

## Programa de Matemática A – Consulta Pública

A equipa de autores gostaria de começar por agradecer às centenas de professores de todos os níveis de ensino, autores de manuais, investigadores, bem como sociedades científicas, associações profissionais e agrupamentos de escolas que, através de cerca de quarenta pareceres, participaram na presente consulta pública.

Destes documentos – assim como de contactos e de reuniões posteriores com alguns dos respetivos autores – resultaram diversas propostas concretas que foram integradas no Programa.

1. A principal preocupação manifestada na grande maioria dos pareceres recebidos esteve relacionada com a extensão da proposta. Ainda que o documento colocado à consulta pública incorporasse uma sugestão concreta de distribuição dos diferentes conteúdos pelo número de aulas disponíveis em cada ano escolar, entendeu-se eliminar e simplificar alguns dos tópicos do Programa, assim como certos aspetos de linguagem, de forma cuidadosa e sem prejuízo da estrutura global da proposta. Obteve-se assim uma nova versão do Programa que permite dispor de mais tempo para cada um dos respetivos conteúdos. Estas alterações encontram-se elencadas no texto abaixo.

### **10.º ano**

#### **Lógica e Teoria dos Conjuntos**

- Foi eliminado o estudo de algumas propriedades relativas a proposições e a conectores lógicos bem como alguma nomenclatura relacionada (descritores 1.1, 1.4, 1.12, 1.14, 1.15, 1.16 e 1.18).
- Foi eliminado o estudo de algumas propriedades relativas a condições e a conjuntos, bem como alguma nomenclatura relacionada (descritores 2.3, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.12, 2.16, 2.17, 2.20, 2.21, 2.23, 2.28).
- Transitaram para o 12.º ano os descritores 2.19, 2.26, 2.27 e 2.31, relativos a algumas operações sobre conjuntos.

#### **Álgebra**

- Foi simplificado o descritor 1.11, relativo à racionalização de denominadores.

#### **Geometria Analítica**

- Foi simplificada a definição de equação cartesiana (descritor 1.5) e eliminada a definição de inequação cartesiana (descritor 1.11).
- Foi simplificada a abordagem aos semiplanos (descritores 1.12 e 1.13).
- Foi retirado o estudo da parte interna das elipses (descritores 1.17 e 1.18).
- Foi retirado o estudo das relações de equivalência (descritores 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 11.1 e 11.2).

### **Funções Reais de Variável Real**

- Foi retirada a interpretação de uma função como um terno ordenado (descriptor 1.1).

### **Estatística**

- Foi eliminada a referência à execução de exercícios envolvendo o símbolo de somatório (eliminado o descriptor 1.6).
- Foi eliminado o estudo das simulações de Monte Carlo (descritores 5.1, 5.2, 5.3, 6.1 e 7.3)

## **11.º ano**

### **Trigonometria**

- Foi simplificado o 1.º objetivo geral (descritores 1.1, 1.5, 1.9, 1.12, 1.13, 1.14 e 1.17).
- Foi simplificada a abordagem aos ângulos orientados (descritores 2.3, 2.4, 2.5 e 5.1).
- Transitou para o 12.º ano o estudo dos osciladores harmônicos e o estudo sistemático dos gráficos das funções trigonométricas (descritores 8.4, 11.1 e 11.2).
- Transitaram para o 12.º ano as fórmulas trigonométricas envolvendo somas e diferenças de ângulos (descritores 1.15, 1.16, 8.2 e 8.3).

### **Geometria Analítica**

- Foi retirada a menção à desigualdade de Cauchy-Schwarz (descriptor 2.7).

### **Programação Linear**

- Foi retirado o domínio Programação Linear (descritores 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6 e 3.1).

### **Sucessões**

- Foram retiradas as noções de supremo e de ínfimo de um conjunto de números (descritores 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9 e 1.10).
- A aplicação aos juros compostos transitou para o 12.º ano (descritores 6.1, 6.2, 6.3 e 8.3).

### **Funções Reais de Variável Real**

- Transitaram para o 10.º ano as operações sobre funções (descriptor 1.11).
- Foi retirada a definição de limite segundo um conjunto (descriptor 1.3).
- Foi retirada a noção de mais/menos infinito como ponto aderente a um conjunto (descritores 1.8, 1.9 e 1.10).
- Foi eliminada a referência ao Teorema de Rolle (descriptor 8.2).

## **12.º ano**

### **Cálculo Combinatório**

- Foi eliminada a interpretação dos arranjos (com ou sem repetição) enquanto contagem das funções ou das funções injectivas com dado domínio e contradomínio (descritores 1.5, 1.11 e 4.1).

### **Probabilidades**

- Foi retirado o objetivo geral «Definir variáveis aleatórias discretas e distribuições de probabilidade» (descritores 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 4.4 e 4.5).

### **Funções Reais de Variável Real**

- Foi eliminada a referência à diferenciabilidade e o estudo da regra de derivação da função inversa (descritores 4.1 e 4.2).
- Transitou para o 11.º ano o descritor 1.5 e a sua redação foi alterada.
- Foi simplificada a abordagem aos teoremas de comparação de sucessões e funções enquadradas (descritores 1.6, 1.7, 1.8, 1.9).
- Foi retirado o estudo da continuidade da função inversa de uma função contínua (descritor 2.2).

### **Trigonometria**

- Foi simplificado o enunciado da aplicação envolvendo a segunda lei de Newton (descritores 2.1, 2.2 e 3.3).

### **Funções exponenciais e funções logarítmicas**

- Foi simplificado o objetivo geral 4, relativo a limites envolvendo funções exponenciais e logarítmicas (descritor 4.1, 4.2 e 4.3).

### **Primitivas e Cálculo Integral**

- Foi eliminada a referência às propriedades das áreas utilizadas no estudo do integral (descritores 2.1, 2.2, 2.3, 2.4).
- Foi eliminada a definição de função que alterna de sinal um número finito de vezes (descritores 2.12, 2.13, 2.14, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4).
- Foi eliminada a referência à existência do integral para qualquer função contínua (descritor 2.14).
- Foi eliminado o Teorema da Média (descritor 3.3).

## Números Complexos

- Foram eliminadas as referências a algumas propriedades relativas aos argumentos dos números complexos (descritores 4.6 e 4.8).
- Foi eliminado o estudo da extensão da função raiz quadrada ao conjunto dos números complexos (descritores 5.2 e 5.3).

Refira-se ainda o significado dos símbolos «+» e «#» com que se encontram assinalados certos descritores, e que parecem ter sido ignorados em vários pareceres.

- Tal como o Programa indica, assinalaram-se com o símbolo «#» grupos de descritores, que, envolvendo técnicas de demonstração muito semelhantes entre si, não requerem justificações e demonstrações exaustivas, devendo o professor justificar de forma mais completa apenas alguns deles, à sua escolha. Um caso paradigmático desta situação é, por exemplo, a longa lista de descritores do domínio SUC11, em que se elenca a “Álgebra de Limites” (descritores 7.11 a 7.26).
- Nos descritores iniciados pelo verbo «Provar» ou pelo verbo «Demonstrar», o símbolo «+» significa, tal como se encontra estipulado no Programa, que todos os alunos devem conhecer o referido resultado mas que a respetiva demonstração é facultativa, não sendo portanto exigível aos alunos.

2. Em alguns pareceres propuseram-se alterações à ordem pela qual são expostos os conteúdos num determinado ano. A este propósito (e tal como já acontecia a propósito do Ensino Básico) podia ler-se na proposta apresentada que

«Optou-se por formar uma sequência de objetivos gerais e descritores, dentro de cada subdomínio, que corresponde a uma progressão de ensino adequada, **podendo no entanto optar-se por alternativas coerentes** que cumpram os mesmos objetivos e respetivos descritores. Existem, em particular, algumas circunstâncias **em que se torna necessário cumprir alternadamente descritores que pertencem a subdomínios ou mesmo a domínios distintos**; com efeito, a arrumação dos tópicos por domínios temáticos, e simultaneamente respeitando dentro de cada domínio uma determinada progressão a isso pode levar, dada a própria natureza e interligação dos conteúdos e capacidades matemáticas.»

É pois perfeitamente lícito, quer ao nível de manuais escolares, quer em termos da prática letiva, optar-se por ordens de lecionação distintas daquela que é sugerida no Programa. A este propósito, refira-se ainda que em alguns pareceres (em número reduzido) se considerou negativo «o aparecimento da Lógica e Teoria dos Conjuntos como um domínio separado». Esta crítica parece não ter em conta que a organização por Metas Curriculares obriga à explicitação clara de todos os conteúdos constantes do Programa, facto que foi mesmo referido na introdução da Proposta apresentada. Isso não significa, como é dito mais acima, que alguns destes conteúdos não possam ser tratados em simultâneo com outros domínios, como por exemplo com conteúdos pertencentes à Geometria Analítica.

3. Alguns pareceres referem a falta de informação relativa ao enquadramento da proposta apresentada com Programas de Avaliação Internacional. Foi incorporada, na presente versão, informação referente ao *TIMSS-Advanced* (programa de avaliação dedicado aos alunos do 12.º ano de áreas com forte componente em Matemática e em Física e em que Portugal irá participar a partir de 2015), aos respetivos domínios de conteúdos e de capacidades cognitivas (*Knowing, Applying, Reasoning*) e à forma como estes se conjugam com os objetivos constantes do Programa nacional.
4. Finalmente, certos pareceres referem especificamente alguns conteúdos, questionando a pertinência da respetiva inclusão no Programa do Secundário. Fazemos de seguida um breve comentário a cada um deles:

### **Primitivas e cálculo integral**

Trata-se, em termos de conteúdos, da principal alteração introduzida. É um dos pontos em que o anterior Programa se encontrava claramente desatualizado e desalinhado com aquilo que é a prática da maioria dos currículos internacionais. Em particular, o *TIMSS-Advanced*, que se constitui como um importante referencial internacional de avaliação para alunos do final do Ensino Secundário, refere explicitamente este ponto: «*Integrate polynomial, exponential, trigonometric and rational functions. Evaluate definite integrals, and apply integration to compute the area under a curve*».

Note-se que a abordagem preconizada neste novo Programa dá resposta a quase todos estes requisitos, propondo-se em particular uma construção do integral baseada em propriedades intuitivas de área, que dispensa outros formalismos menos adequados a este nível de Ensino.

### **Espaços Vetoriais**

A Proposta colocada à discussão pública não contempla este tópico; as referências a este conteúdo resultaram certamente de uma leitura mais apressada do documento. Este termo é utilizado em dois únicos descritores, exclusivamente a título de vocabulário: no descritor GA10-6.1, em que se pode ler «...designar o par ordenado  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  por «base canónica do espaço vetorial dos vetores do plano»...», e no descritor GA10-12.1: «...designar o terno ordenado  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  por «base canónica do espaço vetorial dos vetores do plano»...».

### **Teorema de Carnot, Analogia dos Senos e funções trigonométricas inversas**

Também se solicita explicitamente, no *TIMSS-Advanced*, a aplicação da trigonometria a problemas envolvendo triângulos. A resolução de triângulos constitui uma aplicação natural e fundamental da trigonometria que foi progressivamente desaparecendo do currículo nacional. Trata-se de uma categoria de problemas cuja resolução pode ser facilmente sistematizada utilizando a Analogia dos Senos e o Teorema de Carnot, pelo que, tendo em conta os objetivos em apreço, a introdução destes resultados no Programa (que aliás já constavam de diversos manuais) constitui uma verdadeira mais-valia para os alunos. Naturalmente, todas estas atividades tornam aconselhável um conhecimento mínimo das funções trigonométricas inversas, em particular para se interpretarem adequadamente os resultados numéricos fornecidos pelas calculadoras.

## **Teorema de Lagrange e Teorema de Weierstrass**

Gostaríamos de salientar, quanto ao Teorema de Lagrange, que apenas se pede aos alunos que reconheçam intuitivamente este resultado, através da respetiva interpretação geométrica. É um resultado essencial se se pretender que os alunos compreendam por que razão o sinal da derivada, num intervalo, determina a monotonia de uma função diferenciável nesse mesmo intervalo. Relativamente ao Teorema de Weierstrass, também apenas se requer o conhecimento do respetivo enunciado; trata-se de um resultado fulcral para a correta resolução de muitos problemas de otimização.

## **Equações diferenciais**

À imagem do tópico «Espaços Vetoriais», dificilmente se pode considerar que o presente Programa contemple o estudo de Equações diferenciais. Na verdade apenas se pede para verificar que as funções exponenciais e sinusoidais satisfazem, respetivamente, igualdades do tipo  $y' = ky$  e  $y'' = -k^2y$ . No caso das exponenciais requer-se ainda um cálculo trivial que permite observar que não existem outras funções cuja derivada seja proporcional à própria função. Estas simples observações permitem explicar de modo muito satisfatório a pertinência de determinados modelos cujo estudo é universalmente aceite no secundário.

## **Osciladores harmónicos**

Não se trata de um novo tópico, mas antes de uma questão de nomenclatura. Os «osciladores harmónicos» referem-se a sistemas cujo comportamento pode ser modelado por funções do tipo  $t \rightarrow A \cos(\omega t + \varphi)$ , propondo-se apenas na prática o estudo destas funções, interpretando os respetivos parâmetros. Funções exibindo este tipo de comportamento oscilatório estão na base de diversas aplicações fundamentais da Matemática ao mundo real, aspeto que é também largamente mencionado nos documentos internacionais

**A equipa de autores**