



Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase

13 Páginas

Entrelinha 1,5, sem figuras nem imagens

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2013

VERSÃO 1

Na folha de respostas, indique de forma legível a versão da prova (Versão 1 ou Versão 2). A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos de todas as respostas aos itens de escolha múltipla.

Utilize a calculadora sempre que for necessário.

Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, nas páginas 3 e 4, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Trigonometria

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen} a \cos b + \text{sen} b \cos a$$

$$\text{cos}(a + b) = \text{cos} a \cos b - \text{sen} a \text{sen} b$$

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tga} + \text{tgb}}{1 - \text{tga} \text{tgb}}$$

Complexos

$$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis} (n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Probabilidades

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u v)' = u' v + u v'$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$$

$$(\operatorname{cos} u)' = -u' \operatorname{sen} u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\operatorname{cos}^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Num grupo de nove pessoas, constituído por seis homens e três mulheres, vão ser escolhidos três elementos para formarem uma comissão.

Quantas comissões diferentes se podem formar com exatamente duas mulheres?

(A) 3C_2

(B) $6 \times {}^3C_2$

(C) 9A_3

(D) $6 \times {}^3A_2$

2. Considere uma variável aleatória X , tal que os seus valores $X_i \in \{0, 1, 2, 3\}$

Sabe-se que:

- a e b são números reais;
- $P(X = 0) = a$
- $P(X = 1) = 2a$
- $P(X = 2) = P(X = 3) = b$
- $P(X > 1) = P(X < 2)$

Qual é o valor médio da variável aleatória X ?

- (A) $\frac{3}{2}$
- (B) $\frac{7}{5}$
- (C) $\frac{17}{9}$
- (D) $\frac{19}{12}$

3. Considere uma variável aleatória X com distribuição normal de valor médio 11 e desvio padrão σ

Sabe-se que σ é um número natural e que $P(X > 23) \approx 0,02275$

Qual é o valor de σ ?

- (A) 12
- (B) 11
- (C) 6
- (D) 4

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \frac{\text{sen}(-x)}{x}$

Considere a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n = \frac{1}{n}$

Qual é o valor de $\lim f(x_n)$?

(A) -1

(B) 0

(C) 1

(D) $+\infty$

5. Seja f uma função de domínio \mathbb{R}^+

Sabe-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + f(x)}{3x} = 1$

Qual das equações seguintes pode definir uma assíntota do gráfico da função f ?

(A) $y = \frac{1}{3}x$

(B) $y = \frac{2}{3}x$

(C) $y = x$

(D) $y = 3x$

6. Considere, para um certo número real a superior a 1, as funções f e g , de domínio \mathbb{R} , definidas por $f(x) = a^x$ e $g(x) = a^{-x}$

Considere as afirmações seguintes.

- I) Os gráficos das funções f e g não se intersectam.
- II) As funções f e g são monótonas crescentes.
- III) $f'(-1) - g'(1) = \frac{2 \ln a}{a}$

Qual das opções seguintes é a correta?

- (A) II e III são verdadeiras.
- (B) I é falsa e III é verdadeira.
- (C) I é verdadeira e III é falsa.
- (D) II e III são falsas.
7. Considere, no plano complexo, as imagens geométricas de quatro números complexos: w_1 , w_2 , w_3 e w_4

Sabe-se que:

- a imagem geométrica de w_1 está no 1.º quadrante;
- a imagem geométrica de w_2 está no 2.º quadrante;
- a imagem geométrica de w_3 está no 3.º quadrante;
- a imagem geométrica de w_4 está no 4.º quadrante.

Qual é o número complexo que, com $n \in \mathbb{N}$, pode ser igual a $i^{8n} \times i^{8n-1} + i^{8n-2}$?

- (A) w_1
- (B) w_2
- (C) w_3
- (D) w_4

8. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere $z = -8 + 6i$ e $w = \frac{-i \times z^2}{\bar{z}}$

Seja α um argumento do número complexo z

Qual das opções seguintes é verdadeira?

(A) $w = 10 \operatorname{cis}\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

(B) $w = 2 \operatorname{cis}\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

(C) $w = 10 \operatorname{cis}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

(D) $w = 2 \operatorname{cis}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

1. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \sqrt{2} + 2 \operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$ e $z_2 = 1 + i$

1.1. Sabe-se que $\frac{z_1}{z_2}$ é uma raiz quarta de um certo número complexo w

Determine w na forma algébrica, sem utilizar a calculadora.

1.2. Seja $z_3 = \operatorname{cis} \alpha$

Determine o valor de α pertencente ao intervalo $]-2\pi, -\pi[$, sabendo que $z_3 + \bar{z}_2$ é um número real.

2. Uma caixa contém apenas bolas brancas e bolas pretas, indistinguíveis ao tato.

Todas as bolas estão numeradas com um único número natural.

Sabe-se que:

- duas bolas em cada cinco são pretas;
- 20% das bolas pretas têm um número par;
- 40% das bolas brancas têm um número ímpar.

2.1. Retira-se, ao acaso, uma bola dessa caixa.

Determine a probabilidade de essa bola ser preta, sabendo que tem um número par.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2. Admita agora que a caixa tem n bolas.

Extraem-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa.

Determine n , sabendo que a probabilidade de ambas as bolas serem brancas é igual a $\frac{7}{20}$

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(B) = \frac{1}{4}$
- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{15}{16}$
- $P(A | \overline{B}) = \frac{7}{12}$

Determine $P(A)$

4. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{e^{4x} - 1} & \text{se } x < 0 \\ x \ln(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens 4.1. e 4.2., recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

4.2. Seja g a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$

Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos em $]0, e]$

4.3. Considere, num referencial o.n. xOy , o triângulo $[OAB]$

Sabe-se que:

- A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com a bissetriz dos quadrantes ímpares, em $]0, +\infty[$
- B é o ponto de coordenadas $(2e, 0)$

Determine a área do triângulo $[OAB]$

5. Considere as funções f e g , de domínio \mathbb{R}

Sabe-se que:

- f é uma função polinomial de grau 2
- 3 e -1 são zeros da função f
- $f(0) = -2$
- a segunda derivada, g'' , de uma certa função g tem domínio \mathbb{R} e é definida por $g''(x) = f(x) \times e^{-x}$

Apenas uma das opções seguintes está correta.

- I) A concavidade do gráfico da função g está sempre voltada para cima.
- II) A função g tem um ponto de inflexão de abscissa -1
- III) g' , primeira derivada de g , é crescente no intervalo $]-1, 3[$

Elabore uma composição na qual:

- indique a opção que está correta;
- apresente as razões que o levam a rejeitar as restantes opções.

Apresente duas razões diferentes, uma por cada opção rejeitada.

6. Considere a função g , de domínio $]-\frac{\pi}{2}, 0[$, definida por $g(x) = \sin(2x) - \cos x$

Seja a um número real do domínio de g

A reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abscissa a é paralela à reta de equação $y = \frac{x}{2} + 1$

Determine o valor de a , recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

7. Considere, para um certo número real a positivo, uma função f , contínua, de domínio $[-a, a]$

Sabe-se que $f(-a) = f(a)$ e $f(a) > f(0)$

Mostre que a condição $f(x) = f(x+a)$ tem, pelo menos, uma solução em $]-a, 0[$

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a 8. (8 × 5 pontos)	40 pontos
	<hr/>
	40 pontos

GRUPO II

1.	
1.1.	15 pontos
1.2.	10 pontos
2.	
2.1.	15 pontos
2.2.	15 pontos
3.	15 pontos
4.	
4.1.	15 pontos
4.2.	15 pontos
4.3.	15 pontos
5.	15 pontos
6.	15 pontos
7.	15 pontos
	<hr/>
	160 pontos
TOTAL	<hr/>
	200 pontos