PROGRAMA
e
Metas Curriculares
Matemática A

Limite de Função e Continuidade: análise de uma opção

António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira, Luísa Loura, Maria Clementina Timóteo

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Metas Curriculares

Definições de limite de uma função num ponto

Optou-se por manter a definição de **Heine**, já habitual no ensino secundário, em detrimento da definição de **Cauchy**, cujo estudo não é abordado.

São essencialmente duas as opções que classicamente se consideram para a definição de limite num ponto a real, no que diz respeito ao **domínio** em que se tomam as sucessões a tender para a, para o efeito de testar a existência do referido limite.

A opção privilegiada desde há bastante tempo no ensino secundário em Portugal tem sido a que consiste em considerar, de entre as sucessões no domínio da função, apenas aquelas que **nunca tomam o valor a**. Ou seja, tem-se optado pelo que vulgarmente se designa por **"limite por valores diferentes de a"**.

No presente programa optou-se pela **versão alternativa** que consiste em admitir, com o mesmo objetivo, sucessões **podendo tomar o valor a**; considera-se, com efeito, que esta opção apresenta diversas vantagens.

Metas Curriculares

Definições de limite de uma função num ponto

Em primeiro lugar por ser **mais simples** de formular (em particular a noção de **ponto aderente** é mais simples do que a noção de **ponto de acumulação**) e permitir também uma formulação mais simples da noção de **continuidade**.

Em segundo porque a própria noção de "**limite por valores diferentes**" (como outras afins como a de "**limite à esquerda**" e "**à direita**" ou mesmo a noção de **limite por valores racionais**, também com interesse a nível do ensino secundário em determinado contexto) passa a poder ser encarada como **limite da restrição** da função inicial a determinado conjunto.

É de notar também que esta abordagem está bastante vulgarizada em diversos âmbitos em que se introduz ou desenvolve uma introdução à Análise Matemática.

A definição até agora mais usual no ensino secundário obriga a **cuidados suplementares** para que se evitem **erros** no enunciado de determinadas propriedades, os quais por vezes se podem detectar, mesmo em boas obras de referência.

Vamos ver exemplos em excelentes obras da autoria ou co-autoria de Sebastião e Silva.

Metas Curriculares

Definições de limite de uma função num ponto

§ 5. OPERAÇÕES SOBRE FUNÇÕES

23. **Operações racionais e extracções de raiz.** — Dadas duas funções f e g, as expressões

$$f(x) + g(x)\,, \quad f(x) - g(x)\,, \; f(x) \cdot g(x)\,, \; \frac{f(x)}{g(x)}\,, \; \sqrt[n]{f(x)}, \text{ etc.}$$

representam novas funções de x, que se chamam, respectivamente, *soma de* f *com* g, *diferença entre* f *e* g, *produto de* f *por* g, *quociente de* f *por* g, *raiz de índice* n *de* f, *etc.*

O domínio de existência da nova função pode ser mais restrito que os domínios de existência das funções dadas. Assim, por exemplo, o produto das funções reais $\sqrt{1-x}$ e $\sqrt{1+x}$ é a função $\sqrt{1-x^2}$; a primeira é definida para $x \leqq 1$, a segunda para $x \geqq -1$, a terceira para $-1 \leqq x \leqq 1$ (1).

24. **Composição.** — Consideremos, por exemplo, as seguintes fórmulas:

$$y = 3\,u^2 - u + 1\,, \quad u = \sqrt{x}\,.$$

A primeira exprime y como função de u, enquanto a segunda exprime u como função de x. É claro que, deste modo,

(1) Pode mesmo acontecer que o domínio de existência da nova função seja *vazio*, isto é, desprovido de elementos. É o que sucede, por exemplo, com a função $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-2}$.

Definições de limite de uma função num ponto

Somos assim conduzidos à seguinte definição:

DEFINIÇÃO 1. *Sendo* f(x) *uma função qualquer e sendo* a *e* b *constantes quaisquer, finitas ou infinitas, diz-se*

«$f(x)$ **tende para** b **quando** x **tende para** a»,

se, a **toda** *a possível sucessão de valores de* x *tendente para* a *(sendo esses valores diferentes de* a*), corresponde uma sucessão de valores de* f(x) *tendente para* b (¹).

Portanto, a frase entre aspas é apenas um modo abreviado de exprimir este facto: para **todas** as possíveis sucessões de valores $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, diferentes de a, tais que $x_n \to a$, vem $f(x_n) \to b$. O mesmo se pode ainda exprimir, mais abreviadamente, escrevendo:

$$f(x) \to b, \quad \text{quando} \quad x \to a,$$

ou

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

(ler: «o limite de $f(x)$ quando x tende para a é b»).

NOTA IMPORTANTE — Temos até aqui representado pela notação $\lim u_n$ o limite duma variável u_n (dependente da variável natural n), quando esse limite existe. Porém, quando houver possibilidade de confusão, deverá substituir-se aquela notação por estoutra:

$$\lim_{n \to \infty} u_n,$$

que está inteiramente de acordo com as convenções que acabamos de estabelecer (é claro que a variável natural n só pode tender para $+\infty$).

(¹) Subentende-se nesta definição que os valores atribuídos a x pertencem ao domínio da função e que existe pelo menos uma sucessão de pontos deste domínio, diferentes de a, tendente para a.

2. **Teoremas sobre limites de funções.** — De vários teoremas sobre limites de sucessões, deduzem-se teoremas análogos para limites de funções da variável real. Assim:

I. TEOREMA DA UNICIDADE DO LIMITE. *Uma função de* x *não pode tender simultâneamente para dois limites finitos diferentes, quando* x *tende para um limite* a, *qualquer.*

II. TEOREMA DAS FUNÇÕES CONSTANTES. *O limite duma função constante é o valor dessa constante, isto é:*

$$\lim_{x \to a} c = c, \quad \text{sendo c e a constantes quaisquer.}$$

Os **teoremas das operações sobre limites** traduzem-se agora nos seguintes termos:

Se duas funções f(x), g(x) *tendem para limites finitos quando* x *tende para um limite* a *(finito ou infinito), também a soma, a diferença e o produto dessas funções tendem para limites finitos quando* x → a *e será:*

III. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

IV. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

V. $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

Se além disso for $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$, será ainda

VI. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$

Finalmente, designando por p *um número natural qualquer, tem-se.*

VII. $\lim_{x \to a} [f(x)]^p = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^p$

VIII. $\lim_{x \to a} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{\lim_{x \to a} f(x)}$

Definições de limite de uma função num ponto

Como se vê, houve o cuidado, na definição de limite, de exigir que o ponto a em que se calcula o limite seja **ponto de acumulação** do domínio da função, embora não se utilize essa terminologia. Essa exigência aparece na nota de rodapé:

*«Subentende-se nesta definição que os valores atribuídos a x pertencem ao domínio da função e que **existe pelo menos uma sucessão de pontos deste domínio, diferentes de a, tendente para a.**»*

É esta exigência que permite depois garantir a **unicidade do limite**, tal como é enunciada na página seguinte. No entanto, com as definições gerais adoptadas de operações com funções, **não é possível** agora, com toda a generalidade, garantir, como se faz logo em seguida, que:

«Se duas funções $f(x)$ e $g(x)$ tendem para limites finitos quando x tende para um limite a (finito ou infinito) também a soma, a diferença e o produto dessas funções tendem para limites finitos quando $x \to a$ (…)»

Definições de limite de uma função num ponto

Com efeito, o domínio de $f + g$, por exemplo, pode reduzir-se ao ponto a; ou, mais geralmente, **a pode não ser ponto de acumulação do domínio de $f + g$, ainda que o seja de cada um dos domínios de f e g**.

Nesse caso, com as definições dadas, podem existir os limites (em particular finitos) de f e g quando $x \to a$ mas **não pode existir o limite de $f + g$ quando $x \to a$**...

Se admitíssemos que a definição de limite se estendia a essa situação, então **perder-se-ia a unicidade**; em qualquer caso **não poderíamos simultaneamente demonstrar todas as propriedades dos limites expressas na mesma página, do modo como estão enunciadas**.

Por exemplo, sendo $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = \sqrt{2-x}$ sabemos que ambas as funções têm limite 0 quando $x \to 2$, mas $f + g$ tem domínio reduzido ao ponto 2, pelo que , com a definição dada, **não existe o limite de $f(x) + g(x)$ quando $x \to 2$**...

Se na definição de limite eliminássemos a exigência expressa na referida nota de rodapé, então $\sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$ **tenderia para qualquer valor** quando $x \to 2$; com efeito para mostrar que $\sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$ não tende para determinado valor b seria necessário encontrar uma sucessão no domínio da função nunca tomando o valor 2, o que é impossível... : **portanto perder-se-ia a unicidade**.

Metas Curriculares

Definições de limite de uma função num ponto

Nos textos-piloto de Sebastião e Silva de apoio às turmas experimentais de “Matemática Moderna” também não se clarifica esta questão, remetendo-se em grande parte para o Compêndio de Matemática acima referido (em co-autoria com Silva Paulo) e omitindo-se mesmo a condição que obriga o ponto onde se calcula o limite a ser ponto de acumulação, tanto na definição de Heine como na de Cauchy, que é aí tratada com maior desenvolvimento.

Essa omissão também ocorre no Compêndio ao definir-se limite à esquerda e à direita, o que, em rigor, tem como consequência que **fica prejudicada a condição suficiente para a existência de limite num ponto (real) que consiste em pressupor a existência e igualdade dos limite à direita e à esquerda nesse ponto**…

Outro tipo de incorrecções que se podem encontrar, agora claramente resultantes da definição de limite classicamente adoptada no secundário, está associado à definição habitualmente dada de **continuidade**:

Metas Curriculares

Definições de limite de uma função num ponto

DEFINIÇÃO 1′. Diz-se que uma função $f(x)$ é **contínua num ponto** a, quando se verificam as duas seguintes condições:

1) o ponto a pertence ao domínio da função $f(x)$.
2) $f(x)$ tende para $f(a)$ quando x tende para a,

isto é:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Com esta definição, uma função não seria contínua num ponto isolado do domínio…

Portanto, por exemplo, $\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$ não seria contínua em 2, único ponto do respectivo domínio, o que é um contra-exemplo para:

A soma, a diferença e o produto de duas funções contínuas num dado ponto ainda são funções contínuas nesse ponto.

Metas Curriculares

Definições de limite de uma função num ponto

A definição de limite adoptada no Programa de 2013 permite que a **definição e propriedades da noção de continuidade** sejam enunciadas como acima ficou ilustrado (até de maneira mais simples e equivalente…) sem necessidade de ressalvas relativas aos domínios das funções.

Para que tenha lugar a **unicidade do limite** há que restringir também os pontos onde se calculam limites, agora aos chamados **pontos aderentes**.

Um ponto a **de acumulação** de um conjunto C é um ponto a que é **aderente ao complementar de a em C**, noção, portanto, de algum modo mais complexa e que se pode dispensar, mesmo quando se quer depois tratar o limite em a por valores diferentes – trata-se simplesmente do **limite da função restrição** a esse complementar…

Metas Curriculares

Definições de limite de uma função num ponto

Ficou portanto assim, aqui com alguns negritos acrescentados (FRVR11):

1. *Definir limite de uma função num ponto e estudar as respetivas propriedades fundamentais*

   1. Identificar, dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, a como «ponto aderente a A» quando existe uma sucessão (x_n) de elementos de A tal que $\lim x_n = a$.
   2. Identificar, dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ como «limite de $f(x)$ quando x tende para a» **quando $\boldsymbol{a}$ for aderente ao domínio $\boldsymbol{D_f}$ de $\boldsymbol{f}$** e para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f convergente para a, $\lim f(x_n) = b$, justificar que um tal limite, se existir, é único, representá-lo por «$\lim\limits_{x \to a} f(x)$», referir, nesta situação, que «$f(x)$ tende para b quando x tende para a» e estender esta definição e propriedade ao caso de limites infinitos

Com alguns cuidados nas propriedades algébricas dos limites:

Definições de limite de uma função num ponto

FRVR11-1:

9. Justificar que os limites da soma, do produto e do quociente de funções $f: D_f \to \mathbb{R}$ e $g: D_g \to \mathbb{R}$ e do produto por um escalar α e da potência de expoente racional r de uma função $f: D_f \to \mathbb{R}$, se calculam, **em pontos aderentes aos domínios** respetivamente de $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$, αf e f^r a partir dos limites de f e g nesse pontos de forma análoga ao caso das sucessões, reconhecendo que se mantêm as situações indeterminadas.

Já quanto à continuidade, tudo fica mais simples (FRVR11-2) :

1. Justificar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio que se o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existe então é igual a $f(a)$.
2. Designar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio, a função f por «contínua em a» quando o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.
5. Justificar que se as funções reais de variável real $f: D_f \to \mathbb{R}$ e $g: D_g \to \mathbb{R}$ são contínuas num ponto a, então as funções $f+g$, $f-g$ e $f \times g$ são contínuas em a e, se $g(a) \neq 0$, a função $\frac{f}{g}$ é contínua em a.

Metas Curriculares

Definições de limite de uma função num ponto

Também a definição dos **limites laterais** pode aproveitar a definição geral dada de limite e de restrição de uma função e a relação entre limites laterais e limite pode agora ser enunciada simplesmente (exemplifica-se com a definição de limite à direita - FRVR11-1):

4. Identificar, dada uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ como o «limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores superiores a a» quando $b = \lim_{x \to a} f|_{]a,+\infty[}(x)$, representar b por $\lim_{x \to a^+} f(x)$, designá-lo também por «limite de $f(x)$ à direita de a», referir, nesta situação, que «$f(x)$ tende para b quando x tende para a por valores superiores a a» e estender esta definição ao caso de limites infinitos.
5. Saber, dada uma função real de variável real f e um ponto a aderente ao respetivo domínio D_f, que se $a \notin D_f$ e se os limites $\lim_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existirem e forem iguais, então existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ e que, nesse caso, $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$.
6. Saber, dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in D_f$, que se os limites $\lim_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existirem e forem ambos iguais a $f(a)$, então existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ e que, nesse caso, $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$.

Metas Curriculares

Definições de limite de uma função num ponto

Algumas dificuldades "inevitáveis":

Mesmo com a definição dada de limite há que ter alguns cuidados com os **domínios das funções** quando se pretende enunciar resultados relativos a limites de funções resultando de aplicação de operações algébricas ou composição a funções dadas.

Esses cuidados já foram referidos e exemplificados a propósito dos resultados gerais acerca do **limite da soma, produto e quociente**. O mesmo ocorre com o limite de uma função composta (FRVR11-1):

11. Justificar, dadas funções reais de variável real f e g **e um ponto $\boldsymbol{a}$ aderente a $\boldsymbol{D_{gof}}$**, que se $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to b} g(x) = c \in \mathbb{R}$ então $\lim_{x\to a}(gof)(x) = c$.

O problema, mais uma vez, é que não fica garantido à partida que o ponto a em que se pretende calcular o limite continue a ser **aderente** ao domínio da nova função construída a partir das funções dadas. Considere-se, por exemplo, $f(x) = -x^2$, $g(x) = x \ln x$ e $a = b = c = 0$; temos $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ (em particular 0 é aderente aos domínios de f e g), mas o domínio de gof é **vazio**, não tendo portanto pontos aderentes.

Definições de limite de uma função num ponto

Algumas dificuldades "inevitáveis":

Pelo contrário, quando se trata de analisar a **continuidade** tais cuidados são agora desnecessários, pois, nesse caso, a é sempre **elemento do domínio** tanto das funções dadas como da nova função, nos casos considerados, sendo portanto forçosamente **aderente** ao respectivo domínio. Note-se que o ponto a em que se estuda a continuidade, o que não tem de ser é **ponto de acumulação** dos domínios das funções dadas e, mesmo que o seja, daí não resulta que tenha de ser **ponto de acumulação** do **domínio da nova função** construída a partir delas. Daí as dificuldades detectadas relativas ao tratamento da continuidade, com a definição de limite entendida como sendo **"por valores diferentes"**.

Uma situação importante em que o limite é, por natureza, sempre "por valores diferentes", ou seja, em que o ponto em que se calcula o limite **não pertence nunca ao domínio da função**, é a definição de **derivada**, já que se trata de limite de uma razão incremental que, por definição, é uma função cujo domínio não pode conter o ponto em que se pretende calcular o referido limite.

Daí os cuidados necessários ao enunciar-se as propriedades da noção de derivada. Exemplifiquemos:

Metas Curriculares

Definições de limite de uma função num ponto

Algumas dificuldades "inevitáveis":

FRVR11-7

5. Provar, **dado um conjunto** $\boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}$ e funções reais de variável real $f: \boldsymbol{D} \to \mathbb{R}$, $g: \boldsymbol{D} \to \mathbb{R}$ diferenciáveis num ponto a de $\boldsymbol{D}$ e um número real k, que as funções $f + g$ e kf são diferenciáveis em a e que se tem $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ e $(kf)'(a) = kf'(a)$.

Note-se que ao atribuir-se o mesmo domínio a f e g, a diferenciabilidade de f e g em a garante que **$\boldsymbol{a}$ é forçosamente aderente a $\boldsymbol{D} \setminus \{\boldsymbol{a}\}$** onde D é o **domínio comum** a $f, g, f+g$ e kf. O mesmo se passa noutros casos, como por exemplo:

6. #Provar, **dado um conjunto** $\boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}$ e funções reais de variável real $f: \boldsymbol{D} \to \mathbb{R}$, $g: \boldsymbol{D} \to \mathbb{R}$ diferenciáveis num ponto a de D, que a função fg é diferenciável em a e que $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

No que diz respeito à **composição**, temos:

Definições de limite de uma função num ponto

Algumas dificuldades "inevitáveis":

FRVR11-7:

8. +Provar, dada uma função $f: D_f \to \mathbb{R}$ diferenciável num ponto $a \in D_f$ e uma função real de variável real $g: D_g \to \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{D'_f \subset D_g}$, diferenciável em $f(a)$, que a função composta gof é diferenciável em a e que $(gof)'(a) = f'(a) \times g'\big(f(a)\big)$.

Neste caso, ao impor-se que $D'_f \subset D_g$, mais uma vez se garante que a é forçosamente **aderente** ao complementar de $\{a\}$ no domínio da função cuja derivabilidade se pretende demonstrar, neste caso gof. Para verificar esta propriedade há que levar em conta que se (x_n) for uma sucessão de elementos de D_f distintos de a a tender para a, $f(x_n)$ será uma sucessão de elementos de D'_f , e portanto de D_g. Em particular (x_n) é também uma sucessão de elementos do domínio de gof distintos de a a convergir para a, o que prova o que pretendíamos.

Para se apreciar a importância de uma hipótese como $D'_f \subset D_g$ considere-se o exemplo em que $f(x) = -x^2$, $g(x) = x\sqrt{x}$ e $a = 0$.

Metas Curriculares