

MATEMÁTICA

CURSOS PROFISSIONAIS

Este documento curricular apresenta as Aprendizagens Essenciais de Matemática a que os alunos do Ensino Secundário, na disciplina de Matemática para os Cursos Profissionais, devem ter acesso, em articulação com o Ensino Básico e enquadradas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória. Foi elaborado por uma equipa pluridisciplinar, composta por especialistas em Matemática e em Didática da Matemática e por professores experientes nas diferentes vertentes curriculares do Ensino Secundário: Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Helder Martins, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Teresa Santos, Nélida Filipe, Paulo Correia, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

MATEMÁTICA

CURSOS PROFISSIONAIS

INTRODUÇÃO

Matemática Escolar Orientada para o Futuro

A formação de indivíduos matematicamente competentes é um propósito fundamental do currículo de Matemática para o ensino secundário. A sociedade e o mundo contemporâneos, marcados pela globalização, pela crescente digitalização, conectividade e automatização, e por uma aceleração do desenvolvimento tecnológico, enfrentam desafios nos quais o conhecimento matemático adquire um papel essencial, proporcionando conceitos, métodos, modelos e formas de pensar. Esse poder matemático deve ser parte integrante da educação de todos os cidadãos, incluindo conhecimentos e capacidades que os jovens transportarão para a sua vida pessoal, social e profissional.

O ensino profissional contribui para dotar cada indivíduo de competências transversais que lhe possibilitem a aprendizagem ao longo da vida e que suportem o desenvolvimento profissional num mercado de trabalho em rápida evolução. Assiste-se à valorização da formação ao longo da vida e a um crescimento da importância atribuída à formação técnica e profissional em todos os níveis de ensino, como preparação para uma plena integração no mundo do trabalho. Na era da informação digital, tanto a natureza do trabalho como a preparação para este trabalho estão a atravessar grandes mudanças, com o aparecimento de profissões que envolvem um maior conhecimento tecnológico e uma maior valorização da formação para ingressar na vida ativa.

Empreender uma formação matemática, abrangente, relevante e inovadora, neste ciclo de escolaridade, significa desenvolver nos alunos a capacidade de identificar conceitos matemáticos fundamentais para resolver problemas reais, aplicar procedimentos matemáticos adequados, e interpretar os resultados em contextos diversos. O raciocínio matemático está na base dos processos de compreensão dos conceitos e objetos matemáticos, que podem e devem ser analisados, representados e relacionados de diferentes formas. São igualmente importantes a formulação de hipóteses, a testagem de conjeturas, a dedução, a generalização e a abstração, na construção de argumentos lógicos e conclusões, cuja comunicação de forma apropriada é cada vez mais importante no mundo atual.

O currículo consagra o propósito de preparar os alunos para formularem juízos e tomarem decisões fundamentadas, contribuindo para que se tornem cidadãos reflexivos, empenhados e participativos. Visa também contribuir para que os jovens apreciem o papel da Matemática no mundo e o seu carácter de ciência em evolução e renovação permanente, apreciando a sua dimensão estética a par do seu legado histórico.

Assim, o currículo de Matemática para o futuro orienta-se para o desenvolvimento de áreas de competências, à luz do que é preconizado no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, nomeadamente no que se refere ao pensamento crítico aliado à resolução de problemas, promovendo a criatividade e a comunicação, além de acentuar a pertinência do trabalho colaborativo.

Ideias Inovadoras do Currículo

O reconhecimento do Ensino Secundário enquanto ciclo de formação geral dos jovens, integrado na escolaridade obrigatória cria um contexto em que todas as disciplinas, incluindo a Matemática, devem contribuir para o desenvolvimento dos alunos enquanto cidadãos ativos, conscientes, informados e interventivos.

A consciência da crescente relevância do papel da Matemática na sociedade atual em questões como os Processos Eleitorais ou Modelos Financeiros que estão presentes no nosso contexto social, visa dotar os alunos de ferramentas de análise dos processos sociais e da consciência da sua relevância.

A valorização da Literacia Estatística e do Pensamento Computacional pretendem alinhar o currículo com as recomendações internacionais e contribuir para dotar os alunos de ferramentas de análise dos processos sociais que estão na base do exercício de uma cidadania ativa. Os aspetos comuns entre o Pensamento Matemático e o Pensamento Computacional, bem como a relevância atual do Pensamento Computacional na ciência e na sociedade, justificam que o currículo de Matemática valorize esta abordagem conceptual na resolução de problemas. As Aprendizagens Essenciais de Matemática promovem o desenvolvimento de práticas como a abstração, a decomposição, o reconhecimento de padrões, a análise e definição de algoritmos, bem como a aquisição de hábitos de depuração e optimização dos processos envolvidos na atividade matemática.

Disponibilizando as ferramentas matemáticas necessárias e participando na organização das ideias, pretende desenvolver-se a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção na realidade. A análise de situações da vida real, a identificação de modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução, a seleção de estratégias para resolver problemas, a formulação de hipóteses e a previsão de resultados são orientações que contribuem

para a formação de alunos que manifestem vontade de aprender e gosto pela pesquisa.

Neste âmbito, há oportunidade para apreciar o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através do tempo, com recurso ao estudo da História da Matemática.

O ensino dos temas tem de ser suportado em atividades propostas a alunos ou grupos de alunos, contemplando a modelação matemática, o trabalho experimental e o estudo de situações em contexto real adequadas ao perfil profissional de cada curso. Deverá privilegiar-se a resolução de problemas não rotineiros, conexões entre temas matemáticos, aplicações da matemática noutras disciplinas, recorrendo frequentemente à tecnologia. A modelação e os problemas relacionados com as diferentes áreas de formação constituem uma competência a desenvolver que é imprescindível para alunos que vão enfrentar no seu trabalho profissional problemas concretos muito variados e que terão de saber selecionar as ferramentas matemáticas relevantes para cada situação.

Esta proposta curricular decorre da necessidade identificada de um currículo de Matemática no Ensino Secundário composto por um núcleo comum que defina o que é essencial na formação matemática à saída do ensino obrigatório e núcleos complementares, visando o contributo da Matemática para diferentes áreas de educação e formação ou para o prosseguimento de estudos.

Este documento curricular introduz vários módulos novos, conforme sugerido nas Recomendações para o Ensino da Matemática, de modo a poderem responder às necessidades formativas de um número crescente de áreas de educação e formação, incluídas anualmente no Catálogo Nacional de Qualificações, tendo sido criados os seguintes módulos:

- Introdução à Inferência Estatística
- Geometria sintética

- Matemática e arte
- Distâncias inacessíveis
- Álgebra de Boole
- Modelos de grafos
- Matemática financeira e fiscal
- Matemática comercial
- Matemática laboral
- Biomatemática
- Criptografia

Visão Geral do Programa

A componente Científica é constituída, em cada curso profissional, por duas ou três disciplinas que têm por finalidade dar resposta simultaneamente, às exigências educativas de um curso de nível secundário e também a uma qualificação de nível 4 do quadro nacional de qualificações. Os alunos desenvolvem conhecimentos, capacidades e atitudes que lhes permitem a aprendizagem de um conjunto de competências orientadas para um setor de atividade, profissão ou família de profissões, tendo em vista a construção do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

A Matemática, nas suas conexões com todos os ramos de saber, contribui para a consciência da necessidade da educação e da formação ao longo da vida, com vista a enfrentar mudanças profissionais e as incontornáveis adaptações às inovações científicas e tecnológicas.

Os temas a abordar, estruturados em módulos segundo o modelo curricular dos cursos profissionais, são os seguintes: geometria, incluindo trigonometria; estatística; probabilidade; funções reais de variável real; matemática discreta; modelos matemáticos para a cidadania; e aplicações da matemática.

A abordagem da Geometria inclui assuntos elementares de geometria sintética e métrica, geometria analítica e trigonometria, com as

competências de cálculo numérico a elas associadas, com permanentes preocupações de contextualização no real.

O estudo da Estatística e da Probabilidade completará as aprendizagens básicas, com algumas noções novas, ferramentas tecnológicas e diferentes aplicações ao contexto real, que possam ir ao encontro das motivações e interesses dos alunos e também do perfil profissional de cada qualificação. O contacto direto com o conhecimento das situações reais, tendo por base a recolha de dados deverá ser privilegiado.

A abordagem das Funções Reais de Variável Real com ênfase nas aplicações e na modelação matemática considera o tratamento algébrico e o uso da tecnologia, o estudo de funções periódicas e não periódicas e a variação e otimização.

A Matemática Discreta aparece em várias situações que requerem modelos discretos, como o das sucessões, em particular progressões, ou como os modelos matemáticos dos jogos.

Privilegia-se a Matemática para a Cidadania e as Aplicações da Matemática numa perspetiva de reconhecer o papel da Matemática na formação de cidadãos críticos, capazes de tomar decisões e fazer mudanças. Esta abordagem permite estabelecer e dar a conhecer a relação da Matemática com outras áreas do saber.

A disciplina de Matemática está organizada em 24 módulos de 25 horas, sendo uns obrigatórios e outros de cariz opcional. A lista de módulos é constituída por dois grupos: um grupo de módulos P, de carácter obrigatório, e um grupo de módulos OP, opcionais, que se destinam a ser combinados com os módulos P e selecionados de acordo com a área de educação e formação e com o curso, pretendendo-se o desenvolvimento de projetos interdisciplinares. Os módulos do grupo P, que não são obrigatórios para os cursos com a carga horária nesta disciplina de 100 e 200 horas, podem ser escolhidos como opcionais nesses cursos.

A distribuição do número de módulos obrigatórios e opcionais relativa a cada curso, conforme as diferentes cargas horárias na disciplina de Matemática, está organizada de acordo com o seguinte quadro:

Quadro 1 – Quadro Resumo Geral

Curso/Horas de Matemática	Número de módulos obrigatórios	Número de módulos opcionais
100 horas	2 (50 h)	2 (50 h)
200 horas	4 (100 h)	4 (100 h)
300 horas	6 (150 h)	6 (150 h)

No quadro resumo seguinte é apresentada a organização do elenco modular no que se refere aos módulos obrigatórios para os cursos com a carga horária da disciplina de Matemática com 100, 200 e 300 horas.

Quadro 2 – Quadro resumo dos módulos obrigatórios (P)

Módulos Obrigatórios	100 horas	200 horas	300 horas
P1 – Modelos matemáticos para a cidadania	x	x	x
P2 – Estatística	x	x	x
P3 – Geometria Analítica		x	x
P4 – Funções		x	x
P5 – Probabilidade			x
P6 – Taxas de variação e otimização			x

As Aprendizagens Essenciais permitem a escolha de um conjunto de módulos opcionais de entre os que constam no quadro seguinte:

Quadro 3 – Quadro resumo dos módulos opcionais (OP)

Módulo OP1 Jogos e Matemática	Módulo OP10 Matemática e arte
Módulo OP2 Modelos de funções de crescimento	Módulo OP11 Distâncias inacessíveis
Módulo OP3 Modelos de funções periódicas	Módulo OP12 Álgebra de Boole
Módulo OP4 Programação linear	Módulo OP13 Modelos de grafos
Módulo OP5 Modelos discretos	Módulo OP14 Matemática financeira e fiscal
Módulo OP6 Estatística computacional	Módulo OP15 Matemática comercial
Módulo OP7 Introdução à inferência estatística	Módulo OP16 Matemática laboral
Módulo OP8 Geometria sintética	Módulo OP17 Biomatemática
Módulo OP9 Padrões geométricos	Módulo OP18 Criptografia

Na definição do Plano Modular da disciplina, é indispensável que o professor tenha um conhecimento alargado do currículo, bem como das aprendizagens essenciais dos ciclos do Ensino Básico. Estas aprendizagens essenciais desenvolvem-se em módulos, sendo recomendado que o módulo P1 – Modelos Matemáticos para a Cidadania seja o primeiro a ser lecionado em todos os cursos. Podem

intercalar-se módulos opcionais (OP) com os obrigatórios (P), a trabalhar pela ordem definida pela comunidade educativa (por sugestão do professor ou grupo disciplinar), atendendo ao perfil profissional pretendido em cada qualificação, desde que se respeitem as precedências apresentadas no seguinte quadro:

Quadro 4 - Quadro resumo dos módulos com precedência

Módulos com precedência		Precedências	
P6	Taxas de variação e otimização	P4	Funções
OP2	Modelos de funções de crescimento	P4	Funções
OP3	Modelos de funções periódicas	P4	Funções
OP6	Estatística computacional	P2	Estatística
OP7	Introdução à inferência estatística	P2 e P5	Estatística Probabilidade

Metodologia/Avaliação

O ensino de todos estes temas deve ser suportado em atividades que contemplem a modelação matemática, o pensamento computacional, a história da matemática e o estudo de situações em contexto real adequadas às diferentes áreas de formação. A modelação e a resolução de problemas relacionados com as diferentes áreas profissionais assumem-se como uma metodologia de trabalho a privilegiar na construção dos conceitos matemáticos, selecionando ferramentas matemáticas relevantes para cada situação e tendo em vista desenvolver competências nos alunos que irão ingressar num mercado de trabalho em constante transformação.

A estrutura modular dos cursos profissionais foi criada para permitir a diferenciação pedagógica dos alunos, respeitando diferentes ritmos de aprendizagem. A organização da sala de aula e as metodologias de aprendizagem deverão proporcionar ambientes educativos em que todos os alunos possam aprender. Para que tal seja possível, os professores deverão proceder a um planeamento de forma a contemplar os aspetos económicos e sociais, valorizando as experiências prévias dos alunos, conhecimento extra matemático e sempre que possível valorizar as aplicações da matemática relacionadas com a área de formação do curso profissional.

Pretende-se que as situações de avaliação não se restrinjam ao produto final, mas atendam essencialmente ao processo de aprendizagem e permitam que o aluno seja um elemento ativo, reflexivo e responsável da sua aprendizagem, contribuindo para o desenvolvimento das competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória. É aconselhável que as atividades de aprendizagem sejam encaradas como tarefas de avaliação. O professor pode ficar a conhecer o que os alunos são capazes de fazer perante um problema concreto ou mediante uma proposta de investigação, o que pode ser utilizado para orientar aprendizagens posteriores que ofereçam aos alunos a oportunidade de ir integrando novas aprendizagens.

Deverá ser privilegiada a avaliação formativa, com a aplicação de instrumentos diversificados (por exemplo: trabalhos, tarefas abertas de natureza exploratória alicerçadas em contextos de modelação, relatórios, composições, construção de modelos, apresentações ou participação em debates, vídeos, blogs, páginas da internet) que sejam adequados à diversidade das aprendizagens e aos contextos em que ocorrem. As ações de aprendizagem dos alunos poderão ser usadas como elementos de avaliação, recomendando-se a sua valorização.

Para efeitos de prosseguimento de estudos de nível superior, a prova de exame para a Matemática dos Cursos Profissionais e para

Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) centrar-se-á nos 6 módulos obrigatórios, dos cursos de 300 horas: P1, P2, P3, P4, P5 e P6.

Operacionalização das Aprendizagens Essenciais

A disciplina de Matemática assume um papel estruturante nos Cursos Profissionais, integrando 24 módulos, dos quais 18 são opcionais para serem escolhidos de acordo com a respetiva qualificação. Cada módulo é concretizado nas Aprendizagens Essenciais, cuja estrutura a seguir se detalha em quatro áreas:

- *Temas e Tópicos Matemáticos*, em que são identificados os conceitos Matemáticos a abordar.
- *Objetivos de aprendizagem*, conhecimentos, capacidades e atitudes que o aluno deve revelar, em que são concretizadas, para cada tópico matemático, as aprendizagens visadas com a indicação do foco e da especificação preconizada.
- *Ações estratégicas de ensino do professor*, onde é clarificado o papel do professor e as indicações metodológicas que são consideradas adequadas para a obtenção dos objetivos de aprendizagem definidos, bem como a sugestão de exemplos para a concretização das atividades a propor aos alunos.
- *Áreas de competência do perfil do aluno*, em que é estabelecida uma ligação entre as aprendizagens matemáticas visadas, as indicações metodológicas e as competências, capacidades e atitudes definidas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

Para cada módulo são incluídas notas clarificadoras, nomeadamente no que se refere à sugestão de atividades para o desenvolvimento do Pensamento Computacional, com recurso a exemplos; as propostas de possíveis aprofundamentos de alguns temas ou de abordagens alternativas e a referências bibliográficas, documentos e recursos para apoio ao trabalho do professor.

MATEMÁTICA | MÓDULO P1

MODELOS MATEMÁTICOS PARA A CIDADANIA

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS

Linguagens e textos (A)	Informação e comunicação (B)	Raciocínio e resolução de problemas (C)	Pensamento crítico e pensamento criativo (D)	Relacionamento interpessoal (E)
Desenvolvimento pessoal e autonomia (F)	Bem-estar, saúde e ambiente (G)	Sensibilidade estética e artística (H)	Saber científico, técnico e tecnológico (I)	Consciência e domínio do corpo (J)

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

Conceitos chave | Ideias chave

Cidadania | eleições | partilha e impostos

Este módulo pretende contribuir para a promoção da construção da cidadania, desenvolvendo nos alunos a tomada de consciência e o desenvolvimento de atitudes cívicas, tornando-os cidadãos mais participativos.

Os temas abordados e as estratégias de ação do professor visam desenvolver nos alunos capacidades para interpretar, analisar e criticar situações em contexto real.

TEMAS, TÓPICOS E SUBTÓPICOS MATEMÁTICOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES QUE O ALUNO DEVE REVELAR	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	ÁREAS DE COMPETÊNCIA DO PERFIL DOS ALUNOS
<p>MODELOS MATEMÁTICOS PARA A CIDADANIA</p> <p>Modelos matemáticos nas eleições</p> <p>Maioria simples</p> <p>Maioria absoluta</p> <p>Método de Borda</p> <p>Modelos Matemáticos na partilha</p> <p>Método de Hondt</p> <p>Método de St. Laguë</p>	<p>Reconhecer o papel da matemática na escolha de representantes em sistemas políticos e sociais.</p> <p>Perceber que existem modelos matemáticos que permitem criar procedimentos para transformar as preferências individuais numa decisão coletiva.</p> <p>Identificar o vencedor de um processo eleitoral através de maioria simples e maioria absoluta.</p> <p>Identificar o vencedor de processos eleitorais que recorram a boletins de preferência (método de Borda).</p> <p>Perceber que existem modelos matemáticos que permitem criar procedimentos para fazer distribuições proporcionais.</p> <p>Conhecer e aplicar o método de Hondt e o método de St. Laguë.</p> <p>Identificar vantagens e limitações dos métodos de Hondt e St. Laguë.</p>	<p>Contribuir para o reconhecimento da necessidade da matemática para definir métodos eleitorais.</p> <p>Contribuir para a clarificação da importância da participação de cada cidadão na eleição dos seus representantes (delegado de turma, associação de estudantes, estruturas sindicais e poderes políticos).</p> <p>Promover a análise, a interpretação e a discussão de sistemas eleitorais que valorizem a existência de uma segunda volta, como é o caso da eleição do Presidente da República de Portugal, nomeadamente a referência à eleição presidencial de 1986.</p> <p>Propor a construção de um programa simples em <i>Python</i>, de iniciação à linguagem, que permita determinar o número de votos que garante a maioria absoluta, sendo inseridas as votações em 3 candidatos, permitindo o desenvolvimento do Pensamento Computacional.</p> <p>Propor a análise de situações que evidenciem claramente o facto de métodos eleitorais diferentes gerarem escolhas diferentes para a mesma votação, recorrendo a contextos eleitorais concretos, como por exemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> - eleição do delegado de turma; - eleição para a Associação de Estudantes; - eleições para os órgãos sociais de clubes desportivos. <p>Referir que todos os métodos eleitorais têm limitações, nomeadamente, encorajar o debate de situações em que existe e em que não existe transitividade das escolhas.</p> <p>Analisar com os alunos os contextos eleitorais das eleições autárquicas e das eleições para a Assembleia da República, suscitando a compreensão da necessidade de um método de partilha proporcional.</p> <p>Incentivar os alunos a confirmar o processo da distribuição de mandatos num organismo local (eleições com um número reduzido de mandatos - até 6 mandatos).</p> <p>Promover a exploração, com recurso à tecnologia gráfica (folha de cálculo), de distribuições de mandatos em cenários nacionais (eleições com um número elevado de mandatos), por exemplo, a distribuição de mandatos por círculo eleitoral), promovendo o desenvolvimento do Pensamento Computacional.</p> <p>Propor a análise de situações concretas que evidenciem claramente que métodos de partilha diferentes geram distribuições diferentes para a mesma eleição, por exemplo, as eleições europeias de 1987.</p> <p>Promover a análise de casos em outras situações, como por exemplo a distribuição de um número de computadores por departamentos com diferentes dimensões.</p> <p>Promover discussões sobre problemas de partilha, identificando os modelos matemáticos que contribuem para as diversas soluções e limitações na sua aplicação.</p> <p>Dinamizar a realização de simulações relacionadas com processamento de salários (em que sejam utilizados os conceitos de vencimento líquido, salário bruto, abonos e descontos), promovendo a construção de uma folha de cálculo.</p>	<p>Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)</p> <p>Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avaliando, validando e organizando a informação recolhida (B)</p> <p>Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C)</p> <p>Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D)</p> <p>Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)</p> <p>Preocupa-se com a construção de um futuro sustentável e envolve-se em projetos de cidadania ativa (G)</p> <p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)</p>

Numa possível extensão a este programa poderá ser verificado se algum dos candidatos obteve maioria absoluta.

Exemplo de programa em *Python* que permite, sendo inseridas as votações de 3 candidatos, determinar o número de votos que garante a maioria absoluta e verificar se algum dos candidatos obteve essa maioria.

```
cA=int(input("N.º de votos do candidato A:"))
cB=int(input("N.º de votos do candidato B:"))
cC=int(input("N.º de votos do candidato C:"))
ma=int((cA+cB+cC)/2)+1
print("Serão necessários pelo menos",ma,"votos para obter maioria absoluta.")
if cA>=ma:
    print("O candidato A obteve maioria absoluta com",cA,"votos.")
elif cB>=ma:
    print("O candidato B obteve maioria absoluta com",cB,"votos.")
elif cC>=ma:
    print("O candidato C obteve maioria absoluta com",cC,"votos.")
else:
    print("Nenhum dos candidatos obteve maioria absoluta.")
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Em alternativa à folha de cálculo, as simulações referentes à distribuição de mandatos pelo método de Hondt poderão ser realizadas através de pequenos programas em Python, procurando por exemplo o número mínimo e máximo de votos para um partido obter um número predeterminado de lugares (por exemplo, todos os mandatos serem atribuídos ao mesmo partido). Uma simulação do método de Hondt pode ser encontrada em:

<https://www.sg.mai.gov.pt/AdministracaoEleitoral/MetodoHondt/Paginas/default.aspx>

Podem propor-se vários tipos de programas em *Python* para concretizar os Modelos Financeiros; por exemplo o cálculo de uma capitalização anual ou uma capitalização mensal, dado um capital inicial.

Exemplo de programa em *Python* para calcular a capitalização anual, dado um capital inicial:

```
ci=1000          #valor inicial
r=0.03          #taxa de juro anual
cf=ci+ci*r
print('O capital final é ',cf,'€')
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Exemplo de programa em *Python* para calcular a capitalização mensal passados n meses, dado um capital inicial:

```
ci=300          #valor inicial
r=0.03          #taxa de juro anual
n=10           #número de períodos de capitalização
cf=ci*(1+r/12)**n
print('O valor final ao fim de ',n,' meses é', cf,'€')
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Como possíveis alterações a este programa sugere-se a variação da periodicidade e do número de períodos de capitalização.

POSSÍVEIS APROFUNDAMENTOS

Se for possível e oportuno, poderão ser abordados outros métodos eleitorais como, por exemplo, o método de Condorcet e a sua alegada proposta (em 1888) de um método eleitoral superior a todos os outros.

Exemplo de um caso interessante a estudar: a mudança do uso de maioria simples para a maioria absoluta ao longo dos anos na Ordem dos Médicos e na Ordem dos Advogados.

Também pode ser feita a comparação com o método usado nas eleições para a Ordem dos Enfermeiros em que a lista vencedora é a que obtiver mais votos, sem exigência de maioria absoluta (e só com uma volta). Neste último caso pode ser consultada a página <https://www.ordemenfermeiros.pt/arquivo/comunicacao/Paginas/ProclamacaoEleicoes> onde se encontra a proclamação dos resultados definitivos das Eleições de 12 de dezembro de 2011.

Avaliação financeira de um projeto de investimento, através do cálculo do valor atual de fluxos financeiros futuros previstos.

Cálculo das prestações constantes em empréstimos e comparação com os simuladores em sites de bancos e empresas financeiras.

Para os alunos de Ciências Sócio Económicas será recomendável que sejam fomentadas as conexões com assuntos e conceitos da disciplina de Economia.

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

- Aspas, R. (2020). *Tipos de impostos: diretos e indiretos*. Obtido de <https://www.doutorfinancas.pt/financas-pessoais/impostos-em-portugal-diretos-e-indiretos/>
- Batista, A. S. (2014). *Matemática financeira. O valor do dinheiro ao longo do tempo*. Porto: Vida económica.
- Chalub, F. (2019). *O ano de todas as eleições*. *Gazeta de Matemática*, nº 188, p. 9-11.
- CNE (2022). *Eleições / Referendos*. Obtido de: <https://www.cne.pt/content/eleicoes-referendos>
- CNE (2022). *Método de Hondt*. Obtido de <https://www.cne.pt/content/metodo-de-hondt>
- COMAP (2016). *For all Practical Purposes - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.
- Conselho Nacional de Supervisores Financeiros. (2016). *Plano Nacional de Formação Financeira 2016-2020*. Lisboa: Banco de Portugal.
- Domingos, A., Santiago, A, & Teixeira, P. (2017). Materiais para a Aula de Matemática - Perfis financeiros, *Educação & Matemática*, nº 142, p. 13-14.
- Feiteira, R. (2007). O que têm em comum a eleição de um delegado de turma e as eleições legislativas? *Gazeta de Matemática*, nº 152, p. 32-37.
- Feiteira, R. (2008). Alguns métodos eleitorais através do Excel, *Educação & Matemática*, nº 96, p. 29-33.
- Gonçalves, D. (2019). *Quais os Impostos cobrados na compra de uma casa?* Obtido de <https://www.doutorfinancas.pt/creditos/credito-habitacao/quais-os-impostos-cobrados-na-compra-de-uma-casa/>
- Junior, I. M. (2021). *Educação Financeira*. IMPA. Obtido de <https://umlivroaberto.org/producao/educacao-financeira/>
- Lopes, A. V. & Moreirinha, O. (2004). Materiais para a Aula de Matemática - Métodos de apoio à decisão: Plínio, o jovem. *Educação & Matemática*, nº 79, p. 25.
- Lopes, A. V. et al. (2002). Materiais para a aula de Matemática - Eleições para a Presidência da República -1986. *Educação & Matemática*, nº 67, p. 34-35.
- Machado, H. A. (2011). *A literacia financeira da população escolar em Portugal. Estudo aplicado a alunos do ensino secundário da região de Lisboa*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Técnica de Lisboa.
- Malkevitch, J. (1999). *Teoria Matemática das Eleições*. COMAP (tradução portuguesa da responsabilidade do DES, Lisboa). Obtido de <https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online>
- Ministério da Educação e Ciência (2013). *Referencial de Educação Financeira para a Educação Pré-Escolar, o Ensino Básico, o Ensino Secundário e a Educação e Formação de Adultos*, Obtido de: https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/referencial_de_educacao_financeira_final_versao_port.pdf
- Nascimento, N. H. A. (2015). *Matemática e educação financeira: um estudo de caso do Ensino Secundário*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Nova de Lisboa. Obtido de <http://hdl.handle.net/10362/16356>
- Pinto, D. V. & Domingos, A. (2015). A Educação Financeira para uma eficaz contenção do consumo. In *Atas do 2º Seminário de Investigação em Educação Financeira Escolar e Educação Matemática*, (pp. 121). Lisboa: Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia; Unidade de Investigação e Desenvolvimento.
- Pordata / RTP (2015). *O que é a dívida pública?* Obtido de <https://ensina.rtp.pt/artigo/o-que-e-a-divida-publica/>
- Pordata / RTP (2015). *O que são impostos diretos e indiretos?* Obtido de <https://ensina.rtp.pt/artigo/o-que-sao-impostos-diretos-e-indiretos/>
- Ribeiro, E. M. C. (2013). *Literacia Financeira. Estudo aplicado aos alunos do 3.º Ciclo do Ensino Básico e Secundário*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Portucalense Infante D. Henrique.
- Rodrigues, A. & Pimenta, C. (2017). Literacia financeira - construção do conhecimento matemático (uma experiência de ensino com alunos do 12º ano de escolaridade). *CIBEM 2017* (Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática) CB-219, p. 74-84. Madrid: Universidade Complutense.

MATEMÁTICA | MÓDULO P2

ESTATÍSTICA

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS				
Linguagens e textos (A)	Informação e comunicação (B)	Raciocínio e resolução de problemas (C)	Pensamento crítico e pensamento criativo (D)	Relacionamento interpessoal (E)
Desenvolvimento pessoal e autonomia (F)	Bem-estar, saúde e ambiente (G)	Sensibilidade estética e artística (H)	Saber científico, técnico e tecnológico (I)	Consciência e domínio do corpo (J)

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

Conceitos chave | Ideias chave

Estatística | população | amostra | dados

O aluno deverá ficar a saber organizar, representar e tratar dados recolhidos em bruto (ou tabelados) para daí tirar conclusões numa análise sempre crítica e consciente dos limites do processo de matematização da situação. É importante que os temas estudados contribuam para melhorar a capacidade dos alunos em avaliar afirmações de carácter estatístico, fornecendo-lhes ferramentas apropriadas para rejeitar quer certos anúncios publicitários quer notícias ou outras informações em que a interpretação dos dados ou a realização da amostragem não tenha sido correta.

Deverá privilegiar-se uma aprendizagem ativa, em particular envolvendo os alunos em pequenos projetos. Pelo menos num dos tópicos deste tema desenvolver trabalho em grupo, promovendo a discussão em pequenos grupos e posteriormente no grupo turma, dando preferência a tarefas de natureza exploratória.

TEMAS, TÓPICOS E SUBTÓPICOS MATEMÁTICOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES QUE O ALUNO DEVE REVELAR	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	ÁREAS DE COMPETÊNCIA DO PERFIL DOS ALUNOS
<p>ESTATÍSTICA</p> <p>Problema estatístico</p> <p>Variabilidade</p>	<p>Reconhecer o papel relevante desempenhado pela Estatística em todos os campos do conhecimento.</p> <p>Reconhecer a variabilidade como um conceito-chave de um problema estatístico.</p> <p>Conhecer e interpretar situações do mundo que nos rodeia em que a variabilidade está presente.</p>	<p>Promover a discussão na turma para identificar e formular questões estatísticas, cujas respostas dependam da recolha de dados.</p> <p>Propor a discussão de situações do mundo real envolvente em que a variabilidade está presente. Por exemplo, o político questiona se valerá a pena candidatar-se às próximas eleições autárquicas para o seu concelho; o diretor de um agrupamento escolar questiona a percentagem de alunos que almoçam diariamente na escola; o padeiro questiona quantos pães deve fazer por dia; o gerente de uma fábrica têxtil questiona qual o tamanho das camisas em que deverá investir.</p>	<p>Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)</p> <p>Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avalia, valida e organiza a informação recolhida (B)</p> <p>Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C)</p>
<p>População, amostra e variável</p> <p>Fases de um procedimento estatístico</p>	<p>Identificar num estudo estatístico, população, amostra e a(s) característica(s) a estudar, que se designa(m) por variável(variáveis).</p> <p>Reconhecer as fases de um procedimento estatístico:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Produção ou aquisição de dados; - Organização e representação de dados; - Interpretação tendo por base as representações obtidas. <p>Reconhecer os métodos existentes para a seleção de amostras, no sentido de que estas sejam representativas das populações subjacentes, e de modo a evitar amostras enviesadas cujo estudo levaria a inferir conclusões erradas para as populações.</p> <p>Intuir que os problemas estatísticos em que se recorre a amostras para inferir para a população subjacente, não têm uma solução matemática única que se possa exprimir como verdadeiro ou falso.</p>	<p>Alertar que os termos população e amostra se referem a conjuntos de unidades estatísticas, mas que estes termos também são usados para identificar os conjuntos de valores assumidos pela variável em estudo.</p> <p>Propor a recolha de informação nos jornais ou na internet sobre notícias que permitam:</p> <ul style="list-style-type: none"> - diferenciar os processos de recenseamento e sondagem (recolher dados sobre toda a população ou sobre uma amostra); - identificar exemplos de amostras enviesadas, nomeadamente amostras por conveniência e por resposta voluntária. <p>Alertar para a necessidade de recolha de dados reais, como forma de responder a questões concretas.</p> <p>Promover a discussão sobre a dimensão da amostra a recolher, informando que esta dimensão depende muito da variabilidade presente na população subjacente e deverá ser tanto maior quanto maior for a dimensão da população. Informar que existem técnicas para definir quais as dimensões mínimas para garantir a precisão dos processos em que se pretende inferir para a população as propriedades verificadas na amostra. Chamar a atenção para que existem processos apropriados para a seleção das amostras de forma a garantir a aleatoriedade e a representatividade da população subjacente.</p> <p>Informar que a utilização da probabilidade vai permitir tomar uma decisão para a população, a partir do estudo da amostra, quantificando o erro cometido ou o grau de confiança nessa decisão, exemplificando com a forma como se transmite o resultado de uma sondagem eleitoral.</p>	<p>Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D)</p> <p>Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)</p> <p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)</p>

<p>Dados univariados</p> <p>Dados quantitativos discretos ou contínuos</p> <p>Organização de dados</p> <p>Histograma</p> <p>Medidas de localização</p> <p>Medidas de dispersão</p> <p>Propriedades das medidas</p>	<p>Identificar dados quantitativos discretos ou contínuos.</p> <p>Organizar e representar a informação contida em dados quantitativos discretos e contínuos em tabelas de frequências absolutas, absolutas acumuladas, relativas e relativas acumuladas e interpretá-las.</p> <p>Selecionar representações gráficas adequadas para cada tipo de dados identificando vantagens/inconvenientes, lembrando a construção de gráficos de barras, diagramas de caule-e-folhas e diagramas de extremos-e-quartis.</p> <p>Reconhecer que o histograma é um diagrama de áreas, e que para a sua construção é necessária uma organização prévia dos dados em classes na forma de intervalos.</p> <p>Construir histogramas, considerando classes com a mesma amplitude.</p> <p>Interpretar as medidas de localização: média (\bar{x}), mediana (M_e), moda(s) (M_o) e percentis (quartis como caso especial) na caracterização da distribuição dos dados, relacionando-as com as representações gráficas obtidas.</p> <p>Interpretar as medidas de dispersão, amplitude, amplitude interquartil e desvio padrão amostral, s, (variância amostral s^2) na caracterização da distribuição dos dados, relacionando-as com as representações gráficas obtidas.</p> <p>Interpretar e mostrar analiticamente as alterações provocadas na média por transformação dos dados pela multiplicação de cada um por uma constante “a” e pela adição de uma constante “b”.</p> <p>Compreender os conceitos e as seguintes propriedades das medidas:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Pouca resistência da média e do desvio padrão; - Soma dos desvios dos dados relativamente à média é igual a zero; - Desvio padrão é igual a zero se e só se todos os dados forem iguais; - Amplitude interquartil igual a zero, não implica a não existência de variabilidade; <p>Conhecer que se os dados forem fornecidos já agrupados em classes, na forma de intervalos, torna-se necessário adequar as fórmulas ou os procedimentos existentes para dados não agrupados, para obter valores aproximados da média e do desvio padrão.</p> <p>Reconhecer que existem situações em que é preferível utilizar como medida de</p>	<p>Informar que quando se está a recolher dados quantitativos, isto é, a “medir” a variável em estudo sobre as unidades estatísticas selecionadas para a amostra, confrontamo-nos com duas situações: ou a variável assume um número finito ou infinito numerável de valores distintos, caso em que se diz <i>discreta</i>, e a observação assume a forma de uma <i>contagem</i>; ou a variável pode assumir qualquer valor num intervalo em \mathbb{R}, caso em que se diz <i>contínua</i>, e a observação assume a forma de uma <i>medição</i>.</p> <p>Salientar que a natureza dos dados não é uma característica necessariamente inerente à variável em estudo, porque pode depender da forma como é medida. Exemplificar com a variável Idade que é de tipo contínuo e que pode ser utilizada de forma discreta (10, 15, 23,...), uma peça de roupa, cujo “tamanho” é uma variável contínua, mas é frequentemente classificada em categorias (XS, S, M, L, XL, ...), isto é, dados de tipo qualitativo.</p> <p>Promover a utilização da tecnologia para construir tabelas e gráficos.</p> <p>Realçar a utilidade do diagrama de caule-e-folhas para uma ordenação rápida dos dados e salientar a importância do diagrama de extremos-e-quartis para comparar várias distribuições de dados.</p> <p>Salientar que o aspeto do histograma depende do número de classes considerado, da amplitude de classe e do ponto onde se começa a considerar a construção da primeira classe (discutir com os alunos o que se entende por um número adequado de classes, chamando a atenção para que uma representação com muitas classes apresentará muita da variabilidade presente nos dados, não conseguindo fazer sobressair o padrão que se procura, enquanto que um número muito pequeno de classes esconderá esse padrão).</p> <p>Salientar a importância do gráfico de barras e do histograma para uma posterior seleção do modelo da população subjacente à amostra, respetivamente discreto ou contínuo.</p> <p>Incentivar a utilização da tecnologia para o cálculo das diversas medidas, em particular quando a dimensão da amostra é razoavelmente grande, não negligenciando antecipadamente o cálculo dessas medidas usando papel e lápis para amostras de dimensão reduzida.</p> <p>Propor a elaboração de um programa simples em <i>Python</i> que permita recolher as idades de, por exemplo, 5 alunos de uma turma na disciplina de Matemática, organizá-las sob a forma de uma lista, retornando a média, a mediana, o máximo e o mínimo, promovendo o Pensamento Computacional.</p> <p>Promover a utilização da tecnologia para explorar as propriedades das medidas, nomeadamente as alterações provocadas nas medidas de localização e dispersão por transformação dos dados pela multiplicação de cada um por uma constante “a” e pela adição de uma constante “b”. Realçar a utilização enganadora da média, em casos em que existem <i>outliers</i> (dados muito diferentes do padrão dos restantes), devido à grande influência desses dados.</p> <p>Incentivar os alunos a interpretar os conceitos e as propriedades das medidas, privilegiando a sua compreensão, em detrimento do uso de fórmulas e de procedimentos para as calcular. Por exemplo, depois de compreender o conceito de percentil, utilizar a função cumulativa ou as tabelas de frequências relativas acumuladas para calcular valores aproximados dessas medidas.</p> <p>Promover a utilização da tecnologia para determinar os percentis, e exemplificar a sua utilização com as tabelas de crescimento da DGS (https://www.dgs.pt/upload/membro.id/ficheiros/i007811.pdf), relacionando o</p>	
--	--	--	--

	<p>localização do centro da distribuição dos dados, a mediana em vez da média, e como medida de dispersão a amplitude interquartil em vez do desvio padrão, apresentando exemplos simples.</p> <p>Reconhecer que algumas representações gráficas são mais adequadas que outras para comparar conjuntos de dados, nomeadamente o diagrama de extremos e quartis, para comparar a distribuição de dois ou mais conjuntos de dados, realçando aspetos de simetria, dispersão, concentração, etc.</p>	<p>“peso” e a “estatura” com a “idade”.</p> <p>Promover a elaboração de um programa em Python para permitir o cálculo da amplitude e do desvio padrão e estudar as propriedades dessas medidas, efetuando alterações nos dados.</p> <p>Conduzir os alunos na interpretação das representações gráficas e das medidas, no contexto do problema, que levou à recolha dos dados.</p>	
<p>Dados bivariados</p> <p>Dados quantitativos</p> <p>Diagrama de dispersão</p> <p>Coeficiente de correlação linear</p> <p>Reta de regressão - variável independente ou explanatória - variável dependente ou resposta.</p> <p>Gráfico de linhas</p>	<p>Reconhecer que, para estudar a associação entre duas variáveis quantitativas de uma população, se observam essas variáveis sobre cada unidade estatística, obtendo-se uma amostra de pares de dados.</p> <p>Reconhecer a importância da representação dos dados no diagrama de dispersão, nuvem de pontos, para interpretar a forma, direção e força da associação (linear) entre as duas variáveis.</p> <p>Identificar o coeficiente de correlação linear r, como medida dessa direção e grau de associação (linear), e saber que assume valores pertencentes a $[-1, 1]$, dizendo-se com base nesse valor que a correlação é positiva, negativa ou nula. Recorrer à tecnologia para proceder ao cálculo do coeficiente de correlação linear.</p> <p>Compreender que no caso em que o diagrama de dispersão mostrar uma forte associação linear entre as variáveis, essa associação pode ser descrita pela reta de regressão ou reta dos mínimos quadrados. Utilizar a tecnologia para determinar uma equação da reta de regressão.</p> <p>Compreender que na construção da reta de regressão não é indiferente qual das variáveis é que se considera como variável independente ou <i>explanatória</i>. Compreender que a existência de <i>outliers</i> influencia estes procedimentos.</p> <p>Utilizar a reta de regressão para inferir o valor da variável dependente ou resposta, para um dado valor da variável independente ou explanatória, quando existe uma forte associação linear entre as variáveis, quer positiva, quer negativa, e desde que este esteja no domínio dos dados considerados.</p> <p>Compreender que não se pode confundir correlação com relação causa-efeito, pois podem existir variáveis “perturbadoras” que podem provocar uma aparente associação entre as variáveis em estudo.</p> <p>Entender que um gráfico de linhas é um caso particular de um diagrama de dispersão, em que se pretende estudar a evolução de uma das variáveis relativamente a outra variável, de um modo geral o tempo, e em que se unem, por linhas, os pontos representados.</p>	<p>Conduzir os alunos a explorar situações em que tenha interesse estudar a associação entre duas variáveis sobre as mesmas unidades estatísticas.</p> <p>Envolver os alunos na discussão sobre a construção do diagrama de dispersão, em especial na identificação da variável independente ou explanatória. Por exemplo, pretendendo-se estudar a associação entre as variáveis “idade” e “altura”, a variável independente ou explanatória deverá ser a “idade” e a variável “altura” a variável dependente ou resposta.</p> <p>Apresentar a expressão do coeficiente de correlação e utilizá-la para interpretar a associação linear entre as variáveis como positiva, negativa ou nula.</p> <p>Realçar que o coeficiente de correlação só assume os valores -1 ou 1, quando os pontos no diagrama de dispersão estão alinhados numa reta.</p> <p>Realçar e exemplificar que a correlação linear só mede a associação linear entre as variáveis, já que o coeficiente de correlação pode ser próximo de zero e as variáveis estarem fortemente correlacionadas, não linearmente.</p> <p>Realçar que só no caso de se visualizar uma associação aproximadamente linear entre os pontos do diagrama de dispersão é que tem sentido utilizar a tecnologia para calcular o coeficiente de correlação, bem como construir a reta de regressão.</p> <p>Comentar com os alunos a razão de se chamar à reta de regressão, reta dos mínimos quadrados.</p> <p>Propor a construção da reta de regressão, recorrendo à tecnologia e explorar a forma como é afetada por <i>outliers</i>. Exemplificar com os chamados “conjuntos de dados de Anscombe”, que embora apresentem as mesmas características amostrais, têm representações gráficas muito diferentes, realçando a importância de uma visualização prévia dos dados antes de proceder ao cálculo do coeficiente de correlação ou à construção da reta de regressão.</p> <p>Explorar o modelo da reta de regressão no contexto do estudo, nomeadamente inferindo valores da variável resposta para determinados valores para a variável explanatória.</p> <p>Propor a pesquisa na internet de situações em que existem variáveis “perturbadoras”.</p> <p>Promover a exploração de alguns exemplos concretos de gráficos de linhas, como a evolução da temperatura medida numa determinada hora, ao longo de um mês, em determinado local.</p>	

AVALIAÇÃO

Valorizando o caráter formativo da avaliação, esta deve recair, sobretudo, nas atividades de aprendizagem realizadas em aula, fornecendo feedback aos alunos para corrigirem erros e desenvolverem competências, tornando-os agentes ativos, reflexivos e responsáveis pela sua aprendizagem, na prossecução do desenvolvimento das competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

Algumas tarefas poderão ser pensadas especificamente para a avaliação sumativa, ou seja, para fazer balanços sobre as aprendizagens realizadas, mas devem sempre ter em vista futuras aprendizagens.

Neste tema, devem ser incluídas duas provas de entre as seguintes: realização de um estudo estatístico, ou de um trabalho de pesquisa, ou de um relatório de análise de dados, com apresentação e defesa oral de um dos trabalhos realizados. O professor deve acompanhar e orientar o trabalho dos alunos, em grupo ou individualmente, apresentando propostas de reformulação, se necessário.

PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles.

Antes de redigir o programa na linguagem *Python*, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Exemplo de programa em *Python* que permite calcular a média, a mediana, o máximo e o mínimo das idades de 5 alunos de uma turma:

```
idades=[14,16,14,15,17]
idades.sort()
soma=0
for i in range(5):
    soma=soma+idades[i]
print('Idades:',idades)
print('Media:',soma/5)
print('Mediana:',idades[2])
print('Máximo:',idades[4])
print('Mínimo:',idades[0])
Nota: O programa foi criado em Python IDLE 3.11.0 para computador.
```

Como possível extensão poderá propor-se aos alunos uma generalização do programa de modo que a dimensão da lista possa ser variável. Sugere-se a utilização da função *len()* que permitirá determinar o número de elementos da lista.

Exemplo de programa em *Python* que permita determinar o desvio-padrão e a amplitude de uma lista de idades com um n.º de elementos variável:

```
import math
idades=[14,16,14,15,17,23]
idades.sort()
n=len(idades)
soma=0
for i in range(n):
    soma=soma+idades[i]
media=soma/n
desvios=0
for i in range(n):
    desvios = desvios + (idades[i]-media)**2
desvio_padrao=math.sqrt(desvios/n)
amplitude=idades[n-1]-idades[0]
print('Desvio padrao:', desvio_padrao)
print('Amplitude:', amplitude)
Nota: O programa foi criado em Python IDLE 3.11.0 para computador.
```

POSSÍVEIS APROFUNDAMENTOS

Explorar a utilização de tabelas de contingência (tabelas de dupla entrada) para representar amostras de dados bivariados qualitativos. Ter em consideração que embora se fale de dados qualitativos, eles podem ser resultado da observação de variáveis quantitativas (Exemplo a variável Idade, que é quantitativa contínua, mas em que os dados podem ser apresentados em classes etárias, ou a variável *Tamanho de uma camisola*, que pode ser medida nas categorias XS, S, M, L, XL, 2XL ou 3XL). Considerar as distribuições marginais e as distribuições condicionais e explorar a possível associação entre as variáveis. Utilizar representações gráficas adequadas.

Explorar no contexto da correlação a existência de variáveis “perturbadoras”, exemplificando.

Explorar diferentes tipos de amostragem que conduzam a amostras representativas das populações subjacentes, por oposição a processos que conduzam a amostras enviesadas.

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

ActivAlea - Associação entre variáveis quantitativas. O coeficiente de correlação. Obtido de http://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=272&Itemid=1651&lang=pt.

ActivAlea - Associação entre variáveis qualitativas. Obtido de http://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=270&Itemid=1653&lang=ptwww.alea.pt.

ALEA - Noções de Estatística, obtido de https://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=131&Itemid=1203&lang=pt.

COMAP (2016). *FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.

Correlações espúrias. Obtido de <http://tylervigen.com/spurious-correlations>.

Graça Martins, M. E. et al. (1997). *Estatística*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Graça Martins, M. E. & Cerveira, A. (1998). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Universidade Aberta.

Graça Martins, M. E. & Loura, L. (2002). *Estatística, Modelos de Probabilidade e Introdução à Inferência Estatística* (edição da responsabilidade do DES, Lisboa). Obtido de <https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online>.

Graça Martins, M. E. (2005). *Introdução à Probabilidade e à Estatística, com complementos de Excel*. Sociedade Portuguesa de Estatística.

Grupo de trabalho T3. (1999). *Estatística e calculadoras gráficas*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Martins, H. & Domingos, A. (2018). *Estatística no Secundário com Calculadora Gráfica*. Nova.Fct Editorial.

Moore, D. (2019). *STATISTICS. Concepts and controversies*. New York: W.H.Freeman and Company.

Moore, D. & Fligne, M. A. (2021). *The Basic Practice of Statistics*. New York; W.H.Freeman and Company.

Rossmann, A. & Chance, B. L. (2011). *Workshop Statistics: Discovery with Data*. Hoboken, NJ: Wiley.

MATEMÁTICA | MÓDULO P3

GEOMETRIA ANALÍTICA

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS

Linguagens e textos (A)	Informação e comunicação (B)	Raciocínio e resolução de problemas (C)	Pensamento crítico e pensamento criativo (D)	Relacionamento interpessoal (E)
Desenvolvimento pessoal e autonomia (F)	Bem-estar, saúde e ambiente (G)	Sensibilidade estética e artística (H)	Saber científico, técnico e tecnológico (I)	Consciência e domínio do corpo (J)

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

Conceitos chave | Ideias chave

Referenciais e coordenadas cartesianas no plano e no espaço | Conjuntos de pontos e condições | Equação da reta

O ensino da Geometria reveste-se da maior importância, devendo contribuir para desenvolver no aluno uma intuição geométrica e um raciocínio espacial, assim como capacidades para explorar, conjecturar, raciocinar logicamente, usar e aplicar a Matemática. A lecionação deste módulo deve considerar as aprendizagens realizadas noutras disciplinas, particularmente naquelas onde há trabalho de desenho técnico ou de qualquer tipo de representações geométricas.

TEMAS, TÓPICOS E SUBTÓPICOS MATEMÁTICOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES QUE O ALUNO DEVE REVELAR	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	ÁREAS DE COMPETÊNCIA DO PERFIL DOS ALUNOS
<p>GEOMETRIA ANALÍTICA</p> <p>Geometria analítica no plano</p> <p>Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no plano</p> <p>Coordenadas de pontos num referencial cartesiano</p> <p>Conjuntos de pontos e condições</p> <p>Equação reduzida da reta no plano e a equação $x = x_0$</p>	<p>Identificar coordenadas de pontos do plano num referencial cartesiano ortogonal e monométrico.</p> <p>Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Simetrias de pontos, em relação a retas horizontais, a retas verticais e à origem, através de coordenadas; - Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta. <p>Identificar, analisar e aplicar na resolução de problemas condições que definem conjuntos de pontos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Semiplanos; - Outros conjuntos definidos por conjunções e disjunções em casos simples. <p>Reconhecer, analisar e aplicar, a equação de uma reta, na resolução de problemas.</p>	<p>Propor atividades aos alunos que evidenciem a necessidade do uso de um referencial no plano. Por exemplo: na resolução de um problema, encontrar o referencial mais adequado à figura apresentada.</p> <p>Usar software de geometria dinâmica para explorar, por exemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> - coordenadas de pontos simétricos em relação à origem, aos eixos - coordenadas e a retas paralelas aos eixos coordenados; - condições que definam conjuntos de pontos (incluindo o conjunto vazio). <p>Sugerir a elaboração de um programa em <i>Python</i> para determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta.</p> <p>Promover a resolução de problemas para determinar a equação de uma reta ou as coordenadas do ponto de interseção entre duas retas.</p> <p>Propor problemas de modelação matemática, recorrendo à tecnologia, por exemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> Encontrar a melhor localização para propagadores de sinal de Wifi num local; Encontrar localizações em mapas geográficos (atividades tipo Mapa do Tesouro); Encontrar localizações numa cidade (por exemplo, muitas cidades americanas têm ruas e avenidas numeradas - 17th street, 5th avenue); Escrever a equação da reta que melhor se ajusta a um conjunto de pontos utilizando a regressão linear. 	<p>Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática. (A)</p> <p>Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo. (C)</p> <p>Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição. (D)</p> <p>Desenha, implementa e avalia, com autonomia, estratégias para atingir as metas e desafios que estabelece para si próprio. (F)</p> <p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)</p> <p>Domina a capacidade percetivo-motora (imagem corporal, direcionalidade, afinamento percetivo e estruturação espacial e temporal). (J)</p>
<p>Geometria analítica no espaço</p> <p>Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no espaço</p> <p>Coordenadas de pontos num referencial cartesiano</p>	<p>Identificar coordenadas de pontos do espaço num referencial cartesiano ortonormado e monométrico.</p> <p>Desenvolver a capacidade de visualização no espaço tridimensional.</p> <p>Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas:</p> <ul style="list-style-type: none"> - equações de planos paralelos aos planos coordenados; - equações cartesianas de retas paralelas a um dos eixos. 	<p>Propor atividades aos alunos que evidenciem a necessidade do uso de um referencial no espaço. Por exemplo: na resolução de um problema, encontrar o referencial mais adequado à figura apresentada.</p> <p>Incentivar os alunos a construírem modelos tridimensionais usando materiais simples (cartão, palhinhas, rede, etc.).</p> <p>Estimular os alunos a utilizarem o Geogebra 3D para visualizar, explorar e estabelecer conjeturas, envolvendo geometria no espaço.</p> <p>Orientar os alunos para o reconhecimento de referenciais tridimensionais em contextos reais. Por exemplo: impressoras 3D, culturas hidropónicas, software de CAD/CAM, de SIG, de navegação aérea ou de realidade virtual e aumentada.</p>	<p>Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática. (A)</p> <p>Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo. (C)</p> <p>Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição. (D)</p> <p>Desenha, implementa e avalia, com autonomia, estratégias para atingir as metas e desafios que estabelece para si próprio. (F)</p> <p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)</p> <p>Domina a capacidade percetivo-motora (imagem corporal, direcionalidade, afinamento percetivo e estruturação espacial e temporal). (J)</p>

AVALIAÇÃO

Valorizando o caráter formativo da avaliação, esta deve recair, sobretudo, nas atividades de aprendizagem realizadas em aula, fornecendo feedback aos alunos para corrigirem erros e desenvolverem competências, tornando-os agentes ativos, reflexivos e responsáveis pela sua aprendizagem, na prossecução do desenvolvimento das competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

Algumas tarefas poderão ser pensadas especificamente para a avaliação sumativa, ou seja, para fazer balanços sobre as aprendizagens realizadas, mas devem sempre ter em vista futuras aprendizagens.

Para a avaliação destes alunos, sugere-se que os professores recorram a vários instrumentos (por exemplo: testes, trabalhos, relatórios, composições, apresentações ou participação em debates) que sejam adequados à diversidade das aprendizagens e aos contextos em que ocorrem. Atividades como construção de modelos necessários para a compreensão e representação das situações em estudo e os respetivos relatórios, podem e devem ser valorizados como provas de avaliação.

PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles.

Antes de redigir o programa na linguagem *Python*, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Um exemplo de programa em *Python* pode ser o de determinar coordenadas do ponto médio de um dado segmento de reta.

```
xA=float(input("xA=?"))
yA=float(input("yA=?"))
xB=float(input("xB=?"))
yB=float(input("yB=?"))
xM=(xA+xB)/2
yM=(yA+yB)/2
print("Coordenadas do ponto médio M:")
print("xM= ",xM)
print("yM= ",yM)
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

POSSÍVEIS APROFUNDAMENTOS

Sugerem-se outros temas para ir mais além (ou para aprofundamento):

- Pontos notáveis de um triângulo.
- Resolução de problemas de Olimpíadas de Matemática usando pontos notáveis do triângulo.
- História da Matemática: os primórdios da Geometria Analítica com Descartes e Fermat.
- Ideias para resolução de problemas em Geometria.
- Papel da demonstração em Matemática.

Eis algumas ideias para composições matemáticas: A Geometria na “República” de Platão, a Geometria dos ORIGAMI, a Geometria dos templos japoneses.

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

Cássio, J. (2019). *Aprendendo Geometria Plana com a Plataforma GeoGebra*. Obtido de <https://www.geogebra.org/m/hsXHDX7>

Khan Academy. Geometria Analítica. Obtido de <https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/analytic-geometry-topic>

Loureiro, C. *et al.* (1997). *Geometria 10º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Loureiro, C. *et al.* (1998). *Geometria 11º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Sebastião e Silva, J. (1970). *Geometria Analítica Plana*. Lisboa: Empresa Literária Fluminense.

Veloso, E. (1998). *Geometria - Temas atuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

MATEMÁTICA | MÓDULO P4

FUNÇÕES

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS

Linguagens e textos (A)	Informação e comunicação (B)	Raciocínio e resolução de problemas (C)	Pensamento crítico e pensamento criativo (D)	Relacionamento interpessoal (E)
Desenvolvimento pessoal e autonomia (F)	Bem-estar, saúde e ambiente (G)	Sensibilidade estética e artística (H)	Saber científico, técnico e tecnológico (I)	Consciência e domínio do corpo (J)

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

Conceitos chave | Ideias chave

Generalidades sobre funções | Função quadrática | Função cúbica | Funções inversas | Funções com radicais | Modelação com funções

O conceito de função é uma ideia importante e unificadora em Matemática por ser uma representação de muitas situações reais. Os conhecimentos sobre funções que os alunos trazem de ciclos anteriores vão ser ampliados com o estudo das funções quadráticas e das funções com radicais quadráticos e cúbicos, recorrendo essencialmente a trabalho com a calculadora gráfica, o computador e o telemóvel inteligente, tomando contacto com algumas das suas propriedades, de modo a ficarem capazes de escolher, para cada situação concreta, o modelo de função mais adequado, devendo privilegiar-se o trabalho intuitivo com funções que relacionem variáveis ligadas às áreas de interesse profissional dos alunos.

TEMAS, TÓPICOS E SUBTÓPICOS MATEMÁTICOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES QUE O ALUNO DEVE REVELAR	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	ÁREAS DE COMPETÊNCIA DO PERFIL DOS ALUNOS
<p>FUNÇÕES</p> <p>Generalidades acerca de funções</p>	<p>Identificar gráfico e a representação gráfica de uma função; usar o teste da reta vertical.</p> <p>Determinar o domínio e o contradomínio de funções definidas em intervalos reais ou união finita de intervalos reais.</p> <p>Determinar pontos notáveis tendo por base a representação gráfica de funções (interseções com os eixos coordenados, extremidades dos intervalos do domínio, máximos e mínimos).</p> <p>Construir tabelas de variação de sinal e de monotonia.</p>	<p>Tirar partido da utilização da tecnologia (calculadora gráfica, folhas de cálculo, aplicações interativas, ou outras), nomeadamente para resolver problemas, explorar, investigar e comunicar.</p> <p>Usar exemplos com significado para os alunos, quando possível.</p> <p>Fomentar a interpretação da informação em situações do quotidiano (tabelas, gráficos, textos) e analisar criticamente dados, informações e resultados obtidos.</p>	<p>Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática. (A)</p> <p>Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo. (C)</p>
<p>Funções Polinomiais</p> <p>Funções polinomiais de grau não superior a 3</p>	<p>Estudar intuitivamente propriedades (domínio, contradomínio, pontos notáveis, monotonia e extremos) de uma função polinomial de grau não superior a 3.</p> <p>Conhecer a fórmula resolvente para resolver equações do 2.º grau.</p> <p>Interpretar e prever as alterações no gráfico de uma função $-f(x)$, $f(x)+a$ e $f(x+b)$, com $a, b \in R$ a partir do gráfico de uma função $f(x)$, e descrever o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas.</p>	<p>Promover a comunicação, utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar e justificar procedimentos, raciocínios e conclusões.</p> <p>Dinamizar a resolução de problemas, em contexto real, para calcular os zeros de uma equação de 2.º grau, aplicando a fórmula resolvente.</p> <p>Sugerir a elaboração de um programa em <i>Python</i> para determinação das soluções de uma equação quadrática.</p> <p>Conduzir os alunos a interpretar e prever as alterações no gráfico de uma função $-f(x)$, $f(x)+a$ e $f(x+b)$, a partir do gráfico de uma função $f(x)$, e descrever o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas.</p>	<p>Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição. (D)</p> <p>Desenha, implementa e avalia, com autonomia, estratégias para atingir as metas e desafios que estabelece para si próprio. (F)</p> <p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)</p>
<p>Funções Inversas</p> <p>Generalidades</p> <p>Função raiz quadrada e raiz cúbica</p>	<p>Identificar funções invertíveis e não invertíveis: usar o “teste da reta horizontal”.</p> <p>Conhecer e interpretar a relação entre o domínio e contradomínio de funções inversas e a simetria das suas representações gráficas relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares.</p> <p>Estudar intuitivamente, com auxílio da tecnologia gráfica, o comportamento de funções com radicais quadráticos e radicais cúbicos.</p> <p>Utilizar métodos gráficos para resolver equações e inequações, no contexto da resolução de problemas.</p>	<p>Tirar partido da utilização da tecnologia (calculadora gráfica, folhas de cálculo, aplicações interativas, ou outras) para estudar funções invertíveis e comparar gráficos de funções e das suas inversas.</p> <p>Propor o estudo de modelos simples de funções definidas por um radical quadrático ou por um radical cúbico, a partir da compreensão das relações numéricas entre duas variáveis que verificam uma relação de dependência quadrática ou cúbica.</p>	<p>Domina a capacidade percetivo-motora (imagem corporal, direcionalidade, afinamento percetivo e estruturação espacial e temporal). (J)</p>
<p>Modelação com funções</p>	<p>Resolver problemas simples de modelação matemática, no contexto da vida real, que envolvam funções polinomiais e funções com radicais quadráticos e cúbicos.</p>	<p>Criar condições de aprendizagem para que os alunos, em experiências individuais e colaborativas, tenham oportunidade de resolver problemas e atividades de modelação ou desenvolver projetos, com ênfase especial no trabalho em grupo.</p>	

AVALIAÇÃO

Valorizando o caráter formativo da avaliação, esta deve recair, sobretudo, nas atividades de aprendizagem realizadas em aula, fornecendo feedback aos alunos para corrigirem erros e desenvolverem competências, tornando-os agentes ativos, reflexivos e responsáveis pela sua aprendizagem, na prossecução do desenvolvimento das competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

Algumas tarefas poderão ser pensadas especificamente para a avaliação sumativa, ou seja, para fazer balanços sobre as aprendizagens realizadas, mas devem sempre ter em vista futuras aprendizagens.

Devem ser usadas diferentes estratégias e instrumentos de avaliação, tais como resolução de fichas de trabalho, testes escritos em duas fases, apresentações orais, relatórios, resolução de um problema, situação de modelação ou de projeto, que devem integrar um portefólio do módulo ou da disciplina.

Neste módulo, devem ser incluídas duas provas de entre as seguintes: um teste escrito, uma apresentação oral de um problema, escolhido pelo aluno de entre os que realizou durante a aprendizagem do módulo, e uma apresentação oral ou escrita de uma situação de modelação matemática, recorrendo a um de três tipos de exemplos (recolha de dados por meio de sensores, exemplos de outras disciplinas que os alunos frequentemente, recortes de jornais). O professor deve acompanhar de forma especial estas duas últimas provas (orientando o trabalho do aluno e apresentando propostas de reformulação se necessário).

PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles.

Antes de redigir o programa na linguagem *Python*, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Exemplo de programa em *Python* para determinar as soluções de uma equação do 2.º grau:

```
import math
a=2
b=1
c=-3
delta=b**2-4*a*c
if delta<0:
    print("Não tem soluções")
elif delta==0:
    x1=(-b-math.sqrt(delta))/(2*a)
    print('Tem só uma solução: ',x1)
else:
    x1=(-b-math.sqrt(delta))/(2*a)
    x2=(-b+math.sqrt(delta))/(2*a)
    print('Tem 2 soluções: ',x1,' e ',x2)
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0

POSSÍVEIS APROFUNDAMENTOS

Caracterizar o gráfico de uma função quadrática como sendo o conjunto de pontos a igual distância de um ponto (foco) e de uma reta (diretriz).

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

Caraça, B. J. (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva.

Copérnico, N. (2014). *A revolução das orbes celestes*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Estrada, M. F. et al. (2000). *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Guichard, J. P. (1986). *História da Matemática no ensino da Matemática*. in Bouvier, A. (coord), *Didactique des Mathématiques*, Cedic/Nathan,1986 (Adaptação livre de Arsélio Martins). Obtido de <https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/mhist.html>

Grupo de Trabalho T3 (2011). *Funções no 3.º Ciclo com Tecnologia*. Lisboa: APM.

Icart, J (2021). *Fonctions: Une Perspective Historique*. Revue MathémaTICE, nº 75, maio 2021. Obtido de <http://revue.sesamath.net/spip.php?article1414>

SESAMATH (2019). *Manuel MATHS première*. Magnard. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1spe_2019

Teixeira, P. et al. (1997). *Funções - 10º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

Teixeira, P. et al. (1998). *Funções - 11º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

MATEMÁTICA | MÓDULO P5

PROBABILIDADE

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS				
Linguagens e textos (A)	Informação e comunicação (B)	Raciocínio e resolução de problemas (C)	Pensamento crítico e pensamento criativo (D)	Relacionamento interpessoal (E)
Desenvolvimento pessoal e autonomia (F)	Bem-estar, saúde e ambiente (G)	Sensibilidade estética e artística (H)	Saber científico, técnico e tecnológico (I)	Consciência e domínio do corpo (J)

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

Conceitos chave | Ideias chave

Fenómeno aleatório | Modelo de probabilidade | Probabilidade | Modelo Normal

A modelação de fenómenos que, não sendo passíveis de ser descritos por leis determinísticas, encontram nos modelos de probabilidade uma boa alternativa à sua descrição, é a principal motivação para a organização dos conteúdos programáticos deste módulo.

Recorrendo ao argumento de simetria facilmente se introduzem modelos muito simples que irão permitir uma primeira abordagem à noção de acontecimento e a apresentação da Regra de Laplace e seguidamente à apresentação formal de modelo de probabilidade e à de probabilidade condicional. Dada a sua relevância, inclui-se também neste módulo de Probabilidade, um breve estudo do modelo Normal.

TEMAS, TÓPICOS E SUBTÓPICOS MATEMÁTICOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES QUE O ALUNO DEVE REVELAR	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	ÁREAS DE COMPETÊNCIA DO PERFIL DOS ALUNOS
<p>PROBABILIDADE</p> <p>Fenómeno aleatório</p> <p>Experiência aleatória</p> <p>Espaço de resultados ou espaço amostral</p> <p>Modelo de probabilidade Acontecimentos</p> <p>União e interseção de acontecimentos</p>	<p>Distinguir entre fenómeno aleatório e não aleatório (determinístico).</p> <p>Compreender que as realizações individuais de um fenómeno aleatório são incertas, mas existe um padrão genérico de comportamento, recorrendo-se à Teoria da Probabilidade para construir modelos matemáticos que descrevam a regularidade estatística observada numa longa série de repetições do fenómeno.</p> <p>Compreender que:</p> <ul style="list-style-type: none"> - À realização de um fenómeno aleatório se dá o nome de experiência aleatória; - Ao conjunto S dos resultados possíveis se dá o nome de espaço de resultados ou espaço amostral; - Um acontecimento é um subconjunto do espaço de resultados e que a estes resultados se dá o nome de “resultados favoráveis” à realização do acontecimento; - A descrição do fenómeno aleatório é feita através de um modelo de probabilidade, constituído pelos resultados possíveis e a probabilidade atribuída a cada resultado. <p>Relembrar os conceitos: acontecimento certo, impossível, elementar e composto; acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos; acontecimentos contrários ou complementares; união e interseção de acontecimentos.</p>	<p>Recorrer a situações em contextos variados, para sensibilizar os alunos para a existência destes fenómenos, nomeadamente através de exemplos de fenómenos físicos, com leis determinísticas (movimento de um carro; queda de uma maçã do alto de uma torre) e de exemplos de fenómenos que se podem considerar aleatórios pela dificuldade em arranjar uma lei física para os descrever (número de irmãos de um aluno da escola, escolhido ao acaso; face do dado que fica virada para cima quando se lança; temperatura máxima a observar numa data futura).</p> <p>Salientar que os modelos de probabilidade são modelos matemáticos que descrevem os fenómenos aleatórios.</p> <p>Realçar que para construir um modelo de probabilidade tem de se arranjar um processo que permita atribuir probabilidades aos acontecimentos elementares.</p>	<p>Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A)</p> <p>Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C)</p> <p>Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)</p> <p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)</p>
<p>Probabilidade</p> <p>Probabilidade frequentista</p> <p>Regras da probabilidade</p> <p>Probabilidade da união de acontecimentos</p> <p>Regra de Laplace</p>	<p>Compreender que a característica do fenómeno aleatório permite definir, intuitivamente, a probabilidade de um acontecimento A, representada por P(A), como sendo o valor para o qual estabiliza a frequência relativa da realização de A, num grande número de repetições da experiência aleatória, nas mesmas condições, ou seja, P(A) é o valor em que estabiliza $\frac{n_A}{n}$, onde n_A representa o número de vezes que se realizou A em n repetições da experiência aleatória.</p> <p>Reconhecer que as probabilidades associadas aos acontecimentos elementares têm de ser números entre 0 e 1 e que a soma total deve ser 1.</p> <p>Reconhecer que a probabilidade de um acontecimento é igual à soma das probabilidades dos acontecimentos elementares constituídos pelos resultados que o compõem.</p> <p>Utilizar a representação dos acontecimentos em diagramas de Venn, para mostrar que, dados dois acontecimentos A e B quaisquer, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.</p> <p>Reconhecer que se admite que os acontecimentos elementares são equiprováveis quando não haja à partida razão para admitir que os resultados do espaço de resultados não tenham igual possibilidade de se verificarem.</p> <p>Compreender que quando se puder admitir que os acontecimentos elementares são equiprováveis, se pode utilizar a regra de Laplace para determinar a probabilidade de um acontecimento A, com o seguinte enunciado:</p> $\text{Probabilidade de } A = \frac{\text{Número de resultados favoráveis a } A}{\text{Número de resultados possíveis}}$	<p>Iniciar o estudo deste tema com modelos de probabilidade simples, com espaços de resultados finitos, nomeadamente os que descrevem os chamados “jogos de sorte e azar”. Por exemplo, intuitivamente, espera-se que ao fim de muitas repetições do lançamento do dado, cada uma das faces saia aproximadamente 16,6(6)% das vezes. Alguns acontecimentos, associados com esta experiência, são: “sair uma face com um nº de pintas par”, “sair uma face com um nº de pintas maior ou igual a 5”, “sair uma face com um nº de pintas maior que 6”, etc.</p> <p>Sugerir a elaboração de um programa em <i>Python</i> para simular o lançamento de um dado numerado com n faces (4, 6, 8, 12, 20).</p> <p>Propor a resolução de problemas que envolvam o cálculo de probabilidades recorrendo à regra de Laplace, evitando o uso excessivo de técnicas de contagem.</p> <p>Realçar que uma vez definido o modelo de probabilidade se pode calcular a probabilidade de qualquer acontecimento associado ao fenómeno em estudo.</p> <p>Alertar os alunos para o facto de que na vida real as situações mais frequentes são aquelas em que não é possível recorrer à regra de Laplace para calcular a probabilidade de acontecimentos, por exemplo: o tipo sanguíneo de uma pessoa escolhida ao acaso, de entre a população portuguesa, ou a eficácia de uma vacina.</p>	<p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)</p>

<p>Probabilidade condicionada</p> <p>Definição</p> <p>Regra do produto</p> <p>Árvore de probabilidade</p> <p>Tabelas de contingência</p> <p>Acontecimentos independentes</p>	<p>Saber que a probabilidade de um acontecimento A se realizar, condicionada ou sabendo que o acontecimento B se realizou, com $P(B) > 0$, se representa por $P(A B)$ e se calcula de acordo com a seguinte fórmula:</p> $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ <p>Reconhecer que a partir da definição de probabilidade condicionada se pode definir a probabilidade simultânea de dois acontecimentos, chamada regra do produto, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B A)$ ou $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A B)$ conforme seja A ou B o acontecimento que está a condicionar.</p> <p>Reconhecer a utilidade de árvores de probabilidade para organizar a informação disponível sobre os acontecimentos em cadeia.</p> <p>Reconhecer a utilidade das tabelas de contingência para calcular a probabilidade condicionada.</p> <p>Identificar que os acontecimentos A e B, com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, são independentes quando a ocorrência de um deles não altera a probabilidade da ocorrência do outro, ou seja, $P(A B) = P(A)$ (A independente de B) e $P(B A) = P(B)$ (B independente de A).</p> <p>Reconhecer que outra definição de independência consiste em dizer que os acontecimentos A e B são independentes se e só se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. As duas definições de independência são equivalentes desde que se exija que $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$.</p>	<p>Conduzir os alunos a reconhecerem que em muitas situações em que se pretende calcular a probabilidade de um acontecimento, já se dispõe de alguma informação sobre o resultado da experiência, a qual permite atualizar a atribuição de probabilidade a esse acontecimento.</p> <p>Exemplificar com situações intuitivas, como a extração de bolas, de vários tipos, de uma caixa sucessivamente, sem reposição, em que a composição da caixa se altera, implicando que a probabilidade de se retirar uma bola depende dos tipos de bolas que saíram nas extrações anteriores</p> <p>Pedir aos alunos que calculem a probabilidade de ocorrência de cadeias simples de acontecimentos, utilizando árvores de probabilidade, como forma de organização da informação disponível.</p> <p>Salientar que uma das situações mais simples para compreender intuitivamente o conceito de independência de acontecimentos está ligada à situação do lançamento de uma moeda. A moeda “não tem memória” e a probabilidade de sair “face nacional” no próximo lançamento não depende do que saiu nos lançamentos anteriores. Porém, no acontecimento “selecionar o nome de dois alunos do sexo masculino” de uma turma com 14 rapazes e 16 raparigas, a probabilidade de selecionar o segundo rapaz, depende da escolha do primeiro aluno (seleção sem reposição).</p> <p>Promover a resolução de problemas em que se obtenha a probabilidade de um certo acontecimento B, quando são conhecidas as probabilidades de B condicionadas aos acontecimentos (A_1, A_2, \dots, A_n), mutuamente exclusivos em que a sua união é igual ao espaço de resultados e são conhecidas as suas probabilidades, não nulas, utilizando:</p> $P(B) = P(B A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B A_n) \cdot P(A_n)$	
--	---	--	--

AVALIAÇÃO

Valorizando o caráter formativo da avaliação, esta deve recair, sobretudo, nas atividades de aprendizagem realizadas em aula, fornecendo feedback aos alunos para corrigirem erros e desenvolverem competências, tornando-os agentes ativos, reflexivos e responsáveis pela sua aprendizagem, na prossecução do desenvolvimento das competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

Algumas tarefas poderão ser pensadas especificamente para a avaliação sumativa, ou seja, para fazer balanços sobre as aprendizagens realizadas, mas devem sempre ter em vista futuras aprendizagens.

Neste tema, deve ser incluída uma prova de entre as seguintes: realização de um problema de modelação recorrendo a modelos de probabilidade, ou de um trabalho de pesquisa, com apresentação e defesa oral de um dos trabalhos realizados. O professor deve acompanhar e orientar o trabalho do aluno, apresentando propostas de reformulação, se necessário.

PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles. O reconhecimento de padrões na tarefa (ou situação) apresentada ou em problemas semelhantes, anteriormente resolvidos, poderá contribuir para facilitar a estruturação do algoritmo a desenvolver.

Antes de redigir o programa na linguagem *Python*, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Exemplo de programa em *Python* para simular lançamentos de 1 dado cúbico, numerado de 1 a 6, e o registo das frequências relativas referentes à saída de cada face:

```
import random
n=int(input("Quantos lançamentos queres simular?"))
f=[0 for k in range(6)]
for i in range(n):
    r=random.randint(1,6)
    f[r-1]=f[r-1]+1

for k in range(6):
    print("Freq. relativa da saída da face",k+1,"=",f[k]/n)
```

Nota: O programa foi criado em Python IDLE 3.11.0 para computador.

Como possíveis alterações a este programa sugere-se a variação do número de faces.

POSSÍVEIS APROFUNDAMENTOS

Nada se sugere atendendo à variedade de temas tratados.

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

COMAP (2016). *FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.

Graça Martins, M. E. *et al.* (1999). *Probabilidades e Combinatória*. Lisboa: Ministério da Educação/Departamento do Ensino Secundário.

Graça Martins, M. E. (2005). *Introdução à Probabilidade e à Estatística, com complementos de Excel*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística.

Graça Martins, M. E., & Loura, L. (2002). *Estatística, Modelos de Probabilidade e Introdução à Inferência Estatística* (edição da responsabilidade do DES, Lisboa). Obtido de <https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online>.

Graça Martins, M. E., & Cerveira, A. (1998). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Lisboa: Universidade Aberta.

Noções de Probabilidade. Obtido de http://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=132&Itemid=1204&lang=pt.

MATEMÁTICA | MÓDULO P6

TAXA DE VARIAÇÃO E OTIMIZAÇÃO

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS				
Linguagens e textos (A)	Informação e comunicação (B)	Raciocínio e resolução de problemas (C)	Pensamento crítico e pensamento criativo (D)	Relacionamento interpessoal (E)
Desenvolvimento pessoal e autonomia (F)	Bem-estar, saúde e ambiente (G)	Sensibilidade estética e artística (H)	Saber científico, técnico e tecnológico (I)	Consciência e domínio do corpo (J)

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

Conceitos chave | Ideias chave

Taxa de variação média | Taxa de variação num ponto | Taxas de variação de uma função | Otimização

Com vista a dar resposta a algumas situações que exigem o estudo de comportamentos em intervalos, mais ou menos amplos, de modelos de funções, os alunos encontrarão nas taxas de variação sugestões das funções estudadas em módulos anteriores (funções lineares, afins, polinomiais e/ou com radicais quadráticos e cúbicos).

Através do uso de gráficos e de cálculos numéricos, com o recurso à calculadora gráfica, o aluno obterá indicações seguras de variação e de taxas de variação.

Noutras situações, os alunos resolveram problemas de otimização, estimando ou calculando extremos de funções (em tabelas e representações gráficas das funções), tomaram igualmente contacto com a taxa média de variação e a taxa de variação instantânea, interpretando geometricamente estes conceitos.

TEMAS, TÓPICOS E SUBTÓPICOS MATEMÁTICOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES QUE O ALUNO DEVE REVELAR	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	ÁREAS DE COMPETÊNCIA DO PERFIL DOS ALUNOS
<p>TAXA DE VARIAÇÃO E OTIMIZAÇÃO</p> <p>Taxa de Variação</p> <p>Cálculo e interpretação da variação e da taxa de variação</p>	<p>Calcular e interpretar a variação entre dois pontos do domínio de uma dada função.</p> <p>Calcular a taxa média de variação entre dois pontos do domínio de uma função e interpretar geometricamente o valor obtido.</p> <p>Calcular, através da observação da representação gráfica, a taxa média de variação entre dois pontos do domínio de uma função.</p> <p>Calcular numericamente e interpretar em termos geométricos a taxa de variação instantânea.</p> <p>Reconhecer, numérica e graficamente, a relação entre o sinal da taxa de variação e a monotonia de uma função.</p>	<p>Tirar partido da utilização da tecnologia (calculadora gráfica, programas de geometria dinâmica como o <i>Geogebra</i>, folhas de cálculo, aplicações interativas, ou outras), para calcular numericamente a variação e a taxa média de variação entre dois pontos e a taxa instantânea de variação num ponto.</p> <p>Promover o cálculo numérico da taxa de variação instantânea, através do algoritmo da calculadora gráfica que aproxima a taxa de variação instantânea pela taxa média de variação num intervalo tão pequeno quanto possível (e esclarecer o aluno das vantagens e inconvenientes de tal processo).</p> <p>Propor a utilização do gráfico da taxa de variação instantânea gerado com recurso à tecnologia, para obter um valor específico no domínio da função.</p> <p>Promover a interpretação das relações entre as taxas de variação (média e instantânea) e o crescimento, com recurso a exemplos reais da Física, da Demografia e da Economia; ou recorrendo, ainda, a recortes de jornais; recolhas na internet; dados obtidos em experiências com sensores.</p> <p>Sugerir a elaboração de um programa em <i>Python</i> para determinação da taxa de variação instantânea de uma função polinomial de grau 3.</p>	<p>Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática. (A)</p> <p>Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avalia, valida e organiza a informação recolhida. (B)</p> <p>Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas. (C)</p> <p>Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade. (D)</p>
<p>Otimização</p> <p>Resolução de problemas envolvendo taxas de variação</p>	<p>Estudar gráfica e numericamente a monotonia de funções, recorrendo ao gráfico da função e ao gráfico da taxa de variação.</p> <p>Reconhecer, numérica e graficamente, a relação entre os zeros da taxa de variação e os extremos de uma função.</p> <p>Resolver problemas que envolvam a determinação de extremos de funções no contexto da vida real.</p> <p>Resolver problemas simples de modelação matemática.</p> <p>Perceber a importância do processo de modelação matemática na sociedade atual.</p>	<p>Promover a utilização do gráfico da taxa de variação instantânea, produzido com recurso à tecnologia, para efetuar tabelas de sinais e extrapolar a variação da monotonia de uma função.</p> <p>Promover a análise de situações com contexto real, por exemplo, determinar as dimensões ótimas de pacotes de leite com a forma de prismas quadrangulares com uma determinada capacidade, ou situações que permitam a determinação de distâncias mínimas entre dois pontos.</p> <p>Criar condições de aprendizagem para que os alunos, em experiências individuais e colaborativas, tenham oportunidade de resolver problemas e atividades de modelação ou desenvolver projetos, com ênfase especial no trabalho em grupo, que mobilizem conhecimentos adquiridos, fomentem novas aprendizagens e permitam a articulação com outras disciplinas.</p>	<p>Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos. (E)</p>

AVALIAÇÃO

Valorizando o caráter formativo da avaliação, esta deve recair, sobretudo, nas atividades de aprendizagem realizadas em aula, fornecendo feedback aos alunos para corrigirem erros e desenvolverem competências, tornando-os agentes ativos, reflexivos e responsáveis pela sua aprendizagem, na prossecução do desenvolvimento das competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

Algumas tarefas poderão ser pensadas especificamente para a avaliação sumativa, ou seja, para fazer balanços sobre as aprendizagens realizadas, mas devem sempre ter em vista futuras aprendizagens.

Devem ser usadas diferentes estratégias e instrumentos de avaliação, tais como resolução de fichas de trabalho, testes escritos em duas fases, apresentações orais, relatórios, resolução de um problema, situação de modelação ou de projeto, que devem integrar um portefólio do módulo ou da disciplina.

Neste módulo, devem ser incluídas duas provas de entre as seguintes: um teste escrito, uma apresentação oral de um problema - escolhido pelo aluno de entre os que realizou durante a aprendizagem do módulo - e uma apresentação oral ou escrita de uma situação de modelação matemática, recorrendo a um de três tipos de exemplos (recolha de dados por meio de sensores, exemplos de outras disciplinas que os alunos frequentem, recortes de jornais). O professor deve acompanhar de forma especial estas duas últimas provas (orientando o trabalho do aluno e apresentando propostas de reformulação se necessário).

PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles.

Antes de redigir o programa na linguagem *Python*, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Neste módulo podem ser usados vários tipos de programas em *Python* para calcular taxas médias e instantâneas de variação, de forma aproximada. Também se pode pedir ao aluno que interprete o que faz este programa e depois que o interprete no contexto do estudo deste módulo.

Exemplo de programa em *Python* para determinar uma aproximação da variação instantânea de uma função do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d$ num dado ponto:

```
a=-2
b=3.5
c=1
d=0
x=0.2
fx=a*x**3+b*x**2+c*x+d
h=10**(-5)
x=x+h
fxh=a*x**3+b*x**2+c*x+d
d=(fxh-fx)/h
print(d)
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0

Exemplo de programa em *Python* para determinar uma aproximação da variação instantânea de uma função do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d$ num dado ponto, com recurso a funções:

```
print("Introduza os parâmetros de uma função do tipo ax^3+bx^2+cx+d")
a=float(input("a = "))
b=float(input("b = "))
c=float(input("c = "))
d=float(input("d = "))

def f(x):
    y=a*x**3+b*x**2+c*x+d
    return y

h=10**-5
x=float(input("Calcular uma aproximação da derivada da função no ponto x = "))
d=(f(x+h)-f(x))/h
print(d)
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0

POSSÍVEIS APROFUNDAMENTOS

Caso haja tempo disponível e os alunos se mostrem interessados, poderá ser abordada a concavidade para aprofundar o estudo das funções.

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

Academia Khan. Taxa média de variação e taxa instantânea de variação. Obtido de <https://pt-pt.khanacademy.org/math/11ano/xec1aeb6fd449d293:funcoes-reais-de-variavel-real#xec1aeb6fd449d293:taxa-media-de-variacao-e-taxa-de-variacao-instantanea>

Grupo de Trabalho T3 (2011). *Funções no 3.º Ciclo com Tecnologia*. Lisboa: APM.

Teixeira, P. *et al.* (1997). *Funções - 10º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

Teixeira, P. *et al.* (1998). *Funções - 11º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

Teixeira, P. *et al.* (1999). *Funções - 12º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

SESAMATH (2019). Manuel MATHS première. Magnard. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1spe_2019.

WihHow. *Como Encontrar a Taxa Média de Variação*. Obtido de <https://pt.wikihow.com/Encontrar-a-Taxa-M%C3%A9dia-de-Varia%C3%A7%C3%A3o>.

MATEMÁTICA | MÓDULO OP1

JOGOS E MATEMÁTICA

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS				
Linguagens e textos (A)	Informação e comunicação (B)	Raciocínio e resolução de problemas (C)	Pensamento crítico e pensamento criativo (D)	Relacionamento interpessoal (E)
Desenvolvimento pessoal e autonomia (F)	Bem-estar, saúde e ambiente (G)	Sensibilidade estética e artística (H)	Saber científico, técnico e tecnológico (I)	Consciência e domínio do corpo (J)

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

Conceitos chave | Ideias chave

Jogos Matemáticos | Estratégias ganhadoras

Neste módulo de Jogos e Matemática, pretende-se que os alunos aprendam a jogar alguns quebra-cabeças e jogos de raciocínio de diferentes tipos; aprendam a analisar alguns jogos e situações simplificadas dos jogos estudados; percebam como a matemática pode ajudar a explicar ou garantir estratégias ganhadoras para alguns jogos.

As atividades ligadas aos jogos assumem assim o papel de atividades estimuladoras de raciocínio matemático ao mesmo tempo que possuem uma característica recreativa cuja origem se perde nos tempos.

TEMAS, TÓPICOS E SUBTÓPICOS MATEMÁTICOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES QUE O ALUNO DEVE REVELAR	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	ÁREAS DE COMPETÊNCIA DO PERFIL DOS ALUNOS
<p>JOGOS E MATEMÁTICA</p> <p>Introdução histórica: motivação</p> <p>Experiência de alguns tipos de jogos de raciocínio</p>	<p>Conhecer jogos e quebra-cabeças históricos.</p> <p>Conhecer alguns quebra cabeças e jogos de raciocínio de diferentes tipos:</p> <p>Quebra cabeças; Truques de cartas; Jogos numéricos; Jogos geométricos; Jogos de tabuleiro para um jogador; Jogos de tabuleiro e/ou estratégia para dois jogadores; Jogos para mais de dois jogadores. Isometrias.</p> <p>Aprender a jogar alguns dos quebra cabeças e jogos acima referidos.</p>	<p>Apresentar exemplos antigos (jogo Senet dos egípcios, os Quebra-cabeças de Alcuíno de Iorque, Stomachion de Arquimedes, etc.).</p> <p>Apresentar aos alunos ou fomentar a pesquisa dos seguintes tipos de jogos, com o objetivo de serem escolhidos no máximo 5 por turma, de acordo com o curso profissional (pelo menos um dos jogos deve ser para mais de um jogador):</p> <p>Quebra cabeças. Por exemplo: quebras cabeças com palitos; jogo do 15; tangram; Stomachion; poliminós; quadrados mágicos; quebra cabeças de Sam Loyd; Enigma de Einstein; Sokodan, etc...</p> <p>Truques de cartas. Por exemplo: Azeite e água; 4 Ases; etc...</p> <p>Jogos geométricos. Por exemplo: Arbusto; Jogo do Caos; 3 em linha; jogos poliédricos; Pontos e quadrados, etc.</p> <p>Jogos numéricos. Por exemplo: Sudoku; Jogo do Nim; Jogo do Penim; Trinca-Espinhas; Jogo do 24; etc.</p> <p>Jogos de Tabuleiro para um jogador. Por exemplo: solitário; rã saltitante; jogo da vida; etc.</p> <p>Jogos de Tabuleiro e/ou estratégia para dois jogadores: jogo do galo; Mancala/Ouri/Bantumi; Hex; Peões; Amazonas; Damas; Xadrez; Alquerque; Rastros; Gatos e Cães; Yoté; Avanço; Produto; Pentalfa; Semáforo; Sesqui; Flume; Hexiamante; Meta; etc.</p> <p>Jogos para mais de 2 jogadores. Por exemplo: Tantrix; etc.</p> <p>Isometrias. Por exemplo; Azumetria, etc.</p> <p>Incentivar a aprender a jogar quebra-cabeças ou jogos pesquisados e escolhidos (pelo menos um deles deve ser para mais de um jogador). Por exemplo: cada turma deve escolher no máximo 5 dos exemplos apresentados ou pesquisados e devem organizar-se em pares ou grupos para aprenderem a jogar, discutirem as regras e saberem a história do jogo.</p>	<p>Apresenta e explica conceitos em grupos, ideias e projetos diante de audiências reais, presencialmente ou a distância. (B)</p> <p>Resolve problemas de natureza relacional de forma pacífica, com empatia e com sentido crítico. (E)</p> <p>Domina a capacidade perceptivo-motora (imagem corporal, direcionalidade, afinamento perceptivo e estruturação espacial e temporal). (J)</p>
<p>Análise de alguns dos jogos escolhidos</p> <p>Justificações numéricas e algébricas de alguns jogos estudados</p>	<p>Analisar se e como algumas situações de jogos podem conduzir à vitória ou à derrota.</p> <p>Analisar algumas situações ganhadoras e justificar de que são ganhadoras.</p> <p>Provar que um jogador tem vantagem ou que existe uma estratégia ganhadora.</p> <p>Justificar numericamente ou algebricamente situações de alguns jogos escolhidos e estudados.</p>	<p>Promover e incentivar, após conhecimento das regras de cada jogo escolhido:</p> <p>A análise de várias situações que permitam compreender como podem chegar à vitória ou derrota e respetivas justificações. Por exemplo: campeonato na turma. A prova que um jogador pode ter vantagem ou então que existe uma estratégia ganhadora.</p> <p>A análise de várias configurações, através de experiências com jogos que estejam disponíveis em linha na internet.</p> <p>Por exemplo: os alunos podem organizar-se em pares ou grupos para discutirem e analisarem as várias situações.</p> <p>Incentivar, a partir da comunicação matemática, a apresentação de justificações numéricas ou algébricas dos jogos escolhidos pelos vários grupos da turma. Por exemplo: apresentar oralmente o jogo escolhido, regras, análise de situações de estratégia e respetivas justificações numéricas ou algébricas de acordo com o jogo estudado. Por exemplo: justificações numéricas- numeração binária para o jogo do Nim; números primos do Trinca Espinhas; justificações de Truques de Cartas. justificações algébricas - Jogo do 15; rã saltitante.</p>	

AVALIAÇÃO

Valorizando o caráter formativo da avaliação, esta deve recair, sobretudo, nas atividades de aprendizagem realizadas em aula, fornecendo feedback aos alunos para corrigirem erros e desenvolverem competências, tornando-os agentes ativos, reflexivos e responsáveis pela sua aprendizagem, na prossecução do desenvolvimento das competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

Algumas tarefas poderão ser pensadas especificamente para a avaliação sumativa, ou seja, para fazer balanços sobre as aprendizagens realizadas, mas devem sempre ter em vista futuras aprendizagens.

Neste módulo em particular e dado que as características e especificidades de cada curso profissional podem conduzir a escolhas diferentes tendo em conta o público alvo, é recomendado que a avaliação incida sobre um trabalho projeto que contemple todas as fases de um jogo: pesquisa e conhecimento acerca do jogo e respetivas regras; análise, discussão e apresentação de estratégias ganhadoras, situações que conduzam à derrota ou vitória, situações de vantagem e respetivas justificações, culminando, se possível, com a organização de um campeonato inter turmas. Desse projeto deve fazer parte um relatório escrito e uma apresentação oral do jogo escolhido.

PENSAMENTO COMPUTACIONAL

O pensamento computacional é desenvolvido tanto construindo algoritmos como tentando perceber quais os algoritmos que são usados por diversos programas já construídos. Pode-se propor aos alunos que reflitam sobre como o jogo Ouri (e suas variantes) é implementado, isto é, que algoritmo é usado em jogos online, em que se joga contra o computador:

- Ouri e o desenvolvimento do do pensamento matemático: <http://ouri.ccems.pt/jogo/Ouri.htm>.
- Regras do jogo Ouri: <http://www.mat.uc.pt/~mat0821/regras%20ouri.pdf>.
- Jogo Mancala - Super Interessante: <https://super.abril.com.br/comportamento/jogo-mancala/>.
- Oware: <https://omerkel.github.io/Oware/html5/src/>.

POSSÍVEIS APROFUNDAMENTOS

Poderá ser proposto a diferentes grupos de alunos a invenção de um jogo de tabuleiro.

Para este trabalho podem seguir-se, por exemplo, as indicações da revista “Super interessante”:

Chan, I. (2013). 8 dicas para fazer seu próprio jogo de tabuleiro. Obtido de <https://super.abril.com.br/blog/superlistas/8-dicas-para-fazer-seu-proprio-jogo-de-tabuleiro/>

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

APM (2011). *Jogos do mundo*. Lisboa: APM.

Associação LUDUS. Obtido de <http://ludicum.org/jogos>

Caneco, S. (2008). *A matemática dos faraós*. jornal PÚBLICO. Obtido de <https://www.publico.pt/2008/07/30/jornal/a-matematica-dos-faraos-270618>

Caneco, S. (2008). *Mancala: da África para o mundo*. jornal PÚBLICO. Obtido de <https://www.publico.pt/2008/08/20/jornal/mancala-da-africa-para-o-mundo-273081>

Fábrica, Centro Ciência Viva. *Jogos matemáticos*. Obtido de <https://www.ua.pt/pt/fabrica/>

Fraga, A. Santos, M. (2004). *Ouri, um jogo mancala*. Educação e Matemática, APM, Lisboa, n. 36, p.9-11, jan./fev.

Gardner, M. (1990). *Ah, descobri!*. Lisboa: Gradiva.

Gardner, M. (1991). *Matemática, magia e mistério*. Lisboa: Gradiva.

Gardner, M. (1992). *Rodas, vida e outras diversões matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

Gardner, M. (1993). *Ah, apanhei-te!*. Lisboa: Gradiva.

Gardner, M. (1994). *O festival mágico da matemática*. Lisboa: Gradiva.

Gardner, M. (2002). *As últimas recreações*. Lisboa: Gradiva.

Guzmán, M. (1984). *Juegos Matemáticos En La Enseñanza, Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, Santa Cruz de Tenerife, 10-14 Septiembre 1984. Obtido de <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/59/Articulo01.pdf> (consultado a 15 de abril de 2021)

Guzmán, M. (1990). *Aventuras Matemáticas*, Lisboa: Gradiva.

Guzmán, M. (1991). *Contos com contas*, Lisboa: Gradiva.

Jogos do Mundo, jornal PÚBLICO.

L`Hospitalier, Y. (2001). *Enigmas e jogos lógicos*. Lisboa: Instituto Piaget.

Loyd, S. (1998). *100 Puzzles matemáticos*. Lisboa: Publicações Europa-América.

Loyd, S. (1998). *Mais Puzzles matemáticos*. Lisboa: Publicações Europa-América.

Luduscience. *Jogos Matemáticos*. Obtido de <http://www.luduscience.com/matematicos.html>

Mancala: da África para o mundo. Obtido de <https://www.publico.pt/2008/08/20/jornal/mancala-da-africa-para-o-mundo-273081>

Rino, J. (2004). *O Jogo, Interações e Matemática*. Lisboa: APM.

Santos, C.P., Neto, J.P. & Silva, J.N. (2007). Coleção Jogos com História (Missing Square, Pentalfa, Ouro, GO 9x9, Torres de Hanói, Stomachion, Anéis chineses, Puzzle 15, Alquerque, Hexágono Mágico). Lisboa: Edimpresa.

Santos, C.P., Neto, J.P., Silva, J.N. (2008). Coleção Jogos do Mundo (Grécia, China, Babilónia, Egipto, Índia, Japão, África, Indonésia, América pré-colombiana, Europa). Lisboa: Edimpresa.

Santos, C., Neto, J.P. & Silva, J.N. (2017). *Jogos de Tabuleiro Tradicionais*. Lisboa: Associação Ludus.

Silva, A., Freitas, P. & Silva, J.N., Hirth, T. (2017). *Matemagia*. Lisboa: Associação Ludus.

MATEMÁTICA | MÓDULO OP2

MODELOS DE FUNÇÕES DE CRESCIMENTO

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS				
Linguagens e textos (A)	Informação e comunicação (B)	Raciocínio e resolução de problemas (C)	Pensamento crítico e pensamento criativo (D)	Relacionamento interpessoal (E)
Desenvolvimento pessoal e autonomia (F)	Bem-estar, saúde e ambiente (G)	Sensibilidade estética e artística (H)	Saber científico, técnico e tecnológico (I)	Consciência e domínio do corpo (J)

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

Conceitos chave | Ideias chave

Modelo de função de crescimento linear | Modelo de função de crescimento exponencial | Modelo de função de crescimento logarítmico | Modelo de função de crescimento logístico.

Pretende-se que os alunos desenvolvam a capacidade de modelar e explorar situações envolvendo modelos discretos e contínuos: linear, exponencial, logarítmico e o logístico. Estes modelos de crescimento não linear devem, essencialmente, resultar da abordagem de situações realistas, recorrendo, sempre que possível à tecnologia.

TEMAS, TÓPICOS E SUBTÓPICOS MATEMÁTICOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES QUE O ALUNO DEVE REVELAR	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	ÁREAS DE COMPETÊNCIA DO PERFIL DOS ALUNOS
<p>MODELOS DE FUNÇÕES DE CRESCIMENTO (DISCRETOS E CONTÍNUOS)</p> <p>Modelos de funções de crescimento linear</p>	<p>Definir e compreender modelos discretos e contínuos de crescimento populacional (funções afins e funções definidas por ramos).</p>	<p>Familiarizar os alunos com alguns modelos discretos e contínuos de crescimento populacional usando funções afins e definidas por ramos.</p> <p>Apresentar e incentivar a pesquisa a partir de dados reais para fomentar a discussão de exemplos concretos que prevejam um crescimento linear e ilimitado. Por exemplo: contas bancárias a prazo (juros simples), equilíbrio dinâmico de ecossistemas (sucessão ecológica secundária - no caso de catástrofes naturais); contagem mensal do número de animais numa reserva natural; prestações mensais de casas, carros, ou outros bens.</p>	<p>Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo. (C)</p> <p>Aprecia criticamente as realidades artísticas, em diferentes suportes tecnológicos, pelo contacto com os diversos universos culturais. (H)</p>
<p>Modelos de funções de crescimento exponencial</p>	<p>Reconhecer e estudar modelos de funções de crescimento exponencial</p> <p>Comparar o crescimento linear com o crescimento exponencial através do estudo de progressões aritméticas e geométricas.</p>	<p>Encorajar o uso de calculadora gráfica ou computador, para estudar intuitivamente as propriedades simples (domínio, contradomínio, continuidade, monotonia e limitação) da família de funções definidas por $f: x \rightarrow a^x, a > 1$.</p> <p>Apresentar e incentivar a pesquisa e recolha de dados reais para fomentar a discussão de exemplos concretos que prevejam um crescimento exponencial.</p> <p>Considerar por exemplo: populações afetadas por vírus, evolução de propagação de bactérias ou vírus ou crescimento bacteriano num laboratório, contas bancárias a prazo (juros compostos), temperaturas de um dado produto, a poluição do ar numa determinada empresa, o crescimento de uma determinada espécie vegetal/animal sem ter em conta os recursos; aumento da temperatura de um composto após introdução de um reagente.</p> <p>Apresentar e conduzir uma discussão sobre um dos modelos, por exemplo: de Malthus ou de Verhulst.</p> <p>Apoiar a decisão de escolha entre modelos lineares e exponenciais no contexto real, com recurso à modelação matemática.</p> <p>Considerar por exemplo: com recurso à calculadora gráfica e a partir da recolha de dados reais com sensores, estimular os alunos a construírem modelos matemáticos e decidirem sobre a adequabilidade dos mesmos.</p>	<p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)</p>
<p>Modelos de funções de crescimento logarítmico</p>	<p>Reconhecer e estudar modelos de função de crescimento logarítmico.</p>	<p>Encorajar o uso da calculadora gráfica ou do computador, para estudar as propriedades simples (domínio, contradomínio, continuidade, monotonia e limitação) de uma função logarítmica de base a ($a > 1$).</p> <p>Apresentar e incentivar a pesquisa e recolha de dados reais para fomentar a discussão de exemplos concretos que prevejam um crescimento logarítmico.</p> <p>Considerar por exemplo: crescimento de uma cultura celular (microbiologia); crescimento médio de uma árvore num pomar; dimensão da magnitude de sismos; intensidade do som; medição do pH.</p>	

Modelos de funções de crescimento logístico	Reconhecer e estudar modelos de função de crescimento logístico.	<p>Encorajar o uso da calculadora gráfica ou do computador, para estudar as propriedades simples (domínio, contradomínio, continuidade, monotonia e limitação) da função logística</p> $f: x \rightarrow \frac{a}{b+ce^{kx}}, k < 0.$ <p>Apresentar e incentivar a pesquisa a partir de dados reais, por exemplo através da recolha de dados com recurso a sensores ou outros para fomentar a discussão de exemplos concretos que prevejam um crescimento logístico.</p> <p>Considerar por exemplo: taxa de crescimento populacional per capita (capacidade de suporte tendo em conta os recursos existentes); evolução na levedura no fabrico do pão ou produção de bebidas alcoólicas; titulação ácido base.</p>	
Comparação dos Modelos de funções de crescimento	Comparar as funções de crescimento linear, exponencial, logarítmico e logístico.	<p>Apoiar a decisão de escolha entre os modelos com base na confrontação das funções com os dados reais.</p> <p>Considerar por exemplo: com recurso à calculadora gráfica e a partir da recolha de dados reais ou a partir de notícias ou pesquisas na internet, estimular os alunos a construírem modelos matemáticos e decidirem sobre a adequabilidade dos mesmos (comportamento assintótico, ultrapassagem de valores realistas, coeficiente de correlação, teorias físicas, biológicas e económicas, etc).</p>	

AVALIAÇÃO

Valorizando o carácter formativo da avaliação, esta deve recair, sobretudo, nas atividades de aprendizagem realizadas em aula, fornecendo feedback aos alunos para corrigirem erros e desenvolverem competências, tornando-os agentes ativos, reflexivos e responsáveis pela sua aprendizagem, na prossecução do desenvolvimento das competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

Algumas tarefas poderão ser pensadas especificamente para a avaliação sumativa, ou seja, para fazer balanços sobre as aprendizagens realizadas, mas devem sempre ter em vista futuras aprendizagens.

Devem ser usadas diferentes estratégias e instrumentos de avaliação, tais como apresentações orais, relatórios, resolução de um problema, situação de modelação ou de projeto. Sugerem-se o desenvolvimento de projetos interdisciplinares e motivadores entre a Matemática e as áreas de formação técnica de modo a articular e a relacionar os vários saberes em contexto real. Este módulo deve contemplar na avaliação, a escolha de uma situação real que possa ser explorada e modelada através de um projeto num dos temas do módulo, constituindo deste modo uma ótima oportunidade para a interdisciplinaridade.

POSSÍVEIS APROFUNDAMENTOS

Podem ser introduzidos outros modelos de crescimento comuns como o do modelo de Gompertz, Obtido em:

- https://en.wikipedia.org/wiki/Gompertz_function.
- <https://www.geogebra.org/m/rbxepcnd>.
- <https://www.geogebra.org/m/d5dwwxss>.

Para fomentar a visualização gráfica e a interpretação do crescimento dos diferentes tipos de funções pode-se recorrer a ferramentas computacionais, como por exemplo, o Geogebra:

- Crescimento linear versus crescimento exponencial: <https://www.geogebra.org/m/c5jcwbdh>.
- Funções Exponenciais e o Novo Coronavírus: <https://www.geogebra.org/m/hvkwddv4>.
- Curva de crescimento logístico: <https://www.geogebra.org/m/bhyvBC4j>.
- Crescimento do leão marinho: <https://www.geogebra.org/m/n8caGQWf>.
- Funciones exponencial y logarítmica: <https://www.geogebra.org/m/pXfHPKvH>.
- Função Exponencial e Logarítmica: <https://www.geogebra.org/m/tquatedq>.
- Exponential and logistic growth: <https://www.geogebra.org/m/qvy4fbrn>.

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

Bernardes, A., Colaço, T. (1997). *Sismos, exponenciais e logaritmos: uma proposta de modelação matemática*. Educação & Matemática, nº 43, p. 13-16.

Caraça, B. J. (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva.

Devlin, K. (2002). *Matemática - A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Estrada, M. F. Sá, C., Queiró, J. F., Silva, M. C. & Costa, M. J. (2000). *História da Matemática*. Universidade Aberta.

Guia do Estudante (2020). *Coronavírus: o que é crescimento exponencial e como pode cair nas provas*. Editora Abril. Obtido de <https://guiadoestudante.abril.com.br/estudo/coronavirus-o-que-e-crescimento-exponencial-e-como-pode-cair-nas-provas/>.

Matos, J. F., & Carreira, S. P. (1996). *Modelação e Aplicações no Ensino da Matemática*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Nápoles, S., (2018). *O crescimento exponencial de populações: Euler ou Malthus?*, Rev. Ciência Elem., V6(2):041.

Precatado, A., Guimarães, H. (2001). *Materiais para a aula de Matemática*. Lisboa: APM.

Sebastião e Silva, J. (1975-1978). *Compêndio de Matemática (3 volumes)*. Lisboa: GEP.

Teixeira, P. et al (1997). *Funções - 10º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

Teixeira, P. et al (1998). *Funções - 11º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

Teixeira, P. et al (1999). *Funções - 12º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

Torres, T. A. (2007). *Aplicações e modelação matemática com recurso à calculadora gráfica e sensores: um estudo com alunos do 12º ano de escolaridade*. Universidade do Minho, Instituto de Educação e Psicologia. Braga.

Torres, T. A., Coutinho, C. & Fernandes, J. (2008). *Aplicações e Modelação Matemática com recurso à calculadora gráfica e sensores*. UNIÓN, Sept. 2008, nº 15, p. 9 - 31. Obtido de <http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/8269>

Vieira, A., Veloso, E. & Lagarto, M. J. (org.) (1997). *Relevância da História no Ensino da Matemática*. História da Matemática - Cadernos do GTHEM - 1 APM. Lisboa: APM.

Vieira, A., Veloso, E. & Lagarto, M. J. (org.).(1997). *Relevância da História no Ensino da Matemática*. História da Matemática - Cadernos do GTHEM - 1 APM. Lisboa: APM.

MATEMÁTICA | MÓDULO OP3

MODELOS DE FUNÇÕES PERIÓDICAS

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS				
Linguagens e textos (A)	Informação e comunicação (B)	Raciocínio e resolução de problemas (C)	Pensamento crítico e pensamento criativo (D)	Relacionamento interpessoal (E)
Desenvolvimento pessoal e autonomia (F)	Bem-estar, saúde e ambiente (G)	Sensibilidade estética e artística (H)	Saber científico, técnico e tecnológico (I)	Consciência e domínio do corpo (J)

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

Conceitos chave | Ideias chave

Ângulo e arco generalizado | Radiano | Movimentos periódicos | Funções trigonométricas

Pretende-se que alunos recordem os conceitos básicos de trigonometria do ângulo agudo, enfrentem situações novas em que a generalização das noções de ângulo e arco, bem como das razões trigonométricas, apareçam como necessárias e aprendam o conceito de função periódica e de funções trigonométricas como modelos matemáticos adequados a responder a problemas.

TEMAS, TÓPICOS E SUBTÓPICOS MATEMÁTICOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES QUE O ALUNO DEVE REVELAR	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	ÁREAS DE COMPETÊNCIA DO PERFIL DOS ALUNOS
<p>MODELOS DE FUNÇÕES PERIÓDICAS</p> <p>Resolução de problemas que envolvam triângulos</p>	<p>Resolver problemas variados, ligados a situações concretas, que permitam recordar e aplicar métodos trigonométricos estudados no 3.º ciclo do ensino básico, na resolução de triângulos retângulos e não retângulos.</p>	<p>Propor problemas variados, ligados a situações concretas, que permitam recordar e aplicar métodos trigonométricos (problemas ligados a sólidos, a moldes, à navegação, à topografia, históricos, verificar, na sua cidade/escola, se as rampas para acesso a pessoas com mobilidade reduzida estão de acordo com a lei em vigor; utilizar a Mesa de Senos para o cálculo de Forças (Metrologia, etc.)).</p>	<p>Desenha, implementa e avalia, com autonomia, estratégias para atingir as metas e desafios que estabelece para si próprio. (F)</p>
<p>Ângulo e arco generalizados: expressão geral das amplitudes dos ângulos com os mesmos lados</p> <p>Radiano</p>	<p>Relacionar e aplicar na resolução de problemas as noções de ângulo orientado e de ângulo generalizado e as respetivas amplitudes.</p> <p>Conhecer a unidade de medida radiano e exprimir medidas de ângulos e de arcos, em graus e em radianos.</p>	<p>Apresentar e fomentar a discussão a partir de exemplos sobre a aplicação da noção de ângulo orientado, de ângulo generalizado e das respetivas amplitudes.</p> <p>Considerar por exemplo: ponteiros dos minutos de um relógio; rotação do botão de um forno.</p> <p>Apresentar exemplos, usando a tecnologia, que conduzam à noção de radiano.</p> <p>Apresentar e deduzir as relações entre a medida grau e radiano de ângulos e arcos.</p>	<p>Preocupa-se com a construção de um futuro sustentável e envolve-se em projetos de cidadania ativa. (G)</p> <p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)</p>
<p>Movimentos periódicos</p>	<p>Reconhecer, analisar e caracterizar fenómenos periódicos: conceito intuitivo de período.</p> <p>Resolver problemas que impliquem a escolha do modelo de função periódica.</p>	<p>Fomentar a pesquisa de exemplos de movimentos periódicos em contexto real.</p> <p>Considerar por exemplo: movimento dos ponteiros do relógio; o movimento de rotação e translação da Terra; ondas de rádio; ondas sonoras (experiência com o diapasão); decidir a trajetória de um robô; movimento de um torno mecânico, de uma fresadora mecânica ou de uma retificadora; régua ou mesa de senos usada na indústria.</p>	
<p>Funções trigonométricas</p>	<p>Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas as funções trigonométricas $\text{sen}(x)$, $\text{cos}(x)$ e $\text{tg}(x)$.</p> <p>Resolver problemas que impliquem a escolha do modelo de função trigonométrica mais adequado.</p> <p>Estudar o efeito dos parâmetros a, b, c e d nas funções trigonométricas:</p> $a \text{sen}(bx + c) + d$ $a \text{cos}(bx + c) + d$	<p>Encorajar o uso da calculadora gráfica ou computador (por exemplo: Geogebra) no estudo das propriedades (domínios, contradomínios, zeros, paridade, simetria e periodicidade) das funções trigonométricas a partir da representação gráfica. Apoiar os alunos na discussão, com recurso à tecnologia, dos efeitos da alteração dos parâmetros nas funções trigonométricas.</p> <p>Incentivar o uso da calculadora gráfica e sensores ou computador na recolha de dados reais para que a partir das funções estudadas seja possível escolher o modelo matemático que melhor se adequa ao conjunto dos valores obtidos.</p> <p>Considerar por exemplo: movimento de um pêndulo; vibrações acústicas; movimento de um corpo preso à extremidade de uma mola; movimento das marés (tábua das marés numa praia); decidir a trajetória de um robô.</p>	

AVALIAÇÃO

Valorizando o caráter formativo da avaliação, esta deve recair, sobretudo, nas atividades de aprendizagem realizadas em aula, fornecendo feedback aos alunos para corrigirem erros e desenvolverem competências, tornando-os agentes ativos, reflexivos e responsáveis pela sua aprendizagem, na prossecução do desenvolvimento das competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

Algumas tarefas poderão ser pensadas especificamente para a avaliação sumativa, ou seja, para fazer balanços sobre as aprendizagens realizadas, mas devem sempre ter em vista futuras aprendizagens.

Devem ser usadas diferentes estratégias e instrumentos de avaliação, tais como resolução de fichas de trabalho, apresentações orais, relatórios, resolução de um problema, situação de modelação ou de projeto. Sugerem-se o desenvolvimento de projetos interdisciplinares e motivadores entre a Matemática e as áreas de formação da componente técnica de modo a articular e a relacionar os vários saberes em contexto real. Este módulo deve contemplar na avaliação, a escolha de uma situação real que possa ser explorada e modelada através de um projeto num dos temas trabalhados.

POSSÍVEIS APROFUNDAMENTOS

Poderão ser abordados outros temas de aplicações da trigonometria. Um problema possível é do problema de otimização de Regiomontanus (1436-1476) sobre o melhor ângulo de visão de uma estátua. Algumas ideias podem ser obtidas em:

Mello, J. L. P. (2003). *Trigonometria e um antigo problema de otimização*. Revista do Professor de Matemática, nº 52, p. 29-32.

Para fomentar a visualização gráfica e a interpretação do efeito dos parâmetros a , b , c e d nas funções trigonométricas $a \sin(bx+c)+d$

e $a \cos(bx+c)+d$ pode-se recorrer a ferramentas computacionais, como por exemplo, o GeoGebra:

- Transformações dos gráficos de funções trigonométricas: <https://www.geogebra.org/m/Bbzfy8U>
- Exercícios sobre Gráficos das Funções Circulares: <https://www.geogebra.org/m/ewb2fsvq>
- Parâmetros das Funções Trigonométricas (Seno e Cosseno): <https://www.geogebra.org/m/z9gJwjss>
- Transformações dos gráficos de funções trigonométricas: <https://www.geogebra.org/m/Z5NRazWS>

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

Baltazar, A. & Delgado, F. (1989). *Trigonometria ... com um pouco de sorte!*. Educação & Matemática, nº 11, p. 31.

Caraça, B.J. (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva.

Carreira, S. (1991). *Funções periódicas na folha de cálculo*. Educação & Matemática, nº 17, p. 3-9.

Carreira, S. (1992). *A aprendizagem da trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo*. Lisboa: APM.

Coelho, A. (1980). *Uso das calculadoras em trigonometria*. Educação & Matemática, nº 15, p. 29-30.

Devlin, K. (2002). *Matemática - A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Domingos, A. & Martinho, E. (2018). *Geogebra no Ensino Aprendizagem da Trigonometria e Funções Trigonométricas*. Educação & Matemática, nº 149-150, p. 67-70.

Estrada, M. F., Sá, C., Queiró, J. F., Silva, M. C. & Costa, M. J. (2000). *História da Matemática*. Universidade Aberta.

Matos, J. F. & Carreira, S. P. (1996). *Modelação e Aplicações no Ensino da Matemática*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Mesquita, C., Marques, F. & Carreira, S. (1992). *A folha de cálculo e a trigonometria em atividades de aplicação e modelação*. Educação & Matemática, nº 24, p. 7-11.

Pereira, C., Cegonho, J. & Rocha, M.I. (1992). *A trigonometria à volta de uma caneca de cerveja*. Educação & Matemática, nº 23, p. 20-22.

Precatado, A. & Guimarães, H. (2001). *Materiais para a aula de Matemática*. Lisboa: APM.

Sebastião e Silva, J. (1975-1978). *Compêndio de Matemática (3 volumes)*. Lisboa: GEP.

Teixeira, P. et al (1997). *Funções - 10º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

Teixeira, P. et al (1998). *Funções - 11º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

Teixeira, P. et al (1999). *Funções - 12º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

Torres, T. A. (2007). *Aplicações e modelação matemática com recurso à calculadora gráfica e sensores: um estudo com alunos do 12º ano de escolaridade*. Universidade do Minho, Instituto de Educação e Psicologia, Braga.

Torres, T. A., Coutinho, C. & Fernandes, J. (2008). *Aplicações e Modelação Matemática com recurso à calculadora gráfica e sensores*. UNIÓN, Sept. 2008, nº 15, p. 9 - 31. Obtido de <http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/8269>

Vieira, A., Veloso, E. & Lagarto, M. J. (org.) (1997). *Relevância da História no Ensino da Matemática*. História da Matemática - Cadernos do GTHEM - 1 APM. Lisboa: APM.

MATEMÁTICA | MÓDULO OP4

PROGRAMAÇÃO LINEAR

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS				
Linguagens e textos (A)	Informação e comunicação (B)	Raciocínio e resolução de problemas (C)	Pensamento crítico e pensamento criativo (D)	Relacionamento interpessoal (E)
Desenvolvimento pessoal e autonomia (F)	Bem-estar, saúde e ambiente (G)	Sensibilidade estética e artística (H)	Saber científico, técnico e tecnológico (I)	Consciência e domínio do corpo (J)

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

Conceitos chave | Ideias chave

Programação linear | Domínios planos | Variáveis de decisão | Restrições | Função objetivo

Pretende-se que os alunos abordem uma forma de otimização, a programação linear, uma ferramenta de gestão e planeamento que faz uso de alguma matemática elementar, nomeadamente equações e inequações do 1.º grau com uma ou duas variáveis, sistemas de equações e inequações, sistemas de eixos coordenados e representações geométricas (retas, planos e domínios planos).

Devem ser trabalhadas situações simples com constrangimentos de produção ou outros que possam ser modelados por inequações lineares, por forma a delimitar um polígono convexo que dará informação completa sobre as quantidades possíveis para cada produto.

TEMAS, TÓPICOS E SUBTÓPICOS MATEMÁTICOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES QUE O ALUNO DEVE REVELAR	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	ÁREAS DE COMPETÊNCIA DO PERFIL DOS ALUNOS
<p>PROGRAMAÇÃO LINEAR</p> <p>Retas e domínios planos</p> <p>Retas verticais, horizontais e oblíquas</p> <p>Coordenadas de pontos de interseção entre retas</p> <p>Domínios planos</p>	<p>Estudar gráfica, numérica e analiticamente retas verticais, horizontais e oblíquas e determinar as coordenadas de eventuais pontos de interseção entre duas retas.</p> <p>Reconhecer os efeitos da mudança do sinal no coeficiente do polinómio de grau 1 na representação das retas oblíquas.</p> <p>Utilizar sistemas de eixos coordenados para obter equações e condições que representam retas e domínios planos.</p>	<p>Promover o reconhecimento das vantagens na escolha de referenciais, no uso das coordenadas e no uso de condições para modelar situações e resolver problemas.</p>	<p>Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática. (A)</p> <p>Gere projetos e toma decisões na resolução de problemas e analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas. (C)</p>
<p>Programação Linear</p> <p>Exemplos históricos</p> <p>Variáveis de decisão</p> <p>Restrições</p> <p>Função objetivo</p>	<p>Conhecer os primórdios da programação linear através do testemunho de George Dantzig.</p> <p>Identificar, num problema de programação linear, as variáveis de decisão, as restrições e a função objetivo.</p>	<p>Referir o aparecimento histórico da programação linear pela ação de George Dantzig durante e após a II Guerra Mundial, por exemplo, lendo e discutindo, com os alunos, uma das entrevistas dadas por George Dantzig.</p> <p>Fomentar na resolução de problemas reais ligados à área de interesse do curso, a identificação das variáveis de decisão, as restrições e a função objetivo.</p>	<p>Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido, no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade. (D)</p>
<p>Resolução de problemas de Programação linear</p>	<p>Resolver numérica, graficamente e com recurso a tecnologia gráfica, problemas de programação linear.</p> <p>Elaborar, analisar e descrever modelos para situações reais de planeamento.</p>	<p>Fomentar a resolução de problemas reais ligados à área de interesse do curso, com ênfase especial no trabalho em grupo.</p> <p>Incentivar nos alunos a utilização de tecnologia para resolver problemas de programação linear.</p>	

AVALIAÇÃO

Valorizando o caráter formativo da avaliação, esta deve recair, sobretudo, nas atividades de aprendizagem realizadas em aula, fornecendo feedback aos alunos para corrigirem erros e desenvolverem competências, tornando-os agentes ativos, reflexivos e responsáveis pela sua aprendizagem, na prossecução do desenvolvimento das competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

Algumas tarefas poderão ser pensadas especificamente para a avaliação sumativa, ou seja, para fazer balanços sobre as aprendizagens realizadas, mas devem sempre ter em vista futuras aprendizagens.

Devem ser usadas diferentes estratégias e instrumentos de avaliação, tais como resolução de fichas de trabalho, testes escritos, apresentações orais, relatórios, resolução de um problema, situação de modelação ou de projeto, que devem integrar um portefólio do módulo ou da disciplina.

Neste módulo, devem ser incluídas duas provas de entre as seguintes: um teste escrito, uma apresentação oral de um problema - escolhido pelo aluno de entre os que realizou durante a aprendizagem do módulo - e uma apresentação oral ou escrita de uma situação de modelação matemática, recorrendo a um de três tipos de exemplos (recolha de dados por meio de sensores, exemplos de outras disciplinas que os alunos frequentem, recortes de jornais). O professor deve acompanhar de forma especial estas duas últimas provas (orientando o trabalho do aluno e apresentando propostas de reformulação se necessário).

POSSÍVEIS APROFUNDAMENTOS

Efetuar uma breve referência às aplicações deste módulo na Economia.

Caso haja tempo disponível poderão ser abordados outros temas de otimização, como o método de simplex ou a programação linear inteira. Algumas ideias podem ser obtidas aqui:

Rafael, A. (2014). Programação Linear e Algumas Extensões. Universidade do Porto. Obtido de <https://core.ac.uk/download/pdf/143404162.pdf>

Para fomentar a visualização gráfica e a interpretação pode-se recorrer a ferramentas computacionais, como por exemplo, o Geogebra:

- Linear Programming: <https://www.geogebra.org/m/tCWvtHYb>.
- Linear Programming Exploration: <https://www.geogebra.org/m/meem85ps>.

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

Babo, A. P. (2017). *Resolução de problemas de Programação Linear: um estudo no ensino profissional*. Universidade Nova de Lisboa. Obtido de https://run.unl.pt/bitstream/10362/24095/1/Babo_2017.pdf

Biografia de George Bernard Dantzig. Obtido de http://www.phpsimplex.com/pt/biografia_Dantzig.htm

Dias, M. (2011). *A Programação Linear no Ensino Secundário*. Universidade de Aveiro. Obtido de <https://ria.ua.pt/bitstream/10773/10488/1/6599.pdf>

Entrevista de George Bernard Dantzig publicada no 'The College Mathematical Journal', em março de 1986. Obtido de http://www.phpsimplex.com/pt/entrevista_Dantzig.htm

Feiteira, R. (2006). *Programação linear e Teoria de Jogos: que lugar podem ocupar nos atuais programas de Matemática*. Educação & Matemática, nº 88, p. 2-6.

Filipe, J. (1998). *Programação linear - Relato de uma experiência*. Educação & Matemática, nº 49, p. 25-32.

Neves, J. (2011). *A Programação Linear no Ensino Secundário*. Universidade de Aveiro. Obtido de <https://ria.ua.pt/handle/10773/10459>

Prado, R. (2015). *A Programação Linear no 11º Ano: estratégias e dificuldades na resolução de problemas*. Universidade de Lisboa. Obtido de https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/23671/1/ulfpie051056_tm.pdf

MATEMÁTICA | MÓDULO OP5

MODELOS DISCRETOS

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS				
Linguagens e textos (A)	Informação e comunicação (B)	Raciocínio e resolução de problemas (C)	Pensamento crítico e pensamento criativo (D)	Relacionamento interpessoal (E)
Desenvolvimento pessoal e autonomia (F)	Bem-estar, saúde e ambiente (G)	Sensibilidade estética e artística (H)	Saber científico, técnico e tecnológico (I)	Consciência e domínio do corpo (J)

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

Conceitos chave | Ideias chave

Sucessões | Progressões aritméticas | Progressões geométricas

Pretende-se que os alunos desenvolvam a capacidade de modelar e de resolver situações envolvendo sequências numéricas, em particular progressões aritméticas e geométricas. Para tal, o recurso aos modelos de crescimento linear ou não linear resultará das diversas abordagens decorrentes de situações realistas.

O computador e a calculadora gráfica, devem ser utilizados como meios organizadores dos dados e dos cálculos necessários para a previsibilidade dos modelos de crescimento a utilizar.

TEMAS, TÓPICOS E SUBTÓPICOS MATEMÁTICOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES QUE O ALUNO DEVE REVELAR	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	ÁREAS DE COMPETÊNCIA DO PERFIL DOS ALUNOS
<p>MODELOS DISCRETOS</p> <p>Sucessões</p> <p>Identificação e definição</p> <p>Formulação de generalizações tendo por base padrões e regularidades</p>	<p>Identificar sucessões e definir sucessões de diferentes modos: graficamente, termo geral e recorrência.</p> <p>Procurar padrões e regularidades e formular generalizações em situações diversificadas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos.</p>	<p>Apresentar exemplos de modelos numéricos e geométricos, com determinados padrões ou regularidades, que possibilitem a construção de generalizações através da promoção de um raciocínio indutivo.</p> <p>Promover a construção de um programa em <i>Python</i> como trabalho de projeto que permita analisar conjecturas relacionadas com sucessões como por exemplo, a conjectura de Collatz.</p>	<p>Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo. (C)</p>
<p>Progressões aritméticas e geométricas</p> <p>Definição</p> <p>Termo geral</p>	<p>Reconhecer progressões aritméticas e geométricas.</p> <p>Definir progressões aritméticas e geométricas através de qualquer termo e da razão.</p> <p>Resolver problemas de modelação com progressões aritméticas e de progressões geométricas.</p>	<p>Promover a resolução de problemas de modelação.</p> <p>Por exemplo, no caso de progressões aritméticas:</p> <ul style="list-style-type: none"> o valor a pagar mensalmente por um empréstimo a prazo com uma taxa de juro fixa simples mensal; a distância percorrida diariamente por um atleta, para se preparar para uma competição, se aumentar “a” quilómetros por dia; a temperatura diária em dias sucessivos se diminuir “t” graus Celsius a cada dia que passa. <p>Por exemplo, no caso de progressões geométricas:</p> <ul style="list-style-type: none"> o número anual de sócios de um clube se aumentar/diminuir uma percentagem a cada ano que passa; a datação de fósseis por Carbono-14; o valor de uma conta no banco com uma taxa de juro composto a render anualmente uma percentagem; a desvalorização de um automóvel anualmente após a sua compra. 	<p>Aprecia criticamente as realidades artísticas, em diferentes suportes tecnológicos, pelo contacto com os diversos universos culturais. (H)</p> <p>Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão. (I)</p>
<p>Soma de n termos consecutivos</p>	<p>Determinar a soma de n termos consecutivos de progressões aritméticas e de progressões geométricas.</p>	<p>Apresentar exemplos históricos relevantes sobre a soma de n termos consecutivos de uma progressão aritmética (soma dos primeiros 100 números naturais efetuada por Carl F. Gauss em criança) ou de uma progressão geométrica (número de grãos de trigo pedido por quem apresentou o jogo de Xadrez ao Xá da Pérsia).</p> <p>Propor o desenvolvimento de um trabalho de projeto, individual ou a pares, com apresentação oral, podendo agregar outra(s) disciplina(s), que envolva em contexto real uma situação de resolução de um problema envolvendo progressões aritméticas ou geométricas, tendo por base um dos exemplos trabalhados no módulo.</p>	
<p>Crescimento linear e crescimento exponencial</p>	<p>Distinguir crescimento linear de crescimento exponencial em modelos discretos. Relacionar progressões aritméticas com o crescimento/decrescimento linear discreto e as progressões geométricas com o crescimento/decrescimento exponencial discreto.</p>	<p>Partindo dos problemas e atividades de modelação anteriormente estudados, fomentar a discussão de exemplos concretos que prevejam:</p> <ul style="list-style-type: none"> - um crescimento/decrescimento linear discreto; - um crescimento/decrescimento exponencial discreto. 	

AVALIAÇÃO

Valorizando o caráter formativo da avaliação, esta deve recair, sobretudo, nas atividades de aprendizagem realizadas em aula, fornecendo feedback aos alunos para corrigirem erros e desenvolverem competências, tornando-os agentes ativos, reflexivos e responsáveis pela sua aprendizagem, na prossecução do desenvolvimento das competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

Algumas tarefas poderão ser pensadas especificamente para a avaliação sumativa, ou seja, para fazer balanços sobre as aprendizagens realizadas, mas devem sempre ter em vista futuras aprendizagens.

Neste tema, deve ser incluída uma prova de entre as seguintes: trabalhos, relatórios, composições, apresentações ou participação em debates que sejam adequados à diversidade das aprendizagens e aos contextos em que ocorrem. Atividades como construção de modelos necessários para a compreensão e representação das situações em estudo e os respetivos relatórios, podem e devem ser valorizados como provas de avaliação.

PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles. O reconhecimento de padrões na tarefa (ou situação) apresentada ou em problemas semelhantes, anteriormente resolvidos, poderá contribuir para facilitar a estruturação do algoritmo a desenvolver.

Antes de redigir o programa na linguagem *Python*, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Exemplo de programa em *Python* para simular a sequência de Collatz obtida a partir de um número dado (previamente fixado).

```
x=int(input("Indica o 1.º termo da sucessão: "))
seq=[]
def collatz_sequencia(x):
    seq = [x]
    if x < 1:
        return []
    while x > 1:
        if x % 2 == 0:
            x = x / 2
        else:
            x = 3 * x + 1
        seq.append(int(x))
    return seq
print(collatz_sequencia(x))
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

POSSÍVEIS APROFUNDAMENTOS

Caso haja tempo disponível poderão ser abordados outros temas relacionados com progressões e sucessões. Um dos temas que, pela sua importância, poderá ser explorado é o das séries geométricas, que proporciona interessantes referências históricas:

- Ávila, G. (1996). As séries infinitas. Revista do Professor de Matemática, nº 30, p. 10-17. Obtido de <https://www.rpm.org.br/cdrpm/30/3.htm>
- Monteiro, M. (s/d). É possível somar infinitas parcelas? Universidade de São Paulo. Obtido de <https://www.ime.usp.br/~martha/somas-infinitas.pdf>

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

- Aparício, R., (2017). *Materiais para a Aula de Matemática - Como que por magia*. Educação & Matemática, nº 143, p. 17.
- Caraça, B. J. (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva.
- Devlin, K. (2002). *Matemática - A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.
- Estrada, M. F., Sá, C., Queiró, J. F., Silva, M. C. & Costa, M. J. (2000). *História da Matemática*. Universidade Aberta.
- Matos, J. F. & Carreira, S. P. (1996). *Modelação e Aplicações no Ensino da Matemática*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
- Oliveira, R. (1995). *As progressões geométricas no cálculo financeiro*. Educação & Matemática, nº 36, p. 10-12.
- Paradinha, H. & Leuca, T. (2010). *Um olhar sobre a construção de conexões matemáticas no estudo das sucessões*. Educação & Matemática, nº 110, p. 27-32.
- Peça, C. & Santos, A. (1988). *A travessia do deserto e as sucessões!*. Educação & Matemática, nº 7, p. 13-14.
- Precatado, A., Guimarães, H. (2001). *Materiais para a aula de Matemática*. Lisboa: APM.
- Precatado, A. (2001). *Materiais para a Aula de Matemática - Algas no laboratório de Matemática*. Educação & Matemática, nº 63, p. 9.
- Sebastião e Silva, J. (1975-1978). *Compêndio de Matemática (3 volumes)*. Lisboa: GEP
- Tavares, J.N. (2014). *Progressão aritmética*. Rev. Ciência Elem., V2(2):167.
- Tavares, J.N. (2014). *Progressão geométrica*. Rev. Ciência Elem., V2(4):319.
- Teixeira, P. et al. 1997). *Funções - 10º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Teixeira, P. et al. (1998). *Funções - 11º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Teixeira, P. et al. (1999). *Funções - 12º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Torres, D. (2004). *Números felizes e sucessões associadas*. Educação & Matemática, nº 77, p. 35-38.
- Yu, B., Inácio, C., Coelho, S., Coelho, N. & Costa, M. (1998). *Jogo síntese da unidade Sucessões*. Educação & Matemática, nº 46, p. 2

MATEMÁTICA | MÓDULO OP6

ESTATÍSTICA COMPUTACIONAL

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS				
Linguagens e textos (A)	Informação e comunicação (B)	Raciocínio e resolução de problemas (C)	Pensamento crítico e pensamento criativo (D)	Relacionamento interpessoal (E)
Desenvolvimento pessoal e autonomia (F)	Bem-estar, saúde e ambiente (G)	Sensibilidade estética e artística (H)	Saber científico, técnico e tecnológico (I)	Consciência e domínio do corpo (J)

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

Conceitos chave | Ideias chave

Amostra | Amostragem | Simulação | Probabilidade

Com a utilização e expansão dos meios informáticos e tecnológicos, cada vez é maior o volume de dados que é possível armazenar num reduzido espaço físico e cada vez é maior o interesse por parte dos gestores e decisores em retirar desses dados toda a informação que lhes possa ser relevante. No módulo obrigatório de Estatística os alunos aprenderam os principais conceitos e técnicas subjacentes ao tratamento e redução de coleções de dados, mas é, sem dúvida, uma grande mais valia o ficarem com alguns conhecimentos elementares de algum software informático de uso generalizado que lhes permita uma implementação facilitada das referidas técnicas.

Fomentar uma aprendizagem ativa, em particular envolvendo os alunos em pequenos projetos. Pelo menos num dos tópicos deste tema desenvolver trabalho em grupo, promovendo a discussão em pequenos grupos e posteriormente no grupo turma, dando preferência a tarefas de natureza exploratória.

TEMAS, TÓPICOS E SUBTÓPICOS MATEMÁTICOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES QUE O ALUNO DEVE REVELAR	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	ÁREAS DE COMPETÊNCIA DO PERFIL DOS ALUNOS
<p>ESTATÍSTICA COMPUTACIONAL</p> <p>Noções básicas de amostragem e recolha de dados</p> <p>Amostras representativas</p>	<p>Reconhecer a importância da escolha da amostra de forma a permitir fazer inferência para a população subjacente.</p> <p>Utilizar alguns planos de amostragem aleatória, nomeadamente aleatória simples, sistemática e estratificada.</p>	<p>Promover situações de aprendizagem, quer recorrendo a trabalho individual, quer em grupo, em que seja analisada a necessidade de recolher amostras, numa dada população, por questões relativas a tempo, dimensão da população ou custos inerentes.</p> <p>Sensibilizar para o problema da variabilidade da amostra, recorrendo a múltiplas amostras de uma mesma população, para calcular, por exemplo a proporção de elementos da amostra com determinada característica, que está presente na população com uma percentagem p, conhecida.</p> <p>Conduzir a experiência com dois tamanhos de amostras diferentes e concluir que, em média, as proporções calculadas a partir das amostras de maior dimensão, estão mais próximas de p.</p>	<p>Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática. (A)</p> <p>Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas. (C)</p> <p>Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos. (E)</p> <p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)</p>
<p>Organizar e representar coleções de dados segundo processos adequados</p>	<p>Resolver problemas variados, ligados a situações concretas, que permitam recordar e aplicar os principais conceitos e técnicas subjacentes ao tratamento e redução de coleções de dados transmitidos no módulo de Estatística.</p> <p>Reconhecer que nem todos os processos são adequados para todos os tipos de dados.</p> <p>Reduzir informação contida nos dados utilizando tabelas e gráficos adequados a cada situação.</p>	<p>Guiar os alunos na construção de esquemas, tabelas ou gráficos, usando tecnologia, que permitam sintetizar a informação recolhida através dos dados, bem como na determinação de medidas estatísticas de localização e de dispersão.</p>	
<p>Uso de tecnologia gráfica em análise exploratória de dados</p>	<p>Delinear e implementar planos de amostragem adequados ao estudo de algumas características de interesse em populações que lhes seja de fácil acesso (ensino, saúde, cultura, atividades económicas, entre outros).</p>	<p>Estimular a análise de dados utilizando tecnologia gráfica para resolver problemas, explorar, investigar e comunicar.</p> <p>Incentivar os alunos, quer individualmente, quer em grupo, na procura de formas de extrair informação de amostras.</p> <p>Desenvolver o espírito crítico quanto à utilização das representações gráficas mais adequadas ou das estatísticas que melhor resumem os dados em estudo.</p> <p>Resolver problemas e atividades de modelação simples, quer sob a forma de projeto, quer recorrendo a simples tarefas de âmbito exploratório, que permitam o estabelecimento de conexões entre os diversos temas matemáticos e promovam a articulação interdisciplinar.</p>	
<p>Simulação de experiências aleatórias simples</p>	<p>Implementar procedimentos de simulação de experiências aleatórias simples com o objetivo de calcular a probabilidade de determinados acontecimentos.</p>	<p>Utilizar materiais manipuláveis, como por exemplo dados, rapas, baralhos de cartas, ou mesmo recorrendo à calculadora gráfica para efetuar pequenos programas em <i>Python</i>, onde se simulem experiências aleatórias simples, incentivando assim o espírito de iniciativa e a criatividade. Sugere-se como experiências a efetuar a criação de um jogo de Miniloto, com 10 números, por exemplo, ou ainda a análise de pequenos “enigmas” como, por exemplo, o das 5 amigas que se encontram e pretendem saber qual a probabilidade de duas delas terem o mesmo signo ou, qual o número de alunos necessários para que, numa sala, a probabilidade de dois deles fazerem anos no mesmo dia seja superior a 50%.</p>	

AVALIAÇÃO

Valorizando o caráter formativo da avaliação, esta deve recair, sobretudo, nas atividades de aprendizagem realizadas em aula, fornecendo feedback aos alunos para corrigirem erros e desenvolverem competências, tornando-os agentes ativos, reflexivos e responsáveis pela sua aprendizagem, na prossecução do desenvolvimento das competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

Algumas tarefas poderão ser pensadas especificamente para a avaliação sumativa, ou seja, para fazer balanços sobre as aprendizagens realizadas, mas devem sempre ter em vista futuras aprendizagens.

Devem ser usadas diferentes estratégias e instrumentos de avaliação, tais como resolução de fichas de trabalho, testes escritos em duas fases, apresentações orais, relatórios, resolução de um problema, situação de modelação ou de projeto, que devem integrar um portefólio do módulo ou da disciplina.

Neste módulo, deve ser incluída uma prova de entre as seguintes: realização de simulações de uma experiência aleatória simples ou de um relatório de análise de dados, com apresentação e defesa oral de um dos trabalhos realizados com recurso a meios computacionais ou tecnológicos. O professor deve acompanhar de forma especial estas provas (orientando o trabalho do aluno e apresentando propostas de reformulação se necessário).

PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes e a estabelecer ordem entre eles. O reconhecimento de padrões na tarefa (ou situação) apresentada, ou em problemas semelhantes anteriormente resolvidos, poderá contribuir para facilitar a estruturação das etapas de resolução.

Neste módulo podem efetuar-se pequenos programas em *Python*, onde se simulam experiências aleatórias simples, incentivando assim o espírito de iniciativa e a criatividade.

A folha de cálculo pode ser explorada de muitos modos, havendo muitas sugestões de trabalho nas referências. Podem por exemplo organizar dados numa folha de cálculo de modo a que sejam objeto de tratamento estatístico que deve passar pelo cálculo de estatísticas descritivas; realização de representações gráficas; e, construção de tabelas de contingência e diagramas de dispersão no caso de dados bivariados.

É importante que se desenvolva o espírito crítico quanto à utilização das representações gráficas mais adequadas ou das estatísticas que melhor resumem os dados em estudo.

POSSÍVEIS APROFUNDAMENTOS

Nos Dossiês Didáticos do ALEA existem muitos outros exemplos de explorações estatísticas com ferramentas tecnológicas, nomeadamente com uma folha de cálculo.

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

Alves, H. & Cunha, L. (2002). *Software Estatístico. Uma abordagem a alguns aplicativos, numa abordagem inicial dos dados*. Dossiês Didáticos n.º 12. ALEA. Obtido de: http://www.alea.pt/images/dossies_pdf/dossier12.pdf.

Cunha, L. (s/d). *Estatística com Excel*. Dossiês Didáticos n.º 4. ALEA. Obtido de http://www.alea.pt/images/dossies_pdf/dossier4.pdf.

Cunha, L. (s/d). *Probabilidades com Excel*. Dossiês Didáticos n.º 7. ALEA. Obtido de http://www.alea.pt/images/dossies_pdf/dossier7.pdf.

Graça Martins, M. E. & Loura, L. (2009). *Estatística Descritiva com Excel - Complementos*. Dossiês Didáticos n.º 13. ALEA. Obtido de http://www.alea.pt/images/dossies_pdf/dossier13.pdf.

Graça Martins, M. E. (2005). *Introdução à Probabilidade e à Estatística, com complementos de Excel*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística.

Graça Martins, M. E. & Loura, L. (2002). *Estatística, Modelos de Probabilidade e Introdução à Inferência Estatística* (edição da responsabilidade do DES, Lisboa). Obtido de <https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online>

Grupo de Trabalho T3. (1999). *Estatística e calculadoras gráficas*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Graça Martins, M. E. et al. (1997). *Estatística*. Lisboa: Ministério da Educação: Departamento do Ensino Secundário.

Martins, H. & Domingos, A. (2018). *Estatística no Secundário com Calculadora Gráfica*. Nova.Fct Editorial.

MATEMÁTICA | MÓDULO OP7

INTRODUÇÃO À INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS				
Linguagens e textos (A)	Informação e comunicação (B)	Raciocínio e resolução de problemas (C)	Pensamento crítico e pensamento criativo (D)	Relacionamento interpessoal (E)
Desenvolvimento pessoal e autonomia (F)	Bem-estar, saúde e ambiente (G)	Sensibilidade estética e artística (H)	Saber científico, técnico e tecnológico (I)	Consciência e domínio do corpo (J)

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

Conceitos chave | Ideias chave

Introdução à inferência estatística | Amostragem - amostras aleatórias | Intervalo de confiança

Neste módulo apresentam-se as ideias básicas de um tipo de raciocínio com que os alunos são confrontados pela primeira vez, em que a partir das propriedades estudadas num conjunto de dados - amostra, se tiram conclusões para um conjunto de dados mais vasto - população.

TEMAS, TÓPICOS E SUBTÓPICOS MATEMÁTICOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES QUE O ALUNO DEVE REVELAR	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	ÁREAS DE COMPETÊNCIA DO PERFIL DOS ALUNOS
<p>Introdução à inferência estatística</p> <p>Raciocínio indutivo ou inferencial</p> <p>Parâmetro e estatística</p> <p>Estimador e estimativa</p> <p>Amostras aleatórias</p> <p>Distribuição de amostragem de uma estatística</p>	<p>Compreender que o raciocínio indutivo ou inferencial se utiliza quando se pretende estudar uma população, analisando só alguns elementos dessa população, ou seja uma amostra, e que a partir das propriedades verificadas na amostra, se inferem propriedades para a população.</p> <p>Conhecer que parâmetro é uma característica numérica da população e que estatística é uma característica numérica da amostra.</p> <p>Compreender que um dos objetivos pretendidos ao recolher uma amostra da população, que se pretende estudar, é tirar conclusões sobre os parâmetros dessa população, considerando-se funções adequadas, estatísticas, que só dependem dos elementos da amostra.</p> <p>Saber que à estatística utilizada para estimar um parâmetro também se dá o nome de estimador e que ao valor do estimador para uma determinada amostra também se chama estimativa.</p> <p>Compreender que é necessário recolher uma amostra aleatória, quando se pretende utilizá-la para retirar conclusões para a população subjacente, pois só assim será possível utilizar a probabilidade para quantificar o erro cometido ao inferir para a população, os resultados aí verificados.</p> <p>Compreender que os processos de seleção da amostra podem ser sem reposição ou com reposição.</p> <p>Compreender que o processo da seleção da amostra é o primeiro passo importante para uma inferência estatística eficiente.</p> <p>Compreender que para averiguar da eficácia de um estimador para estimar um parâmetro, é necessário conhecer a sua distribuição de amostragem, ou seja, a distribuição dos valores obtidos pelo estimador, quando se consideram todas as amostras possíveis (da mesma dimensão), utilizando um determinado esquema de amostragem.</p> <p>Compreender que a distribuição de amostragem de um estimador depende da dimensão das amostras consideradas e apresentará tanto menor variabilidade, quanto maior for a dimensão das amostras.</p>	<p>Recorrer a contextos variados, que levem os alunos a tomar consciência de situações aleatórias, em que é necessário tomar decisões sobre populações, a partir de alguma informação recolhida dessas populações, na forma de dados.</p> <p>Orientar os alunos na leitura da ficha técnica que acompanha o resultado de uma sondagem, alertando que a tomada de decisões tem um erro associado, que vai ser contabilizado em termos de probabilidade.</p> <p>Salientar que o parâmetro é uma característica numérica da população, (normalmente desconhecida) enquanto a estatística é uma característica numérica da amostra (que se pode calcular). Exemplificar situações, como por exemplo, a média das alturas de todos os portugueses adultos, que é um parâmetro, enquanto a média das alturas de uma amostra é uma estatística, ou a proporção de eleitores decididos a votar em determinado candidato presidencial, que é um parâmetro, e a proporção de eleitores, que numa amostra, disseram ir votar nesse candidato, é uma estatística.</p> <p>Chamar a atenção dos alunos que o termo estatística se utiliza tanto para referir uma função das amostras, o estimador, como o valor observado dessa função para uma determinada amostra que tenha sido selecionada, a estimativa.</p> <p>Orientar os alunos na recolha de uma amostra, necessariamente aleatória, quando se pretende utilizá-la para estimar um parâmetro. Realçar que o valor do estimador depende da amostra considerada, podendo-se obter tantas estimativas diferentes, quantas as amostras consideradas, da mesma dimensão, sendo esta variabilidade inerente à aleatoriedade da escolha da amostra.</p> <p>Exemplificar a construção da distribuição de amostragem do estimador da proporção de homens numa população constituída por 3 mulheres e 2 homens, recolhendo amostras de dimensão 2.</p> <p>Conduzir, dada uma certa população, à obtenção da distribuição de amostragem da média, quando se pretende estimar o valor médio dessa população, utilizando a tecnologia gráfica para simular a recolha de amostras de determinada dimensão.</p> <p>Chamar a atenção dos alunos para a existência de duas fórmulas para calcular o desvio-padrão amostral, obtido a partir das fórmulas para a variância amostral: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ e $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$ e explicar que a razão da utilização da primeira, é ser a que fornece melhores estimativas quando se está a estimar o desvio-padrão populacional σ.</p>	<p>Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)</p> <p>Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avalia, valida e organiza a informação recolhida (B)</p> <p>Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C)</p> <p>Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C)</p> <p>Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)</p> <p>Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)</p> <p>Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão (I)</p>

Distribuição de amostragem da média Teorema Limite Central (TLC)

Compreender a utilização do Teorema Limite Central (TLC) na obtenção da distribuição de amostragem da média, quando se consideram amostras aleatórias de dimensão suficientemente grande, legitimando a utilização do modelo Normal e a utilização da média como estimador do valor médio μ .

Reconhecer as limitações das estimativas pontuais, na medida em que, devido à variabilidade amostral, podem apresentar tantos valores diferentes quantas as amostras utilizadas para as obter.

Modelo Normal

Reconhecer o modelo ou distribuição Normal, de suporte contínuo, como um dos modelos de probabilidade mais importantes para a modelação de fenómenos aleatórios.

Propriedades

Identificar que as curvas que representam esta família de modelos são simétricas, com o aspeto de um sino, e que cada distribuição Normal fica definida através dos parâmetros valor médio μ e desvio padrão σ .

Estimativas pontuais e estimativas intervalares

Compreender que o valor médio determina o centro de simetria da distribuição e que a distância entre o valor médio e as abcissas dos pontos de mudança de curvatura é igual ao desvio padrão.

Intervalo de confiança, para o valor médio, com uma confiança de 95%

Calcular probabilidades com base nesta família de modelos.

Intervalo de confiança, para o valor médio, com outros níveis de confiança de

$$100(1 - \alpha)\%$$

Utilizar o modelo Normal como aproximação da distribuição de amostragem do estimador média, para estimar o valor médio μ , desconhecido, de uma população com desvio padrão σ , para obter a seguinte probabilidade

$$P\left(\underline{X} - 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \underline{X} + 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0,95$$

e chamar ao intervalo

$$\left[\underline{x} - 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \underline{x} + 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Margem de erro

Intervalo de confiança para a proporção (populacional) p

um intervalo de 95% de confiança para μ , em que se substitui o parâmetro σ , quando desconhecido, pelo desvio-padrão amostral.

Reconhecer a fórmula geral para o intervalo de confiança, com uma confiança de $100(1 - \alpha)\%$,

$$\left[\underline{x} - z_{1-\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \underline{x} + z_{1-\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

onde $z_{1-\alpha/2}$ é o percentil de probabilidade $100(1 - \alpha/2)\%$ e saber que a margem de erro é igual a metade da amplitude do intervalo.

Reconhecer que a proporção (populacional) p , é um caso particular do valor médio de uma população constituída por uns e zeros, conforme a característica que se está a estudar está ou não presente na população e que o estimador que se utiliza é a proporção amostral, que se representa por \hat{p} .

Saber fazer uma leitura adequada da informação veiculada pela comunicação social quando apresentam resultados de sondagens, na forma de intervalos de confiança.

Salientar que obter a distribuição de amostragem da média seria uma tarefa, a maior parte das vezes, impossível, pois teria de se calcular o valor da média para todas as amostras aleatórias de determinada dimensão, de populações de grandes dimensões ou eventualmente infinitas. Esta situação é resolvida pelo TLC, segundo o qual o modelo Normal é uma aproximação para a sua distribuição de amostragem, independentemente da forma da distribuição da população subjacente.

Exemplificar a recolha de várias amostras aleatórias, da mesma dimensão, calculando o valor da média para cada uma delas e explorar esta situação, chamando a atenção para a impossibilidade de saber qual das estimativas se deve utilizar, para estimar o parâmetro valor médio, desconhecido, da população subjacente às amostras consideradas.

Destacar que o modelo Normal é, dos modelos contínuos, o mais conhecido para estudar variáveis aleatórias de suporte contínuo, como, por exemplo, a “altura” ou o “peso” de um indivíduo adulto.

Salientar que vários cientistas, ao trabalharem com dados, obtinham histogramas cuja população poderia ser modelada por um modelo Normal. Este modelo é a base de muitos dos processos de inferência estatística clássica.

Salientar a curva em forma de “sino” como representativa do modelo Normal, bem como o significado nessa curva dos valores da probabilidade associados a intervalos.

Utilizar a tecnologia para calcular probabilidades com base no modelo Normal.

Explorar o significado de intervalo aleatório, cuja leitura correta deve ser realçada, tendo em consideração que o aleatório está nos limites do intervalo, pelo que se deve ler “a probabilidade do intervalo conter μ , é 95%” e não “a probabilidade de μ estar contido”.

Realçar o significado da confiança de 95%. Sugerir que essa confiança pode ser entendida do seguinte modo: se recolhêssemos 100 amostras e se calculássemos para cada uma delas o intervalo $\left[\underline{x} - 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \underline{x} + 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ esperar-se-ia que aproximadamente 95 dos intervalos contivessem o valor médio; como, na prática, só se recolhe uma amostra, só se calcula um intervalo, não se sabendo se é um dos que contém ou não μ .

Sugerir a elaboração de um programa em *Python* que calcule o intervalo de 95% de confiança para o valor médio.

Explorar a relação entre a margem de erro, a confiança e a dimensão da amostra a recolher, para construir a estimativa intervalar.

Orientar os alunos na obtenção do intervalo de confiança para a proporção p , admitindo que o modelo de probabilidade para a população X e os parâmetros valor médio e variância populacional, são dados por

X	1	0
Probabilidade	p	$1 - p$

Valor médio de $X = p$

Variância de $X = p(1 - p)$

Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

AVALIAÇÃO

Valorizando o caráter formativo da avaliação, esta deve recair, sobretudo, nas atividades de aprendizagem realizadas em aula, fornecendo feedback aos alunos para corrigirem erros e desenvolverem competências, tornando-os agentes ativos, reflexivos e responsáveis pela sua aprendizagem, na prossecução do desenvolvimento das competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

Algumas tarefas poderão ser pensadas especificamente para a avaliação sumativa, ou seja, para fazer balanços sobre as aprendizagens realizadas, mas devem sempre ter em vista futuras aprendizagens.

Devem ser usadas diferentes estratégias e instrumentos de avaliação, tais como resolução de fichas de trabalho, testes escritos em duas fases, apresentações orais, relatórios, resolução de um problema, situação de modelação ou de projeto, que devem integrar um portefólio do módulo ou da disciplina.

Neste tema, devem ser incluídas duas provas de entre as seguintes: realização de um estudo estatístico recorrendo à inferência estatística, ou de um trabalho de pesquisa, ou de um relatório de análise de dados, com apresentação e defesa oral de um dos trabalhos realizados. O professor deve acompanhar de forma especial estas provas (orientando o trabalho do aluno e apresentando propostas de reformulação, se necessário).

PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes e a estabelecer ordem entre eles. O reconhecimento de padrões na tarefa (ou situação) apresentada, ou em problemas semelhantes anteriormente resolvidos, poderá contribuir para facilitar a estruturação das etapas de resolução.

Em várias ocasiões se podem recorrer a simulações computacionais para, por exemplo, obter uma simulação de amostragem da média de uma população finita, recolhendo amostras de determinadas dimensões.

Exemplo de programa em *Python* para explorar a noção de intervalo de confiança. Extraem-se sucessivas amostras, com a mesma dimensão, de uma população com distribuição Normal $N(0,1)$ e para cada uma delas apresenta-se o intervalo de 95% de confiança para o valor médio. Pode verificar-se que este intervalo depende da amostra e que nem sempre contém o valor médio da população. Pode também fazer-se variar a dimensão das amostras e comparar as amplitudes dos intervalos.

```
import random
import statistics
import math

num_amostras=100
dim_amostra=20

for i in range(num_amostras):
    amostra=[random.normalvariate(0,1) for k in range(dim_amostra)]
    vmedio=statistics.mean(amostra)
    desvio_padrao=statistics.stdev(amostra)
    d=1.96*desvio_padrao/math.sqrt(dim_amostra)
    print('O intervalo de 95% de confiança para o valor médio é [' ,vmedio-d ,',',vmedio+d ,']')
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

POSSÍVEIS APROFUNDAMENTOS

Nada se sugere atendendo à variedade de temas tratados.

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

Alea - Introdução à Inferência Estatística:. Obtido de http://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=133&Itemid=1205&lang=pt

Cunha, L. (s/d). Estatística com Excel. *Dossiês Didáticos n.º 4*. ALEA. Obtido de http://www.alea.pt/images/dossies_pdf/dossier4.pdf

Ferreira, M.J. & Campos, P.. (s/d). O Inquérito Estatístico. *Dossiês Didáticos n.º 11*. ALEA. Obtido de http://www.alea.pt/images/dossies_pdf/dossier11.pdf

Graça Martins, M. E. & Loura, L. (2002). *Estatística, Modelos de Probabilidade e Introdução à Inferência Estatística* (edição da responsabilidade do DES, Lisboa). Obtido de <https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online>

Graça Martins, M. E.. (2005). *Introdução à Probabilidade e à Estatística, com complementos de Excel*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística.

MATEMÁTICA | MÓDULO OP8

GEOMETRIA SINTÉTICA

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS				
Linguagens e textos (A)	Informação e comunicação (B)	Raciocínio e resolução de problemas (C)	Pensamento crítico e pensamento criativo (D)	Relacionamento interpessoal (E)
Desenvolvimento pessoal e autonomia (F)	Bem-estar, saúde e ambiente (G)	Sensibilidade estética e artística (H)	Saber científico, técnico e tecnológico (I)	Consciência e domínio do corpo (J)

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

Conceitos chave | Ideias chave

Figuras geométricas no plano e no espaço | Áreas e volumes | Problemas de empacotamento

A Geometria Sintética trata de formas, das suas propriedades e das suas relações, devendo contribuir para o desenvolvimento da sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real e o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações e na comunicação, assim como capacidades para explorar, conjecturar, raciocinar logicamente, usar e aplicar a Matemática.

TEMAS, TÓPICOS E SUBTÓPICOS MATEMÁTICOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES QUE O ALUNO DEVE REVELAR	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	ÁREAS DE COMPETÊNCIA DO PERFIL DOS ALUNOS
<p>GEOMETRIA SINTÉTICA</p> <p>Geometria no plano</p> <p>Perímetros e áreas de figuras semelhantes</p>	<p>Compreender a noção de semelhança. Relacionar área e perímetro de figuras planas semelhantes.</p> <p>Utilizar escalas para o cálculo de perímetros e áreas.</p> <p>Conhecer um ou mais problemas e factos marcantes da História da Geometria ou das aplicações contemporâneas da semelhança de figuras.</p>	<p>Propor o cálculo de perímetros e áreas a partir da análise de plantas, recorrendo à escala aplicada, para determinar, por exemplo: o custo associado à pintura das paredes de uma casa; a compra de mosaico ou de azulejo; os custos para proceder à vedação de um jardim.</p> <p>Propor a elaboração de um trabalho de pesquisa sobre problemas históricos ou aplicações contemporâneas da semelhança de figuras, por exemplo: a altura da grande pirâmide do Egito, por Tales de Mileto; modelagem 3D de fotografias de pessoas no computador para determinar o seu aspeto em diferentes idades; identificar padrões de crescimento alométrico; utilizar a ferramenta Google Maps para a determinação de uma área de um determinado terreno; utilizar exemplos das viagens espaciais, por exemplo os fornecidos pela NASA e pela ESA-Agência Espacial Europeia.</p> <p>Orientar os alunos a exprimir, oralmente e por escrito a sua exploração dos exemplos trabalhados, evidenciando o domínio dos conceitos, dos raciocínios e das ideias matemáticas usados, interpretando textos de Matemática e justificando raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo a vocabulário e linguagem próprios da matemática.</p>	<p>Apresenta e explica conceitos em grupos, ideias e projetos diante de audiências reais, presencialmente ou a distância. (B)</p> <p>Preocupa-se com a construção de um futuro sustentável e envolve-se em projetos de cidadania ativa. (G)</p> <p>Têm consciência de si próprio a nível emocional, cognitivo, psicossocial, estético e moral por forma a estabelecer consigo próprio e com os outros uma relação harmoniosa. (J)</p>
<p>Geometria no Espaço</p> <p>Medidas de volume e capacidade</p> <p>Volumes de sólidos</p> <p>Áreas de superfícies</p>	<p>Desenvolver a capacidade de visualização no espaço tridimensional.</p> <p>Resolver problemas de cálculo de medidas, nomeadamente, volumes ou superfícies.</p> <p>Resolver problemas do quotidiano envolvendo áreas de superfícies.</p> <p>Resolver problemas do quotidiano envolvendo volumes e capacidades.</p> <p>Relacionar sólidos semelhantes com os respetivos volumes.</p>	<p>Propor a resolução de problemas que impliquem o cálculo de volumes e superfícies de diferentes sólidos geométricos ou resultantes da composição dos mesmos, a partir da análise de modelos 3D ou da sua representação, por exemplo: a capacidade de um determinado tanque ou a quantidade de água necessária para encher uma piscina; o material e os custos gastos num embrulho; o material e custos associados à construção de uma maquete.</p> <p>Incentivar os alunos a explorar a relação entre volumes de sólidos semelhantes, recorrendo ao Geogebra ou outro software de geometria dinâmica.</p>	<p>Têm consciência de si próprio a nível emocional, cognitivo, psicossocial, estético e moral por forma a estabelecer consigo próprio e com os outros uma relação harmoniosa. (J)</p>
<p>Empacotamento</p>	<p>Aplicar os conceitos de volume e capacidade no cálculo de quantidades e custos.</p> <p>Investigar a melhor solução de empacotamento de objetos num determinado contentor.</p>	<p>Propor o desenvolvimento de um trabalho de projeto, individual ou a pares, podendo agregar outra(s) disciplina(s), que envolva em contexto real uma situação de um empacotamento, nomeadamente: escolha do produto; eficácia do empacotamento; otimização dos custos.</p>	

AVALIAÇÃO

Valorizando o caráter formativo da avaliação, esta deve recair, sobretudo, nas atividades de aprendizagem realizadas em aula, fornecendo feedback aos alunos para corrigirem erros e desenvolverem competências, tornando-os agentes ativos, reflexivos e responsáveis pela sua aprendizagem, na prossecução do desenvolvimento das competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

Algumas tarefas poderão ser pensadas especificamente para a avaliação sumativa, ou seja, para fazer balanços sobre as aprendizagens realizadas, mas devem sempre ter em vista futuras aprendizagens.

Para a avaliação destes alunos, sugere-se que os professores recorram a vários instrumentos de avaliação (por exemplo, trabalhos e relatórios, estudos e composições, preparação de apresentações e participação em debates) que sejam adequados à diversidade das aprendizagens e aos contextos em que ocorrem. Atividades como construção de modelos necessários para a compreensão e representação das situações em estudo e os relatórios respetivos, podem e devem ser valorizados como provas de avaliação e ser acompanhadas pelo professor, que poderá apresentar propostas de reformulação se necessário.

Poderão ser selecionados, por exemplo, relatórios e respetivas apresentações, como por exemplo: um trabalho de pesquisa sobre problemas históricos ou aplicações contemporâneas da semelhança de figuras ou do trabalho de projeto relativo ao empacotamento.

POSSÍVEIS APROFUNDAMENTOS

Caso haja tempo disponível poderá ser feita uma referência ao problema da Mochila e à sua complexidade matemática:

Landau, E. (2020). *How the Mathematical Conundrum Called the ‘Knapsack Problem’ Is All Around Us*. SMITHSONIANMAG.COM

MARCH 9, 2020. Obtido de <https://www.smithsonianmag.com/science-nature/why-knapsack-problem-all-around-us-180974333/>.

O uso do software português GECLA (abreviatura de Gerador e Classificador) desenvolvido pelo Atractor fornece uma excelente oportunidade para explorar.

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA:

Agrupamento de Escolas D. Pedro I (2018). *Geometria no Empacotamento*. Obtido de http://agrupamento.dpedro.net/wp-content/uploads/2018/04/Prova2_Geometria_N%C3%ADvel-II.pdf

Caraça, B. J. (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva.

Cássio, J. (2019). *Aprendendo Geometria Plana com a Plataforma GeoGebra*. Obtido de <https://www.geogebra.org/m/hsXHDX7>

Estrada, M. F. et al. (2000). *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Gupta, M. (1977). *The Geometry of Art and Life*. New York: Dover.

IMPA (2020). *As lições de geometria do isolamento social*. Obtido de <https://impa.br/noticias/as-licoes-de-geometria-do-isolamento-social/>

Loureiro, C. et al. (1997). *Geometria 10º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Loureiro, C. et al. (1998). *Geometria 11º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Martins, R. (2016). *Isto é Matemática - T10E10 - “Empacotamentos”*. Obtido de <https://youtu.be/q2DWiAlw5Wk>

OBMEP (2019). *Atividade: Proporção em Geometria*. Obtido de <http://clubes.obmep.org.br/blog/atividade-proporcao-em-geometria-2/>

Precatado, A. & Guimarães, H. (2001). *Materiais para a aula de Matemática*. Lisboa: APM.

Sebastião e Silva, J. (1970). *Geometria Analítica Plana*. Lisboa: Empresa Literária Fluminense.

Sebastião e Silva, J. (1976). *A Matemática na Antiguidade*. Lisboa: SPM.

Veloso, E. (1998). *Geometria - Temas atuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

MATEMÁTICA | MÓDULO OP9

PADRÕES GEOMÉTRICOS

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS				
Linguagens e textos (A)	Informação e comunicação (B)	Raciocínio e resolução de problemas (C)	Pensamento crítico e pensamento criativo (D)	Relacionamento interpessoal (E)
Desenvolvimento pessoal e autonomia (F)	Bem-estar, saúde e ambiente (G)	Sensibilidade estética e artística (H)	Saber científico, técnico e tecnológico (I)	Consciência e domínio do corpo (J)

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

Conceitos chave | Ideias chave

Figuras geométricas no plano e no espaço | Transformações geométricas | Frisos | Rosáceas | Pavimentações

Na formação geral dos cidadãos e, em especial, para os que se dedicam a algumas profissões, a observação de representações no património construído, na decoração e nos artefactos do quotidiano é fundamental até para a atribuição de valor estético e para a compreensão da geometria como ciência estruturante do gosto. A descoberta de regularidades e padrões nas observações e a capacidade de os reconstruir a partir de elementos fundamentais são competências muito importantes.

Pretende-se que os alunos desenvolvam competências geométricas de visualização e classificação das regularidades dos padrões e das transformações geométricas, através da realização de atividades, em papel e com instrumentos de desenho e corte ou recorrendo a programas de geometria dinâmica e computadores. A lecionação deste módulo deve considerar as aprendizagens realizadas noutras disciplinas, particularmente naquelas onde há trabalho de desenho técnico ou de qualquer tipo de representações geométricas.

TEMAS, TÓPICOS E SUBTÓPICOS MATEMÁTICOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES QUE O ALUNO DEVE REVELAR	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	ÁREAS DE COMPETÊNCIA DO PERFIL DOS ALUNOS
<p>PADRÕES GEOMÉTRICOS</p> <p><i>A Matemática no património</i></p>	<p>Analisar geometricamente problemas históricos ou exemplares do património artístico.</p> <p>Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico no estudo de problemas históricos ou do património artístico.</p>	<p>Propor a elaboração de um trabalho de pesquisa, selecionando problemas históricos ou exemplares do património artístico, como por exemplo:</p> <p>recorrer ao SIPA (Sistema de Informação do Património Arquitetónico) e escolher 2 edifícios emblemáticos do nosso património, descrevendo as pavimentações existentes; (ex: pesquisar por azulejo, ladrilho, pavimento).</p> <p>identificar um artista ou pintor que utilize pavimentações no seu trabalho, escolher duas obras do mesmo e descrever as pavimentações existentes; (ex: Amadeo Souza-Cardoso, Almada Negreiros ou Maurits Escher);</p> <p>Identificar e descrever um problema histórico com a aplicação de pavimentações; (ex: o puzzle Stomachion de Arquimedes, o teorema das quatro cores ou padrões de degrau encontrados em manuscritos Celtas);</p> <p>Conhecer o conceito de fractal e apresentar alguns exemplos, tais como o triângulo de Sierpynsky ou o floco de neve de Koch.</p>	<p>Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avaliando, validando e organizando a informação recolhida. (B)</p> <p>Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões. (D)</p>
<p>Pavimentações</p> <p>Padrões</p>	<p>Determinar a amplitude dos ângulos internos de um polígono regular.</p> <p>Reconhecer e construir as pavimentações regulares e semi-regulares no plano e classificá-las.</p>	<p>Promover o estudo de pavimentações regulares e semi-regulares, recorrendo a materiais manipuláveis.</p> <p>Propor o desenvolvimento e a apresentação de um trabalho de projeto, individual ou a pares, que permita aos alunos identificarem uma pavimentação regular e uma semi-regular, no meio circundante (escola, cidade, habitação, ...), ou na calçada portuguesa. Depois de identificadas essas pavimentações:</p> <p>destacar as figuras geométricas que as compõem;</p> <p>calcular a área das figuras da região fundamental.</p>	<p>É confiante, resiliente e persistente, construindo caminhos personalizados de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências. (F)</p>
<p>Isometrias</p> <p>Frisos</p> <p>Rosáceas</p>	<p>Reconhecer e aplicar isometrias no plano.</p> <p>Compreender e ser capaz de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas.</p> <p>Estudar padrões geométricos planos, em particular frisos e rosáceas.</p> <p>Representar e construir modelos de composição de objetos geométricos no plano.</p> <p>Ser capaz de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos.</p>	<p>Incentivar a construção de frisos e rosáceas, utilizando transformações geométricas num software de geometria dinâmica para investigar as propriedades das transformações geométricas (translação, rotação, reflexão, reflexão deslizante).</p> <p>Fomentar a recolha de imagens da arte decorativa, nomeadamente entre as do património artístico nacional ou dos países de origem dos alunos, para analisar simetrias e classificar frisos, utilizando um fluxograma ou uma chave dicotómica.</p>	

AVALIAÇÃO

Valorizando o caráter formativo da avaliação, esta deve recair, sobretudo, nas atividades de aprendizagem realizadas em aula, fornecendo feedback aos alunos para corrigirem erros e desenvolverem competências, tornando-os agentes ativos, reflexivos e responsáveis pela sua aprendizagem, na prossecução do desenvolvimento das competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

Algumas tarefas poderão ser pensadas especificamente para a avaliação sumativa, ou seja, para fazer balanços sobre as aprendizagens realizadas, mas devem sempre ter em vista futuras aprendizagens.

Neste módulo, devem ser incluídas na avaliação elementos de cada tema explorado, decorrentes das atividades realizadas pelos alunos. Esta poderá incidir no trabalho desenvolvido pelo aluno, com a apresentação oral dos trabalhos realizados.

O professor deve acompanhar de forma especial as atividades do aluno (orientando o trabalho desenvolvido e apresentando propostas de reformulação, se necessário).

POSSÍVEIS APROFUNDAMENTOS

Poderão ser brevemente referidas as pavimentações não regulares do plano desenvolvidas pelo matemático e físico Roger Penrose (que, por outro trabalho, recebeu o Prémio Nobel da Física em 2020). Pode ser realizada na sala de aula uma atividade semelhante à relatada em:

Terroso, J. (2015). A exploração de isometrias nas Pavimentações de Penrose numa turma de 8º ano, *Educação & Matemática*, nº 134, p. 17-22. Obtido de <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1484>

O uso do software português GECLA (abreviatura de Gerador e Classificador) desenvolvido pelo Atractor fornece uma excelente oportunidade para explorar padrões, frisos e rosáceas. Permite gerar no plano um padrão, um friso, ou uma rosácea, com um determinado tipo de simetria previamente escolhido, a partir de um motivo assimétrico. Permite também classificar (com ou sem ajuda do programa) padrões, frisos, ou rosáceas assim obtidos. Pode ser usado também no formato competição.

O software GECLA é gratuito e pode ser descarregado aqui: <https://www.atractor.pt/mat/GeCla/>

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

Atractor. (2018). *A Matemática dos Azulejos*, *Gazeta de Matemática*, nº 186, p. 3-9. Obtido de <https://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=1484>

Bastos, R. (2006). *Simetria*, *Educação & Matemática*, nº 88, p. 9-11. Obtido de <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1484>

Ricardo Teixeira <http://sites.uac.pt/rteixeira/simetrias/>

Rota das Simetrias da Calçada Portuguesa de Lisboa. Obtido de https://www.mat.uc.pt/mpt2013/files/RotaSimetrias_INFO.pdf

Science for All: Symmetries and Group Theory. Obtido de <http://www.science4all.org/article/symmetries/>

Tessellation Artists around the Globe. Obtido de <https://tessellations.ca/2017/02/24/tessellation-artists-around-the-globe/>

Transformações geométricas nos Programas de Matemática do Ensino Básico e Secundário. Obtido de <http://www.mat.uc.pt/~mat0232/Formularios/Transf.pdf>

Veloso, E. (1998). *Geometria - Temas atuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Veloso, E. (2012). *Simetria e Transformações Geométricas*. Lisboa: APM.

Veloso, E. et al. (2009). *Isometrias e Simetria com materiais manipuláveis*, *Educação & Matemática*, nº 101, p. 23-28. Obtido de <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1746>

MATEMÁTICA | MÓDULO OP10

MATEMÁTICA E ARTE

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS				
Linguagens e textos (A)	Informação e comunicação (B)	Raciocínio e resolução de problemas (C)	Pensamento crítico e pensamento criativo (D)	Relacionamento interpessoal (E)
Desenvolvimento pessoal e autonomia (F)	Bem-estar, saúde e ambiente (G)	Sensibilidade estética e artística (H)	Saber científico, técnico e tecnológico (I)	Consciência e domínio do corpo (J)

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

Conceitos chave | Ideias chave

Arte | Perspetiva linear | Poliedros | Proporções

No âmbito do património artístico encontramos muito da harmonia da matemática e seu ritmo. Essas características estão presentes na arquitetura, escultura, pintura e na música. Beleza e rigor são comuns a ambas. A Matemática tem um notável potencial de revelação de estruturas e padrões que nos permitem compreender o mundo que nos rodeia.

Neste módulo são aplicadas estratégias de ensino da Matemática através da Arte em diversas vertentes, podendo a temática selecionada ser adaptada aos alunos e à sua área de formação.

TEMAS, TÓPICOS E SUBTÓPICOS MATEMÁTICOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES QUE O ALUNO DEVE REVELAR	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	ÁREAS DE COMPETÊNCIA DO PERFIL DOS ALUNOS
<p>MATEMÁTICA E ARTE</p> <p><i>Atividades Investigativas</i></p> <p><i>Comunicação Matemática</i></p>	<p>Apreciar o contributo da Matemática para a atividade artística, tendo por base o conhecimento de problemas e factos marcantes da História da Arte e da Matemática, discutindo-os em confronto com os conhecimentos disponíveis.</p> <p>Conhecer pintores, escultores, designers ou arquitetos que usaram a Matemática ou que encontraram inspiração nos conceitos matemáticos para as suas obras.</p> <p>Utilizar a Matemática para analisar e interpretar obras de arte (pintura, escultura, design, arquitetura, ...).</p> <p>Aprofundar autonomamente conhecimentos matemáticos relacionados com uma obra de arte, uma escola, um artista ou um período da História da Arte e apresentá-los, de forma clara e organizada.</p> <p>Expressar, oralmente e por escrito, conceitos, ideias e raciocínios matemáticos, interpretando textos de Matemática e justificando raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo ao vocabulário e linguagem próprios da matemática.</p>	<p>Propor aos alunos a escolha de uma obra, um artista, uma escola ou um período da História da Arte e investigar as técnicas ou conceitos de origem matemática usados ou que podem ser utilizados para interpretar a obra.</p> <p>Proporcionar aos alunos, em experiências individuais e colaborativas, o aprofundamento de forma autónoma e em interação com os outros, de conhecimentos matemáticos em contextos históricos e artísticos, através da construção de sínteses e na elaboração de relatórios.</p> <p>Organizar momentos em que os alunos tenham oportunidade de comunicar resultados de aprendizagens através de trabalhos e/ou projetos de diversa natureza: textos, imagens, desenhos, posters, maquetes, portefólios, debates, exposições, vídeos, apresentações digitais, blogues e/ou outros produtos multimédia, elaborados individualmente ou em grupo, realizados no contexto da disciplina e/ou de forma interdisciplinar.</p>	<p>Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A)</p> <p>Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais; avalia, valida e organiza a informação recolhida. (B)</p> <p>Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo. (C)</p> <p>Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição. (D)</p> <p>É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências. (F)</p> <p>Mobiliza os processos de reflexão, comparação e argumentação em relação às produções artísticas e tecnológicas, integradas nos contextos sociais, geográficos, históricos e políticos. (H)</p> <p>Aprecia criticamente as realidades artísticas, em diferentes suportes tecnológicos, pelo contacto com os diversos universos culturais. (H)</p>

TEMAS, TÓPICOS E SUBTÓPICOS MATEMÁTICOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES QUE O ALUNO DEVE REVELAR	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	ÁREAS DE COMPETÊNCIA DO PERFIL DOS ALUNOS
<p>Exemplos de trabalhos de pesquisa</p> <p>Apresentam-se três exemplos, entre outros possíveis, sendo que em cada caso os conhecimentos matemáticos a aprofundar serão necessariamente diferentes.</p>			
<p>1. Matemática e Arte no Renascimento</p> <p><i>Perspetiva linear</i></p>	<p>Conhecer a obra de Brunelleschi, Leon Battista Alberti, Piero della Francesca e Albrecht Dürer e os conceitos matemáticos que usaram nas suas obras.</p> <p>Aprofundar conhecimentos matemáticos relacionados com as obras destes artistas, precursores da perspetiva linear e da geometria projetiva, estudando conceitos como por exemplo: plano de tela, ponto de fuga, linha do horizonte, linhas de fuga, projeções e secções.</p> <p>Encontrar os elementos da perspetiva linear em obras de arte desta época e fazer as suas representações em réplicas dessas obras.</p>	<p>Propor aos alunos a elaboração de um trabalho de pesquisa sobre a perspetiva linear no Renascimento com o objetivo de investigarem as técnicas ou conceitos de origem matemática usados ou que podem ser utilizados para interpretar as obras de arte.</p> <p>Organizar momentos em que os alunos tenham oportunidade de comunicar, de variadas formas, os resultados das suas aprendizagens.</p>	<p>Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos. (E)</p> <p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)</p>
<p>2. Matemática e arquitetura</p> <p><i>Poliedros</i></p>	<p>Conhecer a obra de arquitetos, como por exemplo, Rafael Leoz, Anna e Ricardo Bofill, Piet Blom, Richard Fuller, Arata Isozaki, Antoni Gaudi, Siza Vieira, Souto Moura, Philip Johnson ou Zaha Hadid, e os conceitos matemáticos que usaram nas suas obras.</p> <p>Aprofundar conhecimentos matemáticos relacionados com as obras destes arquitetos, estudando os poliedros visíveis nas suas obras, bem como outros conceitos geométricos.</p> <p>Elaborar uma maquete, com materiais recicláveis, de uma das obras de um desses arquitetos que evidencie os poliedros que serviram de inspiração a essa obra.</p>	<p>Propor aos alunos a elaboração de um trabalho de pesquisa sobre a obra de um ou mais arquitetos com o objetivo de investigarem as técnicas ou conceitos de origem matemática usados nas suas obras.</p> <p>Organizar momentos em que os alunos tenham oportunidade de comunicar, de variadas formas, os resultados das suas aprendizagens.</p>	<p>Domina a capacidade percetivo-motora (imagem corporal, direcionalidade, afinamento percetivo e estruturação espacial e temporal). (J)</p>
<p>3. Le Corbusier</p> <p><i>Proporções</i></p>	<p>Conhecer os conceitos matemáticos presentes na obra do arquiteto Le Corbusier.</p> <p>Aprofundar conhecimentos matemáticos relacionados com as obras de Le Corbusier, especialmente os que se referem ao “Le modular” e às proporções entre as medidas da figura humana, com repercussões no design de objetos ergonómicos.</p> <p>Realizar um trabalho de antropometria com a recolha de medidas do corpo humano numa amostra da população, verificando proporções e estabelecendo correlações entre algumas dessas medidas, comparando-as com as propostas por Le Corbusier.</p>	<p>Propor aos alunos a elaboração de um trabalho de pesquisa sobre a obra de Le Corbusier com o objetivo de investigarem as técnicas ou conceitos de origem matemática usados nas suas obras.</p> <p>Organizar momentos em que os alunos tenham oportunidade de comunicar, de variadas formas, os resultados das suas aprendizagens.</p>	

AVALIAÇÃO

Valorizando o carácter formativo da avaliação, esta deve recair, sobretudo, nas atividades de aprendizagem realizadas em aula, fornecendo feedback aos alunos para corrigirem erros e desenvolverem competências, tornando-os agentes ativos, reflexivos e responsáveis pela sua aprendizagem, na prossecução do desenvolvimento das competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

Algumas tarefas poderão ser pensadas especificamente para a avaliação sumativa, ou seja, para fazer balanços sobre as aprendizagens realizadas, mas devem sempre ter em vista futuras aprendizagens.

Para a avaliação sumativa destes alunos, sugere-se que os professores recorram a vários instrumentos de avaliação (por exemplo, trabalhos e relatórios, estudos e composições, preparação de apresentações e participação em debates) que sejam adequados à diversidade das aprendizagens e aos contextos em que ocorrem. Atividades como construção de modelos necessários para a compreensão e representação das situações em estudo e os relatórios respetivos, podem e devem ser valorizados como provas de avaliação.

Poderão ser selecionados, por exemplo, os relatórios e respetivas apresentações de um trabalho de pesquisa sobre uma obra de arte, um artista, uma escola ou um período e investigar as técnicas ou conceitos de origem matemática usados ou que podem ser utilizados para interpretar a obra.

POSSÍVEIS APROFUNDAMENTOS

Neste tema podem ser utilizadas diversas aplicações interativas que permitem explorar diferentes configurações. Podem ser exploradas as aplicações interativas da exposição Formas & Fórmulas:

<http://formas-formulas.fc.ul.pt/multimedia/interactivo/>

Podem ser usados os módulos de software construídos pelo IMAGINARY, em casa, na escola ou num museu. Todos os módulos incluem especificações para instalações públicas:

<https://www.imaginary.org/programs>

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

Atractor (2003). *O ritmo das formas - Itinerário matemático (e não só) no mundo da simetria*. Ed. Atractor.

Atractor (2018). *A Matemática dos Azulejos*. Gazeta de Matemática, nº 186, p. 3-9. Obtido de <https://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=1484>

Bastos, R. (2006). *Simetria*. Educação & Matemática, nº 88, p. 9-11. Obtido de <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1484>

IMAGINARY. Obtido de <https://www.imaginary.org/>

King, J. & Schattschneider, D. (Eds.). (2003). *Geometria Dinâmica*. Lisboa: APM.

Marques, A. (2020). *O Século de Le Corbusier*. Obtido de <https://www.acasinhadamatematica.pt/?p=17698>

Museu da Ciência. (2012). *Imaginary - Matemática e Natureza*. Coimbra: Universidade de Coimbra.

Museu Nacional de História Natural e da Ciência (2012/2013). *Formas & Fórmulas (Conceitos naturais e matemáticos em ação e interação)*. Universidade de Lisboa. Obtido de <http://formas-formulas.fc.ul.pt/>

Reis, L. (2007). *Le Modulor por Le Corbusier*. Educação & Matemática, nº 93, p. 43-48. Obtido de <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1612/1651>

Siqueira, V., Sirilo, G. & Marques, J. (2017). *A proporção no corpo humano e sua influência na arquitetura*. Obtido de https://www.researchgate.net/publication/342666922_A_PROPORCAO_NO_CORPO_HUMANO_E_SUA_INFLUENCIA_NA_ARQUITETURA

Teixeira, R. (2013). *Simetrias nos Açores*. Obtido de <http://sites.uac.pt/rteixeira/simetrias/>

Veloso, E. (1998). *Geometria - Temas atuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Veloso, E. (2012). *Simetria e Transformações Geométricas*. Lisboa: APM.

Veloso, E. (2020). *Arte e Geometria no Renascimento*. Lisboa: APM. Obtido de https://wordpress.apm.pt/wp-content/uploads/2020/10/ArtGeom_OUT_2020.pdf

Veloso, E. et al. (2009). *Isometrias e Simetria com materiais manipuláveis*. Educação & Matemática, n.º 101, p. 23-28. Obtido de <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1746>

MATEMÁTICA | MÓDULO OP11

DISTÂNCIAS INACESSÍVEIS

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS

Linguagens e textos (A)	Informação e comunicação (B)	Raciocínio e resolução de problemas (C)	Pensamento crítico e pensamento criativo (D)	Relacionamento interpessoal (E)
Desenvolvimento pessoal e autonomia (F)	Bem-estar, saúde e ambiente (G)	Sensibilidade estética e artística (H)	Saber científico, técnico e tecnológico (I)	Consciência e domínio do corpo (J)

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

Conceitos chave | Ideias chave

Resolução de triângulos | Lei dos Senos | Lei dos Cossenos | Medição de distâncias inacessíveis

Neste módulo pretende-se que o aluno consiga integrar a semelhança de triângulos e a trigonometria na resolução de problemas mais avançados por forma a determinar lados e ângulos em problemas com triângulos retângulos e não retângulos, podendo assim calcular todo o tipo de distâncias inacessíveis. As aprendizagens deverão contribuir para desenvolver a aptidão para utilizar a visualização, a representação e raciocínio espacial na análise de situações problemáticas em contexto real e na resolução de problemas.

TEMAS, TÓPICOS E SUBTÓPICOS MATEMÁTICOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES QUE O ALUNO DEVE REVELAR	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	ÁREAS DE COMPETÊNCIA DO PERFIL DOS ALUNOS
<p>DISTÂNCIAS INACESSÍVEIS</p> <p>Resolução de triângulos retângulos</p> <p>Resolução de triângulos obliquângulos</p>	<p>Conhecer e aplicar as relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo retângulo.</p> <p>Formular e resolver problemas geométricos ou da vida real que envolvam triângulos retângulos e o cálculo de medidas dos seus lados e dos seus ângulos.</p> <p>Estabelecer relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo não retângulo, a partir da sua decomposição em triângulos retângulos.</p> <p>Conhecer e aplicar nos processos de resolução de triângulos não retângulos a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos.</p> <p>Formular e resolver problemas geométricos ou da vida real que envolvam triângulos não retângulos e o cálculo de medidas dos seus lados e dos seus ângulos.</p> <p>Conhecer problemas e factos marcantes da História da Trigonometria e analisá-los em confronto com os conhecimentos disponíveis.</p> <p>Utilizar a visualização, a representação e o raciocínio espacial na análise de situações problemáticas da vida real e na resolução de problemas, construindo modelos úteis e adequados com recurso a medições e escalas.</p>	<p>Propor a resolução de problemas de triângulos retângulos, utilizando a variação de ângulos/lados, envolvendo situações concretas, como por exemplo sombras ao longo do dia ou alturas de edifícios.</p> <p>Propor a resolução de problemas que envolvam triângulos não retângulos, usando: decomposição em triângulos retângulos; Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos.</p> <p>Promover a aplicação de conhecimentos de trigonometria a situações da vida real, através da elaboração de esquemas, da identificação de triângulos, da escolha das relações trigonométricas adequadas e da validação das soluções.</p> <p>Propor a elaboração de um trabalho de pesquisa sobre problemas históricos que tenham envolvido o cálculo de distâncias inacessíveis, tais como: a altura da grande pirâmide do Egito por Thales de Mileto; o raio da Terra por Eratóstenes; a construção do túnel da ilha de Samos; a altura de uma falésia do Manual Matemático da Ilha do Mar do chinês Liu Hui; cálculos astronómicos no Observatório de Jantar Mantar, Ujjain, Índia.</p> <p>Recorrer a situações e contextos variados, que envolvam aplicações e modelação matemática, incluindo a utilização de materiais diversificados e tecnologia, de modo a proporcionar aos alunos experiências individuais e colaborativas que integrem a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação matemática.</p>	<p>Reconhece e utiliza linguagem simbólica. (A)</p> <p>Mobiliza os processos de reflexão, comparação e argumentação em relação às produções artísticas e tecnológicas, integradas nos contextos sociais, geográficos, históricos e políticos. (H)</p> <p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)</p>
<p>Determinação de distâncias inacessíveis</p>	<p>Determinar lados e ângulos em problemas com triângulos retângulos e não retângulos, para calcular todo o tipo de distâncias inacessíveis.</p> <p>Expressar, oralmente e por escrito, conceitos, raciocínios e ideias matemáticas, interpretando textos de matemática e justificando raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo ao vocabulário e linguagem próprios da matemática.</p>	<p>Propor aos alunos a elaboração de um projeto de determinação de uma distância inacessível, usando instrumentos adequados de medição, ainda que rudimentares e construídos pelos alunos. Pode por exemplo ser usado um teodolito caseiro (transferidor, palhinha e fio de prumo ou clip), ou podem ser usados exemplos de livros antigos que recorrem ao grafómetro.</p> <p>Utilizar ferramentas tecnológicas específicas, incluindo calculadoras científicas ou gráficas e um programa de geometria dinâmica para: simular e modelar situações da vida real ou da geometria, fazer conjecturas, formular e resolver problemas.</p>	

AVALIAÇÃO

Valorizando o caráter formativo da avaliação, esta deve recair, sobretudo, nas atividades de aprendizagem realizadas em aula, fornecendo feedback aos alunos para corrigirem erros e desenvolverem competências, tornando-os agentes ativos, reflexivos e responsáveis pela sua aprendizagem, na prossecução do desenvolvimento das competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

Algumas tarefas poderão ser pensadas especificamente para a avaliação sumativa, ou seja, para fazer balanços sobre as aprendizagens realizadas, mas devem sempre ter em vista futuras aprendizagens.

Para a avaliação sugere-se que os professores recorram a vários instrumentos de avaliação (por exemplo, trabalhos e relatórios, estudos e composições, preparação de apresentações e participação em debates) que sejam adequados à diversidade das aprendizagens e aos contextos em que ocorrem. Atividades como construção de modelos necessários para a compreensão e representação das situações em estudo e os respetivos relatórios devem ser valorizados como provas de avaliação.

Poderão ser selecionados, por exemplo, os relatórios e as apresentações de um trabalho de pesquisa sobre problemas históricos que tenham envolvido o cálculo de distâncias inacessíveis ou de um projeto de determinação de uma distância inacessível, usando instrumentos adequados de medição, ainda que rudimentares e construídos pelos alunos.

POSSÍVEIS APROFUNDAMENTOS

Poderá ser mais explorada a Lei dos Senos, abordando a sua demonstração e mais aplicações, como aparece na página da Casa das Ciências:

- Lei dos Senos: https://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php/Lei_dos_senos.

Para fomentar a visualização gráfica pode-se recorrer a ferramentas computacionais, como, por exemplo, o Geogebra:

- Lei dos senos: <https://www.geogebra.org/m/uv8QJeDj>.

- Lei dos senos: <https://www.geogebra.org/m/vTxDD3eY>.

- Leis trigonométricas: <http://www.malinc.se/math/trigonometry/lawsen.php>.

- O “som” do seno: <http://www.malinc.se/math/trigonometry/musicen.php>.

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

Caraça, B. J. (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva.

COMAP (2016). *FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.

Devlin, K. (2002). *Matemática - A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Estrada, M., Queiró, J. F., Silva, M. C., & Costa, M. J. (2000). *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Khan Academy (s/d). *Problema de trigonometria: estrelas*. Obtido de <https://pt-pt.khanacademy.org/math/geometry/hs-geo-trig/hs-geo-solving-general-triangles/v/law-of-cosines-word-problem>

Matos, J. F., & Carreira, S. P. (1996). *Modelação e Aplicações no Ensino da Matemática*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Neto, F. (2015). *O cálculo de distâncias entre pontos inacessíveis*. Universidade Federal da Paraíba. Obtido de <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/9410/2/arquivototal.pdf>

Precatado, A., & Guimarães, H. (2001). *Materiais para a aula de Matemática*. Lisboa: APM.

Sebastião e Silva, J. (1975-1978). *Compêndio de Matemática (3 volumes)*. Lisboa: GEP.

MATEMÁTICA | MÓDULO OP12

ÁLGEBRA DE BOOLE

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS				
Linguagens e textos (A)	Informação e comunicação (B)	Raciocínio e resolução de problemas (C)	Pensamento crítico e pensamento criativo (D)	Relacionamento interpessoal (E)
Desenvolvimento pessoal e autonomia (F)	Bem-estar, saúde e ambiente (G)	Sensibilidade estética e artística (H)	Saber científico, técnico e tecnológico (I)	Consciência e domínio do corpo (J)

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

Conceitos chave | Ideias chave

Lógica matemática | Propriedades das operações lógicas | Lógica e circuitos elétricos

A álgebra booleana possui um conjunto de propriedades e postulados que podemos aplicar em expressões lógicas de forma a obter suas expressões mais simplificadas, com fortes aplicações em áreas como o desenvolvimento de software ou a indexação feita pelos motores de busca na Internet.

A construção de circuitos elétricos permite concretizar as operações lógicas e verificar algumas das suas propriedades.

TEMAS, TÓPICOS E SUBTÓPICOS MATEMÁTICOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES QUE O ALUNO DEVE REVELAR	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	ÁREAS DE COMPETÊNCIA DO PERFIL DOS ALUNOS
<p>ÁLGEBRA DE BOOLE</p> <p>Lógica Matemática Bivalente</p>	<p>Analisar a lógica matemática sob um ponto de vista informal e simultaneamente de iniciação ao tema.</p> <p>Ilustrar a importância da lógica matemática através da visualização de pequenos vídeos sobre lógica.</p> <p>Perceber que uma proposição é todo o conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento integral, isto é, uma afirmação que pode ser verdadeira ou falsa.</p>	<p>Propor a Pesquisa na internet uma aplicação concreta da lógica e das inter-relações estabelecidas quando se recorre a um motor de busca, por exemplo, o número de Erdos/Bacon ou o número de Sabbath (Ver referência: https://www.obaricentrodamente.com/2017/04/o-numero-de-erdos-bacon-sabbath.html).</p> <p>Dinamizar a análise do Episódio da série: Isto é Matemática: A lógica é fofinha. https://www.youtube.com/watch?v=OYunETp6SLA, como forma de motivação inicial ao tema.</p> <p>Promover a pesquisa em jornais e revistas de afirmações falsas e afirmações verdadeiras. Exemplos de proposições: “O conjunto de todos os números primos é infinito”; “O natural 15 é primo”.</p>	<p>Reconhece e utiliza linguagem simbólica. (A)</p> <p>Mobiliza os processos de reflexão, comparação e argumentação em relação às produções artísticas e tecnológicas, integradas nos contextos sociais, geográficos, históricos e políticos. (H)</p>
<p>Noção de valor lógico</p> <p>Princípios: Princípio da não contradição Princípio do terceiro excluído</p> <p>Proposição simples versus proposição composta</p>	<p>Saber que uma proposição tem valor lógico verdade se for verdadeira (V ou 1) e falso se for falsa (F ou 0).</p> <p>Saber que o conhecimento dos princípios implica que o aluno saiba que uma proposição não pode ser verdadeira e falsa simultaneamente (princípio da não contradição) e que toda a proposição ou é falsa ou é verdadeira (princípio do 3.º excluído).</p> <p>Definir uma dada proposição composta por contingência, como podendo ser verdadeira ou falsa. Numa tautologia a proposição é sempre verdadeira e numa contradição é sempre falsa.</p>	<p>Apresentar diversos exemplos de contextualização sendo que se pode recorrer a um motor de busca da internet para procurar páginas que contenham uma determinada palavra, por exemplo “Porto”, em que se obterá como resposta endereços eletrónicos em que é verdadeiro que a palavra “Porto” está nessa página.</p> <p>Referir que uma proposição simples é toda aquela proposição que vale por si mesma, que não é constituída pela combinação de duas ou mais proposições.</p>	<p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)</p>
<p>Conectivos lógicos a explorar: Negação (\sim ou \neg) Conjunção (\wedge) Disjunção (\vee) Disjunção exclusiva ($\dot{\vee}$)</p> <p>Ordem de precedência entre os conectivos 1) negação; 2) conjunção; 3) disjunção.</p>	<p>Conhecer a ligação entre os circuitos elétricos e os conectivos lógicos.</p>	<p>Enfatizar que ao aplicar os conectivos lógicos está-se a apresentar proposições compostas em que cada proposição dependerá dos valores lógicos das proposições simples que a compõem e apresentar cada um dos conectivos lógicos recorrendo a tabelas de verdade e a exemplos concretos de frases contextualizadas na vida real. Promover o conhecimento de algumas propriedades das operações lógicas, aliado à construção de circuitos em série e de circuitos paralelos, permite que o aluno se defronte com a eficiência de determinados sistemas elétricos e de computadores por permitirem reduzir uma dada expressão de cálculo proposicional a uma expressão equivalente com um menor número de proposições simples.</p>	

<p>Classificação de proposições: Contingência; Tautologia; Contradição.</p>	<p>Construir tabelas de verdade e utilizá-las para verificar se duas proposições são equivalentes e verificar assim a validade de certas propriedades das operações lógicas. Utilizar exemplos concretos para discutir ambiguidades de escrita.</p>	<p>Incentivar a pesquisa na internet de teoremas/conjeturas que foram relevantes para o desenvolvimento da Matemática, por exemplo, o Teorema de Pitágoras, o Teorema de Tales, o Teorema de Fermat, ou a Conjetura de Collatz. Propor a construção de um programa em <i>Python</i> que solicite dois valores naturais, comparando-os, através da utilização das relações: “igual” (==); “diferente” (!=); “menor que” (<); e, “maior que” (>), retornando para cada caso os respetivos valores lógicos. Incentivar num determinado motor de busca as formas de pesquisar por palavras e relação com os conectivos lógicos: negação (NOT), conjunção (AND) e disjunção (OR).</p>	
<p>Propriedades das operações lógicas: Conjunção disjunção; Comutatividade; Associatividade; Elemento neutro; Elemento absorvente; Idempotência Distributividade.</p> <p>Primeiras leis de De Morgan</p> <p>Lógica e circuitos elétricos</p>	<p>Usar circuitos elétricos para verificar algumas propriedades das operações lógicas.</p>	<p>Exemplificar com a observação de circuitos elétricos simples que caracterizam os conectivos lógicos da conjunção (circuito elétrico em série) e da disjunção (circuito elétrico em paralelo), bem como das portas lógicas para o funcionamento dos computadores e das calculadoras. Consultar referências na internet, por exemplo: https://www.filipeflop.com/blog/circuitos-logicos-logica-booleana-em-cis/.</p> <p>Propor um trabalho de projeto que pode incidir na elaboração de um programa em <i>Python</i> que permita obter as tabelas de verdade para a negação, conjunção e disjunção ou na exploração do uso da lógica para o envio de mensagens na internet (consultar For all Practical Purposes, COMAP (9th Edition) pp. 631 a 634).</p>	

AVALIAÇÃO

Valorizando o caráter formativo da avaliação, esta deve recair, sobretudo, nas atividades de aprendizagem realizadas em aula, fornecendo feedback aos alunos para corrigirem erros e desenvolverem competências, tornando-os agentes ativos, reflexivos e responsáveis pela sua aprendizagem, na prossecução do desenvolvimento das competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

Algumas tarefas poderão ser pensadas especificamente para a avaliação sumativa, ou seja, para fazer balanços sobre as aprendizagens realizadas, mas devem sempre ter em vista futuras aprendizagens.

Devem ser usadas diferentes estratégias e instrumentos de avaliação, tais como resolução de fichas de trabalho, testes escritos em duas fases, apresentações orais, resolução de um dado problema simples de computação em linguagem Python como trabalho de projeto.

Neste tema, devem ser incluídas duas provas de entre as seguintes: realização de um teste em duas fases; realização de trabalho de pesquisa que poderá passar pela realização de um programa em linguagem *Python* que evidencie a utilização de lógica matemática, ou de um trabalho escrito de introdução histórica, ou ainda do uso da lógica na transmissão de mensagens pela internet. Em cada trabalho de pesquisa deve ser efetuada uma defesa a apresentar a toda a turma. O professor deve acompanhar de forma especial estas provas (orientando o trabalho do aluno e apresentando propostas de reformulação, se necessário).

PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Podem ser usadas simulações computacionais para explorar com circuitos elétricos o significado dos diferentes conectores lógicos: Lógica matemática: <https://www.geogebra.org/m/qZ9HdYqf>.

Pode-se construir um programa em *Python* que solicite dois valores naturais, comparando-os, através da utilização das relações: “igual” (==); “diferente” (!=); “menor que” (<); e, “maior que” (>), retornando para cada caso os respetivos valores lógicos.

Pode-se desenvolver um trabalho de projeto que pode incidir na elaboração de um programa em *Python* que permita obter as tabelas de verdade para a negação, conjunção e disjunção ou na exploração do uso da lógica para o envio de mensagens na internet (consultar For all Practical Purposes, COMAP (9th Edition) pp. 631 a 634).

POSSÍVEIS APROFUNDAMENTOS

Poderá ser mais explorada a pesquisa num motor de busca na internet. Podem ser discutidas as Buscas Booleanas, que aparecem referidas em trabalhos académicos, de divulgação e páginas de apoio de Bibliotecas. Pode-se consultar, por exemplo:

- Saks, F. (2005). BUSCA BOOLEANA: TEORIA E PRÁTICA. Universidade Federal do Paraná.

Obtido de <https://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/48319/TCC%20-%20Flavia%20do%20Canto%20Saks%20-%20Monografia.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.

- Crato, N. (2005). Pesquisa Booleana. Expresso, 29 Janeiro 2005/ÚNICA 67. Obtido de <https://sites.google.com/site/edurego/a-matematica-na-imprensa/pesquisa-booleana-1>.

- EBSCO (2018). Pesquisa com Operadores Booleanos. Obtido de <https://connect.ebsco.com/s/article/Pesquisa-com-Operadores-Booleanos>.

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

Baranauskas, J. (2016). *Funções Lógicas e Portas Lógicas. Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto - USP. Departamento de Computação e Matemática*. Obtido de <https://dcm.ffclrp.usp.br/~augusto/teaching/aba/AB-Funcoes-Logicas-Portas-Logicas.pdf>

BBC (2015). *Como um matemático inventou há mais de 150 anos a fórmula das buscas no Google*. Obtido de https://www.bbc.com/portuguese/noticias/2015/11/151102_boole_google_tg.

Caraça, B. J. (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva.

Coelho, A. (1990). Trânsito, casa e lógica. *Educação & Matemática*, nº 14, p. 21.

COMAP (2016). *FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.

Devlin, K. (2002). *Matemática - A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Estrada, M., Queiró, J. F., Silva, M. C. & Costa, M. J. (2000). *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Felipe de Souza, J.A.M., & Espírito Santo, A. (2003). *Álgebra de Boole*. Universidade da Beira Interior. Obtido de http://webx.ubi.pt/~felippe/texts3/contr_ind_cap2.pdf.

Mol, R. (2019). *Circuitos Lógicos - Lógica Booleana em CI's. FILIPEFLOP*: Obtido de <https://www.filipeflop.com/blog/circuitos-logicos-logica-booleana-em-cis/>.

Precatado, A., & Guimarães, H. (2001). *Materiais para a aula de Matemática*. Lisboa: APM.

Sebastião e Silva, J. (1975-1978). *Compêndio de Matemática (3 volumes)*. Lisboa: GEP.

Valentim, L. M. G. (2020). *A Lógica Matemática nos Currícula do Ensino Secundário em Portugal*. Tese de mestrado. Lisboa: Universidade Aberta.

MATEMÁTICA | MÓDULO OP13

MODELOS DE GRAFOS

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS

Linguagens e textos (A)	Informação e comunicação (B)	Raciocínio e resolução de problemas (C)	Pensamento crítico e pensamento criativo (D)	Relacionamento interpessoal (E)
Desenvolvimento pessoal e autonomia (F)	Bem-estar, saúde e ambiente (G)	Sensibilidade estética e artística (H)	Saber científico, técnico e tecnológico (I)	Consciência e domínio do corpo (J)

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

Conceitos chave | Ideias chave

Grafos | Circuitos de Euler | Circuitos de Hamilton | Árvores | Caminho Crítico

Neste módulo pretende-se que os alunos interpretem algumas situações de sistemas de distribuição e explorem diversas soluções para problemas que lhes sejam postos em cada situação. As situações a escolher devem poder ser representadas por um sistema de pontos e de linhas unindo alguns desses pontos. Os problemas históricos podem ser apresentados nas aulas, mas podem servir para desenvolver atividades de pesquisa e projetos.

Os circuitos de Euler e Hamilton podem ser introduzidos à medida que forem sendo necessários para resolver problemas, no âmbito do estudo de situações que os requeiram.

TEMAS, TÓPICOS E SUBTÓPICOS MATEMÁTICOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES QUE O ALUNO DEVE REVELAR	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	ÁREAS DE COMPETÊNCIA DO PERFIL DOS ALUNOS
<p>MODELOS DE GRAFOS</p> <p>Introdução aos grafos</p> <p>Linguagem e notação da teoria de grafos</p>	<p>Definir e identificar vértice, aresta, laço e vértice isolado de um grafo e vértices adjacentes.</p> <p>Indicar a ordem de um grafo e grau de um vértice.</p> <p>Distinguir arestas paralelas de arestas adjacentes.</p> <p>Definir e caracterizar grafo regular, subgrafo, grafo conexo, grafo orientado e grafo completo.</p> <p>Identificar a ordem de um grafo.</p>	<p>Apresentar situações reais, tendo em conta a área profissional dos alunos, que possam ser representadas por um sistema de pontos e linhas unindo alguns desses pontos. Por exemplo: mapas rodoviários do local onde residem, plantas de casas, sistemas de recolha de lixo, distribuição de empresas transportadoras, redes elétricas, redes de fibra ótica, gestão de entregas de restaurantes.</p>	<p>Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática. (A)</p> <p>Preocupa-se com a construção de um futuro sustentável e envolve-se em projetos de cidadania ativa. (G)</p>
<p>Grafos de Euler</p>	<p>Identificar e distinguir caminho de circuito.</p> <p>Conhecer as condições para um grafo admitir um circuito de Euler;</p> <p>Conhecer e aplicar o Teorema de Euler;</p> <p>Identificar as condições para um grafo admitir um caminho euleriano;</p> <p>Reconhecer em que condições se deve eulerizar um grafo.</p>	<p>Apresentar e fomentar o gosto por problemas históricos como por exemplo: o problema das pontes de Königsberg para introduzir e explorar o conceito e condições para um grafo ser euleriano ou pedir para desenhar a Cimitarra de Mohammed sem levantar o lápis do papel ou resolver o problema de Kirchoff ou resolver problemas de redes elétricas, entre outros.</p> <p>Familiarizar e incentivar a discussão de situações reais que possam ser modeladas por grafos de modo a que se possam encontrar soluções que permitam encontrar caminhos sem repetir arestas, começando e terminando no mesmo vértice. Por exemplo: resolver problemas de sistemas de distribuição tais como: patrulhamento, distribuição de correio ou outros, tendo em conta a área profissional.</p> <p>Estimular a discussão de situações reais que permitam aplicar a eulerização de grafos para encontrar soluções com o menor número de repetição de arestas na falta de uma solução sem repetições. Por exemplo: iniciar com grafos grelha e encorajar a resolver problemas de distribuição no contexto profissional dos alunos.</p>	<p>Aprecia criticamente as realidades artísticas, em diferentes suportes tecnológicos, pelo contacto com os diversos universos culturais. (H)</p>
<p>Grafos de Hamilton</p>	<p>Definir e caracterizar um circuito de Hamilton.</p> <p>Identificar as condições para um grafo admitir um circuito hamiltoniano.</p> <p>Conhecer e aplicar os algoritmos da Cidade mais próxima e do Peso das arestas para conduzirem a soluções “boas”.</p>	<p>Promover a discussão de problemas históricos. Por exemplo “A viagem à volta do mundo”, também conhecido “Dodecaedro do viajante” ou “problema do caixeiro viajante” ou “carteiro chinês” para encorajar a abordagem do circuito hamiltoniano.</p> <p>Sugerir situações reais que possam ser modeladas por grafos de vértices, recorrendo à tecnologia, em que o que interessa é visitar todos os vértices de preferência sem repetição e com partida e chegada ao mesmo ponto. Por exemplo: construir um plano de viagem que consista em visitar várias cidades, sem as repetir, começando e acabando na mesma, ou organizar um peddy papper, ou elaborar um roteiro turístico com os pontos de referência/monumentos históricos do local onde vivem ou construir um trilho da ciência, entre outros.</p> <p>Encorajar a aplicação de algoritmos que possam ser usados para modelar situações reais encontrando soluções boas que possibilitem percorrer os vértices de um grafo sem os repetir, começando e terminando no mesmo. Por exemplo: serviço de entrega de um restaurante, ou entrega de compras, ou distribuição de cadeia comercial, ou melhor localização para sediar uma empresa, ou melhor os tempos numa linha de produção, entre outros.</p>	

<p>Árvores</p>	<p>Definir árvore, árvore abrangente e árvore abrangente de custo mínimo.</p>	<p>Dinamizar o desenvolvimento de projetos interdisciplinares e motivadores entre a Matemática e as áreas de formação técnica de modo a articular e a relacionar os vários saberes em contexto real, que recorram a "árvores" e que visem facilitar as somas de pesos atribuídos às arestas de modo a ser possível comparar os pesos totais das várias soluções. Por exemplo: elaborar um projeto que permita investigar a melhor solução do custo ou do tempo mínimo na localização de uma empresa, de rede elétrica ou de fibra ótica, etc.</p>	
<p>Caminho crítico</p>	<p>Conhecer e aplicar um algoritmo de modo a que permita encontrar soluções "boas" (Kruskal ou de Prim).</p> <p>Reconhecer a importância da aplicação deste método na determinação do tempo mínimo para a execução de um projeto.</p>	<p>Sugerir e incentivar a apresentação de temas para propostas de um projeto que vise a planificação de, por exemplo: calendarização de um evento, de um campeonato, de um congresso; horário de reuniões de funcionários de uma empresa, etc.</p>	

AVALIAÇÃO

Valorizando o caráter formativo da avaliação, esta deve recair, sobretudo, nas atividades de aprendizagem realizadas em aula, fornecendo feedback aos alunos para corrigirem erros e desenvolverem competências, tornando-os agentes ativos, reflexivos e responsáveis pela sua aprendizagem, na prossecução do desenvolvimento das competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

Algumas tarefas poderão ser pensadas especificamente para a avaliação sumativa, ou seja, para fazer balanços sobre as aprendizagens realizadas, mas devem sempre ter em vista futuras aprendizagens.

Devem ser usadas diferentes estratégias e instrumentos de avaliação, tais como resolução de fichas de trabalho, apresentações orais, relatórios, resolução de um problema, situação de modelação ou de projeto. Sugerem-se o desenvolvimento de projetos interdisciplinares e motivadores entre a Matemática e as áreas de formação da componente técnica de modo a articular e a relacionar os vários saberes em contexto real. Este módulo deve contemplar na avaliação, a escolha de uma situação real que possa ser explorada e modelada através de um projeto num dos temas trabalhados no módulo, constituindo deste modo uma ótima oportunidade para a interdisciplinaridade.

POSSÍVEIS APROFUNDAMENTOS

Podem ser desenhadas configurações para exploração, estabelecimento e testagem de conjeturas, com dois softwares gratuitos. São eles:

- Grinvin <http://www.grinvin.org/en/start.html>.
- GEPHI - The Open Graph Viz Platform <https://gephi.org>.

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

- Abrantes, P. (1994). Contagens, Grafos e Matrizes nos nossos programas? *Educação & Matemática*, n.º 30, p. 17-20.
- COMAP (2016). *FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.
- COMAP. (1999). *Geometry and its applications-Graph Models*. COMAP, Lexington: COMAP.
- Feiteira, R., & Pires, M. (2008). Grafos e Jogos. *Educação & Matemática*, n.º 97, p. 19-24.
- Malkevitch, J. (1995). Modelos de Grafos. COMAP (tradução portuguesa da responsabilidade do DES, Lisboa, 1999). Obtido de <https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online>
- Pires, M., & Kravtchenko, V. (2007). Reflexões sobre o ensino de Grafos. *Educação & Matemática*, n.º 93, p. 11-15.
- Simões, M. (1999). *Teoria dos grafos - aplicações práticas* (edição da responsabilidade do DES, Lisboa). Obtido de <https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online>.
- Vieira, A., Veloso, E., & Lagarto, M. J. (org.).(1997). Relevância da História no Ensino da Matemática. *História da Matemática - Cadernos do GTHEM - 1* APM. Lisboa: APM.

MATEMÁTICA | MÓDULO OP14

MATEMÁTICA FINANCEIRA E FISCAL

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS

Linguagens e textos (A)	Informação e comunicação (B)	Raciocínio e resolução de problemas (C)	Pensamento crítico e pensamento criativo (D)	Relacionamento interpessoal (E)
Desenvolvimento pessoal e autonomia (F)	Bem-estar, saúde e ambiente (G)	Sensibilidade estética e artística (H)	Saber científico, técnico e tecnológico (I)	Consciência e domínio do corpo (J)

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

Conceitos chave | Ideias chave

Matemática financeira | Matemática Fiscal | Juros | Impostos | Empréstimos e amortizações | Poupança | Inflação

Com o módulo Matemática financeira, pretende-se incluir, por um lado, o estudo de modelos matemáticos subjacentes aos investimentos ou empréstimos bancários e que apontam para o estudo, por exemplo, dos modelos de crescimento populacionais.

O estudo de alguns impostos, diretos e indiretos, permite familiarizar os alunos com alguns problemas do domínio tributário português.

TEMAS, TÓPICOS E SUBTÓPICOS MATEMÁTICOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES QUE O ALUNO DEVE REVELAR	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	ÁREAS DE COMPETÊNCIA DO PERFIL DOS ALUNOS
<p>MATEMÁTICA FINANCEIRA E FISCAL</p> <p>Descontos</p> <p>Taxas de IVA</p>	<p>Calcular percentagens para resolver problemas de descontos ou aumentos.</p> <p>Determinar o valor de produtos atendendo aos descontos e às taxas de IVA.</p>	<p>Incentivar a exploração de situações que evidenciem claramente o valor do desconto na compra de determinados produtos e a aplicação da correspondente taxa de IVA, como por exemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> - estudar a variabilidade de preços de produtos consoante o valor do desconto a - aplicar bem como da taxa de IVA, recorrendo a uma folha de cálculo, ou o valor do IVA em faturas diversas; <p>Fomentar a construção de um simulador, utilizando a programação em <i>Python</i>, através do qual se obtém o valor dos produtos atendendo aos descontos e à taxa de IVA.</p>	<p>Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos. (E)</p> <p>Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão. (I)</p>
<p>Impostos</p> <p>Meios de pagamento</p>	<p>Calcular o valor dos impostos, nomeadamente: IRS, IMT e IUC.</p> <p>Identificar meios de pagamento: moeda, criptomoeda, cartão de débito, cartão de crédito.</p>	<p>Sugerir para o cálculo de impostos a construção de um modelo, numa folha de cálculo ou recorrendo à programação em <i>Python</i>, como por exemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Vencimento de um trabalhador; - Imposto único de circulação; - Valor comercial de um imóvel, automóvel, mota, ... <p>Incentivar a recolha de informação, por parte dos alunos, nos jornais ou internet sobre notícias que permitam conhecer as entidades que concedem empréstimos, e familiarizar-se com conceitos como: meios de pagamento, juros, poupança, empréstimos e amortizações.</p>	<p>Têm consciência de si próprio a nível emocional, cognitivo, psicossocial, estético e moral por forma a estabelecer consigo próprio e com os outros uma relação harmoniosa. (J)</p>
<p>Juros</p> <p>Poupança</p> <p>Empréstimos e amortizações</p>	<p>Calcular juro simples, juro composto, juro nominal, juro efetivo.</p> <p>Calcular os dividendos provenientes de diferentes tipos de poupança.</p> <p>Determinar o valor das taxas associadas aos empréstimos e amortizações, tais como: taxa juro efetiva a partir da TAN, TAEG, Spread.</p>	<p>Propor a resolução de problemas concretos que impliquem o cálculo de juros (simples e composto), empréstimos, amortizações, envolvendo os alunos em investigações/explorações (em pequenos grupos), visando a elaboração de relatórios, composições, pósteres ou outros.</p> <p>Recorrer ao uso da tecnologia para calcular valores de juros e amortizações e fazer simulações.</p>	
<p>Índice de preços do consumidor (IPC)</p> <p>Inflação</p>	<p>Calcular o IPC.</p> <p>Aplicar a taxa de inflação na comparação do valor de produtos em diferentes anos.</p>	<p>Incentivar a pesquisa de informação, por parte dos alunos, nos jornais ou na internet sobre notícias que permitam a familiarização com conceitos como: índice de preços do consumidor e inflação.</p> <p>Apoiar a exploração de situações concretas que envolvam o cálculo do IPC e da Taxa de inflação e apresentar os resultados através de um relatório em grupo ou de trabalho de projeto com outras disciplinas.</p> <p>Recorrer ao uso da tecnologia para comparação de diferentes valores em função da inflação; escrever um programa em <i>Python</i> para comparar valores.</p>	

AVALIAÇÃO

Valorizando o caráter formativo da avaliação, esta deve recair, sobretudo, nas atividades de aprendizagem realizadas em aula, fornecendo feedback aos alunos para corrigirem erros e desenvolverem competências, tornando-os agentes ativos, reflexivos e responsáveis pela sua aprendizagem, na prossecução do desenvolvimento das competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

Algumas tarefas poderão ser pensadas especificamente para a avaliação sumativa, ou seja, para fazer balanços sobre as aprendizagens realizadas, mas devem sempre ter em vista futuras aprendizagens.

Neste módulo, devem ser incluídas na avaliação elementos de cada tema explorado, decorrentes das atividades realizadas pelos alunos. A avaliação deverá incidir no trabalho desenvolvido, incluindo a apresentação oral dos trabalhos realizados. O professor deve acompanhar de forma especial estas provas (orientando o trabalho do aluno e apresentando propostas de reformulação, se necessário).

PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles.

Antes de redigir o programa na linguagem *Python*, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Podem propor-se vários tipos de programas em *Python* neste tema; um muito simples será o cálculo do salário líquido sabendo a taxa de imposto a aplicar; outro pode ser um programa para simular o cálculo do preço de venda ao público de um produto em função do seu preço base e da sua taxa de IVA, ou em contrapartida, calcular o IVA a partir do preço final e da respetiva taxa.

```
p=float(input("Qual é o preço base do item? "))
iva=int(input("Qual é a taxa de IVA do item? (Introduza um dos valores: 6, 13 ou 23): "))
if iva==6 or iva==13 or iva==23:
    pf=p+p*iva/100
    print("O preço de venda com IVA incluído é ",pf,"€")
else:
    print("Não existe uma taxa de IVA de ",iva,"%")
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

POSSÍVEIS APROFUNDAMENTOS

Poderão ser abordados outros temas de Matemática Financeira, como por exemplo a elaboração de orçamentos de diferentes tipos (para um casal com ou sem filhos, solteiro vivendo sozinho ou com outras pessoas, etc.).

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

Aspas, R. (2020). *Tipos de impostos: diretos e indiretos*. Obtido de <https://www.doutorfinancas.pt/financas-pessoais/impostos-em-portugal-diretos-e-indiretos/>.

Batista, A. S. (2014). *Matemática financeira. O valor do dinheiro ao longo do tempo*. Porto: Vida económica.

Conselho Nacional de Supervisores Financeiros. (2016). *Plano Nacional de Formação Financeira 2016-2020*. Banco de Portugal.

Gonçalves, D. (2019). *Quais os impostos cobrados na compra de uma casa?* Obtido de <https://www.doutorfinancas.pt/creditos/credito-habitacao/quais-os-impostos-cobrados-na-compra-de-uma-casa/>.

Machado, H. A. M. (2011). *A literacia financeira da população escolar em Portugal. Estudo aplicado a alunos do ensino secundário da região de Lisboa*. Tese de Mestrado. Universidade Técnica de Lisboa.

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Referencial de Educação Financeira para a Educação Pré-Escolar, o Ensino Básico, o Ensino Secundário e a Educação e Formação de Adultos*. Obtido de: https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/referencial_de_educacao_financeira_final_versao_port.pdf.

Nascimento, N. H. A (2015). *Matemática e educação financeira: um estudo de caso do Ensino Secundário*. Universidade Nova de Lisboa. Obtido de <http://hdl.handle.net/10362/16356>.

Pinto, D.V., & Domingos, A. (2015). A Educação Financeira para uma eficaz contenção do consumo. In *Atas do 2º Seminário de Investigação em Educação Financeira Escolar e Educação Matemática*, p. 121. Lisboa: Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia; Unidade de Investigação e Desenvolvimento.

Pordata / RTP (2015). *O que são impostos diretos e indiretos?* Obtido de <https://ensina.rtp.pt/artigo/o-que-sao-impostos-diretos-e-indiretos/>

Pordata / RTP (2015). *O que é a dívida pública?* Obtido de <https://ensina.rtp.pt/artigo/o-que-e-a-divida-publica/>

Ribeiro, E. M: C. (2013). *Literacia Financeira. Estudo aplicado aos alunos do 3.º Ciclo do Ensino Básico e Secundário*. Tese de Mestrado. Universidade Portucalense Infante D. Henrique.

Rodrigues, A., & Pimenta, C. (2017). Literacia financeira - construção do conhecimento matemático (uma experiência de ensino com alunos do 12º ano de escolaridade). *CIBEM 2017 (Congresso IberoAmericano de Educação Matemática) CB-219*, p. 74-84. Madrid: Universidade Complutense.

MATEMÁTICA | MÓDULO OP15

MATEMÁTICA COMERCIAL

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS				
Linguagens e textos (A)	Informação e comunicação (B)	Raciocínio e resolução de problemas (C)	Pensamento crítico e pensamento criativo (D)	Relacionamento interpessoal (E)
Desenvolvimento pessoal e autonomia (F)	Bem-estar, saúde e ambiente (G)	Sensibilidade estética e artística (H)	Saber científico, técnico e tecnológico (I)	Consciência e domínio do corpo (J)

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

Conceitos chave | Ideias chave

Matemática comercial | Gastos e rendimentos | Faturação | Inventário

Neste módulo pretende-se trabalhar situações do quotidiano que envolvem cálculos com dinheiro em operações comerciais, sejam pagamentos ou recebimentos, gestão de stocks, compras, investimentos, faturação, entre outras, dotando o aluno de competências de cidadania para que possa tomar decisões informadas.

TEMAS, TÓPICOS E SUBTÓPICOS MATEMÁTICOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES QUE O ALUNO DEVE REVELAR	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	ÁREAS DE COMPETÊNCIA DO PERFIL DOS ALUNOS
<p>MATEMÁTICA COMERCIAL</p> <p>Gastos e rendimentos</p> <p>Pagamentos e recebimentos</p> <p>Faturação</p>	<p>Identificar os gastos e os rendimentos de uma empresa, tais como: recursos humanos, manutenção das instalações, compra de matéria-prima, consumíveis, transportes, publicidade, ...</p> <p>Identificar gastos de uma empresa com recursos humanos, tais como: salários, seguros, segurança social, tipo de contratos, subsídio de refeição,....</p> <p>Determinar os custos das mercadorias vendidas, menos valias, ou custos com publicidade.</p> <p>Calcular o preço associado a vendas, prestações de serviços, mais valias.</p> <p>Modelar processos económicos por meio de funções (procura, oferta, despesas, receita, valor líquido, publicidade e encomenda de mercadorias).</p> <p>Calcular as diferentes componentes de uma fatura.</p>	<p>Promover a elaboração de um orçamento, recorrendo a uma folha de cálculo, identificando, por exemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> - os gastos e os rendimentos de uma empresa; - os preços de custo e os preços das mercadorias vendidas; - o custo com a publicidade. <p>Familiarizar os alunos com o cálculo do fundo de maneio indicado para o normal funcionamento de uma empresa partindo de situações concretas recolhidas em jornais/revistas ou na Internet;</p> <p>Propor a resolução de problemas para calcular gastos e rendimentos, pagamentos e recebimentos, recorrendo a modelos de funções dados, envolvendo os alunos em investigações/explorações (em pequenos grupos), visando a elaboração de pequenos relatórios, composições, pósteres ou outros.</p> <p>Apoiar os alunos na emissão de uma fatura, recorrendo à folha de cálculo. Poderá ser consultada a Internet para a consulta dos preços dos bens e serviços a faturar. Considerar, por exemplo: NIF, valor unitário, quantidades, IVA, prazos de pagamento, taxas associadas e juros.</p>	<p>Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos. (E)</p> <p>Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão. (I)</p> <p>Domina a capacidade percetivo-motora (imagem corporal, direcionalidade, afinamento percetivo e estruturação espacial e temporal). (J)</p>
<p>Inventário</p>	<p>Elaborar inventários envolvendo as matérias-primas disponíveis, os produtos semiacabados e os acabados e sobressalentes necessários à manutenção.</p> <p>Determinar os custos operacionais associados: à gestão das encomendas e ao inventário do material disponível.</p>	<p>Promover a exploração de situações que envolvam a elaboração de inventários numa empresa industrial, no contexto da formação tecnológica (ex: elaborar o inventário do material do economato, na área de formação da restauração e planear quais os recursos/equipamentos a adquirir).</p> <p>Incentivar a elaboração de uma nota de encomenda ou de uma ficha técnica, controlando os custos.</p> <p>Orquestrar situações de programação linear que contribuam para a gestão dos produtos existentes em armazém, Caso os alunos tenham trabalhado o módulo OP4.</p>	
<p>Crédito e dívida</p> <p>Taxas e amortização</p>	<p>Determinar os custos associados ao crédito tendo em conta os fatores que o influenciam, como por exemplo: taxa de juro, maturidade, seguro, comissões.</p> <p>Comparar propostas de crédito e calcular os períodos de amortização da dívida.</p>	<p>Fomentar a comparação de propostas de crédito com base em critérios adequados, recorrendo a simuladores na Internet. Tomar decisões fundamentadas na escolha do crédito, tendo em conta o período de amortização da dívida.</p>	

AVALIAÇÃO

Valorizando o caráter formativo da avaliação, esta deve recair, sobretudo, nas atividades de aprendizagem realizadas em aula, fornecendo feedback aos alunos para corrigirem erros e desenvolverem competências, tornando-os agentes ativos, reflexivos e responsáveis pela sua aprendizagem, na prossecução do desenvolvimento das competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

Algumas tarefas poderão ser pensadas especificamente para a avaliação sumativa, ou seja, para fazer balanços sobre as aprendizagens realizadas, mas devem sempre ter em vista futuras aprendizagens.

A atividade dos estudantes e o aproveitamento que se pretende verificar devem ser medidos com a apreciação dos trabalhos de grupo e individuais realizados, sendo importante que assumam diversos formatos: composições, relatórios de atividades desenvolvidas, preparação de apresentações e participação em debates com temas selecionados adequadamente ligados aos assuntos trabalhados.

A avaliação deve ser contínua e formativa, sendo valorizados todos os trabalhos dos alunos ao longo do módulo e a apresentação de alguns destes em contexto de aula.

As provas escritas tradicionais (ou testes) de questionamento sobre os conceitos matemáticos em si mesmos ou com exigência de uma manipulação de técnicas ou simbologia matemáticas perdem sentido e oportunidade como instrumentos privilegiados para as tarefas de avaliação.

POSSÍVEIS APROFUNDAMENTOS

Devido à natureza do módulo, não se sugerem aprofundamentos em concreto.

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

Conselho Nacional de Supervisores Financeiros. (2016). *Plano Nacional de Formação Financeira 2016-2020*. Banco de Portugal.

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Referencial de Educação Financeira para a Educação Pré-Escolar, o Ensino Básico, o Ensino Secundário e a Educação e Formação de Adultos*. Obtido de: https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/referencial_de_educacao_financeira_final_versao_port.pdf.

OCDE. (2005). *Recommendation on Principles and Good Practices for Financial Education and Awareness*. OCDE.

MATEMÁTICA | MÓDULO OP16

MATEMÁTICA LABORAL

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS

Linguagens e textos (A)	Informação e comunicação (B)	Raciocínio e resolução de problemas (C)	Pensamento crítico e pensamento criativo (D)	Relacionamento interpessoal (E)
Desenvolvimento pessoal e autonomia (F)	Bem-estar, saúde e ambiente (G)	Sensibilidade estética e artística (H)	Saber científico, técnico e tecnológico (I)	Consciência e domínio do corpo (J)

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

Conceitos chave | Ideias chave

Literacia laboral | Taxa de câmbio | Despesas e receitas pessoais | Contratos laborais | Promoções e saldos

Neste módulo pretende-se melhorar nos alunos a compreensão dos produtos e conceitos financeiros e desenvolver capacidades e competências para se tornarem mais atentos aos riscos e oportunidades financeiras, tomarem decisões conscientes e fundamentadas e adotarem comportamentos que melhorem o seu bem-estar financeiro.

A diversidade e complexidade dos produtos e serviços financeiros tornou mais difícil aos cidadãos, enquanto consumidores, tomar as decisões relativas à sua economia pessoal.

TEMAS, TÓPICOS E SUBTÓPICOS MATEMÁTICOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES QUE O ALUNO DEVE REVELAR	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	ÁREAS DE COMPETÊNCIA DO PERFIL DOS ALUNOS
<p>MATEMÁTICA LABORAL</p> <p>Moeda e taxa de câmbio</p>	<p>Reconhecer que o euro é a moeda oficial de vários países da Europa e que existem outras moedas, identificando-as com os respetivos países.</p> <p>Converter em euros valores expressos noutras moedas e vice-versa, tendo em conta a taxa de câmbio.</p>	<p>Encorajar a recolha de informação, por parte dos alunos, em jornais, revistas ou na internet sobre notícias que identifiquem o valor da moeda em diferentes países. Apresentar os resultados através de um relatório em grupo ou de trabalho de projeto com outras disciplinas.</p> <p>Apoiar os alunos na construção de um modelo, numa folha de cálculo ou recorrendo à programação em <i>Python</i>, para o cálculo das taxas de câmbio em diferentes países, por exemplo, no contexto da planificação de uma viagem ou de uma compra on-line.</p>	<p>É confiante, resiliente e persistente, construindo caminhos personalizados de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências. (F)</p>
<p>Rendimentos e despesas pessoais</p>	<p>Identificar as diferentes fontes de rendimento, tais como: salários, rendas, pensões, subsídios, donativos, rendimentos de capital e outros.</p> <p>Identificar despesas fixas e despesas variáveis.</p>	<p>Fomentar a elaboração de um orçamento: calcular rendimentos e despesas, estabelecer prioridades e apurar o respetivo saldo, recorrendo a uma folha de cálculo.</p> <p>Incentivar o planeamento, por exemplo de uma viagem de finalistas, recorrendo a uma folha de cálculo, tendo em conta as receitas e as despesas, nomeadamente: angariação de fundos, duração da viagem, local, alimentação, transportes, espaços a visitar, etc.</p>	<p>É responsável e está consciente de que os seus atos e as suas decisões afetam a sua saúde, o seu bem-estar e o ambiente. (G)</p>
<p>Retribuições e contribuições nos contratos laborais</p>	<p>Identificar as retribuições e as contribuições nos contratos laborais.</p> <p>Determinar o rendimento líquido a partir do ilíquido e vice-versa.</p> <p>Calcular os custos imputados ao trabalhador e à empresa, face ao rendimento ilíquido num determinado tipo de contrato de trabalho, por exemplo: segurança social, IRS, seguro, contribuições sindicais, subsídios.</p>	<p>Dinamizar a exploração de ofertas de emprego e determinar a melhor opção, atendendo a: diferentes tipos de contrato, duração, local de residência, subsídios, condições de pagamento.</p> <p>Promover o recurso a simuladores na Internet ou a uma folha de cálculo.</p>	<p>Têm consciência de si próprio a nível emocional, cognitivo, psicossocial, estético e moral por forma a estabelecer consigo próprio e com os outros uma relação harmoniosa. (J)</p>
<p>Promoções e saldos</p>	<p>Calcular o valor de taxas percentuais em problemas que envolvam saldos ou promoções, descontos ou aumentos, em situações concretas.</p> <p>Determinar o valor de promoções ou saldos, descontos ou aumentos, considerando as taxas percentuais.</p>	<p>Conduzir os alunos na exploração de situações concretas que envolvam o cálculo de promoções e saldos recorrendo para o efeito a uma folha de cálculo ou à calculadora, como por exemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Calcular o valor de um desconto ou aumento numa situação concreta; - Determinar o valor resultante de adquirir produtos em saldo ou em promoção. <p>Apoiar na realização de um trabalho (individual ou a pares), ao longo do módulo, envolvendo a elaboração de uma lista de compras, recorrendo a uma loja on-line ou a folhetos promocionais, na qual deverá constar, nomeadamente:</p> <ul style="list-style-type: none"> - os custos iniciais associados aos produtos (roupa, maquilhagem, eletrónica, etc.); - os custos finais das compras caso exista alteração dos preços por saldo ou promoção. <p>Os resultados desta pesquisa, deverão ser apresentados em contexto de sala de aula.</p>	

AVALIAÇÃO

Valorizando o caráter formativo da avaliação, esta deve recair, sobretudo, nas atividades de aprendizagem realizadas em aula, fornecendo feedback aos alunos para corrigirem erros e desenvolverem competências, tornando-os agentes ativos, reflexivos e responsáveis pela sua aprendizagem, na prossecução do desenvolvimento das competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

Algumas tarefas poderão ser pensadas especificamente para a avaliação sumativa, ou seja, para fazer balanços sobre as aprendizagens realizadas, mas devem sempre ter em vista futuras aprendizagens.

Devem ser usadas diferentes estratégias e instrumentos de avaliação, sendo valorizados todos os trabalhos dos alunos ao longo do módulo e a apresentação de alguns destes em contexto de aula.

As provas escritas tradicionais (ou testes) de questionamento sobre os conceitos matemáticos em si mesmos ou com exigência de uma manipulação de técnicas ou simbologia matemáticas perdem sentido e oportunidade como instrumentos privilegiados para as tarefas de avaliação.

PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles. O reconhecimento de padrões na tarefa (ou situação) apresentada ou em problemas semelhantes, anteriormente resolvidos, poderá contribuir para facilitar a estruturação do algoritmo a desenvolver.

Antes de redigir o programa na linguagem *Python*, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Exemplo de programa em *Python* para o calcular o câmbio de uma determinada quantia em euros para outra moeda escolhida de entre as disponíveis (com recurso a listas):

```
taxas_cambio=[1.2222,133.09, 0.85998,1.0963,6.4085]
moedas=["USD","JPY","GBP","CHF","BRL"]
print("Taxas de câmbio")
print("1 - Dólar dos Estados Unidos\n2 - Iene Japonês\n3 - Libra Esterlina (GB)\n4 - Franco Suiço\n5 - Real do Brasil")
escolha=int(input("Escolha a moeda, introduzindo o n.º correspondente: "))
euros=float(input("Importância, em euros, a tocar: "))
for i in range(6):
    print(euros,"€ = ",euros*(1-i/100)*taxas_cambio[escolha-1], moedas[escolha-1],"(inclui {}% de comissão interbancária)".format(i))
```

Nota 1: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Nota 2: As taxas de câmbio deverão ser atualizadas e podem ser introduzidas outras moedas.

POSSÍVEIS APROFUNDAMENTOS

Devido à natureza do módulo, não se sugerem aprofundamentos em concreto.

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

OCDE. (2005). *Recommendation on Principles and Good Practices for Financial Education and Awareness*. OCDE.

Conselho Nacional de Supervisores Financeiros. (2016). *Plano Nacional de Formação Financeira 2016-2020*. Banco de Portugal.

Machado, H. A. M. (2011). *A literacia financeira da população escolar em Portugal. Estudo aplicado a alunos do ensino secundário da região de Lisboa*. Tese de Mestrado. Universidade Técnica de Lisboa.

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Referencial de Educação Financeira para a Educação Pré-Escolar, o Ensino Básico, o Ensino Secundário e a Educação e Formação de Adultos*. Obtido de: https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/referencial_de_educacao_financeira_final_versao_port.pdf.

Pinto, D.V., & Domingos, A. (2015). A Educação Financeira para uma eficaz contenção do consumo. In *Atas do 2º Seminário de Investigação em Educação Financeira Escolar e Educação Matemática*, p. 121. Lisboa: Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia; Unidade de Investigação e Desenvolvimento.

Ribeiro, E. M. C. (2013). *Literacia Financeira. Estudo aplicado aos alunos do 3.º Ciclo do Ensino Básico e Secundário*. Tese de Mestrado. Universidade Portucalense Infante D. Henrique.

Rodrigues, A., & Pimenta, C. (2017). Literacia financeira - construção do conhecimento matemático (uma experiência de ensino com alunos do 12º ano de escolaridade). *CIBEM 2017 (Congresso IberoAmericano de Educação Matemática) CB-219*, p. 74-84. Madrid: Universidade Complutense.

MATEMÁTICA | MÓDULO OP17

BIOMATEMÁTICA

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS				
Linguagens e textos (A)	Informação e comunicação (B)	Raciocínio e resolução de problemas (C)	Pensamento crítico e pensamento criativo (D)	Relacionamento interpessoal (E)
Desenvolvimento pessoal e autonomia (F)	Bem-estar, saúde e ambiente (G)	Sensibilidade estética e artística (H)	Saber científico, técnico e tecnológico (I)	Consciência e domínio do corpo (J)

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

Conceitos chave | Ideias chave

Biomatemática | Figuras semelhantes | Áreas e volumes de figuras semelhantes | Crescimento das plantas e Fibonacci | Autómatos celulares

Pretende-se que os alunos desenvolvam a capacidade de modelar e de explorar situações envolvendo alguns temas da Biologia. Para tal, o recurso a modelos muito simples permitirá mesmo assim a abordagens de situações realistas. O computador e a calculadora gráfica, devem ser utilizados como meios organizadores dos dados e dos cálculos necessários para a exploração e análise a utilizar, assim como para a representação gráfica das conclusões.

TEMAS, TÓPICOS E SUBTÓPICOS MATEMÁTICOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES QUE O ALUNO DEVE REVELAR	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	ÁREAS DE COMPETÊNCIA DO PERFIL DOS ALUNOS
<p>BIOMATEMÁTICA</p> <p>Efeito de escala</p> <p>Figuras semelhantes</p> <p>Relação entre as áreas de figuras semelhantes</p> <p>Relação entre os volumes de sólidos semelhantes</p> <p>Crescimento alométrico</p> <p>Prova da impossibilidade da existência de alguns objetos na Natureza</p>	<p>Rever as propriedades de figuras semelhantes.</p> <p>Conhecer a relação entre as áreas de figuras semelhantes.</p> <p>Conhecer a relação entre volumes de sólidos semelhantes.</p> <p>Reconhecer a importância da alometria no estudo de várias espécies biológicas.</p> <p>Aplicar as relações de semelhança entre objetos para provar algumas impossibilidades.</p>	<p>Promover o estudo das propriedades de figuras semelhantes através da resolução de problemas e atividades de modelação, estabelecendo a sua relação com a Biologia, por exemplo através da alometria (estudando diferentes espécies de <i>Archaeopteryx</i>).</p> <p>Dinamizar a aplicação das relações de semelhança entre objetos para provar a impossibilidade da existência de alguns objetos, como por exemplo a existência de um gorila como King Kong, a existência de árvores gigantes (exemplo referido por Galileu), ou a existência de montanhas muito maiores que o Monte Everest.</p>	<p>Preocupa-se com a construção de um futuro sustentável e envolve-se em projetos de cidadania ativa. (G)</p> <p>Mobiliza os processos de reflexão, comparação e argumentação em relação às produções artísticas e tecnológicas, integradas nos contextos sociais, geográficos, históricos e políticos. (H)</p>
<p>Crescimento das plantas e Fibonacci</p> <p>Sucessão de Fibonacci</p> <p>Alguns exemplos da presença da sucessão de Fibonacci na natureza</p> <p>Relação da sucessão de Fibonacci com o crescimento das plantas e a distribuição das folhas num tronco (filotaxia)</p>	<p>Investigar a origem e algumas propriedades da sucessão de Fibonacci.</p> <p>Investigar a presença da sucessão de Fibonacci na natureza.</p>	<p>Promover o estudo de algumas propriedades, como por exemplo, a relação com o número de ouro, recorrendo à tecnologia.</p> <p>Incentivar o estudo de plantas e frutos (ananás, pinhas) tentando identificar a presença da sucessão de Fibonacci.</p>	<p>Domina a capacidade percetivo-motora (imagem corporal, direcionalidade, afinamento percetivo e estruturação espacial e temporal). (J)</p>
<p>Autómatos celulares</p> <p>Conceito de autómato celular</p> <p>O jogo da Vida de John Conway</p> <p>Configurações do Jogo da Vida e seu impacto</p>	<p>Interpretar as regras do Jogo da Vida.</p> <p>Interpretar algumas configurações do jogo.</p>	<p>Apresentar aos alunos a origem, características e impacto deste “jogo”.</p> <p>Incentivar os alunos a estudar a evolução de configurações (tanto procurando a geração seguinte como procurando a geração anterior).</p> <p>Experimentar com uma versão interativa do jogo, testando as conjecturas dos alunos sobre a evolução de uma dada configuração.</p>	

AVALIAÇÃO

Valorizando o caráter formativo da avaliação, esta deve recair, sobretudo, nas atividades de aprendizagem realizadas em aula, fornecendo feedback aos alunos para corrigirem erros e desenvolverem competências, tornando-os agentes ativos, reflexivos e responsáveis pela sua aprendizagem, na prossecução do desenvolvimento das competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

Algumas tarefas poderão ser pensadas especificamente para a avaliação sumativa, ou seja, para fazer balanços sobre as aprendizagens realizadas, mas devem sempre ter em vista futuras aprendizagens.

Devem ser usadas diferentes estratégias e instrumentos de avaliação, tais como resolução de fichas de trabalho, testes escritos em duas fases, apresentações orais, relatórios, resolução de um problema, situação de modelação ou de projeto, que devem integrar um portefólio do módulo ou da disciplina.

Neste módulo, devem ser incluídas duas provas: um teste escrito e uma apresentação oral ou escrita de uma situação de modelação matemática, recorrendo a um de três tipos de exemplos (recolha de dados, exemplos de outras disciplinas que os alunos frequentem, recortes de jornais). O professor deve acompanhar de forma especial estas últimas provas (orientando o trabalho do aluno e apresentando propostas de reformulação se necessário).

POSSÍVEIS APROFUNDAMENTOS

Devido à natureza do módulo, não se sugerem aprofundamentos em concreto.

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

1. Efeito de escala

COMAP (2016). *FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.

Costa, S., & Rodrigues, C. (s/d), *Um certo fator de escala* (vídeo e guia). Projeto Matemática Multimídia (Universidade de Campinas, Brasil). Obtido de <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1066>.

Veloso, E. (1998). *Forma e Tamanho in Geometria Temas Atuais*, p. 262-264. Lisboa: IIE.

2. Crescimento das plantas e Fibonacci

A sequência de Fibonacci na natureza, *Redação Planeta Biologia*. Obtido de <https://planetabiologia.com/a-sequencia-de-fibonacci-na-natureza/>.

Pombo, O. (2001) *Fibonacci*. Obtido de <https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/fibonacci/>.

Vila, C. (2010). *Matemática e Natureza - Sequência de números de Fibonacci e demais leis que regem o mundo* (vídeo). Obtido de https://youtu.be/eVbOxWVC_GY.

3. Autómatos Celulares – Jogo da vida

Jogo da Vida, *Revista do Professor de Matemática*, n° 74. Obtido de <https://rpm.org.br/cdrpm/74/3.html>.

Machiavelo, A. (2009). Um Jogo para Zero Pessoas: o Jogo da Vida, *Gazeta de Matemática*, n° 159, p. 25-27. Obtido de <http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=261>.

Martins, M.C. (2015). *John Conway e o seu Jogo da Vida*. Obtido de <http://hdl.handle.net/10400.3/3598>.

Silva, J. N. (2013). Vida a andar para trás, *Gazeta de Matemática*, n° 170, p. 8-9. Obtido de <http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=261>.

MATEMÁTICA | MÓDULO OP18

CRIPTOGRAFIA

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS				
Linguagens e textos (A)	Informação e comunicação (B)	Raciocínio e resolução de problemas (C)	Pensamento crítico e pensamento criativo (D)	Relacionamento interpessoal (E)
Desenvolvimento pessoal e autonomia (F)	Bem-estar, saúde e ambiente (G)	Sensibilidade estética e artística (H)	Saber científico, técnico e tecnológico (I)	Consciência e domínio do corpo (J)

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

Conceitos chave | Ideias chave

Importância da Criptografia | Método de Júlio César | Método de transposição

Pretende-se que os alunos se consciencializem da importância da criptografia no mundo atual e contactem com alguns métodos elementares de proteger comunicações.

O computador e a calculadora gráfica devem ser utilizados como meios de exploração, comparação e programação de diferentes métodos de criptografia.

TEMAS, TÓPICOS E SUBTÓPICOS MATEMÁTICOS	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES QUE O ALUNO DEVE REVELAR	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	ÁREAS DE COMPETÊNCIA DO PERFIL DOS ALUNOS
<p>CRIOGRAFIA</p> <p>Importância da Criptografia no mundo atual</p> <p>Usos atuais da criptografia</p> <p>Perigos e dificuldades colocados pelos usos da criptografia</p>	<p>Identificar alguns usos atuais da Criptografia.</p> <p>Conhecer alguns problemas relacionados com as facilidades/dificuldades do uso da Criptografia.</p>	<p>Promover a exploração por alunos de alguns casos de simples compreensão: Multibanco, vendas seguras em linha, software de comunicações em telemóveis, outro software de transmissão segura de vídeos ou conversas.</p> <p>Identificar, através de notícias nos jornais ou descrições na Wikipédia, alguns casos célebres de usos perigosos da criptografia, como o seu uso por grupos terroristas ou a chantagem informática.</p>	<p>Gere projetos e toma decisões na resolução de problemas e analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas. (C)</p>
<p>O método de Júlio César</p> <p>Funcionamento prático do método de Júlio César</p> <p>Vantagens e fraquezas do método de Júlio César</p> <p>Estratégias para decifrar uma mensagem cifrada pelo método de Júlio César quando não se conhece o valor da transposição alfabética.</p>	<p>Conhecer a aplicar o método de Júlio César para codificar e decodificar mensagens; referir o caso particular do método ROT-13.</p> <p>Discutir possíveis estratégias para decodificar uma mensagem criptografada com o método de Júlio César, incluindo o uso da frequência das letras na língua usada na mensagem.</p>	<p>Levar os alunos a contextualizar historicamente a necessidade de Júlio César enviar mensagens codificadas.</p> <p>Apresentar aos alunos outras referências históricas da criptografia, como o caso de François Viète que foi acusado de bruxaria por ser especialista em decifrar mensagens criptografadas, a cifra dos Templários e o papel da máquina de criptografar Enigma na II Guerra Mundial.</p> <p>Usar a linguagem <i>Python</i> para programar o método de Júlio César e o método ROT-13.</p> <p>Usar a linguagem <i>Python</i> para decifrar mensagens cifradas com a regra de Júlio César, tanto quando se conhece qual a rotação introduzida no alfabeto como quando não se conhece.</p> <p>Referir o uso histórico de métodos estatísticos para decifrar mensagens criptografadas, como por exemplo, no trabalho de Al-Kindi (séc IX).</p>	<p>Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos. (E)</p> <p>Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão. (I)</p>
<p>Método de transposição</p> <p>Estudo do Bastão de Licurgo</p> <p>Estudo do método de transposição usando cercas de linha de comboio (Rail Fence Cipher)</p>	<p>Codificar e decodificar mensagens usando o método do Bastão de Licurgo.</p> <p>Codificar e decodificar mensagens usando o método das Cercas de Linha de Comboio com 2 linha.</p>	<p>Apresentar aos alunos a história do Bastão de Licurgo, suas vantagens e limitações.</p> <p>Incentivar os alunos a codificar e decodificar mensagens usando os dois métodos de transposição (bastão de Licurgo e Cercas da Linha de Comboio).</p>	

AVALIAÇÃO

Valorizando o caráter formativo da avaliação, esta deve recair, sobretudo, nas atividades de aprendizagem realizadas em aula, fornecendo feedback aos alunos para corrigirem erros e desenvolverem competências, tornando-os agentes ativos, reflexivos e responsáveis pela sua aprendizagem, na prossecução do desenvolvimento das competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

Algumas tarefas poderão ser pensadas especificamente para a avaliação sumativa, ou seja, para fazer balanços sobre as aprendizagens realizadas, mas devem sempre ter em vista futuras aprendizagens.

Devem ser usadas diferentes estratégias e instrumentos de avaliação, tais como apresentações orais, relatórios, resolução de um problema, situação de modelação ou de projeto, que devem integrar um portefólio do módulo ou da disciplina. Neste módulo, devem ser incluídas duas provas: um relatório de um processo de codificação ou decodificação estudados e uma apresentação oral ou escrita de uma situação de modelação matemática, recorrendo a um de três tipos de exemplos (exemplos históricos, exemplos de métodos utilizados, trabalho com um outro método não estudado no módulo, recortes de jornais). O professor deve acompanhar de forma especial estas últimas provas (orientando o trabalho do aluno e apresentando propostas de reformulação se necessário).

PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles.

Antes de redigir o programa na linguagem *Python*, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

A linguagem *Python* permite a manipulação de texto. Podem assim abordar-se vários problemas de criptografia com programas simples em *Python*. Essencialmente convertem-se os caracteres do texto em código numérico ASCII, adiciona-se o valor de rotação e no fim converte-se de novo o código ASCII em texto.

Hervé Diet (2018). Cryptographie. Mathématiques - Rectorat de l'Académie de Nantes. Obtido de:

<https://www.pedagogie.ac-nantes.fr/mathematiques/enseignement/groupe-de-recherche/2017-2019/cryptographie-1123161.kjsp?RH=1197471441578>.

Exemplo de programa em Python para encriptar um texto, recorrendo à sua conversão em código ASCII, seguido da adição de um valor de rotação e no fim convertendo de novo o código ASCII em texto:

```
texto=input("Utilizando apenas letras minúsculas, introduza a frase a encriptar: ")
def rot13(texto):
    l=len(texto)
    code=""
    for i in range(l):
        c=ord(texto[i])
        c=c+13
        if c>122:
            c=c-26
        m=chr(c)
        code=code+m
    return code
print(rot13(texto))
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Exemplo de programa em Python para desencriptar um código previamente encriptado, recorrendo à sua conversão em código ASCII, seguido da subtração de um valor de rotação e no fim convertendo de novo o código ASCII em texto:

```
codigo=input("Escreve o código a desencriptar: ")
def rotn13(codigo):
    l=len(codigo)
    texto=""
    for i in range(l):
        c=ord(codigo[i])
        c=c-13
        if c<97:
            c=c+26
        if c==45:
            c=c-13
        m=chr(c)
        texto=texto+m
    return texto
print(rotn13(codigo))
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

POSSÍVEIS APROFUNDAMENTOS

Poderá aprofundar-se o método usado pela máquina ENIGMA e mesmo simular o seu funcionamento usando cartolina recortada, como em:

- Koss, M. (2021). The Paper Enigma. Obtido de <https://mckoss.com/posts/paper-enigma/>.

A Microsoft também publicou uma simulação em software da máquina ENIGMA, disponível em <https://www.microsoft.com/en-us/p/enigma-machine/9wzdnrdgkzd?activetab=pivot:overviewtab>.

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

Cimino, Al (2018). A História da Quebra dos Códigos Secretos. Rio de Janeiro: M.Books.

Quaresma, P., & Lopes, E. (2008). Criptografia, *Gazeta de Matemática*, nº 154, p. 7-11. Obtido de <http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=233>.

Quaresma, P., & Pinho, A. (2009). Criptoanálise, *Gazeta de Matemática*, nº 157, p. 22-31. Obtido de <http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=193>

Terada, R. (s/d). Criptografia e a importância de suas aplicações, *Revista do Professor de Matemática*, nº 12. Obtido de <https://www.rpm.org.br/cdrpm/12/1.htm>.

Singh, S. (2001). *O livro dos códigos*. Rio de Janeiro: Editora Record.

Paiva, R. (2019). *Criptografia, matemática e transações online - parte 1 - uma maravilha da matemática* (video). Obtido de <https://youtu.be/0-nLUnX8k2Q>.

Science Museum Group (s/d). *Enigma cipher machine*. Obtido de: <https://learning.sciencemuseumgroup.org.uk/resources/enigma-cipher-machine-3d-object/>.