REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

11.º ANO | ENSINO SECUNDÁRIO

Matemática A

INTRODUÇÃO

1. Matemática Escolar Orientada para o Futuro

A formação de indivíduos matematicamente competentes é um propósito fundamental do currículo de matemática para o ensino secundário. A sociedade e o mundo contemporâneos, marcados pela globalização, crescente digitalização, conectividade e automatização, e por uma aceleração do desenvolvimento tecnológico, enfrentam desafios nos quais o conhecimento matemático adquire um papel essencial, proporcionando conceitos, métodos, modelos e formas de pensar. Esse poder matemático deve ser parte integrante da educação de todos os cidadãos, incluindo conhecimentos e capacidades que os jovens transportarão para a sua vida pessoal, social e profissional.

Empreender uma formação matemática abrangente e inovadora, neste ciclo de escolaridade, significa desenvolver nos alunos a capacidade de identificar conceitos matemáticos relevantes para resolver problemas reais, aplicar procedimentos matemáticos adequados e interpretar os resultados em contextos diversos. O raciocínio matemático está na base dos processos de compreensão dos conceitos e objetos matemáticos, que podem e devem ser analisados, representados e relacionados de diferentes formas. São igualmente importantes a formulação de hipóteses, a testagem de conjeturas, a dedução, a generalização e a abstração, na construção de argumentos lógicos e conclusões, cuja comunicação de forma apropriada é cada vez mais importante no mundo atual.

O currículo consagra o propósito de preparar os alunos para formularem juízos e tomarem decisões fundamentadas, contribuindo para que se tornem cidadãos reflexivos, empenhados e participativos. Visa também contribuir para que os jovens valorizem o papel da Matemática no mundo e o seu carácter de ciência em evolução e renovação permanente, apreciando a sua dimensão estética, a par do seu legado histórico.

Assim, o currículo de Matemática para o futuro orienta-se para o desenvolvimento de áreas de competências, à luz do que é preconizado no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*, nomeadamente no que se refere ao pensamento crítico aliado à resolução de problemas, promovendo a criatividade e a comunicação, além de acentuar a pertinência do trabalho colaborativo.

2. Ideias Inovadoras do Currículo

- Matemática para a Cidadania

O reconhecimento do Ensino Secundário como um ciclo que é parte integrante da formação geral dos jovens, incluído na escolaridade obrigatória, cria um contexto em que todas as disciplinas, incluindo a Matemática, devem contribuir para o desenvolvimento dos alunos enquanto cidadãos ativos, conscientes, informados e interventivos.
A crescente relevância do papel da Matemática na sociedade atual realça a importância e a necessidade de dotar os alunos de ferramentas de análise dos processos sociais, que estão na base do exercício de uma cidadania ativa. Assim, as Aprendizagens Essenciais introduzem modelos e processos eleitorais e a análise de modelos financeiros e valorizam o desenvolvimento da literacia estatística.

- Pensamento Computacional

Os aspetos comuns entre o Pensamento Matemático e o Pensamento Computacional, bem como a relevância atual do Pensamento Computacional na ciência e na sociedade, justificam que o currículo de Matemática valorize esta abordagem conceptual na resolução de problemas. As Aprendizagens Essenciais de Matemática promovem o desenvolvimento de práticas como a abstração, a decomposição, o reconhecimento de padrões, a análise e definição de algoritmos, bem como a aquisição de hábitos de depuração e optimização dos processos envolvidos na atividade matemática. Deste modo, a aposta no Pensamento Computacional revela a aproximação do currículo às recomendações internacionais e também o alinhamento com o currículo de Matemática do Ensino Básico, favorecendo o desenvolvimento desta competência de forma integrada, coerente e progressiva.

- Diversificação de temas no currículo

Para além do desenvolvimento de competências dos alunos no âmbito da cidadania, pretende-se disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com os métodos numéricos, o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia, e a inclusão de temas com pouca tradição no Ensino Secundário em Portugal. Esta diversificação é intensificada no 12.º ano com a proposta de três temas em opção, possibilitando que turmas diferentes trabalhem temas matemáticos diferentes.

- Matemática para todos

Assume-se que o currículo na escolaridade obrigatória deve dar resposta a todos os alunos tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos. Os formalismos e os níveis de abstração excessivos deverão ser evitados. Pretende-se que a matemática seja um contributo na resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias.

3. Ideias-Chave das Aprendizagens Essenciais

As Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Secundário dão continuidade às aprendizagens do Ensino Básico e assumem um conjunto de princípios e orientações metodológicas, cuja concretização e especificação é feita para cada ano de escolaridade e tema matemático. A seguir, enunciam-se e apresentam-se as oito ideias-chave preconizadas nas Aprendizagens Essenciais, esquematizadas na Figura 1:

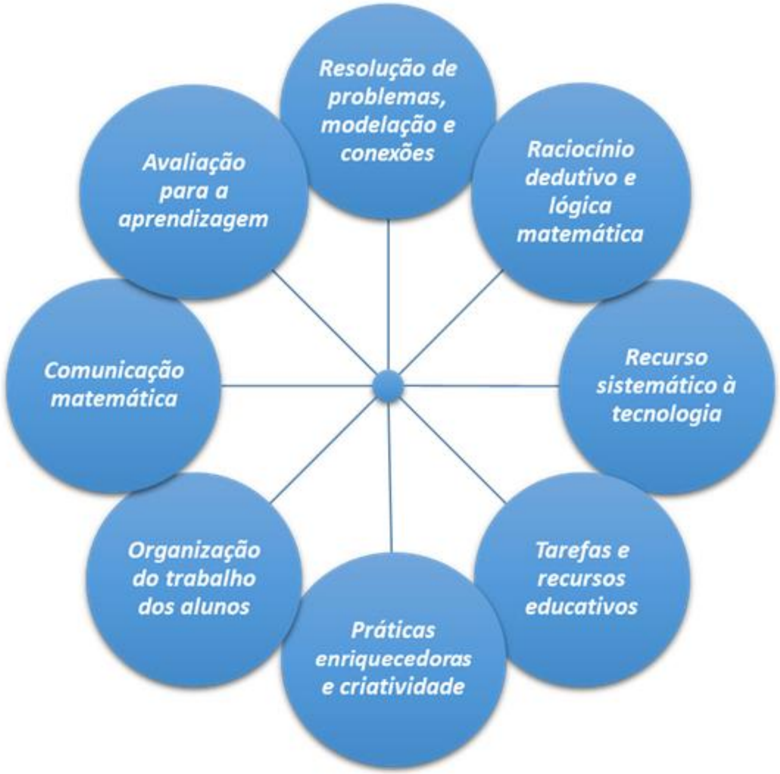

Figura 1 - Ideias-Chave das Aprendizagens Essenciais

1) Resolução de problemas, modelação e conexões

Dar sentido à Matemática e enfatizar a modelação e as aplicações

A resolução de problemas, tal como a modelação, devem constituir o contexto para o estabelecimento de conexões entre diferentes conceitos e áreas da Matemática, assim como entre a Matemática e outras áreas do saber, permitindo uma abordagem integrada e significativa para os alunos na sua atividade matemática. É fundamental que os alunos tenham contacto com o processo de modelação matemática e sejam capazes de criticar, validar e aperfeiçoar modelos matemáticos. Preconizando a exploração de ideias e conceitos matemáticos, pretende-se que a aprendizagem não se reduza à memorização de regras, ao treino de procedimentos ou à sua execução sem compreensão. É essencial que as definições, os resultados e os procedimentos matemáticos adquiram sentido e que os alunos os saibam mobilizar e aplicar adequadamente para resolver problemas do mundo real, em situações do dia-a-dia ou de outras disciplinas. Uma das áreas de competências no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*, fortemente ligada à Matemática - Raciocínio e a Resolução de Problemas - implica que os alunos sejam capazes de: i) interpretar informação, planear e conduzir pesquisas; ii) gerir informações e tomar decisões; iii) desenvolver processos conducentes à construção de conhecimento, usando recursos diversificados.

2) Raciocínio dedutivo e lógica matemática

Incentivar processos de raciocínio dedutivo, integrando a lógica matemática nos diversos temas

O aluno deve ser sistematicamente incentivado a justificar processos de resolução, a encadear raciocínios e a formular e validar conjeturas. Os conceitos e métodos relativos à lógica matemática não constituem um tema específico das Aprendizagens Essenciais, mas devem, de forma natural, ser integrados nos vários temas abordados. Noções elementares de Lógica podem e devem ser introduzidas à medida que forem relevantes para a clarificação de processos e de raciocínios. Pretende-se, assim, que o aluno adquira a capacidade de raciocinar dedutivamente e de forma autónoma, usando os princípios e a simbologia inerentes à lógica matemática. A integração do raciocínio dedutivo e da lógica, bem como da linguagem matemática e simbólica, deve estar presente em todos os momentos de aprendizagem, sem se transformar num conteúdo tratado de forma isolada. O grau de formalização a utilizar deve ter sempre em conta o nível de maturidade matemática dos alunos e deve surgir, se possível, como uma necessidade, garantindo que o processo de formalização acompanha a apropriação dos conceitos. Diversos temas, como, por exemplo, Geometria, Funções e Probabilidade, em contexto de resolução de problemas, podem constituir-se como excelentes oportunidades para desenvolver o raciocínio dedutivo, no qual se inclui a utilização de linguagem e de notações adequadas.

3) Recurso sistemático à tecnologia

Incentivar a exploração de ideias e conceitos, integrando a tecnologia como alavanca para a compreensão e resolução de problemas.

A abordagem exploratória de ideias e conceitos matemáticos apresenta-se como determinante, o que pressupõe levar o aluno a participar ativamente num processo de construção e aprofundamento, motivado por questões desafiadoras, problemas e procura de justificações. A integração da tecnologia é considerada como indispensável nesse processo, pelas possibilidades que oferece de experimentação, visualização, representação, simulação, interatividade, bem como, evidentemente, de cálculo numérico e simbólico. O recurso à folha de cálculo, a ambientes de geometria dinâmica, a aplicativos digitais diversos, a simulações, a *smartphones*, à calculadora gráfica e sensores, bem como a outros equipamentos e materiais, deve ser feito de forma sistemática. As atividades de programação devem ser integradas com uma complexidade progressiva, sendo relevantes para o desenvolvimento de processos algorítmicos, de um pensamento estruturado e do raciocínio lógico, proporcionando um vasto campo de aplicação da Matemática e envolvendo genuinamente a formulação e a resolução de problemas, além de promover o desenvolvimento do pensamento computacional.

4) Tarefas e recursos educativos

Apoiar a aprendizagem em tarefas poderosas, contextos e recursos diversificados

A construção de tarefas de aprendizagem constitui uma das ações decisivas do professor. Uma tarefa matemática poderosa pode ser um problema, uma questão, um exercício, um pequeno projeto ou uma pesquisa de aprofundamento, sempre que observe os seguintes critérios: ser interessante e desafiante, envolver matemática relevante, criar oportunidades para aplicar e ampliar conhecimentos, permitir diferentes estratégias, tornar possível monitorizar a compreensão dos alunos e apoiar o seu progresso. As tarefas devem ser, ainda, diversificadas e ajustadas aos objetivos de aprendizagem e a sua planificação deve prever diferentes tipos de organização do trabalho dos alunos. A utilização de recursos variados, nomeadamente da tecnologia, bem como a diversificação de contextos de aprendizagem, incluindo laboratórios, espaços fora da sala de aula, museus de ciência e outros, deverão merecer especial atenção na construção de tarefas. O recurso a episódios e problemas marcantes da História da Matemática deve motivar pesquisas, estudos ou debates, não de caráter enciclopédico, mas contribuindo para que o progresso da Matemática seja apreciado e compreendido. Para além do seu valor intrínseco, enquanto património cultural que importa valorizar, existem numerosos factos, aspetos particulares e episódios da História da Matemática que, pelo seu potencial pedagógico, devem ser explorados.

5) Práticas enriquecedoras e criatividade

Inovar e investir em práticas enriquecedoras, favorecendo o desenvolvimento da criatividade e atitudes positivas face à Matemática

O currículo integra propostas inovadoras, que incluem a realização de projetos, de fôlego e extensão ajustados às condições existentes e aos alunos. É igualmente recomendado que os alunos se envolvam na resolução de questões e problemas autênticos em contextos de interdisciplinaridade (nomeadamente, numa perspetiva integradora de STEAM – ciências, tecnologia, engenharia, artes e matemática). A programação, tal como a modelação ou o trabalho de projeto, abrem inúmeras vias de trabalho promissoras que não devem ser ignoradas. Também a beleza da Matemática, a sua aplicabilidade e a história fascinante que a envolve são fortes motivos para inovar através de práticas de enriquecimento das aprendizagens. É importante que os alunos experimentem o prazer da descoberta em Matemática e que desenvolvam o gosto pelo desafio, pela procura de soluções e pela sua comunicação. Dar aos alunos oportunidades de aprenderem matemática significativa contribui para que desenvolvam atitudes positivas em relação à disciplina. Estimular a curiosidade, o interesse, a motivação e a criatividade é essencial para que reconheçam a importância da Matemática na sua formação pessoal e académica e adquiram autoconfiança, sentindo-se capazes de raciocinar e comunicar matematicamente. O contexto sócio-emocional que permeia a aprendizagem da Matemática tem grande influência sobre a imagem que os jovens constroem da disciplina, sendo determinante na formação de cidadãos críticos, reflexivos, que se sintam capazes de tomar decisões e de formular e resolver problemas de formas criativas e profícuas.

6) Organização do trabalho dos alunos

Valorizar o trabalho colaborativo num ambiente de entreajuda e corresponsabilização, cultivando comunidades de aprendizagem

A valorização do trabalho colaborativo é assumida enquanto estratégia de aprendizagem e enquanto competência a desenvolver nos jovens na sociedade atual. A colaboração é especialmente indicada em tarefas nas quais os alunos possam discutir e definir abordagens e processos de resolução, confrontar ideias e contribuir para um objetivo comum. É também uma forma de trabalho em que os alunos se devem apoiar mutuamente, envolvendo-se em processos matemáticos, argumentação e comunicação, valorizando as competências individuais de cada um. Assim, o trabalho em pares e em pequenos grupos é adequado em múltiplas situações de aprendizagem, desde a realização de tarefas curtas, passando por situações que envolvem pesquisa, recolha de dados, modelação, até ao desenvolvimento de projetos.

7) Comunicação matemática

Comunicar recorrendo a representações múltiplas, com clareza e rigor e um nível de formalização adequado

A comunicação matemática, a par do raciocínio e do pensamento crítico, está presente quando os alunos interpretam gráficos, esquemas, diagramas ou dados, justificam afirmações, utilizam diferentes representações, escrevem e criticam explicações e argumentos matemáticos, com simbologia adequada e produzindo encadeamentos lógicos. Importa pôr em prática diversos tipos de comunicação, dando espaço às discussões coletivas e em pequenos grupos, apresentações orais e/ou escritas, elaboração de relatórios e composições, publicações e exposições, que são essenciais no processo de desenvolvimento de conceitos ou processos matemáticos. A simbologia constitui um sistema de representação matemática robusto que deve ser relacionado com outros modos de representação, tendo em vista a sua utilização oportuna, nomeadamente no âmbito da comunicação matemática. A formalização de conceitos e resultados matemáticos é uma etapa importante da aprendizagem que não se alcança por meio do excesso de manipulação simbólica ou pela prática de artifícios de cálculo demasiadamente técnicos.

8) Avaliação para a aprendizagem

Privilegiar a avaliação formativa na regulação do processo de aprendizagem

A abordagem exploratória que se privilegia implica a integração da avaliação no processo de aprendizagem. É necessário que a avaliação seja um processo, e não um fim, e que esteja ao serviço da aprendizagem dos alunos, de modo a favorecê-la. A diversificação de formas e instrumentos de avaliação é uma das práticas de avaliação recomendadas. Constituem boas tarefas de avaliação formativa as resoluções detalhadas de tarefas, os relatórios e os cartazes. A produção de documentos de natureza audiovisual é igualmente válida e apelativa, designadamente sob a forma de pequenos vídeos, criação de páginas e blogs, tirando partido de ferramentas digitais. As partilhas de ideias e conclusões em sala de aula, bem como as apresentações orais, constituem boas oportunidades para monitorizar e acompanhar o desenvolvimento das aprendizagens e identificar dificuldades e obstáculos.

4. Operacionalização das Aprendizagens Essenciais

A disciplina de Matemática assume um papel estruturante nos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. As Aprendizagens Essenciais do 10.º ano integram uma vertente de formação matemática para a cidadania, em consonância com as restantes disciplinas de Matemática do Ensino Secundário. Esta vertente é concretizada nos temas de Eleições e Partilha, Literacia Financeira e Estatística. Para além destes temas, no 10.º ano, os alunos estudam Geometria e Funções numa lógica de ampliar e aprofundar as abordagens do Ensino Básico.

No 11.º ano as Aprendizagens Essenciais integram Geometria, Funções e Matemática Discreta. Na lecionação da Geometria inclui-se geometria analítica e vetorial e trigonometria. A abordagem das funções reais considerará sempre estudos dos diferentes pontos de vista: gráfico, numérico e algébrico. Na Matemática Discreta estudam-se técnicas de contagem e sucessões.

No 12.º ano são aprofundados os temas Funções e Probabilidade. A finalizar as Aprendizagens Essenciais do 12º ano são propostos três temas em alternativa: Inferência Estatística, Primitivas Imediatas e Integrais Definidos e Matrizes. Destes temas apenas um deles será escolhido por cada escola, ou mesmo para cada turma.

O trabalho de projeto assume uma dimensão relevante, surgindo explicitamente no 10.º ano, no tema de Literacia Financeira e no 11.º ano no tópico de Sucessões, mas poderá ser também uma proposta de trabalho em qualquer tema que o professor considere adequado.

As Aprendizagens Essenciais relativas à Matemática A dos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas concretizam-se em três documentos distintos. A organização das Aprendizagens Essenciais, que a seguir se detalha, é apresentada em quatro áreas:

- *Temas, Tópicos e Subtópicos matemáticos*, em que são identificados os conceitos Matemáticos a abordar.
- *Objetivos de aprendizagem: conhecimentos, capacidades e atitudes que o aluno deve revelar*, em que são concretizadas, para cada tópico matemático, as aprendizagens visadas com a indicação do foco e da especificação preconizada.
- *Ações estratégicas de ensino do professor*, onde é clarificado o papel do professor e as indicações metodológicas que são consideradas adequadas para a obtenção dos objetivos de aprendizagem definidos, bem como a sugestão de exemplos para a concretização das atividades a propor aos alunos.

- *Áreas de competência do perfil dos alunos*, em que é estabelecida uma ligação entre as aprendizagens matemáticas visadas, as indicações metodológicas e as competências, capacidades e atitudes definidas no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*.

Quando nas Aprendizagens Essenciais se refere recurso a tecnologia gráfica, deve entender-se a utilização de folhas de cálculo ou qualquer versão de calculadora gráfica, física ou sob a forma de emulador, inclusive com Cálculo Algébrico Simbólico (CAS), bem como o uso do Geogebra ou outro Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD), nas suas diversas versões disponíveis em qualquer dispositivo digital. Considera-se também o recurso a aplicativos digitais específicos (apliquetas), disponíveis na internet ou em fóruns temáticos.

Para cada tema são incluídas notas clarificadoras, nomeadamente no que se refere à sugestão de: atividades para o desenvolvimento do Pensamento Computacional, com recurso a exemplos; propostas de possíveis aprofundamentos de alguns temas ou de abordagens alternativas; referências bibliográficas que incluem documentos e recursos para apoio ao trabalho do professor.

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO **PERFIL DOS ALUNOS (ACPA)**

- **A** Linguagens e textos
- **B** Informação e comunicação
- **C** Raciocínio e resolução de problemas
- **D** Pensamento crítico e pensamento criativo
- **E** Relacionamento interpessoal
- **F** Desenvolvimento pessoal e autonomia
- **G** Bem-estar, saúde e ambiente
- **H** Sensibilidade estética e artística
- **I** Saber científico, técnico e tecnológico
- **J** Consciência e domínio do corpo

OPERACIONALIZAÇÃO DAS **APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)**

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
GEOMETRIA Trigonometria Resolução de problemas que envolvam triângulos Ângulo e arco generalizados: expressão geral das amplitudes dos ângulos com os mesmos lados, em graus Redução ao primeiro quadrante	Resolver problemas variados, ligados a situações concretas, que permitam recordar e aplicar métodos trigonométricos estudados no 3.º ciclo do ensino básico, na resolução de triângulos retângulos e não retângulos. Relacionar e aplicar, na resolução de problemas, as noções de ângulo orientado e a respetiva amplitude; e de ângulo generalizado e a respetiva amplitude, no sistema sexagesimal. Reconhecer, analisar e aplicar, na resolução de problemas, razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) de ângulos generalizados no círculo trigonométrico. Utilizar o círculo trigonométrico, na redução ao primeiro quadrante, e a fórmula fundamental da Trigonometria (com demonstração) na resolução de problemas.	Recorrer a exemplos históricos de trigonometria para motivar os alunos para o tema, podendo ser usados exemplos de livros antigos em que se recorre ao grafómetro. Propor problemas variados, ligados a situações concretas, que permitam recordar e aplicar métodos trigonométricos (problemas ligados a sólidos, a moldes, à navegação, à topografia, históricos, etc.) bem como sensibilizar para a importância da Trigonometria para as várias Ciências. Estimular o recurso sistemático ao círculo trigonométrico, em casos simples, explorando as potencialidades da tecnologia.	Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática. (A) Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo. (C)
Espaço Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no espaço Coordenadas de pontos	Identificar coordenadas de pontos do espaço num referencial cartesiano ortonormado.	Propor aos alunos a construção de modelos tridimensionais usando materiais simples (cartão, palhinhas, etc.).	

Conjuntos de pontos e condições Superfície esférica e esfera.	Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas: - Equações de planos paralelos aos planos coordenados; - Equações cartesianas de retas paralelas a um dos eixos; - Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta; - Fórmula da distância entre dois pontos; - Equação cartesiana reduzida da superfície esférica; - Inequação cartesiana reduzida da esfera.	Estimular os alunos a utilizar o Geogebra 3D para visualizar, explorar e estabelecer conjeturas, envolvendo geometria no espaço. Propor a resolução de problemas envolvendo figuras geométricas no espaço.	Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão. (I)
Produto escalar Declive e inclinação de uma reta Produto escalar de dois vetores no plano e no espaço: - definição e propriedades; - expressão do produto escalar nas coordenadas dos vetores em referencial ortonormado Perpendicularidade de vetores e de retas Equação cartesiana de planos no espaço	Reconhecer e aplicar na resolução de problemas a relação entre a inclinação e o declive de uma reta no plano. Conhecer o conceito de produto escalar de dois vetores dados, no plano ou no espaço, definido com base nas coordenadas dos vetores num referencial ortonormado. Saber que o produto escalar de dois vetores é igual ao produto das suas normas pelo cosseno do ângulo formado por eles. Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas a noção de produto escalar, nomeadamente: relacionando o ângulo de dois vetores com o sinal do respetivo produto escalar; estabelecendo uma relação entre os declives de duas retas perpendiculares no plano; determinando o ângulo entre dois vetores; determinando o ângulo formado por duas retas. Resolver problemas envolvendo retas no plano, utilizando equações vetoriais e reduzidas de retas e posição relativa de retas. Reconhecer o significado e aplicar na resolução de problemas a equação vetorial da reta no espaço. Conhecer a equação cartesiana de um plano dados um ponto e um vetor normal.	Introduzir o conceito de produto escalar a partir da expressão do produto escalar nas coordenadas dos vetores em referencial ortonormado, no plano e no espaço. Estimular os alunos a utilizar o Geogebra para visualizar, explorar e estabelecer conjeturas, envolvendo por exemplo: - a relação entre a inclinação e o declive de uma reta; - a relação do ângulo de dois vetores e o sinal do produto escalar; - o ângulo de duas retas; - a posição relativa de retas. Explorar a ligação do cálculo vetorial com a Física (caso os alunos tenham frequentado a disciplina de Física e Química A). Estimular os alunos a utilizarem o Geogebra 3D para visualizar, explorar e estabelecer conjeturas, envolvendo planos e retas no espaço.	

	Resolver problemas envolvendo: equações vetoriais de retas; equações cartesianas de planos; distância de um ponto a um plano; e posição relativa de retas e planos.		

Pensamento Computacional

O tema de Geometria no Espaço é particularmente beneficiado com visualizações interativas em 3 dimensões que se podem efetuar usando o software Geogebra na sua versão 3D. Eis alguns exemplos possíveis:
Paralelismo: https://www.geogebra.org/m/eFMvcngj
Interseção de uma esfera: https://www.geogebra.org/m/Mz7eCBFs
Janela 3D - Esfera seccionada - vista 2D do plano: https://www.geogebra.org/m/acmtajta
Plano e Equação: https://www.geogebra.org/m/ajzr6gh2
Planos no espaço: https://www.geogebra.org/m/PfhVP4U8

Possíveis aprofundamentos

Explorar uma das aplicações modernas da geometria analítica no espaço, o GPS-Sistema de Posicionamento Global. Na sua versão mais simples envolve a interseção de esferas a partir das suas equações.
Algumas das referências e vídeos:
Alves, S. (2006). A matemática do GPS. *Revista do Professor de Matemática*, nº 59. Obtido de https://www.rpm.org.br/cdrpm/59/5.htm
Como funciona o GPS. Obtido de http://www.ime.unicamp.br/~apmat/o-sistema-gps/
A matemática está por trás do GPS e da navegação moderna. Obtido de https://impa.br/noticias/a-matematica-esta-por-tras-do-gps-e-da-navegacao-moderna/
A matemática do GPS. Obtido de
https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?cpf=96932821320&d=20191117203922&h=0818e4e2bf4b85e9e5e4f1320b439a6e3009ea91
O uso do GPS como recurso pedagógico para o estudo de elementos da Geometria Analítica. Obtido de http://hdl.handle.net/1843/BUBD-ANHM7M
Atractor, Núcleo do Porto da APM (2013). A Geometria do Planeta Terra, *Educação & Matemática*, nº 121, p. 22-26

Bibliografia de referência

Ávila, G. (1988). Geometria e Astronomia. *Revista do Professor de Matemática*, nº 13. Obtido de https://www.rpm.org.br/cdrpm/13/2.htm
Baltazar, A., Delgado, F. (1989). Trigonometria ... com um pouco de sorte! *Educação & Matemática*, nº 11, p. 31.
Cássio, J. (2019). *Aprendendo Geometria Plana com a Plataforma GeoGebra*. Obtido de https://www.geogebra.org/m/hsXHDRX7
Coelho, A. (1980). Uso das calculadoras em trigonometria. *Educação & Matemática*, nº 15, p. 29-30.
Devlin, K. (2002). *Matemática - A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Domingos, A., Carreira, S., Amado, N. (2018). A tecnologia entre uma tarefa de geometria analítica e a Vesica Piscis. *Educação & Matemática*, nº 148, p. 39-43.
Estrada, M. F. et al. (2000). *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
Haese, M. e outros (2019) *Mathematics - Applications and Interpretation HL 2* (for use with IB Diploma Programme). Marleston: Haese Mathematics.
Khan Academy. *Geometria Analítica*. Obtido de https://pt-pt.khanacademy.org/math/10ano/xe7bf8a38a4e84c6a:geometria-analitica-no-plano
Loureiro, C. et al. (1997). *Geometria 10º ano de escolaridade*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
Loureiro, C. et al. (1998). *Geometria 11º ano de escolaridade*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
Loureiro, C. et al. (1999). *Trigonometria e Números Complexos*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
Mesquita, C., Marques, F., Carreira, S. (1992). A folha de cálculo e a trigonometria em actividades de aplicações e modelação. *Educação & Matemática*, nº 24, p. 7-12.
Pereira, C., Cegonho, J., Rocha, M.I. (1992). A trigonometria à volta de uma caneca de cerveja. *Educação & Matemática*, nº 23, p. 20-22.
Precatado, A., Guimarães, H. (2001). *Materiais para a aula de Matemática*. Lisboa: APM.
Sebastião e Silva, J. (1970). *Geometria Analítica Plana*. Lisboa: Empresa Literária Fluminense.
Sebastião e Silva, J. (1975-1978) *Compêndio de Matemática* (3 volumes). Lisboa: GEP.
SESAMATH - *Manuel Maths 1re - Programme 2019*. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1spe_2019
Veloso, E. (1998) *Geometria - Temas atuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
FUNÇÕES Polinómios Divisão euclidiana de polinómios e regra de Ruffini/algoritmo de Horner Teorema do resto Multiplicidade de uma raiz de um polinómio Decomposição de um polinómio em fatores lineares e quadráticos	Efetuar operações elementares (adição, subtração, multiplicação e divisão inteira) entre polinómios. Utilizar a regra de Ruffini/algoritmo de Horner para determinar o quociente e o resto duma divisão de um polinómio por uma expressão do tipo $x - a$, com a real. Conhecer o teorema do resto. Conhecer o conceito de multiplicidade de uma raiz de um polinómio. Decompor polinómios em fatores lineares e quadráticos.	Promover a realização de operações com polinómios, não excedendo polinómios de grau 4. Solicitar a elaboração de programas em Python para determinação do valor de um polinómio num ponto ou para determinar os coeficientes do polinómio quociente em resultado da divisão de um polinómio por uma expressão do tipo $x - a$, com a real. Guiar os alunos na decomposição de polinómios em fatores lineares e quadráticos e na determinação da multiplicidade de uma raiz.	Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avalia, valida e organiza a informação recolhida (B)
Funções Cúbica, Quártica e Quíntica Generalidades Equações e inequações polinomiais de grau superior a 2	Estudar zeros, monotonia, extremos e comportamento no infinito, tendo como base o gráfico de famílias de funções cúbicas, quárticas e quínticas, recorrendo à tecnologia gráfica. Reconhecer que para funções polinomiais de grau ímpar existe sempre pelo menos um zero real. Obter a expressão analítica da função polinomial representada graficamente, observando a relevância da multiplicidade dos zeros na sua representação gráfica.	Promover a exploração gráfica de funções polinomiais dos 3.º, 4.º e 5.º graus, visando identificar intuitivamente o número máximo de zeros e o comportamento no infinito, bem como determinar expressões analíticas de funções representadas graficamente. Referir a existência de fórmulas resolventes para polinómios de graus 3 e 4, e a sua inexistência para graus superiores.	Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C)

	Elaborar tabelas de variação de sinal e de monotonia. Resolver gráfica e analiticamente equações e inequações polinomiais de grau superior a 2 no contexto de resolução de problemas de modelação.	Propor a análise do gráfico de funções polinomiais de grau não superior a 5 com recurso à tecnologia gráfica para estudar a monotonia e estudar analiticamente o sinal deste tipo de funções. Promover a resolução gráfica e analítica de equações e inequações polinomiais de grau inferior ou igual a 5. Propor a resolução de problemas em contexto real.	Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D)
Operações elementares entre funções Funções racionais Funções do tipo: $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, $a, c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ Conceito intuitivo de limite e continuidade Assíntotas verticais, horizontais e oblíquas	Caraterizar as funções soma, diferença, produto e quociente de funções envolvendo polinómios de grau não superior a 3. Calcular zeros e estudar o sinal de funções resultantes de operações elementares entre funções, gráfica e analiticamente, em casos simples. Reconhecer, interpretar e representar graficamente funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, referindo os conceitos de limite (incluindo limites laterais) e continuidade de uma função, de forma intuitiva, calculando as coordenadas dos pontos de interseção com os eixos coordenados e estudando o sinal, e usá-los na resolução de problemas e em contextos de modelação. Estudar, com auxílio da tecnologia gráfica e intuitivamente o comportamento de funções racionais definidas pelo quociente de funções polinomiais de grau não superior a 3, identificando assíntotas verticais, horizontais e oblíquas.	Promover operações elementares com funções em contextos de modelação, recorrendo à tecnologia gráfica. Apresentar expressões analíticas de funções representadas graficamente, que resultam de operações entre funções. Promover o estudo intuitivo quer de um gráfico particular, quer usando representações gráficas de funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, quer ainda de funções racionais definidas pelo quociente de funções polinomiais de grau não superior a 3, com recurso à tecnologia. Resolver gráfica e analiticamente problemas em contextos de modelação, por exemplo, concentrações em soluções, custo médio, intensidade da luz em função da distância ou problemas geométricos que relacionem áreas de figuras. Fomentar a utilização da tecnologia gráfica para comparar gráficos, explorar, investigar e identificar a existência de assíntotas verticais, horizontais e oblíquas, evidenciando limitações da tecnologia na determinação das suas equações.	Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

Cálculo diferencial Taxa de variação Derivadas e regras de derivação (adição, subtração, multiplicação, potências com expoente inteiro) Otimização	Determinar a taxa média de variação de uma função num intervalo [a,b] e fazer a sua interpretação geométrica. Determinar a razão incremental de uma função num dado ponto e chegar à taxa de variação instantânea através da noção intuitiva de limite. Definir derivada de uma dada função num ponto como o declive da reta tangente ao gráfico nesse ponto. Conhecer a definição da função derivada. Derivar monómios, de grau não superior a 3, utilizando o limite da razão incremental de uma função num ponto genérico. Aplicar regras de derivação (adição, subtração, multiplicação, potências com expoente natural) para obter a função derivada. Reconhecer, numérica e graficamente, a relação entre o sinal da derivada e a monotonia de uma função. Saber que se uma dada função definida num intervalo aberto tem extremo num ponto e tem derivada nesse ponto então essa derivada é nula (teorema de Fermat).	Introduzir a noção de taxa média de variação incluindo exemplos como a velocidade média do movimento retilíneo de um corpo entre dois instantes. Promover a interpretação geométrica da taxa média de variação de uma função no intervalo $[a, b]$ (declive do segmento de reta entre dois pontos). Apresentar a noção de taxa de variação instantânea utilizando tabelas construídas tendo por base o recurso à tecnologia. Guiar os alunos na escrita e interpretação do conceito de derivada enquanto taxa de variação instantânea, aliado à noção de declive da reta tangente ao gráfico num ponto. Salientar que a função derivada resulta da determinação da derivada num ponto genérico do domínio. Promover a derivação de monómios de grau não superior a 3, utilizando a definição de derivada num ponto genérico e num ponto específico. Apresentar as regras de derivação da adição, subtração, multiplicação e potências com expoente natural.	

	Estudar a monotonia e existência de extremos de uma função com derivada finita em todos os pontos do seu domínio, tendo por base o sinal e os zeros da sua derivada. Resolver problemas simples de modelação matemática, no contexto da vida real.	Promover a comparação entre o gráfico da função e o gráfico da sua derivada recorrendo quer à tecnologia gráfica, quer a processos analíticos para a construção de quadros de variação de sinal e zeros da derivada. Propor problemas de otimização num contexto de modelação.	

Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será igualmente importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles. Antes de redigir o programa na linguagem Python, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.
Exemplo de programa em Python que permite calcular o valor de um polinómio num ponto a partir da sua expressão analítica (grau e coeficientes).

```
print("Polinómios")
grau=int(input("Grau do polinómio: "))
P=[]
for i in range(grau+1):
    P.append(float(input("Introduza o coeficiente do termo de grau "+str(i)+": ")))
x=float(input("x = "))
def f(P,x):
    valor = 0
    for i in range(len(P)):
        valor = valor + P[i]*x**i
    return valor
print("P({}) = {}".format(x, f(P,x)))
```

Exemplo de programa em Python que permite determinar os coeficientes do polinómio quociente em resultado da divisão de um polinómio de grau 3 por um binómio do tipo x-a, com a real.

```
print("Divisão de um polinómio (P) de grau 3 por x-a")
P=[]
```

```
for i in range(4):
    P.append(float(input("Introduza o coeficiente do termo de grau "+str(3-i)+": ")))
a=float(input("a = "))

def f(P,a):
    Q=[P[0]]
    m=P[0]
    for i in range(len(P)-1):
        m=m*a+P[i+1]
        Q.append(m)
    return Q
Q=f(P,a)
R=Q[-1]
print("Coeficientes do polinómio:",P)
print("Coeficientes do quociente:",Q[:-1])
print("Resto: ",R)
```

Nota: O programa foi criado em Python IDLE 3.9.1 para computador.

Para fomentar a visualização gráfica e a interpretação da taxa média de variação pode-se recorrer a ferramentas computacionais, como por exemplo, o GeoGebra:
https://www.geogebra.org/m/RCGp7JjK
https://www.geogebra.org/m/aC9j8ZrE

Possíveis aprofundamentos

Propor a demonstração do Teorema de Fermat.
Propor uma interpretação de Teoremas como o de Weierstrass e o de Rolle (e dos seus corolários).

Bibliografia de referência

Caraça, B. J. (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática,* Ciência Aberta, Gradiva, Lisboa.
Devlin, K. (2002). *Matemática - A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.
Estrada, M. F. Sá, C., Queiró, J. F., Silva, M. C., Costa, M. J. (2000) *História da Matemática,* Universidade Aberta.
Fernandes, J.A. (1998). Tecnologia gráfica no estudo de classes de funções. *Educação & Matemática*, nº 46, p. 33-36.

Graça, M. (2000). Efeitos colaterais no uso de máquinas de calcular. *Gazeta de Matemática*, nº 139, p. 15-21.
Gracias, T. S., Borba, M. (2000). Explorando possibilidades e potenciais limitações de calculadoras gráficas. *Educação & Matemática*, nº 56, p. 35-39.
Guichard, J. P. (1986). História da Matemática no ensino da Matemática. in Bouvier, A. (coord), Didactique des Mathématiques, Cedic/Nathan,1986 (Adaptação livre de Arsélio Martins). Obtido de https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/mhist.html
Haese, M. et al. (2012) *Mathematics for the international student Mathematics SL* (for use with IB Diploma Programme). Third Edition. Adelaide: Haese Mathematics.
Haese, M. et al. (2019) *Mathematics - Analysis and Approaches SL 2* (for use with IB Diploma Programme). Marleston: Haese Mathematics.
Haese, M. et al. (2019) *Mathematics - Applications and Interpretation SL 2* (for use with IB Diploma Programme). Marleston: Haese Mathematics.
Haese, M. et al. (2019) *Mathematics Core topics SL 1* (for use with IB Diploma Programme). Marleston: Haese Mathematics.
Icart, J. (2021). Fonctions: Une Perspective Historique. *Revue MathémaTICE*, nº 75, maio 2021. Obtido de http://revue.sesamath.net/spip.php?article1414
Pina, H. (2010). *Métodos Numéricos*, Escolar Editora, Lisboa.
Rosa, A. P. (2007). Contrastes entre novos e antigos programas do Ensino Secundário: alguns exemplos. *Gazeta de Matemática*, nº 153, p. 32-41.
Sebastião e Silva, J. (1975-1978) *Compêndio de Matemática* (3 volumes). Lisboa: GEP.
SESAMATH - *Manuel Maths 1re - Programme 2019*. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1spe_2019
SESAMATH - *Manuel Maths 2de - Programme 2019*. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms2_2019
Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1997). *Funções - 10º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S.(1998). *Funções - 11º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1999). *Funções - 12º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
MATEMÁTICA DISCRETA Contagem Princípios gerais da contagem Arranjos completos Permutações Arranjos simples Combinações	Conhecer e aplicar os princípios da adição e da multiplicação em problemas de contagem. Usar diferentes formas de representação, nomeadamente diagramas em árvore e tabelas, em problemas de contagens. Identificar arranjos completos, permutações e arranjos simples como casos particulares da aplicação do princípio da multiplicação. Identificar combinações como forma de saber o número de subconjuntos com p elementos de um dado conjunto com n elementos ($p \leq n$).	Propor a resolução de problemas de contagem com base em situações reais que ilustrem os princípios gerais de contagem (por exemplo, caminhos entre cidades, número de ementas possíveis escolhidas a partir de um menu, etc.). Propor a discussão de situações em que o princípio do pombal seja útil na contagem, por exemplo: - quantas pessoas são necessárias para que se possa garantir que há pelo menos duas delas cujo aniversário ocorre no mesmo mês? - quantas luvas será preciso tirar, sem olhar, de uma gaveta com luvas, todas do mesmo padrão, para garantir que tiramos um par (mão esquerda e mão direita)? Promover a análise de situações de contagem em que o princípio da multiplicação não seja suficiente, mas onde se torne necessário adicionar contagens de diferentes alternativas, isto é, se o problema contém diferentes casos (por exemplo, escolher dois livros de diferentes disciplinas retirados de 3 estantes, uma com *5* livros de Matemática, outra com *4* livros de Física e outra com *7* livros de Biologia). Promover a identificação de vantagens e limitações de cada tipo de representação em problemas de contagem. Propor a exploração de exemplos ilustrativos que permitam transitar do princípio da multiplicação para: - a definição de arranjos completos (por exemplo, código do cartão multibanco, pin do telemóvel); - a definição de permutações (por exemplo, número de partidas num torneio em que todos os participantes se defrontam entre si, número de cumprimentos entre um grupo de pessoas);	Reconhece e utiliza linguagem simbólica (A) Gere projetos e toma decisões na resolução de problemas e analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C)

	Verificar a possibilidade de calcular os arranjos simples através da fórmula $\frac{n!}{(n-k)!}$.	- a definição de arranjos simples (preenchimento dos três lugares de um podium). Promover o recurso a fatoriais com o objetivo de simplificar a escrita de produtos sucessivos, nomeadamente clarificando a vantagem do recurso à fórmula do cálculo de arranjos simples.	Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido, no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D) Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
Sucessões Termo geral Definição por recorrência	Identificar e analisar: - regularidades em exemplos numéricos e pictóricos; - formas de gerar sucessões através de - termos gerais e por recorrência.	Incentivar o recurso à tecnologia gráfica para gerar sequências que representam sucessões, distinguindo ordem e termo, interpretando graficamente o comportamento de sucessões. Conduzir à definição de sucessões por recorrência e através do termo geral. Solicitar a construção ou a adaptação de um programa em Python para obter um número previamente fixado de termos de uma sucessão definida por recorrência (por exemplo, um programa em Python que permita analisar conjeturas relacionadas com sucessões definidas por recorrência, como por exemplo a conjetura de Collatz).	
Progressões aritméticas e geométricas Soma de n termos consecutivos de uma progressão Soma infinita de uma progressão geométrica. com $\|r\| < 1$	Reconhecer progressões aritméticas e geométricas. Saber definir progressões aritméticas e geométricas através do 1.º termo e da razão (r). Saber determinar a soma de *n* termos consecutivos de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica. Generalizar a soma de *n* termos consecutivos, de uma progressão geométrica, para a soma da série geométrica quando $\|r\| < 1$.	Promover a identificação e caracterização de progressões aritméticas e geométricas através de contextos da vida real (por exemplo, número de cadeiras numa fila de um anfiteatro, capital resultante da aplicação de juros compostos). Recorrer à história de Gauss com o objetivo de evidenciar uma forma expedita para o cálculo da soma de n termos consecutivos de uma progressão aritmética. Recorrer à lenda de Sissa e do tabuleiro de xadrez com o objetivo de evidenciar uma forma expedita para o cálculo da soma de n termos consecutivos de uma progressão geométrica. Promover a análise do comportamento de uma progressão geométrica para o caso em que $\|r\| < 1$.	

		Conduzir ao reconhecimento de vantagens na utilização de somatórios para representar somas finitas e infinitas, incluindo o uso da função somatório em ambientes tecnológicos. Estender, de forma intuitiva, o conceito de sucessão à respetiva série, analisando casos de séries divergentes (exemplo: séries aritméticas) e de séries convergentes (exemplo: séries geométricas com $\|r\| < 1$). Incentivar o cálculo da soma de séries geométricas com $\|r\| < 1$, investigando o efeito de n ser cada vez maior em r^n.	
Trabalho de projeto	Aplicar e aprofundar conceitos e processos associados às sucessões num problema contextualizado, desenvolvendo competências de generalização, representação e comunicação matemática. Desenvolver hábitos de pesquisa. Interpretar de forma crítica, informação, modelos e processos. Conhecer, aplicar e criar modelos presentes nas sucessões, tirando partido da tecnologia. Desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.	Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões). Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório. Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia. Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta. Estimular a discussão do tema de cada investigação que pode ser negociado ou escolhido de entre uma lista de opções, como por exemplo: a sucessão de Fibonacci e o número de ouro, a sucessão cujo limite é o número e, números poliédricos, primos de Mersenne (da forma $2^n - 1$) ou a sucessão $2^n - 1$ associada às Torres de Hanói. Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática, ou o recurso à programação, sempre que for considerado relevante.	

Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles. O reconhecimento de padrões na tarefa (ou situação) apresentada ou em problemas semelhantes, anteriormente resolvidos, poderá contribuir para facilitar a estruturação do algoritmo a desenvolver. Antes de redigir o programa na linguagem Python, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.
Exemplo de programa em Python para simular a sequência de Collatz obtida a partir de um número dado (previamente fixado).

```
x=int(input("Indica o 1.º termo da sucessão: "))
seq=[]
def collatz_sequencia(x):
    seq = [x]
    if x < 1:
       return []
    while x > 1:
       if x % 2 == 0:
         x = x / 2
       else:
         x = 3 * x + 1
       seq.append(int(x))
    return seq
print(collatz_sequencia(x))
```

Nota: O programa foi criado em Python IDLE 3.9.1 para computador.

Poder-se-á igualmente:
- recorrer à folha de cálculo para gerar sequências que representam sucessões, distinguindo ordem e termo;
- gerar a representação gráfica e interpretar graficamente o comportamento de sucessões;
- dar atenção ao tipo de gráfico escolhido (gráfico de pontos para sucessões).

Possíveis aprofundamentos

Poderá ser feito o estudo da série harmónica, sobretudo analisando o facto de que, embora a sucessão $\frac{1}{n}$ seja convergente para zero, a série não é convergente.

Bibliografia de referência

Aparício, R. (2017). Materiais para a Aula de Matemática - Como que por magia, *Educação & Matemática*, nº 143, p. 17.
Caraça, Bento de Jesus (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática,* Ciência Aberta, Gradiva, Lisboa,
Devlin, K. (2002). *Matemática - A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.
Estrada, M. F. et al. (2000) *História da Matemática,* Universidade Aberta
Haese, M. et al. (2019) *Mathematics - Analysis and approaches HL 2* (for use with IB Diploma Programme). Marleston: Haese Mathematics.
Haese, M. et al. (2019) *Mathematics - Core topics HL 1* (for use with IB Diploma Programme). Marleston: Haese Mathematics.
Mello, H. (2017) Desmistificando o ensino de Análise Combinatória. Rio de Janeiro: IMPA.
Oliveira, R. (1995). As progressões geométricas no cálculo financeiro. *Educação & Matemática*, nº 36, p. 10-12.
Paradinha, H., & Leuca, T. (2010). Um olhar sobre a construção de conexões matemáticas no estudo das sucessões, *Educação & Matemática*, nº 110, p. 27-32.
Peça, C., & Santos, A., (1988). A travessia do deserto e as sucessões!, *Educação & Matemática*, nº 7, p. 13-14.
Precatado, A. (2001). Materiais para a Aula de Matemática - Algas no laboratório de Matemática, *Educação & Matemática*, nº 63, p. 9.
Sebastião e Silva, J. (1975-1978). Compêndio de Matemática (3 volumes). Lisboa: GEP.
SESAMATH - *Manuel Maths 1re - Programme 2019*. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1spe_2019
SESAMATH - *Manuel Maths 2de - Programme 2019*. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms2_2019
Torres, D. (2004). Números felizes e sucessões associadas, *Educação & Matemática*, nº 77, p. 35-38.
Yu, B.,Inácio, C.,Coelho, S.,Coelho, N., & Costa, M. (1998). Jogo síntese da unidade Sucessões, *Educação & Matemática*, nº 46, p. 21.

Cofinanciado por:
PORTUGAL 2020
UNIÃO EUROPEIA
Fundo Social Europeu