



10.º ANO | ENSINO SECUNDÁRIO

Matemática B

(Matemática Aplicada às Artes Visuais)

INTRODUÇÃO

Matemática Escolar Orientada para o Futuro

A formação de indivíduos matematicamente competentes é um propósito fundamental do currículo de Matemática para o ensino secundário. A sociedade e o mundo contemporâneos, marcados pela globalização, pela crescente digitalização, conectividade e automatização, e por uma aceleração do desenvolvimento tecnológico, enfrentam desafios nos quais o conhecimento matemático adquire um papel essencial, proporcionando conceitos, métodos, modelos e formas de pensar. Esse poder matemático deve ser parte integrante da educação de todos os cidadãos, incluindo conhecimentos e capacidades que os jovens transportarão para a sua vida pessoal, social e profissional.

Empreender uma formação matemática, abrangente, relevante e inovadora, neste ciclo de escolaridade, significa desenvolver nos alunos a capacidade de identificar conceitos matemáticos relevantes para resolver problemas reais, aplicar procedimentos

matemáticos adequados, e interpretar os resultados em contextos diversos. O raciocínio matemático está na base dos processos de compreensão dos conceitos e objetos matemáticos, que podem e devem ser analisados, representados e relacionados de diferentes formas. São igualmente importantes a formulação de hipóteses, a testagem de conjeturas, a dedução, a generalização e a abstração, na construção de argumentos lógicos e conclusões, cuja comunicação de forma apropriada é cada vez mais importante no mundo atual.

O currículo consagra o propósito de preparar os alunos para formularem juízos e tomarem decisões fundamentadas, contribuindo para que se tornem cidadãos reflexivos, empenhados e participativos. Visa também contribuir para que os jovens apreciem o papel da Matemática no mundo e o seu carácter de ciência em evolução e renovação permanente, apreciando a sua dimensão estética a par do seu legado histórico.

Assim, o currículo de Matemática para o futuro orienta-se para o desenvolvimento de áreas de competências, à luz do que é preconizado no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*, nomeadamente no que se refere ao pensamento crítico aliado à resolução de problemas, promovendo a criatividade e a comunicação, além de acentuar a pertinência do trabalho colaborativo.

Ideias Inovadoras do Currículo

- Matemática para a Cidadania

O reconhecimento do ensino secundário enquanto um ciclo de formação geral dos jovens, incluído na escolaridade obrigatória, cria um contexto em que todas as disciplinas, incluindo a Matemática, devem contribuir para o desenvolvimento dos alunos enquanto cidadãos ativos, conscientes, informados e interventivos.

A crescente relevância do papel da Matemática na sociedade atual realça a importância e a necessidade de dotar os alunos de ferramentas de análise dos processos sociais que estão na base do exercício de uma cidadania ativa. Assim, as Aprendizagens Essenciais introduzem modelos e processos eleitorais e a análise de modelos financeiros e valorizam o desenvolvimento da literacia estatística.

- Pensamento Computacional

Os aspetos comuns entre o Pensamento Matemático e o Pensamento Computacional, bem como a relevância atual do Pensamento Computacional na ciência e na sociedade, justificam que o currículo de Matemática valorize esta abordagem

conceptual na resolução de problemas. As Aprendizagens Essenciais de Matemática promovem o desenvolvimento de práticas como a abstração, a decomposição, o reconhecimento de padrões, a análise e definição de algoritmos e o desenvolvimento de hábitos de depuração e optimização dos processos envolvidos na atividade matemática, com o objetivo de os alunos mobilizarem estes processos em toda a sua atividade. Deste modo, a aposta no Pensamento Computacional revela a aproximação do currículo às recomendações internacionais e também o alinhamento com o currículo de Matemática do ensino básico, favorecendo o desenvolvimento desta competência de forma integrada, coerente e progressiva.

- Diversificação de temas no currículo

Para além do desenvolvimento de competências no âmbito da cidadania, pretende-se disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos e nas abordagens de cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com os métodos numéricos, a par do recurso à tecnologia, e a inclusão de temas com pouca tradição no ensino secundário em Portugal, com diferentes graus de aprofundamento. Desta forma, pretende-se dotar os alunos de competências de índole científica que permitam sustentar diferentes percursos académicos e profissionais.

- Papel central da Geometria

O Curso de Artes Visuais dos cursos científico-humanísticos do ensino secundário necessita de uma disciplina de Matemática especialmente desenhada tendo em vista esse curso. Neste contexto, a área da Geometria deve desempenhar um papel muito importante. Com efeito, a Geometria está de tal modo presente na natureza, que a Arte frequentemente se sustenta na Geometria para a descrever. Pareceria assim estranho que um artista não tivesse uma forte formação em Geometria, para além do que é estudado no ensino básico. A abordagem da Geometria inclui assuntos elementares de geometria analítica, padrões geométricos e trigonometria, com as competências de resolução de problemas métricos, com permanentes preocupações de contextualização, indo assim ao encontro das motivações e interesses dos alunos e também do perfil dos alunos dos cursos de Artes Visuais.

- Aproximação aos Cursos Artísticos Especializados

Desde 2007 que os Cursos Artísticos Especializados possuem a sua própria disciplina de Matemática que, embora com menor carga horária, tem vindo a proporcionar uma formação matemática adequada aos alunos das Escolas Artísticas Soares dos Reis e António Arroio. Assim, as Aprendizagens Essenciais de Matemática B aproximam-se do programa dessa disciplina e acrescentam alguns temas também relevantes para a formação dos alunos desta área.

- Aproximação aos Cursos Profissionais

As Aprendizagens Essenciais de Matemática B integram os seis módulos obrigatórios da disciplina de Matemática dos cursos profissionais de 300 horas, possibilitando que, para efeitos de prosseguimento de estudos de nível superior, a prova de exame para a Matemática B e da Matemática dos Cursos Profissionais, seja a mesma e centrada nesses seis módulos obrigatórios.

Ideias-Chave das Aprendizagens Essenciais

As Aprendizagens Essenciais de Matemática no ensino secundário dão continuidade às aprendizagens do ensino básico e assumem um conjunto de princípios e orientações metodológicas, cuja concretização e especificação é feita para cada ano de escolaridade e tema matemático. A seguir, enunciam-se e apresentam-se as ideias-chave preconizadas nas Aprendizagens Essenciais, esquematizadas na Figura 1:



Figura 1. Ideias-chave das aprendizagens essenciais

1) Resolução de problemas, modelação e conexões

Dar sentido à Matemática e enfatizar a modelação e as aplicações

A resolução de problemas, tal como a modelação, devem constituir o contexto para o estabelecimento de conexões entre diferentes conceitos e áreas da Matemática, assim como entre a Matemática e outras áreas do saber, permitindo uma abordagem integrada e significativa para os alunos na sua atividade matemática. É fundamental que os alunos tenham contacto com o processo de modelação matemática e sejam capazes de criticar, validar e aperfeiçoar modelos matemáticos. Preconizando a exploração de ideias e conceitos matemáticos, pretende-se que a aprendizagem não se reduza à memorização de regras, treino de procedimentos ou conhecimento de resultados ou à execução de procedimentos sem compreensão. É essencial que as definições, os resultados e os procedimentos matemáticos adquiram sentido e que os alunos os saibam mobilizar e aplicar adequadamente para resolver problemas do mundo real, em situações do dia a dia ou de outras disciplinas. O raciocínio e a resolução de problemas, sendo uma das áreas de competências no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*, implica que os alunos sejam capazes de: interpretar informação, planear e conduzir pesquisas; gerir informações e tomar decisões; e desenvolver processos conducentes à construção de conhecimento, usando recursos diversificados.

2) Raciocínio dedutivo e lógica matemática

Incentivar processos de raciocínio dedutivo, integrando a lógica matemática nos diversos temas

O aluno deve ser sistematicamente incentivado a justificar processos de resolução, a encadear raciocínios, a testar conjecturas, a demonstrar resultados e alguns teoremas. Os conceitos e métodos relativos à lógica matemática não constituem um tema específico das Aprendizagens Essenciais, mas devem, de forma natural, ser integrados nos vários temas abordados. Noções elementares de Lógica podem e devem ser introduzidas à medida que forem relevantes para a clarificação de processos e de raciocínios. Pretende-se, assim, que o aluno adquira a capacidade de raciocinar dedutivamente e de forma autónoma, usando os princípios e a simbologia inerentes à lógica matemática. A integração do raciocínio dedutivo e da lógica, bem como da linguagem matemática e simbólica, deve estar presente em todos os momentos de aprendizagem, sem se transformar num conteúdo tratado de forma isolada. O grau de formalização a utilizar deve ter sempre em conta o nível de maturidade matemática dos alunos e deve surgir, se possível, como uma necessidade, garantindo que o processo de formalização acompanha a apropriação dos conceitos. Diversos temas, como, por exemplo, Geometria, Funções e Probabilidade, em contexto de resolução de problemas, podem constituir-se como excelentes oportunidades para desenvolver o raciocínio

dedutivo, no qual se inclui a utilização de linguagem e de notações, bem como a estrutura hipotético-dedutiva envolvida no processo de resolução e/ou demonstração de resultados.

3) Recurso sistemático à tecnologia

Incentivar a exploração de ideias e conceitos, integrando a tecnologia como alavanca para a compreensão e resolução de problemas.

Preconiza-se a abordagem exploratória de ideias e conceitos matemáticos, o que implica levar o aluno a participar ativamente num processo de construção e aprofundamento, motivado por questões desafiadoras, problemas e procura de justificações. A integração da tecnologia é considerada como indispensável nesse processo, pelas possibilidades que oferece de experimentação, visualização, representação, simulação, interatividade, bem como, evidentemente, de cálculo numérico e simbólico. O recurso à folha de cálculo, a ambientes de geometria dinâmica, a aplicativos digitais diversos, a simulações, a *smartphones*, à calculadora gráfica e sensores, bem como a outros equipamentos e materiais, deve ser feito de forma sistemática. As atividades de programação devem ser integradas com uma complexidade progressiva, sendo relevantes para o desenvolvimento de processos algorítmicos, de um pensamento estruturado e do raciocínio lógico, proporcionando um vasto campo de aplicação da Matemática e envolvendo genuinamente a formulação e a resolução de problemas, promovendo o desenvolvimento do pensamento computacional.

4) Tarefas e recursos

Apoiar a aprendizagem em tarefas poderosas, contextos e recursos diversificados

A construção de tarefas de aprendizagem constitui uma das ações decisivas do professor. Uma tarefa matemática poderosa pode ser um problema, uma questão, um exercício, uma investigação que cumpre os seguintes critérios: ser interessante e desafiante, envolver matemática relevante, criar oportunidades para aplicar e ampliar conhecimentos, permitir diferentes estratégias, tornar possível monitorizar a compreensão dos alunos e apoiar o seu progresso. As tarefas devem ser diversificadas e ajustadas aos objetivos de aprendizagem e a sua planificação deve prever diferentes tipos de organização do trabalho dos alunos. A utilização de recursos variados, nomeadamente da tecnologia, bem como a diversificação de contextos de aprendizagem, incluindo laboratórios, espaços fora da sala de aula, museus de ciência e outros, deverão merecer especial atenção na construção de tarefas. O recurso a episódios e problemas marcantes da História da Matemática deve motivar pesquisas, estudos ou debates, não de caráter enciclopédico, mas contribuindo para que o progresso da Matemática seja

apreciado e compreendido. Para além do seu valor intrínseco, enquanto património cultural que importa valorizar, existem factos, aspetos particulares e episódios da História da Matemática, que pelo seu potencial pedagógico devem ser explorados.

5) Práticas enriquecedoras e criatividade

Inovar e investir em práticas enriquecedoras, favorecendo o desenvolvimento da criatividade e atitudes positivas face à Matemática

O currículo integra propostas inovadoras, que incluem a realização de projetos ajustados às condições existentes e aos alunos. É igualmente recomendado que os alunos se envolvam na resolução de questões e problemas autênticos em contextos de interdisciplinaridade (nomeadamente, numa perspetiva integradora de STEAM - ciências, tecnologia, engenharia, artes e matemática). A programação, tal como a modelação ou o trabalho de projeto, abrem inúmeras vias de trabalho promissoras que não devem ser ignoradas. Também a beleza da Matemática, a sua aplicabilidade e a história fascinante que envolve a Matemática são fortes motivos para inovar através de práticas de enriquecimento das aprendizagens. É importante que os alunos experimentem o prazer da descoberta em Matemática e que desenvolvam o gosto pelo desafio, pela procura de soluções e pela sua comunicação. As oportunidades de aprenderem matemática mais significativa contribui para desenvolver nos alunos atitudes positivas em relação à disciplina. Tornar possível que reconheçam a importância da Matemática na sua formação e adquiram autoconfiança, sentindo-se capazes de raciocinar e comunicar matematicamente. Esta atitude positiva permitirá uma visão do papel da Matemática como essencial na formação de cidadãos críticos, reflexivos e capazes de tomar decisões e resolver problemas do quotidiano.

6) Organização do trabalho dos alunos

Valorizar o trabalho colaborativo num ambiente de entajuda e corresponsabilização, cultivando comunidades de aprendizagem

A valorização do trabalho colaborativo é assumida enquanto estratégia de aprendizagem e enquanto competência a desenvolver nos jovens na sociedade atual. A colaboração é especialmente indicada em tarefas nas quais os alunos possam discutir e definir abordagens e processos de resolução, confrontar ideias e contribuir para um objetivo comum. É também uma forma de trabalho em que os alunos se devem apoiar mutuamente, envolvendo-se em processos matemáticos, argumentação e comunicação, valorizando as competências individuais de cada um. Assim, o trabalho em pares e em pequenos grupos é

adequado em múltiplas situações de aprendizagem, desde a realização de tarefas curtas, passando por situações que envolvem pesquisa, recolha de dados, modelação, até ao desenvolvimento de projetos.

7) Comunicação matemática

Comunicar recorrendo a representações múltiplas, com clareza e rigor e um nível de formalização adequado

A comunicação matemática, a par do raciocínio e do pensamento crítico, está presente quando os alunos interpretam gráficos, esquemas, diagramas ou dados, justificam afirmações, utilizam diferentes representações, escrevem e criticam explicações e argumentos matemáticos, com simbologia adequada e produzindo encadeamentos lógicos. Importa pôr em prática diversos tipos de comunicação, dando espaço às discussões coletivas e em pequenos grupos, apresentações orais e/ou escritas, elaboração de relatórios e composições, publicações e exposições, que são essenciais no processo de desenvolvimento de conceitos ou processos matemáticos. É desejável que os alunos se familiarizem com a linguagem própria da Matemática, que sejam capazes de usar adequadamente a simbologia e a argumentação lógico-dedutiva. A simbologia constitui um sistema de representação matemática poderoso que deve ser relacionado com outros modos de representação, tendo em vista a sua utilização oportuna, nomeadamente no âmbito da comunicação matemática. A formalização de conceitos e de resultados matemáticos é uma etapa importante da aprendizagem, mas não pode ser alcançada por meio do excesso de manipulação simbólica ou pela prática de artifícios de cálculo excessivamente técnicos.

8) Avaliação para a aprendizagem

Privilegiar a avaliação formativa na regulação do processo de aprendizagem

A abordagem exploratória que se privilegia implica a integração da avaliação no processo de aprendizagem. É necessário que a avaliação seja um processo e não um fim, e que esteja ao serviço da aprendizagem dos alunos de modo a favorecê-la. A diversificação de formas e instrumentos de avaliação é uma das práticas de avaliação recomendadas. Constituem boas tarefas de avaliação formativa as resoluções detalhadas de tarefas, os relatórios e os cartazes. A produção de documentos de natureza audiovisual é igualmente válida e apelativa, designadamente sob a forma de pequenos vídeos, criação de páginas e blogs, tirando partido de ferramentas digitais. As partilhas de ideias e conclusões em sala de aula, bem como as apresentações orais, constituem boas oportunidades para monitorizar e acompanhar o desenvolvimento das aprendizagens e identificar dificuldades e obstáculos.

Operacionalização das Aprendizagens Essenciais

A disciplina de Matemática B destina-se aos alunos do Curso Científico-Humanístico de Artes Visuais, como disciplina bial de opção, ou a alunos de outros cursos que, nos termos da legislação aplicável, optem por um percurso formativo próprio. Pretende-se que os alunos desenvolvam conhecimentos, capacidades e atitudes que lhes permitam adquirir um conjunto de competências, tendo em vista a construção do *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Os temas a abordar são Matemática para a Cidadania, Literacia Financeira, Geometria, Estatística, Probabilidade e Funções.

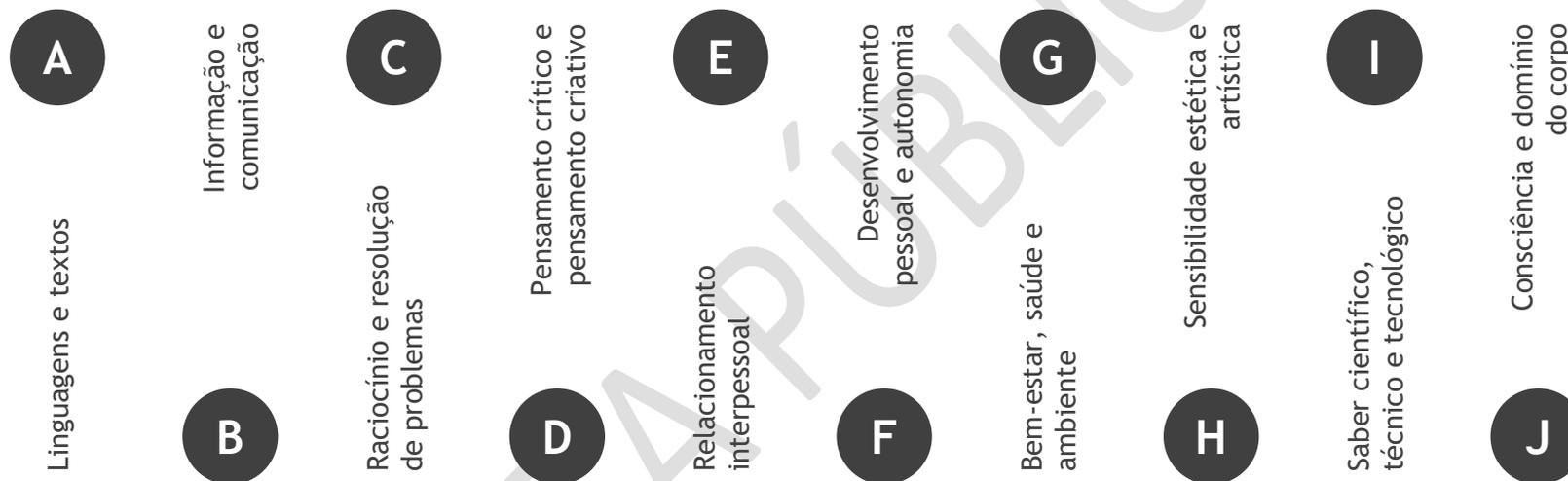
A organização das Aprendizagens Essenciais é apresentada em quatro áreas:

- *Temas, Tópicos e Subtópicos matemáticos*, em que são identificados os conceitos Matemáticos a abordar.
- *Objetivos de aprendizagem, conhecimentos, capacidades e atitudes que o aluno deve revelar*, em que são concretizadas, para cada tópico matemático, as aprendizagens visadas com a indicação do foco e da especificação preconizada.
- *Ações estratégicas de ensino do professor*, onde é clarificado o papel do professor e as indicações metodológicas que são consideradas adequadas para a obtenção dos objetivos de aprendizagem definidos, bem como a sugestão de exemplos para a concretização das atividades a propor aos alunos.
- *Áreas de competência do perfil do aluno*, em que é estabelecida uma ligação entre as aprendizagens matemáticas visadas, as indicações metodológicas e as competências, capacidades e atitudes definidas no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*.

Quando nas Aprendizagens Essenciais se refere recurso a tecnologia gráfica, deve entender-se a utilização de folhas de cálculo ou qualquer versão de calculadora gráfica, física ou sob a forma de emulador, inclusive com Cálculo Algébrico Simbólico (CAS), bem como o uso do Geogebra ou outro Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD), nas suas diversas versões disponíveis em qualquer dispositivo digital. Considera-se também o recurso a aplicativos digitais específicos (apliquetas), disponíveis na internet ou em fóruns temáticos.

Para cada tema são incluídas notas clarificadoras, nomeadamente no que se refere à sugestão de: atividades para o desenvolvimento do Pensamento Computacional, com recurso a exemplos; propostas de possíveis aprofundamentos de alguns temas ou de abordagens alternativas; referências bibliográficas que incluem documentos e recursos para apoio ao trabalho do professor.

ÁREAS DE
COMPETÊNCIAS
DO PERFIL DOS
ALUNOS (ACPA)



OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
MATEMÁTICA PARA A CIDADANIA Teoria matemática das eleições	Conhecer alguns sistemas eleitorais como formas de participação cívica e representatividade: - maioria simples; - maioria absoluta em duas fases.	Contribuir para a clarificação da importância da participação de cada cidadão na eleição dos seus representantes (delegado de turma, associação de estudantes, estruturas sindicais e poderes políticos). Analisar com os alunos o sistema eleitoral para a Presidência da República. Promover o debate sobre a relevância da segunda volta, ilustrando-a com a eleição presidencial de 1986.	Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A) Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avalia, valida e organiza a informação recolhida. (B)
Teoria da partilha	Conhecer o Método de Hondt. Fazer a atribuição de mandatos, pelo método de Hondt, a partir de votações conhecidas.	Analisar com os alunos os contextos eleitorais ao nível autárquico e para a Assembleia da República, para que seja clara a necessidade de um método de partilha proporcional. Incentivar os alunos a verificar a distribuição de mandatos num organismo local (eleições com um número reduzido de mandatos - até 6 mandatos). Promover a exploração, com recurso à folha de cálculo, de distribuições de mandatos em cenários nacionais (eleições com um número elevado de mandatos, por exemplo, distribuição de mandatos por círculo eleitoral).	Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição. (D)

Impostos	Conhecer impostos diretos e indiretos, IVA, IRS e IUC.	<p>Propor o cálculo de preços sem imposto, dado o preço ao consumidor e vice-versa, usando exemplos de produtos sujeitos a diferentes taxas de IVA.</p> <p>Incentivar os alunos a pesquisar e analisar as tabelas de IRS, os escalões aplicáveis e promover a discussão sobre a progressividade deste imposto.</p> <p>Promover a análise, a discussão e o debate sobre os parâmetros envolvidos no cálculo do IUC.</p>	<p>Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos. (E)</p> <p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)</p>
Linguagem matemática - Comunicação social	Analisar notícias com conteúdo matemático relevante.	<p>Solicitar a identificação de notícias com conteúdo matemático.</p> <p>Promover a apresentação da notícia, usando palavras próprias e a explicitação dos conceitos matemáticos relevantes, a partir de critérios de análise, como por exemplo, clareza, atualidade, inconsistências, fundamentação e aprofundamento.</p>	

Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será igualmente importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles.

Antes de redigir o programa na linguagem Python, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Exemplo de programa em Python que permite determinar o número de votos que garante a maioria absoluta, sendo inseridas as votações de 3 candidatos.

```
cA=int(input("N.º de votos do candidato A:"))
cB=int(input("N.º de votos do candidato B:"))
cC=int(input("N.º de votos do candidato C:"))
ma=int((cA+cB+cC)/2)+1
print(ma)
```

A conclusão é que para obter maioria absoluta são precisos **ma** votos. Algum dos candidatos ultrapassou esse valor?

Podem ser trabalhadas simulações, procurando por exemplo número mínimo e máximo de votos para um partido obter um número predeterminado de lugares (por exemplo, todos os mandatos serem atribuídos ao mesmo partido). Uma simulação em linha do método de Hondt pode ser encontrada aqui:

<https://www.sg.mai.gov.pt/AdministracaoEleitoral/MetodoHondt/Paginas/default.aspx>

Numa possível extensão a este programa poderá ser verificado se algum dos candidatos obteve maioria absoluta.

Exemplo de programa em Python que permite determinar o número de votos que garante a maioria absoluta, sendo inseridas as votações de 3 candidatos, e verificar se algum dos candidatos obteve essa maioria.

```
cA=int(input("N.º de votos do candidato A:"))
cB=int(input("N.º de votos do candidato B:"))
cC=int(input("N.º de votos do candidato C:"))
ma=int((cA+cB+cC)/2)+1
print("Serão necessários pelo menos",ma,"votos para obter maioria absoluta.")
if cA>=ma:
    print("O candidato A obteve maioria absoluta com",cA,"votos.")
elif cB>=ma:
    print("O candidato B obteve maioria absoluta com",cB,"votos.")
elif cC>=ma:
    print("O candidato C obteve maioria absoluta com",cC,"votos.")
else:
    print("Nenhum dos candidatos obteve maioria absoluta.")
```

Nota: O programa foi criado em Python IDLE 3.9.1 para computador.

Possíveis aprofundamentos

Caso haja tempo disponível poderão ser abordados outros métodos eleitorais, como por exemplo o método de votação preferencial, que já foi experimentado em Portugal e foi usado nas eleições locais inglesas de 2021.

Lobo, M. C., Pereira, J. S. & Gaspar, J. T. (2015). A introdução do voto preferencial em Portugal: uma experiência eleitoral. (IPP Policy paper, nº 6). Institute of Public Policy Thomas Jefferson - Correia da Serra. Obtido de <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/22446>

Estudo mostra que portugueses sabem usar voto preferencial. Obtido de

<https://www.publico.pt/2015/12/12/politica/noticia/estudo-mostra-que-portugueses-sabem-usar-voto-preferencial-1717248>

Suspensas pela pandemia, autárquicas em Inglaterra coincidem com eleições na Escócia e País de Gales. Obtido de

<https://jornaleconomico.sapo.pt/noticias/suspensas-pela-pandemia-autarquicas-em-inglaterra-coincidem-com-eleicoes-na-escocia-e-pais-de-gales-733819>

Estudo em casa: Sistema de votação preferencial: pluralidade e run-off. Obtido de

<https://estudoemcasa.dge.mec.pt/2020-2021/10o/matematica-aplicada-as-ciencias-sociais-matematica/18>

O estudo e comparação de diferentes métodos eleitorais são temas adequados para trabalhos de projeto.

Casos interessantes de eleições a estudar: por exemplo, a mudança do uso de maioria simples para a maioria absoluta ao longo dos anos na Ordem dos Médicos e na Ordem dos Advogados. Também pode ser feita a comparação com o método usado nas eleições para a Ordem dos Enfermeiros em que a vencedora é a lista que obtiver mais votos, sem exigência de maioria absoluta (e só com uma volta). Neste último caso pode ser consultada a página da Ordem dos Enfermeiros.

Proclamação dos resultados definitivos das Eleições de 12 de Dezembro de 2011. Obtido de

<https://www.ordemenfermeiros.pt/arquivo/comunicacao/Paginas/ProclamacaoEleicoes>

Bibliografia de referência

Carvalho e Silva, J. (2014). *Um planeta organizado por humanos: os sistemas eleitorais*. Educação & Matemática, nº 128, p. 17-18.

Chalub, F. (2019). *O ano de todas as eleições*. Gazeta de Matemática, nº 188, p. 9-11.

CNE, *Método de Hondt*. Obtido de <https://www.cne.pt/content/metodo-de-hondt>

CNE, *Eleições / Referendos*. Obtido de: <https://www.cne.pt/content/eleicoes-referendos>

COMAP (2016). *FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.

Feiteira, R. (2007). *O que têm em comum a eleição de um delegado de turma e as eleições legislativas?* Gazeta de Matemática, nº 152, p. 32-37.

Lopes, A.V. e outros (2002). *Materiais para a aula de Matemática - Eleições para a Presidência da República - 1986*. Educação & Matemática, nº 67, p. 34-35.

Malkevitch, J. (1999). *Teoria Matemática das Eleições*. COMAP (tradução portuguesa da responsabilidade do DES, Lisboa). Obtido de <https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online>.

Paulos, J.A. (1997). *As Notícias e a Matemática*. Mem Martins: Publicações Europa-América.

CONSULTA PÚBLICA

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
<p>ESTATÍSTICA</p> <p>Problema estatístico</p> <p>Variabilidade</p>	<p>Reconhecer o papel relevante desempenhado pela Estatística em todos os campos do conhecimento.</p> <p>Reconhecer a variabilidade como um conceito-chave de um problema estatístico.</p> <p>Conhecer e interpretar situações do mundo que nos rodeia em que a variabilidade está presente.</p>	<p>Promover a discussão na turma para identificar e formular questões estatísticas, cujas respostas dependam da recolha de dados.</p> <p>Propor a discussão de situações do mundo real envolvente em que a variabilidade está presente. Por exemplo, o político questiona se valerá a pena candidatar-se às próximas eleições autárquicas para o seu concelho; o diretor de um agrupamento escolar questiona a percentagem de alunos que almoçam diariamente na escola; o padeiro questiona quantos pães deve fazer por dia; o gerente de uma fábrica têxtil questiona qual o tamanho das camisas em que deverá investir.</p>	<p>Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avalia, valida e organiza a informação recolhida (B)</p>
<p>População e amostra</p> <p>Fases de um procedimento estatístico:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Produção ou aquisição de dados; - Organização e representação de dados; - Interpretação tendo por base as representações obtidas 	<p>Identificar, num estudo estatístico, população, amostra e característica a estudar.</p> <p>Reconhecer que os termos população e amostra se referem a conjuntos de unidades estatísticas, mas que estes termos também são usados para identificar os conjuntos de valores assumidos pela característica em estudo.</p> <p>Refletir sobre o propósito de efetuar estudos que envolvam a variabilidade e sobre os métodos existentes para a seleção de amostras, no sentido de que estas sejam representativas das populações subjacentes, e de modo a evitar amostras enviesadas cujo estudo levaria a inferir conclusões erradas para as populações.</p>	<p>Propor a recolha de informação nos jornais ou internet sobre notícias que permitam:</p> <ul style="list-style-type: none"> - diferenciar os processos de recenseamento e sondagem (recolher dados sobre a população ou amostra); - identificar exemplos de amostras enviesadas, nomeadamente amostras por conveniência e por resposta voluntária. <p>Incentivar a recolha de dados reais, para responder a questões concretas.</p> <p>Informar que o grau de confiança é quantificado em termos de probabilidade, exemplificando com a forma como se transmite o resultado de uma sondagem.</p>	<p>Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C)</p>

	<p>Intuir que os problemas estatísticos em que se recorre a amostras não têm uma solução matemática única que se possa exprimir como <i>verdadeiro</i> ou <i>falso</i>, mas sim em termos de grau de confiança.</p>		
<p>Estatística descritiva</p> <p>Dados univariados</p> <p>Dados quantitativos discretos ou contínuos:</p> <p>Tabelas de frequências</p> <p>Gráfico de barras</p> <p>Histograma e função cumulativa</p> <p>Diagrama de caule-e-folhas</p> <p>Diagrama de extremos-e-quartis</p>	<p>Distinguir entre dados quantitativos discretos (obtidos por contagem) ou contínuos (obtidos por medição).</p> <p>Organizar e representar a informação contida em dados quantitativos discretos e contínuos.</p> <p>Saber organizar dados quantitativos em tabelas de frequências absolutas, absolutas acumuladas, relativas e relativas acumuladas e interpretá-las.</p> <p>Selecionar representações gráficas adequadas para cada tipo de dados identificando vantagens/inconvenientes.</p> <p>Reconhecer que o histograma é um diagrama de áreas, e que para a sua construção é necessário uma organização prévia dos dados em classes na forma de intervalos.</p> <p>Saber construir histogramas, considerando classes com a mesma amplitude.</p>	<p>Salientar que a natureza dos dados não é uma característica inerente à variável em estudo, porque pode depender da forma como é medida. Exemplificar com a variável Idade que é de tipo contínuo e que pode ser utilizada de forma discreta (10, 15, 23,...), uma peça de roupa, cujo tamanho é uma variável contínua, mas é frequentemente classificada em categorias (XS, S, M, L, XL, ...).</p> <p>Promover a utilização da tecnologia gráfica para construir tabelas e gráficos.</p> <p>Realçar a utilidade do diagrama de caule-e-folhas para uma ordenação rápida dos dados.</p> <p>Salientar que o aspecto do histograma depende do número de classes considerado da amplitude de classe e do ponto onde se começa a considerar a construção da primeira classe (discutir com os alunos o que se entende por um número adequado de classes, chamando a atenção para que uma representação com muitas classes apresentará muita da variabilidade presente nos dados, não conseguindo fazer sobressair o padrão que se procura, enquanto que um número muito pequeno de classes esconderá esse padrão)</p> <p>Salientar a importância do gráfico de barras e do histograma para uma posterior seleção do modelo da população subjacente à amostra.</p>	<p>Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D)</p> <p>Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)</p>

<p>Medidas de localização</p>	<p>Interpretar as medidas de localização, média, mediana, moda(s) e percentis (quartis como caso especial) na caracterização da distribuição dos dados, relacionando-as com as representações gráficas obtidas.</p>	<p>Propor a elaboração de um programa simples em Python que permita recolher as idades de, por exemplo, 5 alunos de uma turma na disciplina de Matemática, organizá-las sob a forma de uma lista e retornar a média, a mediana, o máximo e o mínimo.</p>	
<p>Medidas de dispersão</p>	<p>Interpretar as medidas de dispersão, amplitude, amplitude interquartil e desvio padrão amostral (variância amostral) na caracterização da distribuição dos dados, relacionando-as com as representações gráficas obtidas.</p>	<p>Incentivar a utilização da tecnologia gráfica para o cálculo das diversas medidas, em particular quando a dimensão da amostra é razoavelmente grande, não negligenciando antecipadamente o cálculo dessas medidas usando papel e lápis para amostras de dimensão reduzida.</p>	<p>Trabalha com recurso a equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)</p>
<p>Propriedades das medidas</p>	<p>Interpretar e mostrar analiticamente as alterações provocadas na média por transformação dos dados pela multiplicação de cada um por uma constante “a” e pela adição de uma constante “b”.</p> <p>Compreender os conceitos e as seguintes propriedades das medidas:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Pouca resistência da média e do desvio padrão; - Soma dos desvios dos dados relativamente à média é igual a zero; - Desvio padrão é igual a zero se e só se todos os dados forem iguais; - Amplitude interquartil igual a zero, não implica a não existência de variabilidade; <p>Saber que se os dados forem fornecidos já agrupados em classes, na forma de intervalos, torna-se necessário adequar as fórmulas ou os procedimentos existentes para dados não agrupados, para obter valores aproximados da média e do desvio padrão.</p> <p>Reconhecer que existem situações em que é preferível utilizar como medida de localização a mediana em vez da média, e como medida de dispersão a amplitude interquartil em vez do desvio padrão, apresentando exemplos simples.</p>	<p>Promover a utilização da tecnologia gráfica para explorar as propriedades das medidas, nomeadamente as alterações provocadas nas medidas de localização e dispersão por transformação dos dados pela multiplicação de cada um por uma constante “a” e pela adição de uma constante “b”.</p> <p>Incentivar os alunos a interpretar os conceitos e as propriedades das medidas, privilegiando a sua compreensão, em detrimento do uso de fórmulas e de procedimentos para as calcular. Por exemplo, depois de compreender o conceito de percentil, utilizar a função cumulativa ou as tabelas de frequências relativas acumuladas para calcular valores aproximados.</p> <p>Promover a utilização da tecnologia gráfica para determinar os percentis, e exemplificar a sua utilização com as tabelas de crescimento da DGS (aqui), relacionando o “peso” e a “estatura” com a “idade”.</p> <p>Promover a elaboração de um programa em Python para permitir o cálculo da amplitude e do desvio padrão e estudar as propriedades dessas medidas, efetuando alterações nos dados.</p>	

	<p>Reconhecer que algumas representações gráficas são mais adequadas que outras para comparar conjuntos de dados, nomeadamente o diagrama de extremos e quartis, para comparar a distribuição de dois ou mais conjuntos de dados, realçando aspetos de simetria, dispersão, concentração, etc.</p>	<p>Conduzir os alunos na interpretação das representações gráficas e das medidas, no contexto do problema, que levou à recolha dos dados.</p>	
<p>Dados bivariados</p> <p>Dados quantitativos</p> <p>Diagrama de dispersão</p> <p>Coefficiente de correlação linear</p> <p>Reta de regressão - variável independente ou explanatória - variável dependente ou resposta.</p>	<p>Reconhecer que, para estudar a associação entre duas variáveis numéricas de uma população, se observam essas variáveis sobre cada unidade estatística, obtendo-se pares de dados.</p> <p>Reconhecer a importância da representação dos dados no diagrama de dispersão, nuvem de pontos, antes de se proceder ao cálculo do coeficiente de correlação linear e à determinação de uma equação da reta de regressão, utilizando a tecnologia gráfica.</p> <p>Compreender que a existência de <i>outliers</i> influencia aqueles procedimentos.</p> <p>Compreender que na construção da reta de regressão não é indiferente qual das variáveis é que se considera como variável independente ou <i>explanatória</i>.</p> <p>Utilizar a reta de regressão para inferir o valor da variável dependente para um dado valor da variável independente, quando existe uma forte associação linear entre as variáveis, quer positiva, quer negativa, e desde que este esteja no domínio dos dados considerados.</p>	<p>Conduzir os alunos a explorar situações em que tenha interesse estudar a associação entre duas variáveis sobre as mesmas unidades estatísticas.</p> <p>Envolver os alunos na discussão sobre a construção do diagrama de dispersão, em especial na identificação da variável independente ou explanatória. Por exemplo, pretendendo-se estudar a associação entre as variáveis “idade” e “altura”, a variável independente deverá ser a “idade” e a variável “altura” a variável dependente.</p> <p>Realçar que só no caso de se visualizar uma associação aproximadamente linear entre os pontos do diagrama de dispersão é que tem sentido utilizar a calculadora para calcular o coeficiente de correlação, bem como construir a reta de regressão.</p> <p>Propor a construção da reta de regressão, recorrendo à tecnologia gráfica e explorar a forma como é afetada por <i>outliers</i>.</p> <p>Explorar o modelo da reta de regressão no contexto do estudo, nomeadamente inferindo valores da variável resposta para determinados valores para a variável explanatória.</p>	

<p>Gráfico de linhas</p> <p>Dados qualitativos</p> <p>Tabelas de contingência</p>	<p>Saber que a correlação linear só mede a associação linear entre as variáveis, já que coeficiente de correlação pode ser próximo de zero e as variáveis estarem fortemente correlacionadas, não linearmente.</p> <p>Compreender que não se pode confundir correlação com relação causa-efeito, pois podem existir variáveis “perturbadoras” que provocam uma aparente associação entre as variáveis em estudo.</p> <p>Entender que um gráfico de linhas é um diagrama de dispersão, em que, de um modo geral, se pretende estudar a evolução de uma variável ao longo da variável tempo e em que se unem os pontos representados por linhas.</p> <p>Reconhecer que a associação entre duas variáveis qualitativas não pode ser feita utilizando o diagrama de dispersão e a correlação.</p> <p>Utilizar tabelas de contingência (dupla entrada) para obter a distribuição conjunta, assim como as distribuições condicionais em termos de percentagens.</p>	<p>Propor a pesquisa na internet de situações em que existem variáveis “perturbadoras”.</p> <p>Promover a exploração de alguns exemplos concretos de gráficos de linhas, como a evolução da temperatura medida às 9h, ao longo de um mês, em determinado local.</p> <p>Chamar a atenção para um fenómeno, que se pode verificar quando se procede ao estudo da associação de variáveis, denominado “paradoxo de Simpson” e que pode ser objeto de estudo de alguns alunos, pesquisando na internet.</p> <p>Promover a utilização dos diagramas de barras por segmentos, para mostrar as distribuições condicionais em termos de percentagem.</p>	
--	---	--	--

Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles.

Antes de redigir o programa na linguagem Python, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Exemplo de programa em Python que permita recolher as idades de, por exemplo, 5 alunos de uma turma na disciplina de Matemática, organizá-los sob a forma de uma lista, retornando a média, a mediana, o máximo e o mínimo:

```
import statistics
print('Escreva as idades de 5 alunos')
idades=[]
```

```
for i in range(1,5):
    x = int(input('?'))
    idades=idades+[x]
idades.sort()
print('Idades:',idades)
print('Media:',statistics.mean(idades))
print('Mediana:',statistics.median(idades))
print('Máximo:',max(idades))
print('Mínimo:',min(idades))
```

Nota: O programa foi criado em Python IDLE 3.9.1 para computador.

Exemplo de programa em Python que permita recolher as idades de, por exemplo, 5 alunos de uma turma na disciplina de Matemática, organizá-los sob a forma de uma lista, retornando a média, a mediana, desvio-padrão e a amplitude:

```
import statistics
n=int(input("Quantas disciplinas tens? "))
print("Escreva as suas notas das disciplinas")
notas=[]
for i in range(0,n):
    x = int(input("?"))
    notas=notas+[x]
notas.sort()
print("Notas:",notas)
print("Media:",statistics.mean(notas))
print("Mediana:",statistics.median(notas))
print("Desvio-padrão:",statistics.stdev(notas))
print("Amplitude:",max(notas)-min(notas))
```

Nota: O programa foi criado em Python IDLE 3.9.1 para computador.

Possíveis aprofundamentos

Nada se sugere atendendo à variedade de temas tratados.

Bibliografia de referência

ActivAlea - Associação entre variáveis quantitativas. O coeficiente de correlação. Obtido de http://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=272&Itemid=1651&lang=pt

Correlações espúrias. Obtido de <http://tylervigen.com/spurious-correlations>.

Graça Martins, M. E. & Loura, L. (2002). *Estatística, Modelos de Probabilidade e Introdução à Inferência Estatística* (edição da responsabilidade do DES, Lisboa).

Obtido de <https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online>

Graça Martins, M. E. (1998). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Sociedade Portuguesa de Estatística.

Graça Martins, M. E. & Cerveira, A. (1998). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Universidade Aberta.

Graça Martins, M. E. et al. (1997). *Estatística*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Grupo de trabalho T3. (1999). *Estatística e calculadoras gráficas*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

CONSULTA PÚBLICA

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
<p>GEOMETRIA ANALÍTICA</p> <p>Geometria analítica no plano</p> <p>Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no plano</p> <p>Coordenadas de pontos num referencial cartesiano</p> <p>Conjuntos de pontos e condições</p> <p>Equação reduzida da reta no plano e a equação $x = x_0$</p>	<p>Identificar coordenadas de pontos do plano num referencial cartesiano ortogonal e monométrico.</p> <p>Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Simetrias de pontos, em relação a retas horizontais, a retas verticais e à origem, através de coordenadas; - Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta. <p>Identificar, analisar e aplicar na resolução de problemas condições que definem conjuntos de pontos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - semiplanos; - outros conjuntos definidos por conjunções e disjunções em casos simples. <p>Reconhecer, analisar e aplicar, a equação de uma reta, na resolução de problemas.</p>	<p>Propor atividades que evidenciem a necessidade do uso de um referencial no plano. Por exemplo: na resolução de um problema, encontrar o referencial mais adequado à figura apresentada.</p> <p>Usar software de geometria dinâmica para explorar, por exemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> - coordenadas de pontos simétricos em relação à origem, aos eixos coordenados e a retas paralelas aos eixos coordenados; - condições que definam conjuntos de pontos (incluindo o conjunto vazio). <p>Promover a resolução de problemas para determinar a equação de uma reta ou as coordenadas do ponto de interseção entre duas retas.</p> <p>Propor problemas de modelação matemática, recorrendo à tecnologia, por exemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Encontrar a melhor localização para propagadores de sinal de Wifi num local; - Encontrar localizações em mapas geográficos (atividades tipo Mapa do Tesouro); 	<p>Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática. (A)</p> <p>Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo. (C)</p> <p>Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição. (D)</p> <p>Desenha, implementa e avalia, com autonomia, estratégias para atingir as metas e desafios que estabelece para si próprio. (F)</p>

		<ul style="list-style-type: none"> - Encontrar localizações numa cidade (por exemplo, muitas cidades americanas têm ruas e avenidas numeradas - 17th street, 5th avenue, etc.); - Escrever a equação da reta que melhor se ajusta a um conjunto de pontos utilizando a regressão linear. 	
<p>Geometria analítica no espaço</p> <p>Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no espaço</p> <p>Coordenadas de pontos num referencial cartesiano</p>	<p>Identificar coordenadas de pontos do espaço num referencial cartesiano ortonormado e monométrico.</p> <p>Desenvolver a capacidade de visualização no espaço tridimensional.</p> <p>Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas:</p> <ul style="list-style-type: none"> - equações de planos paralelos aos planos coordenados; - equações cartesianas de retas paralelas a um dos eixos. 	<p>Propor atividades aos alunos que evidenciem a necessidade do uso de um referencial no espaço. Por exemplo: na resolução de um problema, encontrar o referencial mais adequado à figura apresentada.</p> <p>Incentivar os alunos a construírem modelos tridimensionais usando materiais simples (cartão, palhinhas, rede, etc.).</p> <p>Estimular os alunos a utilizarem o Geogebra 3D para visualizar, explorar e estabelecer conjecturas, envolvendo geometria no espaço.</p> <p>Orientar os alunos para o reconhecimento de referenciais tridimensionais em contextos reais. Por exemplo: impressoras 3D, culturas hidropónicas, software de CAD/CAM, de SIG, de navegação aérea ou de realidade virtual e aumentada.</p>	<p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)</p> <p>Domina a capacidade percetivo-motora (imagem corporal, direcionalidade, afinamento percetivo e estruturação espacial e temporal). (J)</p>

Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles.

Antes de redigir o programa na linguagem Python, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Um exemplo de programa em Python pode ser o de determinar coordenadas do ponto médio de um dado segmento de reta.

```
xA=float(input("xA=?"))
yA=float(input("yA=?"))
xB=float(input("xB=?"))
```

```
yB=float(input("yB=?"))
xM=(xA+xB)/2
yM=(yA+yB)/2
print("Coordenadas do ponto médio M:")
print("xM= ",xM)
print("yM= ",yM)
```

Possíveis aprofundamentos

Sugerem-se outros temas para ir mais além (ou para aprofundamento):

- Pontos notáveis de um triângulo.
- Resolução de problemas de Olimpíadas de Matemática usando pontos notáveis do triângulo.
- História da Matemática: os primórdios da Geometria Analítica com Descartes e Fermat
- Ideias para resolução de problemas em Geometria
- Papel da demonstração em Matemática

Ideias para composições matemáticas: A Geometria na “República” de Platão, a Geometria dos ORIGAMI, a Geometria dos templos japoneses.

Bibliografia de referência

- Cássio, J. (2019). *Aprendendo Geometria Plana com a Plataforma GeoGebra*. Obtido de <https://www.geogebra.org/m/hsXHDX7>
- Khan Academy. Geometria Analítica. Obtido de <https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/analytic-geometry-topic>
- Loureiro, C. et al. (1997). *Geometria 10º ano de escolaridade*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
- Loureiro, C. et al. (1998). *Geometria 11º ano de escolaridade*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
- Sebastião e Silva, J. (1970). *Geometria Analítica Plana*. Lisboa: Empresa Literária Fluminense.
- Veloso, E. (1998). *Geometria - Temas atuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
FUNÇÕES Generalidades sobre funções	<p>Identificar gráfico e representação gráfica de uma função; usar o teste da reta vertical.</p> <p>Determinar o domínio e contradomínio de funções definidas em intervalos reais ou união finita de intervalos reais.</p> <p>Determinar pontos notáveis tendo por base a representação gráfica de funções (interseções com os eixos coordenados, extremidades dos intervalos do domínio, máximos e mínimos).</p> <p>Construir tabelas de variação de sinal e de monotonia.</p>	<p>Tirar partido da utilização da tecnologia (calculadora gráfica, folhas de cálculo, aplicações interativas, ou outras), nomeadamente para resolver problemas, explorar, investigar e comunicar.</p> <p>Usar exemplos com significado para os alunos, quando possível.</p> <p>Fomentar a interpretação da informação em situações do quotidiano (tabelas, gráficos, textos) e analisar criticamente dados, informações e resultados obtidos.</p>	<p>Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A)</p> <p>Apresenta e explica conceitos em grupos, ideias e projetos diante de audiências reais, presencialmente ou a distância. (B)</p> <p>Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo. (C)</p>
Funções Polinomiais Funções polinomiais de grau não superior a 3	<p>Estudar intuitivamente propriedades (domínio, contradomínio, pontos notáveis, monotonia e extremos) de uma função polinomial de grau não superior a 3.</p> <p>Interpretar e prever as alterações no gráfico de uma função $-f(x)$, $f(x)+a$ e $f(x+b)$, com $a, b \in \mathbb{R}$ a partir do gráfico de uma função $f(x)$, e descrever o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas.</p>	<p>Promover a comunicação, utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar e justificar procedimentos, raciocínios e conclusões.</p> <p>Conduzir os alunos a interpretar e prever as alterações no gráfico de uma função $-f(x)$, $f(x)+a$ e $f(x+b)$, a partir do gráfico de uma função $f(x)$, e descrever o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas.</p>	<p>Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição. (D)</p>


```
a=int(input("a?"))
b=int(input("b?"))
x1=-b/a
print("ZERO: {}".format(x1))
elif n==2:
print("f(x)=ax^2+bx+c")
a=int(input("a?"))
b=int(input("b?"))
c=int(input("c?"))
delta=b**2-4*a*c
if delta<0:
    print("ZEROS: \nNão tem zeros")
elif delta==0:
    x1=(-b-math.sqrt(delta))/(2*a)
    print('ZEROS: \n1 zero: {}'.format(x1))
else:
    x1=(-b-math.sqrt(delta))/(2*a)
    x2=(-b+math.sqrt(delta))/(2*a)
    print('ZEROS: \n2 zeros: {} e {}'.format(x1,x2))
```

Nota: O programa foi criado em Python IDLE 3.9.1 para computador.

Possíveis aprofundamentos

Caracterizar o gráfico de uma função quadrática como sendo o conjunto de pontos a igual distância de um ponto (foco) e de uma reta (diretriz).

Bibliografia de referência

Caraça, B.J. (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva.

Copérnico, N. (2014). *A revolução das orbes celestes*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Estrada, M. F. et al. (2000). *História da Matemática*. Universidade Aberta.

Guichard, J. P. (1986). História da Matemática no ensino da Matemática. in Bouvier, A. (coord), *Didactique des Mathématiques*, Cedic/Nathan, 1986 (Adaptação livre de Arsélio Martins). Obtido de <https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/mhist.html>.

Grupo de Trabalho T3 (2011). *Funções no 3.º Ciclo com Tecnologia*. Lisboa: APM.

Icart, J. (2021). *Fonctions: Une Perspective Historique*. Revue MathémaTICE, nº 75, maio 2021. Obtido de <http://revue.sesamath.net/spip.php?article1414>.

SESAMATH (2019). *Manuel MATHS première*. Magnard. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1spe_2019.

Teixeira, P. *et al.* (1997). *Funções - 10º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
Teixeira, P. *et al.* (1998). *Funções - 11º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

CONSULTA PÚBLICA

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
PADRÕES GEOMÉTRICOS A Matemática no património	<p>Analisar geometricamente problemas históricos ou exemplares do património artístico.</p> <p>Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico no estudo de problemas históricos ou do património artístico.</p>	<p>Propor a elaboração de um trabalho de pesquisa, selecionando problemas históricos ou exemplares do património artístico, como por exemplo, recorrer ao SIPA (Sistema de Informação do Património Arquitetónico) e escolher 2 edifícios emblemáticos do nosso património, descrevendo as pavimentações existentes.</p> <p>Promover o estudo de um artista ou pintor que utilize pavimentações no seu trabalho, escolher duas obras do mesmo e descrever as pavimentações existentes (por exemplo, Amadeo Souza-Cardoso, Almada Negreiros ou Maurits Escher).</p> <p>Apresentar e descrever um problema histórico com a aplicação de pavimentações (por exemplo, o puzzle Stomachion de Arquimedes, o teorema das quatro cores ou padrões de degrau encontrados em manuscritos Celtas).</p> <p>Dar a conhecer o conceito de fractal e apresentar alguns exemplos, tais como o triângulo de Sierpynsky ou o floco de neve de Koch.</p>	<p>Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A)</p> <p>Apresenta e explica conceitos em grupos, ideias e projetos diante de audiências reais, presencialmente ou a distância. (B)</p> <p>Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas. (C)</p>
Pavimentações Padrões	<p>Determinar a amplitude dos ângulos internos de um polígono regular.</p> <p>Reconhecer e construir as pavimentações regulares e semirregulares no plano e classificá-las.</p>	<p>Promover o estudo de pavimentações regulares e semi-regulares, recorrendo a materiais manipuláveis.</p> <p>Propor o desenvolvimento e a apresentação de um trabalho de projeto, individual ou a pares, que permita aos alunos identificarem uma pavimentação regular e uma semirregular, no meio circundante (escola, cidade, habitação, etc.), ou na calçada portuguesa. Depois de identificadas essas pavimentações:</p> <ul style="list-style-type: none"> - destacar as figuras geométricas que as compõem; - calcular a área das figuras da região fundamental. 	<p>Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade. (D)</p> <p>Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos. (E)</p>

<p>Isometrias</p> <p>Frisos</p> <p>Rosáceas</p>	<p>Reconhecer e aplicar isometrias no plano.</p> <p>Compreender e ser capaz de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas.</p> <p>Estudar padrões geométricos planos, em particular frisos e rosáceas.</p> <p>Representar e construir modelos de composição de objetos geométricos no plano.</p>	<p>Incentivar a construção de frisos e rosáceas, utilizando transformações geométricas num software de geometria dinâmica para investigar as propriedades das transformações geométricas (translação, rotação, reflexão, reflexão deslizante).</p> <p>Fomentar a recolha de imagens da arte decorativa, nomeadamente entre as do património artístico nacional ou dos países de origem dos alunos, para analisar simetrias e classificar frisos, utilizando um fluxograma ou uma chave dicotómica.</p>	<p>Desenha, implementa e avalia, com autonomia, estratégias para atingir as metas e desafios que estabelece para si próprio. (F)</p> <p>Aprecia criticamente as realidades artísticas, em diferentes suportes tecnológicos, pelo contacto com os diversos universos culturais. (H)</p>
--	--	--	--

Pensamento Computacional

Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes e a estabelecer ordem entre eles. O reconhecimento de padrões na tarefa (ou situação) apresentada, ou em problemas semelhantes anteriormente resolvidos, poderá contribuir para facilitar a estruturação das etapas de resolução. O uso do software português GECLA (abreviatura de Gerador e Classificador) desenvolvido pelo Atractor fornece uma excelente oportunidade para explorar padrões, frisos e rosáceas. Permite gerar no plano um padrão, um friso, ou uma rosácea, com um determinado tipo de simetria previamente escolhido, a partir de um motivo assimétrico. Permite também classificar (com ou sem ajuda do programa) padrões, frisos, ou rosáceas assim obtidos. Pode ser usado também no formato competição. O software GECLA pode ser descarregado aqui: <https://www.atractor.pt/mat/GeCla/>

Possíveis aprofundamentos

Podem ainda ser referidas as pavimentações não regulares do plano desenvolvidas pelo matemático e físico Roger Penrose (Prémio Nobel da Física em 2020). Pode ser realizada em sala de aula uma atividade semelhante à relatada em: Terroso, J. (2015). A exploração de isometrias nas Pavimentações de Penrose numa turma de 8º ano, *Educação & Matemática*, nº 134, p. 17-22. Obtido de <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1484>

Bibliografia de referência

Atractor. (2018). *A Matemática dos Azulejos*, Gazeta de Matemática, nº 186, p. 3-9. Obtido de <https://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=1484>

Bastos, R. (2006). *Simetria*, Educação & Matemática, nº 88, p. 9-11. Obtido de <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1484>

Ricardo Teixeira <http://sites.uac.pt/rteixeira/simetrias/>

Rota das Simetrias da Calçada Portuguesa de Lisboa. Obtido de https://www.mat.uc.pt/mpt2013/files/RotaSimetrias_INFO.pdf

Science for All: Symmetries and Group Theory <http://www.science4all.org/article/symmetries/>

Tessellation Artists around the Globe <https://tessellations.ca/2017/02/24/tessellation-artists-around-the-globe/>

Transformações geométricas nos Programas de Matemática do Ensino Básico e Secundário <http://www.mat.uc.pt/-mat0232/Formularios/Transf.pdf>

Veloso, E. (1998). *Geometria - Temas atuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Veloso, E. (2012). *Simetria e Transformações Geométricas*. Lisboa: APM.

Veloso, E. et al. (2009). *Isometrias e Simetria com materiais manipuláveis*, Educação & Matemática, nº 101, p. 23-28. Obtido de

<https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1746>

Cofinanciado por:

