo por $(-1) \times q$ e por $q \times (-1)$.
6. Identificar, dados dois números racionais positivos q e r, o produto $(-q) \times (-r)$ como $q \times r$, começando por observar que $(-q) \times (-r) = (q \times (-1)) \times (-r)$.

Metas Curriculares

Dízimas – Dízimas finitas

Uma dízima finita (não negativa e de comprimento N) é uma expressão da forma

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_N$$

onde a_0 é a representação decimal de um número natural ou nulo e, para $n = 1,2, \dots, N$, $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ é um algarismo. Uma dízima finita representa um número racional, de acordo com a identidade

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_N = a_0 + a_1 \times \frac{1}{10^1} + a_2 \times \frac{1}{10^2} + \cdots + a_N \times \frac{1}{10^N}.$$

Dízimas – Dízimas infinitas – NO8

Neste ano letivo introduz-se a noção de «dízima infinita», uma expressão do tipo

$$a_0, a_1 a_2 \dots\ a_n \dots$$

Definir em que medida uma dízima infinita representa um número é um processo delicado. Uma primeira ideia consistiria em considerar que $a_0, a_1 a_2 \dots\ a_n \dots$ representa uma "soma infinita" da forma

$$a_0 + a_1 \times \frac{1}{10^1} + a_2 \times \frac{1}{10^2} + \cdots + a_n \times \frac{1}{10^n} + \cdots$$

Contudo, adicionar uma infinidade de números corresponde matematicamente ao conceito de «série», fora do âmbito do programa do Ensino Básico e do Secundário. Trata-se, de facto, de uma noção difícil de definir e de manipular a este nível. Diga-se, a este propósito, que se não forem feitas certas hipóteses sobre os termos a adicionar, uma "soma infinita" pode até não gozar das propriedades mais elementares da adição, como a comutatividade ou a associatividade! Embora não seja o caso das séries associadas às dízimas infinitas, este facto dá ideia das dificuldades inerentes a esse novo conceito. Esta abordagem não pode, portanto, ser seguida.

Dízimas – Dízimas infinitas

O algoritmo da divisão pode ser utilizado para aproximar um número racional com qualquer precisão que se pretenda.

$$q = \frac{a}{b} = a : b$$

a_0

a_0, a_1

$a_0, a_1 a_2$

...

$a_0, a_1 a_2 \dots a_N$

...

Com esta motivação, diremos que a dízima infinita $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ está associada a um dado número x se, para qualquer N, número inteiro não negativo, truncando a dízima após a ordem N (isto é, eliminando todos os algarismos da dízima infinita que se encontram após a_N), a dízima finita assim obtida aproxima x com um erro não superior a $\frac{1}{10^N}$:

$$0 \leq x - a_0, a_1 a_2 \dots a_N \leq \frac{1}{10^N}.$$

Dízimas – Dízimas infinitas

Exemplo

Ilustremos esta definição: a dízima infinita $0{,}333\ldots$ representa o número racional $x = \frac{1}{3}$ porque se tem

$$0 \leq \frac{1}{3} - 0 \leq 1; \quad 0 \leq \frac{1}{3} - 0{,}3 = \frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30} \leq \frac{1}{10}; \quad 0 \leq \frac{1}{3} - 0{,}33 = \frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300} \leq \frac{1}{100};$$

$$0 \leq \frac{1}{3} - 0{,}333 = \frac{1}{3} - \frac{333}{1000} = \frac{1}{3000} \leq \frac{1}{1000}; \ldots \text{etc.},$$

podendo escrever-se desigualdades análogas independentemente da ordem da truncatura efetuada à dízima infinita $0{,}333\ldots$.

Dízimas – Dízimas infinitas periódicas

NO8

1. Relacionar números racionais e dízimas

2. Reconhecer, dada uma fração própria irredutível $\frac{a}{b}$ tal que b tem pelo menos um fator primo diferente de 2 e de 5, que a aplicação do algoritmo da divisão à determinação sucessiva dos algarismos da aproximação de $\frac{a}{b}$ como dízima com erro progressivamente menor conduz, a partir de certa ordem, à repetição indefinida de uma sequência de algarismos com menos de b termos, a partir do algarismo correspondente ao primeiro resto parcial repetido.
3. Utilizar corretamente os termos «dízima finita», «dízima infinita periódica» (representando números racionais nessas formas), «período de uma dízima» e «comprimento do período» (determinando-os em casos concretos).
4. Saber que o algoritmo da divisão nunca conduz a dízimas infinitas periódicas de período igual a «9».
5. Representar uma dízima infinita periódica como fração, reconhecendo que é uma dízima finita a diferença desse número para o respetivo produto por uma potência de base 10 e de expoente igual ao comprimento do período da dízima e utilizar este processo para mostrar que $0,(9) = 1$.
6. Saber que se pode estabelecer uma correspondência um a um entre o conjunto das dízimas finitas e infinitas periódicas com período diferente de 9 e o conjunto dos números racionais.

Dízimas – Dízimas infinitas não periódicas

Anterior

2. *Completar a reta numérica*

1. Reconhecer que um ponto da reta numérica à distância da origem igual ao comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1 não pode corresponder a um número racional e designar os pontos com esta propriedade por «pontos irracionais».
2. Reconhecer, dado um ponto A da semirreta numérica positiva que não corresponda a uma dízima finita, que existem pontos de abcissa dada por uma dízima finita tão próximos de A quanto se pretenda, justapondo a_0 segmentos de reta de medida 1 a partir da origem tal que A esteja situado entre os pontos de abcissa a_0 e $a_0 + 1$, justapondo em seguida, a partir do ponto de abcissa a_0, a_1 segmentos de medida $\frac{1}{10}$ tal que A esteja situado entre os pontos de abcissa $a_0 + \frac{a_1}{10}$ e $a_0 + \frac{a_1+1}{10}$ e continuando este processo com segmentos de medida $\frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \ldots$ e associar a A a dízima «$a_0, a_1 a_2 \ldots$».
3. Saber, dado um ponto A da semirreta numérica positiva, que a dízima $a_0, a_1 a_2 \ldots$ associada a A é, no caso de A não ser um ponto irracional, a representação na forma de dízima da abcissa de A.
4. Reconhecer que cada ponto irracional da semirreta numérica positiva está associado a uma dízima infinita não periódica e interpretá-la como representação de um número, dito «número irracional», medida da distância entre o ponto e a origem.

Dízimas – Dízimas infinitas não periódicas

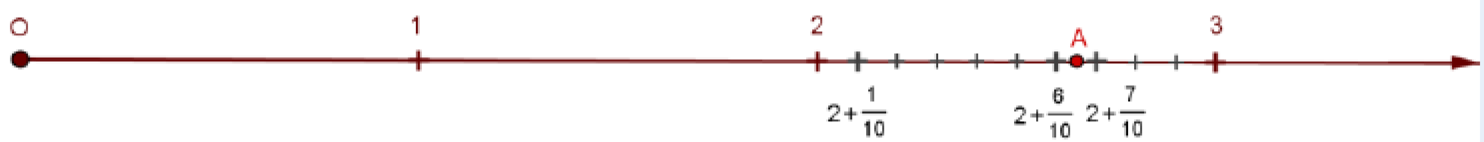
Consideremos por exemplo o seguinte ponto A da semirreta numérica positiva:

Começamos por justapor, a partir da origem, segmentos de reta de medida de comprimento igual a $\frac{1}{10^0} = 1$ até que um deles contenha o ponto A.

Neste exemplo, o ponto A encontra-se entre os pontos de abcissa 2 e $2+1$, pelo que, com as notações do descritor, $a_0 = 2$.

Dízimas – Dízimas infinitas não periódicas

Justapomos agora, a partir do ponto de abcissa 2, segmentos de reta de medida de comprimento igual a $\frac{1}{10} = 10^{-1}$.



O ponto A encontra-se situado entre os pontos de abcissa $2 + \frac{6}{10}$ e $2 + \frac{7}{10}$: tem-se $a_1 = 6$.

Repete-se este processo com segmentos de reta de medida de comprimento iguais a $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^3}$ ...etc.
Vai-se assim construindo progressivamente uma dízima da forma $a_0, a_1 a_2$ ... No presente exemplo, esta dízima é igual a 2,6 ...

Dízimas – Dízimas infinitas não periódicas

Esta dízima fica associada ao ponto A, podendo ocorrer uma de três possibilidades:

- O processo termina após um número finito de etapas, com a coincidência do ponto A com uma extremidade de um dos intervalos, obtendo-se portanto uma dízima finita. Neste caso, a dízima corresponde à fração decimal que representa o número racional abcissa de A.
- A dízima obtida é infinita periódica. Neste caso, a dízima representa o número racional abcissa de A.
- A dízima obtida é infinita não periódica. Neste caso A é um ponto irracional e a dízima deve ser interpretada como representação de um número, dito «número irracional», medida da distância entre a origem e A e que também designaremos por abcissa de A.