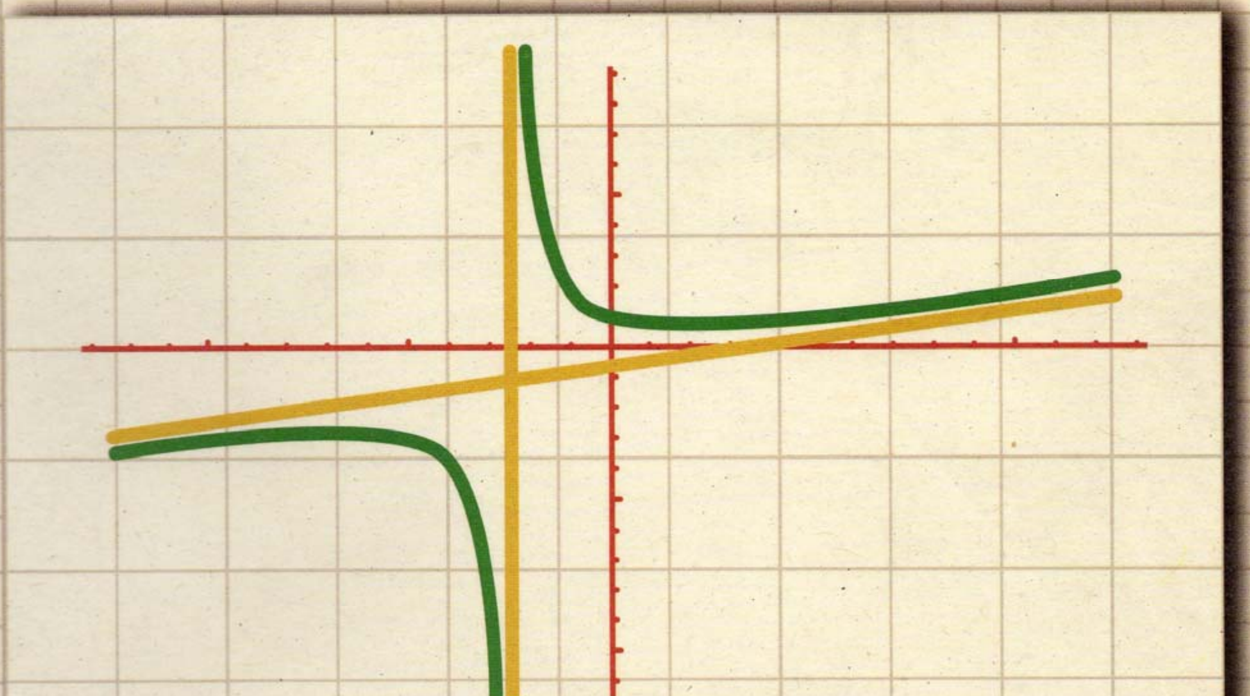
MATEMÁTICA

Ministério da Educação
Departamento do ***Ensino Secundário***

Funções

11º ano de escolaridade

Paula Teixeira
Adelina Precatado
Carlos Albuquerque
Conceição Antunes
Suzana Metello de Nápoles



MATEMÁTICA

Funções

11º ano de escolaridade

Paula Teixeira
Adelina Precatado
Carlos Albuquerque
Conceição Antunes
Suzana Metello de Nápoles

Ministério do Educação
Departamento do ***Ensino Secundário***

Biblioteca Nacional - Catalogação na Publicação

Funções: matemática – 11º ano de escolaridade /Paula Teixeira... [et al.]

ISBN 972-8417-09-8

I - Teixeira, Paula, 1956
CDU 5 (075)
51(075)

As opiniões expressas nos textos apresentados nesta publicação são da responsabilidade dos autores e não reflectem necessariamente a opinião do Departamento do Ensino Secundário ou do Ministério do Educação

TÍTULO ***Funções***

1.ª EDIÇÃO ***Agosto de 1998***

TIRAGEM ***4000 exemplares***

EDIÇÃO

Ministério do Educação

Departamento do Ensino Secundário

Av. 24 de Julho, 138, 1350 Lisboa

COORDENADOR ***Paula Teixeira***

AUTORES ***Adelina Precatado, Carlos Albuquerque, Conceição Antunes, Suzana Metello de Nápoles***

A brochura foi lida pela equipa técnica que elaborou a programa (Professor Jaime Carvalho e Silva, Dr. Arsélio Martins e Dra. Graziela Fonseca), que certificou a sua adequação ao programa

DEPÓSITO LEGAL *N.°* ***128 205/98***

ISBN ***972-8417-09-8***

CAPA ***José Pinto Nogueira***

EXECUÇÃO GRÁFICA E COMERCIALIZAÇÃO EXCLUSIVA

Editorial do Ministério do Educação

Estrada de Mem Martins, 4

Apartado 113

2726 MEM MARTINS CODEX

Tel.: 351 1 926 66 00 ***Fax: 351 1920 27 65***

Publicação cofinanciada pelo **Fundo Social Europeu**
no âmbito do **Programa de Desenvolvimento Educativo para Portugal – PRODEP**

NOTA DE APRESENTAÇÃO

O Departamento do Ensino Secundário (DES) tem vindo a conceber e a concretizar um conjunto de actividades destinadas a apoiar o ensino dos programas ajustados de Matemática para os 10°, 11° e 12° anos de escolaridade. É essencialmente no âmbito da Comissão de Acompanhamento dos Programas que tais actividades têm sido apresentadas, pensadas, discutidas e planeadas. Integram esta Comissão o Director do DES, que preside, a equipa responsável pelo ajustamento dos programas (Prof. Jaime Carvalho e Silva, Drª Graziela Fonseca e Dr. Arsélio Martins), assim como representantes da Associação de Professores de Matemática (APM), da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), da Sociedade Portuguesa de Estatística (SPE), da Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (SEM-SPCE), do Departamento de Educação Básica (DEB) e do Instituto de Inovação Educacional (IIE).

Tal como as quatros brochuras - Geometria, Funções, Estatística e Didáctica, - destinadas a apoiar o ensino do programa do 10° ano de escolaridade e que se distribuíram por todas as escolas com ensino secundário no lectivo de 1997/1998, as brochuras que agora se distribuem - **Geometria**, **Funções**, **Sucessões** e **Projectos Educativos -** destinam-se a apoiar o ensino do programa do 11° ano cuja aplicação se inicia em 1998/1999. São materiais que não substituem outros elementos de estudo e de consulta, mas constituem referências de qualidade que, com certeza, ajudarão os professores de Matemática a aprofundar os seus conhecimentos sobre a natureza e finalidades do programa, sobre questões matemáticas, pedagógicas e didácticas ou sobre a concepção, desenvolvimento e avaliação de projectos. Neste sentido, são materiais que podem apoiar os professores na selecção e na planificação de tarefas que envolvam os alunos em actividades matemáticas relevantes e que suscitem aprendizagens mais interessadas, mais consistentes e mais significativas. A aprendizagem de conceitos estruturantes, de competências essenciais para o pensamento matemático, tais como particularizar, generalizar, identificar regularidades ou formular e testar conjecturas e o gosto pela actividade matemática estão fortemente relacionadas com o tipo de tarefas que se propõem aos alunos. Por isso, sublinho que, também neste aspecto, as brochuras podem constituir uma boa referência de trabalho.

Os autores das brochuras são professores e investigadores com percursos académicos e profissionais diversificados e significativos. O seu trabalho na formação de professores é reconhecido. Ao aceitarem divulgar os seus saberes, as suas ideias e as suas experiências, estão a contribuir para consolidar um processo de apoio sistemático e persistente aos professores de Matemática que iniciamos em 1997, e que inclui, entre outras iniciativas, a edição de brochuras, um sistema de formação aos professores acompanhantes locais que determina uma rede nacional de professores que, localmente, apoiam os seus colegas e um boletim informativo - InforMAT - que, em 1998/99, será melhorado e tem distribuição regular. Acreditamos que se trata de uma estratégia correcta que continuaremos a aperfeiçoar, criando condições para favorecer o seu desenvolvimento.

Devo sublinhar que a colaboração das entidades que integram a Comissão de Acompanhamento dos Programas, tem sido determinante para que o Departamento do Ensino Secundário consolide a estratégia que delineou e as actividades e iniciativas que a concretizam, como é o caso da edição das brochuras, da formação dos "professores acompanhantes" ou da avaliação do projecto. Não posso pois deixar de manifestar o meu reconhecimento por essa inestimável colaboração à APM, à SPM, à SPE, à SEM-SPCE, ao DEB e ao IIE. Devo também agradecer a colaboração permanente e sempre empenhada da equipa que coordenou todo o processo de ajustamento dos programas que, como é reconhecido, não se tem poupado a quaisquer esforços para melhorar o ensino da Matemática no nosso país, trabalhando, nas escolas secundárias, com os professores.

Finalmente, espero que as professoras e os professores de Matemática do ensino secundário possam reconhecer utilidade nos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas actividades de ensino quer ainda como referências e instrumentos de reflexão, de auto-formação e de desenvolvimento profissional. O Departamento do Ensino Secundário, como lhe compete, não deixará de continuar a desenvolver esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, continuamos a contar com as professoras e professores e com o seu profissionalismo empenhado, informado e consciente, elemento essencial e decisivo no processo de efectiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Lisboa, 27 de Agosto de 1998

O Director do Departamento do Ensino Secundário

Domingos Fernandes

Índice

INTRODUÇÃO

Com esta brochura dedicada ao tema "Funções" pretende-se dar continuidade ao trabalho iniciado no ano lectivo anterior, disponibilizando um texto que pretende ser um contributo no apoio às novas orientações para o programa de Matemática do ensino secundário.

Espera-se com este texto:

- ajudar os professores na interpretação do programa;
- disponibilizar um suporte teórico de alguns dos conteúdos a leccionar ou com eles relacionados;
- propor um conjunto de tarefas passíveis de serem utilizadas directamente com os alunos;
- sugerir instrumentos de avaliação e de recursos diversificados.

O programa refere, na página 7, "No estudo do cálculo diferencial dá-se prioridade ao trabalho com a noção de derivada, sendo deixada a formalização da definição de limite para uma fase posterior". Parece-nos fundamental alertar para esta opção do programa que tem implicações profundas nas metodologias a adoptar e nos conteúdos a leccionar. O programa propõe-nos uma forma diferente, da que estamos habituados, para tratar os conceitos de limite e de derivada, necessariamente mais desformalizada e mais intuitiva. Refere-se ainda, na página 7 que "ao contrário dos programas anteriores a noção de limite é visada primeiro de forma apenas intuitiva; em seguida é formalizada no tema sucessões, sendo mais tarde (12º ano) generalizada para funções quaisquer (via definição de Heine)".

O estudo das funções - Introdução ao cálculo diferencial I - deve continuar a ser feito colocando em primeiro plano abordagens gráficas e intuitivas e relacionando de forma sistemática abordagens gráficas e analíticas.

Sugerimos que as derivadas sejam sobretudo tratadas a partir da noção de taxa de variação (velocidade instantânea) privilegiando abordagens gráficas e a utilização da função derivada existente nas calculadoras.

É de toda a vantagem a leitura do programa de uma forma vertical (10º, 11º e 12º) de modo a verificar que assuntos como *limite de função*, *assimptotas*, c*ontinuidade*, *regras de derivação*, *problemas de optimização,* são conteúdos do programa do 12º ano.

O não entendimento destas orientações metodológicas pode contribuir para aumentar um programa que à partida já consideramos extenso. Os professores terão que fazer opções que não comprometam os objectivos e os temas, e que permitam a leccionação do número máximo de itens do programa.

A utilização da tecnologia e as aplicações da Matemática a par de uma visão do aluno que pensa, experimenta e investiga em vez de ser um "receptor de conteúdos" devem continuar a ser uma preocupação central no processo de ensino. A este respeito recorde-se que o programa refere na pág. 17: "Podemos mesmo dizer que a forma de aprender a fazer matemática é um conteúdo do ensino da Matemática".

O processo de modelação matemática é um item do tema geral do programa que só pode ser desenvolvido plenamente no 12º ano se os alunos ao longo dos anos anteriores tiverem oportunidades várias de na aula, em trabalhos de grupo e em projectos, tratarem situações que se aproximem da modelação matemática. O estudo das funções deve continuar a ser feito em contextos de resolução de problemas e de aplicações da Matemática.

A utilização de sensores, que algumas escolas começam a dispor facilita a realização de actividades experimentais na aula de Matemática, bem como a ligação com outras disciplinas nomeadamente a Física e a Química.

A abordagem que o programa propõe para o tema "Funções" do 11º ano vem na linha das observações já feitas na brochura do 10º ano sobre o mesmo tema. Coloca-se a ênfase na construção intuitiva dos conceitos e na utilização das tecnologias quer como ferramenta quer como "fonte de actividade, de investigação e de aprendizagem" (pág. 8 do programa).

Continua a ser fundamental a ligação entre os aspectos numéricos, gráficos e algébricos, devendo haver a preocupação de a par de resoluções gráficas apresentar também resoluções algébricas.

Os alunos que em 97/98 iniciaram o ensino secundário trabalharam já com calculadoras gráficas. É altura de começarmos a pensar como introduzir o computador na aula de Matemática. A Internet começa a estar disponível, de forma muito tímida, mas aliciante para os alunos. Evidentemente que não estamos a pensar numa utilização generalizada de computadores e de Internet no próximo ano, mas é indispensável que algumas experiências sejam feitas.

No essencial a brochura apresenta a mesma estrutura da do 10º ano encontrando-se dividida em quatro partes:

- Fundamentação teórica
- Actividades para a sala de aula
- Recursos
- Avaliação

Fundamentação Teórica

Conserva-se, no essencial, o tipo de abordagem iniciado no 10.º ano. No que diz respeito aos conteúdos encontram-se quer aprofundamentos do estudo iniciado no 10.º ano, quer uma introdução de assuntos novos como a noção intuitiva de limite e o Cálculo Diferencial.

O Cálculo Diferencial é tratado em mais detalhe, sendo feito um estudo que ultrapassa o âmbito do programa. Mais uma vez se salienta que este texto se destina aos professores, facultando uma informação alargada sobre os temas a abordar.

Ao contrário do ano anterior optou-se por praticamente não incluir actividades preparadas para serem utilizadas na sala de aula embora alguns dos exemplos apresentados possam ser adaptados ou sugerir essas actividades.

Actividades para a sala de aula

Disponibiliza-se um conjunto diversificado de actividades que podem ser utilizadas de acordo com as opções e as preferências do professor. Continua-se a apresentar alguns comentários que pretendem ser sugestões de abordagem metodológica ou propostas de resolução. Não se sentiu a necessidade de comentar com tanto pormenor cada uma delas atendendo a que as orientações metodológicas não sofreram alterações relativamente ao ano anterior.

Recursos

Este ano, para além dos recursos já referidos na brochura do 10º ano, damos destaque à utilização de sensores em actividades experimentais e à utilização da Internet.

Continua-se a disponibilizar um conjunto de ficheiros com algumas das actividades propostas. Esses ficheiros ficarão disponíveis na página do Acompanhamento de Matemática cujo endereço se encontra no final desta brochura.

Avaliação

Continua-se a realçar os aspectos inovadores do programa no que respeita à avaliação, sendo apresentadas algumas sugestões das quais destacamos os projectos e/ou actividades experimentais.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

No programa do 11.º ano conserva-se, no essencial, o tipo de abordagem do tema “Funções” iniciado no 10.º ano. No que diz respeito aos conteúdos encontram-se quer aprofundamentos do estudo iniciado no 10.º ano, quer uma introdução de assuntos novos como a noção intuitiva de limite e o Cálculo Diferencial. A presente fundamentação teórica acompanha estes novos conteúdos.

Relativamente à continuação do estudo de funções com base nos seus gráficos faz-se um estudo da hipérbole (e da sua relação com as funções racionais) e abordam-se ainda as operações entre funções.

No que diz respeito aos limites o programa sugere uma introdução intuitiva baseada no uso da calculadora. Dado que a tecnologia tem limitações, pareceu adequado detalhar alguns aspectos do funcionamento das máquinas que não reproduzem as noções matemáticas em estudo. Contudo, e dentro dos limites da máquina, a abordagem numérica é extraordinariamente sugestiva. Um exemplo desta abordagem que vale a pena consultar é o Compêndio de Matemática tratada de Sebastião e Silva.

O Cálculo Diferencial é tratado em detalhe, sendo feito um estudo que ultrapassa em alguns pontos o âmbito do programa. Mais uma vez se salienta que este texto se destina a facultar aos professores uma informação alargada sobre os temas a abordar. Desenvolve-se o papel do Cálculo Diferencial no estudo da monotonia e pontos críticos e tratam-se ainda as possibilidades e limites do uso da calculadora no cálculo de derivadas.

Os limites, o + ∞ e o –∞ na calculadora

No contexto deste programa reserva-se a expressão "tem limite" para os casos em que existe limite finito. O tender para $+\infty$ ou $-\infty$ pode ser referido como "tem limite $+\infty$" ou "tem limite $-\infty$".

Um exemplo típico da utilização da calculadora no estudo da aproximação experimental à noção de limite quando x tende para $+\infty$ ou $-\infty$, pode ser o que acontece com o valor da função

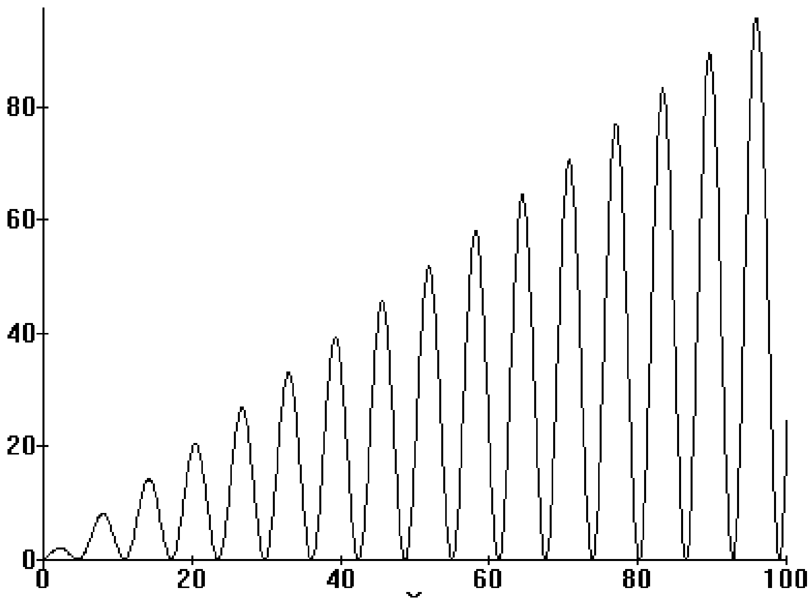
$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

quando o valor da variável x se torna cada vez maior:

x	$f(x)$
2	7.000000000
20	2.263157895
500	2.010020040
10000	2.000500050
2000000	2.000002500
12345678	2.000000405
9.23×10^{9}	2.000000001
1.2×10^{15}	2.000000000
9×10^{25}	2.000000000

Convém deixar claro, eventualmente com um gráfico, que a aproximação ao limite tanto pode ser monótona como pode ser alternada. A condição necessária para que se diga que há limite é que por menor que seja o intervalo que contenha o limite, há uma altura a partir da qual $f(x)$ está sempre nesse intervalo. Pode incluir-se um contra-exemplo gráfico.

A função $g(x)=\frac{x}{2}(sen(x)+1)$ não converge para $+\infty$ quando $x \to +\infty$, embora tome valores tão grandes quanto queiramos:



Convém notar que o uso de uma tabela pode conduzir por vezes a conclusões erradas. Basta estudar, por exemplo, os valores da função *g* só nos pontos do tipo πn (*n* natural), para se ficar com a impressão de que a função é sempre 0. Uma tabela pode sugerir outros comportamentos que não são reais:

x	$g(x)$
314	132,1009
650	424,0448
780	691,8323
1020	943,9366
1233	1231,262
1359	1335,956

x	$g(x)$
2100	2087,462
2201	2147,074
3011	2975,836
4003	3149,667
5010	4370,803
10100	6153,939

Se por um lado a abordagem numérica e gráfica apoiada na calculadora permite o desenvolvimento da intuição relativa ao infinito, há que ter em conta que a calculadora está limitada ao sistema numérico de vírgula flutuante que tem incorporado. Quando nos aproximamos dos limites deste sistema surgem situações que não têm nada a ver com os limites estudados analiticamente (dos quais se deve ir aproximando progressivamente a intuição).

O sistema de números com que a calculadora trabalha não é o conjunto dos números reais nem sequer o dos racionais. Uma calculadora científica ou gráfica suporta um conjunto de números da forma:

$$\pm\ \square,\square\square\square \ldots \square\square\square\square\square\square\square\square \times 10^{\pm\,\square\square}$$

Esta forma assemelha-se à notação científica, com algumas particularidades. Assim, os números de dígitos na mantissa e no expoente são constantes. Para o expoente são quase sempre reservados dois dígitos (o que permite expoentes de -99 a 99) enquanto que o número de dígitos da mantissa varia de máquina para máquina. Outro aspecto importante é que as máquinas só aceitam em geral números normalizados, isto é, o expoente é ajustado de forma a que o primeiro dígito da mantissa (à esquerda da vírgula) seja diferente de zero.

Não é difícil constatar que este conjunto assim definido não é fechado para as operações aritméticas habituais, pelo que sempre que se efectua uma operação há que procurar neste conjunto o número mais próximo do resultado obtido. Esta operação chama-se arredondamento e introduz um pequeno erro na grande maioria das operações na máquina.

As operações em vírgula flutuante (depois do arredondamento) perdem algumas das propriedades de que gozavam nos reais. Em particular perde-se a associatividade e a lei do anulamento do produto, como veremos de seguida.

Voltando ainda aos números que podem ser representados na máquina, colocam-se agora algumas questões.

- Qual o maior positivo representável na calculadora?
- Qual o menor positivo que pode ser representado na calculadora?

Seguindo a representação dada acima para os números na calculadora constatamos que o maior número positivo representável será

$$9{,}999\ldots99999999 \times 10^{99}$$

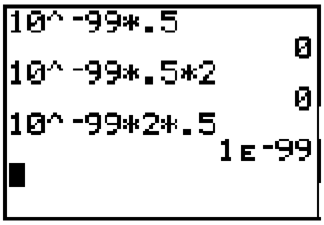
enquanto que o menor positivo será

$$1{,}000\ldots00000000 \times 10^{-99}$$

O número

$$0{,}000\ldots00000001 \times 10^{-99}$$

não é aceite por não estar normalizado. Se o introduzirmos a máquina tenta normalizá-lo reduzindo ainda mais o expoente. Como se desceria abaixo de –99 no expoente, ocorre uma situação chamada de "underflow" e o número é substituído por 0, em geral sem que ocorra qualquer erro e sem que o utilizador seja avisado. O mesmo sucede com o resultado de uma operação aritmética, de forma que obtemos os seguintes resultados:



Em termos de limites sucede que, para a máquina, tudo o que está abaixo de 10^{-99} é igual a zero. Em termos habituais tudo pode suceder. Em particular, se nos fiarmos nos resultados numéricos assim obtidos, observamos que a série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ deverá ser convergente (tem os termos nulos a partir de certa ordem). Outra situação em que o estudo do limite não pode ser levado muito longe usando a calculadora é a do cálculo da derivada como limite da razão incremental, como veremos mais adiante.

O sistema de vírgula flutuante fornecido pela máquina permite trabalhar com números de ordens de grandeza muito diferentes, o que pode permitir discussões interessantes acerca das diversas escalas na natureza. Podem colocar-se aqui questões como:

- O que é que mede 1m, 1 000m, 1 000 000m, 10^9 m, 10^{12} m, etc.?
- O que é que custa 1$, 1 000$, 1 000 000$, 10^9 $, 10^{12} $, 10^{15} $, 10^{18} $?
- Quantos segundos decorreram desde o Big Bang, o desaparecimento dos dinossauros, o nascimento de Jesus Cristo, a Revolução Francesa, o nascimento de cada um de nós?

A partir daqui podemos apenas pensar que por maior que seja o número em que pensemos, é sempre possível ir mais além. Neste jogo a calculadora não pode ir muito longe. Se usarmos o factorial, a maioria das calculadoras científicas, chega a 69! (embora dê como resultado 1.711224524×10^{98} em vez do valor exacto que é 171122452428141311372468338881 2 7283909227054489352036939364804092325727

797541406474240000000000000000; este valor foi obtido com um programa de cálculo simbólico, que trabalha com números de precisão arbitrária).

Contudo a maioria das calculadora já dá erro para 70!, pois este valor excede 10^{100}. Mas em termos de raciocínio poderíamos pensar em (69!)! = 1×2×3×...×1711224524281 413113724683388812728390922705448935203693936480409232572797541406474239999999999999 999×17112245242814131137246833888127283909227054489352036939364804092325727975414064742400000000000000000.

Isto faz-nos pensar que, por mais longe que cheguemos em termos de resultados numéricos com a calculadora, há ainda uma infinidade de valores da variável para os quais nada sabemos. Assim, só são possíveis certezas quanto aos limites se fizermos uma abordagem analítica.

Continuidade e método da bissecção

Faz parte da nossa intuição geométrica que se uma linha contínua passa de um lado de uma recta para o outro então tem que intersectar essa recta em algum ponto. Na análise isto reflecte-se no conhecido Teorema de Bolzano. Contudo é suficiente dar este resultado só com base nessa intuição, já que na visão geométrica estão englobados aspectos que de um ponto de vista analítico são mais elaborados. Na demonstração analítica do Teorema de Bolzano, tão importante como a continuidade é o facto de IR ser um conjunto completo, isto é: toda a sucessão de Cauchy em IR tem limite em IR. Esta propriedade que distingue IR de Q é decisiva neste teorema, já que a função

$$\begin{aligned} f: Q &\to Q \\ x &\to x^2 - 2 \end{aligned}$$

é contínua como função racional de variável racional e verifica $f(1) = -1$ e $f(2) = 2$ sem que tenha qualquer zero no intervalo $[1, 2]$. Note-se que porque IR é completo, é possível fazer corresponder a cada ponto de um plano um e um só par de números reais.

Voltando aos reais, faz então sentido dar a informação relativa ao Teorema de Bolzano e, partindo daí, explorar o enquadramento de um zero de uma função entre dois pontos onde a função toma valores com sinais contrários.

Esta propriedade é utilizada no método da bissecção para determinação aproximada de um zero de uma função real de variável real:

Método da bissecção: Seja *f* uma função real definida no intervalo $[a, b]$ e contínua nesse intervalo, tal que $f(a)f(b) < 0$. Constrói-se a sucessão de intervalos $[a_n, b_n]$ da seguinte forma:

1. $[a_0, b_0] = [a, b]$
2. dado o intervalo $[a_n, b_n]$ determina-se $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$; em seguida

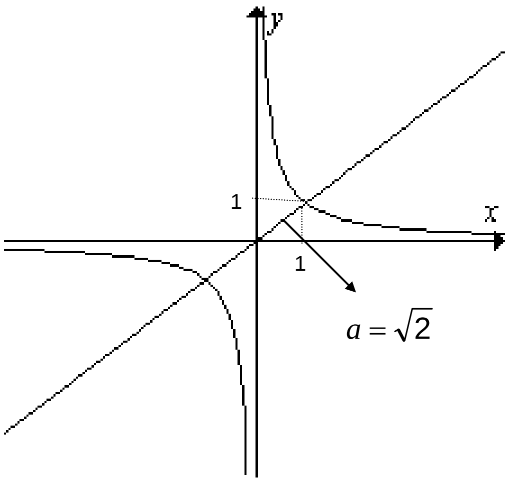
- se $f(c_n) = 0$ então encontrámos o zero de ***f***;
- se $f(a_n)f(c_n) > 0$ então faz-se $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [c_n, b_n]$;
- se $f(a_n)f(c_n) < 0$ então faz-se $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, c_n]$.

Desta forma garante-se sempre que $f(a_n)f(b_n) < 0$ e que $|b_{n+1} - a_{n+1}| = \dfrac{1}{2}|b_n - a_n|$, de forma que a raiz de *f* está sempre enquadrada por $[a_n, b_n]$ e $|b_n - a_n| \to 0$. Assim $|c - a_n| < |b_n - a_n|$, $|c - b_n| < |b_n - a_n|$ e portanto $|a_n - c| \to 0$ e $|b_n - c| \to 0$.

Cada iteração no método da bissecção é como um zoom em que só nos apercebemos do que se passa nos extremos do intervalo. Surge aqui uma ocasião para discutir o que é um valor aproximado com um erro inferior a uma margem previamente fixada: qualquer dos extremos do intervalo é uma aproximação do zero da função com um erro inferior ao tamanho do intervalo; o ponto médio do intervalo é um valor aproximado do zero da função com um erro inferior a metade do tamanho do intervalo. Note-se ainda que se pode estudar a sucessão $d_n = |b_{n+1} - a_{n+1}| = \dfrac{1}{2^n}|b - a|$ para procurar saber antecipadamente qual o número mínimo de bissecções necessárias para garantir que o erro é inferior a uma tolerância previamente dada.

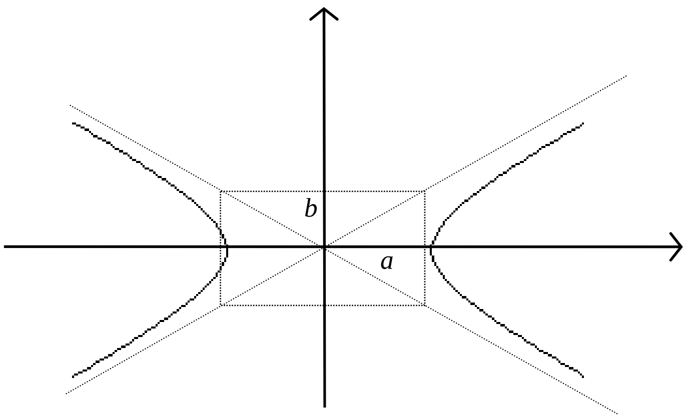
Hipérbole: principais propriedades

Considere-se a função f definida em $\Re \setminus \{0\}$ por $f(x)=\frac{1}{x}$. Esta função traduz a proporcionalidade inversa entre x e $y=f(x)$: quando x aumenta em valor absoluto, $y=f(x)$ aproxima-se de zero e quando x se aproxima de zero, $y=f(x)$ aumenta em valor absoluto. Então, quando x aumenta em valor absoluto, o gráfico de f aproxima-se do eixo das abcissas e, quando x se aproxima de zero, o gráfico de f aproxima-se do eixo das ordenadas. Diz-se que os eixos coordenados são **assimptotas** ao gráfico de f. A curva que é o gráfico da função $f(x)=\frac{1}{x}$ é usualmente designada por **hipérbole equilátera.**



Suponha-se que se faz uma rotação de 45º no sentido dos ponteiros do relógio. As assimptotas passam a coincidir com as bissectrizes dos quadrantes, a equação $y=\frac{1}{x}$ toma a forma $x^2-y^2=2$, que já não representa uma função mas duas funções $f_1(x)=\sqrt{x^2-2}$ e $f_2(x)=-\sqrt{x^2-2}$.

Mais geralmente, as curvas de equação $x^2 - y^2 = a^2$ resultam da rotação das hipérboles $y = \frac{a^2}{2}\frac{1}{x}$. Fazendo "compressão" vertical ou "expansão" vertical da curva $x^2 - y^2 = a^2$ obtêm-se as curvas de equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ com *a*, *b* > 0, ainda designadas por hipérboles. As assimptotas destas hipérboles são as rectas $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$, assinaladas a tracejado na figura.



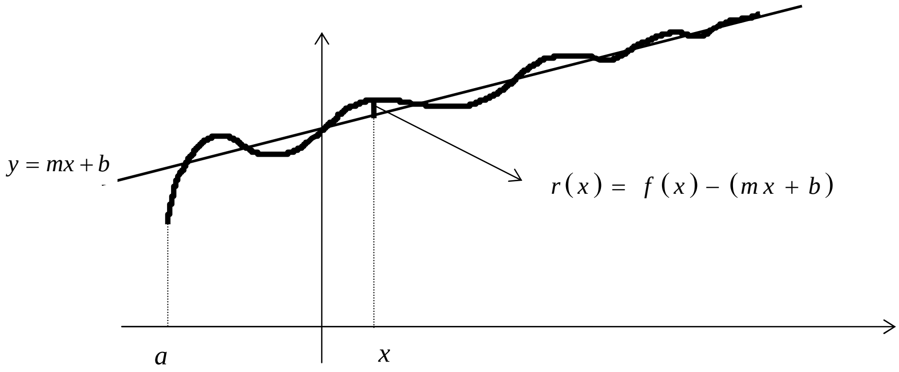
As assimptotas $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ são rectas oblíquas. Em que sentido deve ser entendida a "proximidade" entre estas rectas e a curva?

Mais geralmente, seja *f* uma função definida num domínio *D* contido em $\Re$ e suponha-se que *D* contém um intervalo do tipo $\left[a, +\infty\right[$, $a \in \Re$; isto significa que tem sentido considerar valores arbitrariamente grandes em *D*.

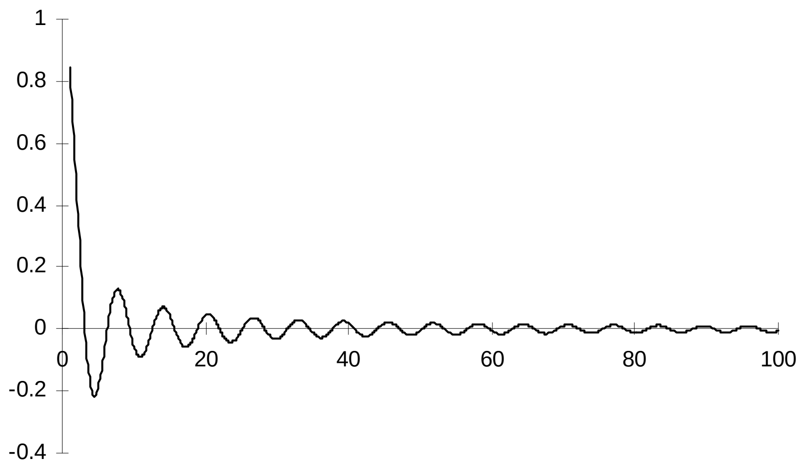
Diz-se que a recta $y = mx + b$ é **assimptota** ao gráfico de *f* quando x tende para $+\infty$, se a função definida em *D* por $r(x) = f(x) - (mx + b)$ se aproxima de zero à medida que x se aproxima de $+\infty$.

Em particular, quando $m = 0$, a assimptota é horizontal.

Geometricamente,



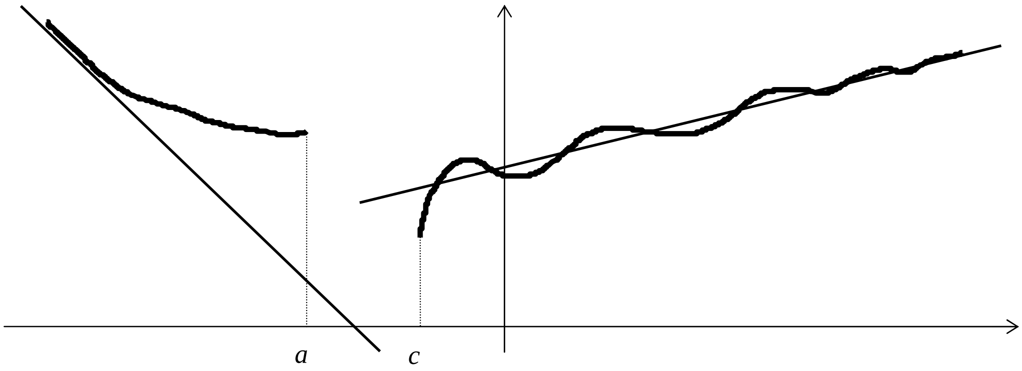
O exemplo da figura evidencia que $r(x) = f(x) - (mx + b)$, ao aproximar-se de zero, pode tomar valores positivos e negativos. Por exemplo, a função $f :]0, +\infty[\to \Re$ definida por $f(x) = \frac{1}{x} \sin x$, aproxima-se do eixo das abcissas quando *x* tende para $+\infty$ mas assume valores positivos e negativos.



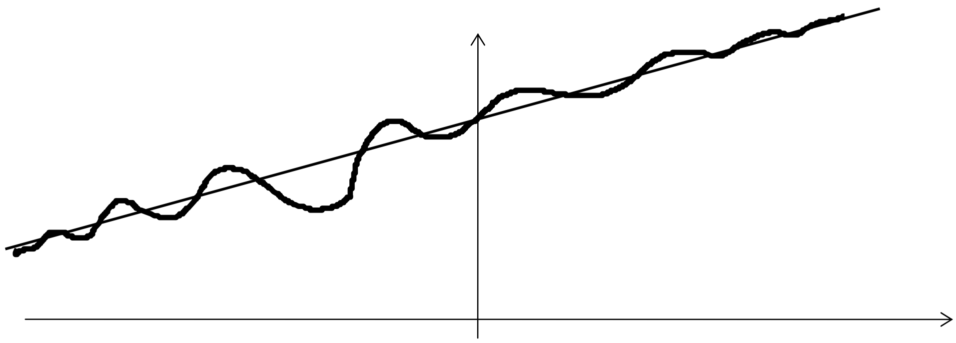
Analogamente, se *D* contém um intervalo do tipo $]-\infty, a]$, $a \in \Re$, tem sentido considerar em *D* valores negativos arbitrariamente grandes em valor absoluto.

Diz-se que a recta $y = mx + b$ é **assimptota** ao gráfico de *f* quando *x* tende para $-\infty$, se a função definida em *D* por $r(x) = f(x) - (mx + b)$ se aproxima de zero à medida que *x* se aproxima de $-\infty$.

Se *D* contém um intervalo do tipo $\left]-\infty, a\right]$, $a \in \Re$ e $\left[c, +\infty\right[$, $c \in \Re$, poderão existir assimptotas de *f* quando *x* tende para $+\infty$ e quando *x* tende para $-\infty$,



que poderão coincidir, como no caso ilustrado em seguida:



Como obter as equações das assimptotas?

Se $y = mx + b$ é assimptota ao gráfico de *f* quando *x* tende para $+\infty$ e

$r(x) = f(x) - (mx + b)$, tem-se $m = \dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{r(x) + b}{x}$. Como $r(x)$ tende para zero à medida que x se aproxima de $+\infty$, tem-se que $r(x)+b$ se aproxima de b e $\dfrac{r(x)+b}{x}$ tende para zero. Então,

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Por outro lado tem-se que $b = f(x) - mx - r(x)$; como $r(x)$ tende para zero à medida que x se aproxima de $+\infty$, tem-se que

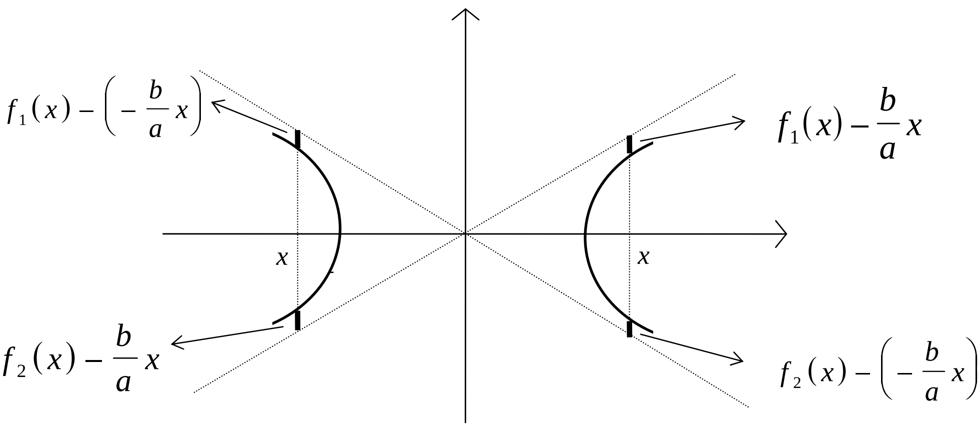
$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - mx\right).$$

Analogamente se obtém a equação da assimptota quando x tende para $-\infty$.

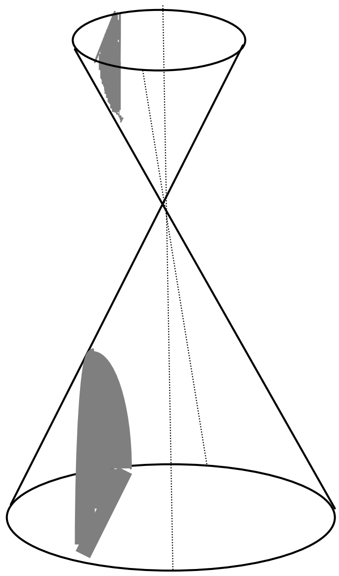
Observação:

A determinação analítica de assimptotas não faz parte do actual programa de 11º ano.

No caso da hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, a recta $y = \dfrac{b}{a}x$ é assimptota ao gráfico de $f_1(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ quando x de aproxima de $+\infty$ e ao gráfico de $f_2(x) = -\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ quando x de aproxima de $-\infty$; a recta $y = -\dfrac{b}{a}x$ é assimptota ao gráfico de $f_1(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ quando x de aproxima de $-\infty$ e ao gráfico de $f_2(x) = -\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ quando x tende para $+\infty$.



A hipérbole **é uma cónica**, isto é, pode ser obtida como secção de uma superfície cónica recta por um plano que é paralelo a duas geratrizes do cone (assinaladas a tracejado na figura). A hipérbole tem dois ramos, resultantes das secções em cada uma das folhas da superfície cónica.

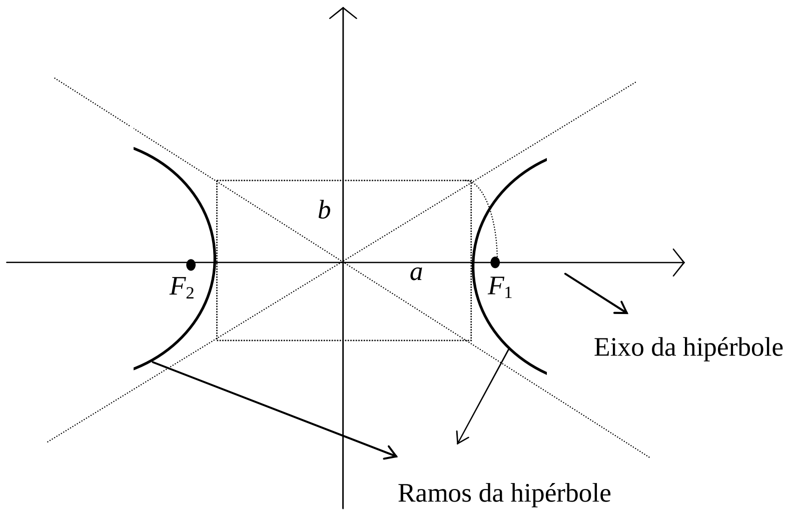


Se o plano secante paralelo a duas geratrizes passar pelo vértice da superfície cónica a hipérbole degenera em duas rectas, que são precisamente essas geratrizes.

Qualquer cónica é representada em coordenadas cartesianas por uma equação do segundo grau em x e y e, reciprocamente, qualquer equação do segundo grau em x e y representa uma cónica. Designando por $\boldsymbol{a}$ o coeficiente do termo em x^2, por $\boldsymbol{b}$ o coeficiente do termo em y^2 e por $\boldsymbol{c}$ o coeficiente do termo em $\boldsymbol{xy}$, a cónica será uma hipérbole (eventualmente degenerada) se $ab - c^2 < 0$.

Escolhendo convenientemente um sistema de eixos a equação da hipérbole pode tomar a forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ com a, b > 0.

Pondo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ e considerando os pontos $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$ verifica-se que a hipérbole goza da propriedade de que o módulo da diferença das distâncias de qualquer um dos seus pontos a F_1 e a F_2 é constante. Os pontos F_1 e F_2 são denominados **focos** da hipérbole. O eixo das abcissas é o **eixo da hipérbole**.

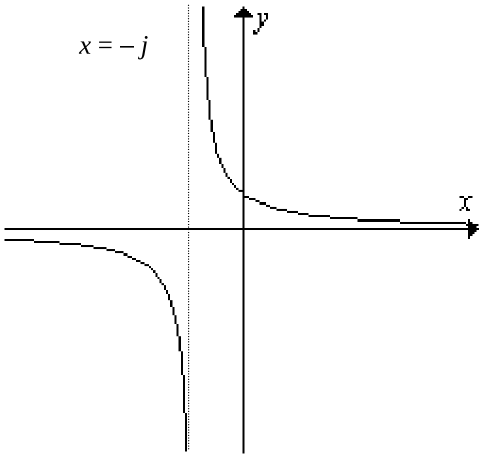


Para cada um dos focos pode ser considerada uma recta vertical (**directriz**) de forma que a razão da distância de qualquer ponto da hipérbole a cada foco e à directriz correspondente é constante. Essa constante *e*, denominada **excentricidade**, é maior que 1, sendo dada por $e = \frac{c}{a}$. A directriz correspondente a F_1 será a recta $x = \frac{a^2}{c}$.

Assim, e conforme já se referiu na brochura de funções para o 10º ano, as secções cónicas (no caso da hipérbole, cada um dos seus ramos) podem ser definidas, de forma equivalente, como o lugar geométrico dos pontos do plano tais que a razão entre a sua distância a um ponto fixo (foco) e a uma recta fixa (directriz) é uma constante positiva "*e*" chamada excentricidade: se *e* >1 a curva resultante é uma hipérbole.

Exemplo:

Considere-se a família de funções $f_j(x) = \frac{1}{x+j}$, com $j \in \Re$; os seus gráficos são hipérboles, que resultam da hipérbole $y = \frac{1}{x}$ por uma translação horizontal (para a esquerda se *j* > 0), passando a assimptota vertical a ser a recta $x = -j$.



A família de funções $f_k(x) = \frac{k}{x}$ com $k \in \Re \setminus \{0\}$ tem por gráficos hipérboles cujas assimptotas coincidem com os eixos coordenados.

Então, se $a \neq 0$, toda a função da forma $f(x) = \frac{k}{ax+b} = \frac{\frac{k}{a}}{x+\frac{b}{a}}$ tem por gráfico uma hipérbole que resulta da translação horizontal de $\frac{b}{a}$ da hipérbole $y = \frac{\frac{k}{a}}{x}$.

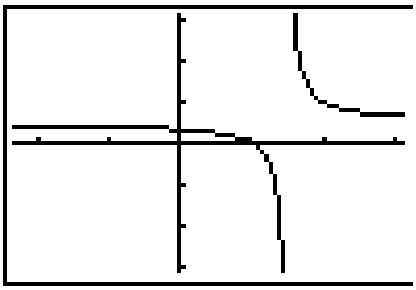
Mais geralmente, atendendo a que toda a hipérbole, eventualmente degenerada, se pode representar por uma equação de segundo grau nas variáveis *x* e *y*, $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$, em que $ab - c^2 < 0$, toda a função racional $\varphi(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{px^2 + qx + r}{sx + t}$ em que *Q* é um polinómio do 1º grau, *P* e *Q* sem raízes comuns, é uma hipérbole. Com efeito, tem-se $px^2 + qx + r - sxy - yt = 0$ e sendo o coeficiente do termo em y^2 nulo, resulta que, neste caso, $ab - c^2 = 0 - s^2 < 0$.

Os exercícios seguintes ilustram com questões concretas os exemplos anteriores.

1. Que transformações se devem efectuar no gráfico da função $g(x) = \frac{1}{x}$ para se obter o gráfico de $f(x) = \frac{x-1}{2x-3}$ aqui representado?

2. Quais são as assímptotas do gráfico da função?

3. Determina o contradomínio de f.

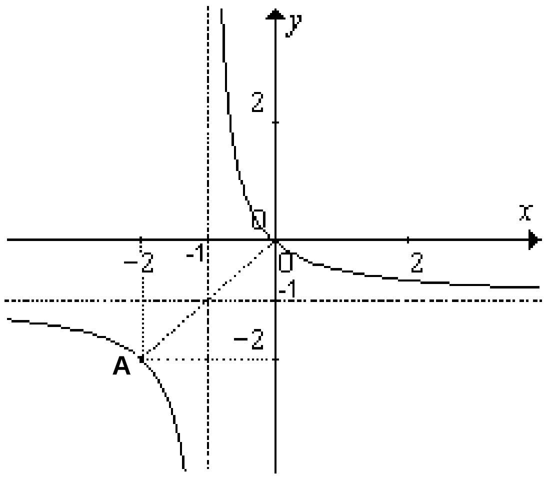


A hipérbole da figura é o gráfico da função $f(x) = a + \frac{b}{cx+2}$, a, b e c $\in$IR

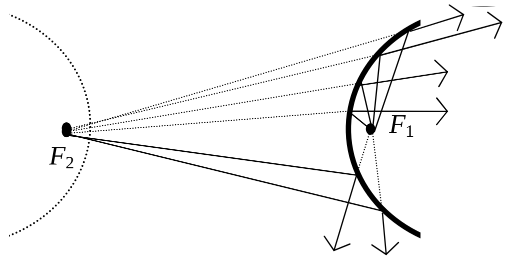
1. Indica as assimptotas da hipérbole:

2. Determina os valores de **a**, **b** e **c**.

3. Indica equações das assimptotas da função h, tal que $h(x) = |f(x)| - 3$.



As **superfícies hiperbólicas** (isto é, geradas pela rotação de uma hipérbole em torno do seu eixo) têm propriedades de reflexão importantes, sendo utilizadas no fabrico de espelhos. Com efeito, o feixe luminoso emitido por uma fonte de luz colocada no foco F_1, reflectindo-se na superfície hiperbólica, dá origem a um cone de luz, cujo vértice se encontra em F_2. O efeito do aumento da distância entre os focos traduz-se por uma maior concentração dos raios luminosos. A figura seguinte pretende ilustrar este fenómeno, representando um corte de um espelho hiperbólico:



Introdução ao Cálculo Diferencial

O Cálculo Diferencial, que desenvolve o tema das derivadas, constitui, em conjunto com o Cálculo Integral, um dos dois principais ramos da Análise Infinitesimal. O Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral são considerados das maiores invenções de todos os tempos em matemática.

Considera-se hoje que Newton e Leibniz são os fundadores do cálculo diferencial, já que foram os primeiros a defini-lo como corpo de doutrina. Não se esqueça porém que o cálculo diferencial é o resultado de uma longa evolução, que começou na antiguidade com Arquimedes e Eudóxio entre outros.

Ao pretenderem dar uma definição rigorosa (analítica) da noção de velocidade, Newton e Leibniz introduziram a definição matemática de derivada, que é a noção fundamental do Cálculo Diferencial. Parece, no entanto, que foi Fermat quem explicitou pela primeira vez a noção de derivada, ao pretender determinar o máximo e o mínimo de uma função.

A noção de derivada e de derivadas laterais

A resolução de questões como o cálculo do ângulo de duas curvas que se intersectam (Descartes), a construção de telescópios (Galileu) e de relógios (Huygens 1673), a procura do máximo e do mínimo de uma função (Fermat 1638), a determinação da velocidade e da aceleração de um movimento (Galileu 1638, Newton 1686) e a verificação da Lei da Gravitação (Kepler, Newton), têm como problema básico comum o seguinte problema:

> Dada uma curva $y = f(x)$, determinar em cada ponto $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ a tangente (e a normal) à curva.

Analisemos este problema numa situação simples:

Considere-se a parábola $y = x^2$. Se x_0 sofre um acréscimo Δx, $y_0 = f\left(x_0\right)$ passa para $y_0 + \Delta y$ dado por

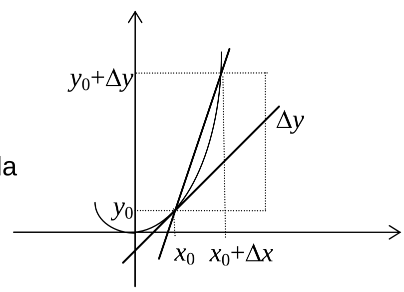
$$y_0 + \Delta y = \left(x_0 + \Delta x\right)^2 = x_0{}^2 + 2x_0\,\Delta x + \left(\Delta x\right)^2$$

e assim,

$$\Delta y = 2x_0\,\Delta x + (\Delta x)^2 .$$

O declive da recta que passa pelos pontos $\left(x_0, y_0\right)$ e $\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right)$ é

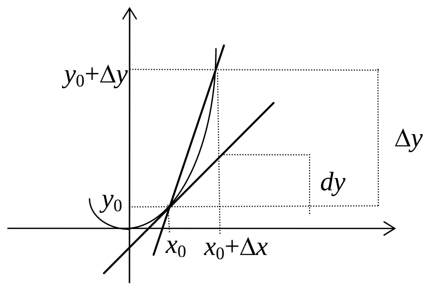
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x_0\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$. Quando Δx tende para zero, este declive aproxima-se do declive da recta tangente à parábola no ponto $\left(x_0, y_0\right)$.



A resposta à questão proposta é neste caso: o declive da recta tangente à parábola de equação $y = x^2$ é, em cada ponto $\left(x_0, y_0\right)$ do seu gráfico, dada por $2x_0$.

A **derivada** de uma variável ***y*** em ordem a outra variável ***x***, que se define hoje como o limite da razão incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, era concebida por **Leibniz** como se fosse ela própria uma razão $\frac{dy}{dx}$ em que *dx* (diferencial de *x*) significa um acréscimo infinitesimal de *x* e *dy* (diferencial de *y*) significa, a menos de um termo desprezável, o correspondente acréscimo de *y*. Parece assim que Leibniz considerava os diferenciais como "infinitésimos actuais" e não como variáveis tendentes para zero. Quando mais tarde o conceito de diferencial foi definido, a notação de Leibniz continuou a ser usada para designar as derivadas por ser muito cómoda e sugestiva. No exemplo apresentado, desprezando a parcela $(\Delta x)^2 = (dx)^2$ que é "infinitamente mais pequena" que $2x_0\,\Delta x = 2x_0\,dx$, obtém-se $dy = 2x_0\,dx$ em vez de $\Delta y = 2x_0\,\Delta x + (\Delta x)^2$ e assim, $\frac{dy}{dx} = 2x_0$.

A figura seguinte ilustra a diferença entre o significado geométrico de Δy e dy, resultante de se desprezar a parcela $(\Delta x)^2 = (dx)^2$



Foi Newton quem insistiu na necessidade das derivadas serem consideradas como limites de razões e não como razões de infinitésimos actuais, o que lhe permitiu aproximar-se mais da fundamentação habitual do Cálculo Diferencial.

Seja então *f* uma função definida num intervalo aberto I e $x_0 \in I$.

À razão $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ chama-se **razão incremental** de f entre x_0 e $x_0+\Delta x$.

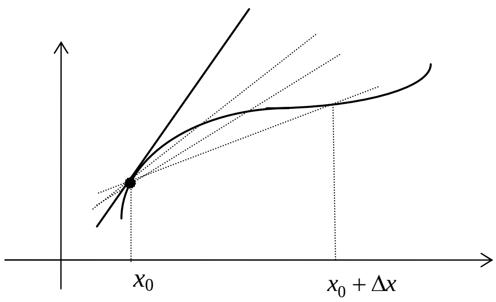
Chama-se **derivada** de f em x_0 ao número real limite da razão incremental, e escreve--se

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Se existe derivada de f em x_0 diz-se que f é **derivável** ou **diferenciável** no ponto x_0.

Se o limite da razão incremental quando Δx tende para zero, for $+\infty$ ou $-\infty$ diz-se que a derivada é $+\infty$ ou $-\infty$ nesse ponto.

A razão incremental é o declive da recta secante que passa pelos pontos de abcissas x_0 e $x_0+\Delta x$. Quando Δx tende para zero, as sucessivas rectas secantes passando pelo ponto de abcissa x aproximam-se da recta tangente ao gráfico de f nesse ponto (caso essa tangente exista).

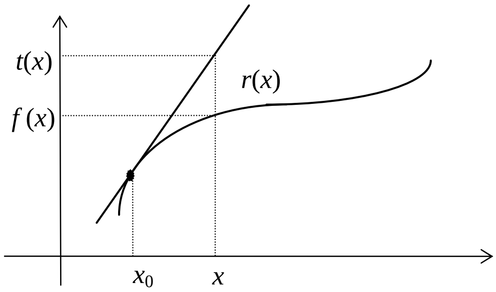


Assim, se a função f é diferenciável no ponto x_0, a recta tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$ tem por declive $f'(x_0)$ e a sua equação é

$$t(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Pondo, para cada $x\in I$, $r(x)=f(x)-t(x)$, tem-se então

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x).$$



Assim, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \dfrac{r(x)}{x - x_0}$ e, consequentemente,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0$$

isto é, r é desprezável quando comparado com $x - x_0$. Então, à medida que x se aproxima de x_0, a função é cada vez melhor aproximada pela função afim, $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Reciprocamente, se numa vizinhança do ponto x_0 se pode escrever

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + r(x)$$

e se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)} = 0$$

então f é diferenciável no ponto x_0 e $f'(x_0) = m$.

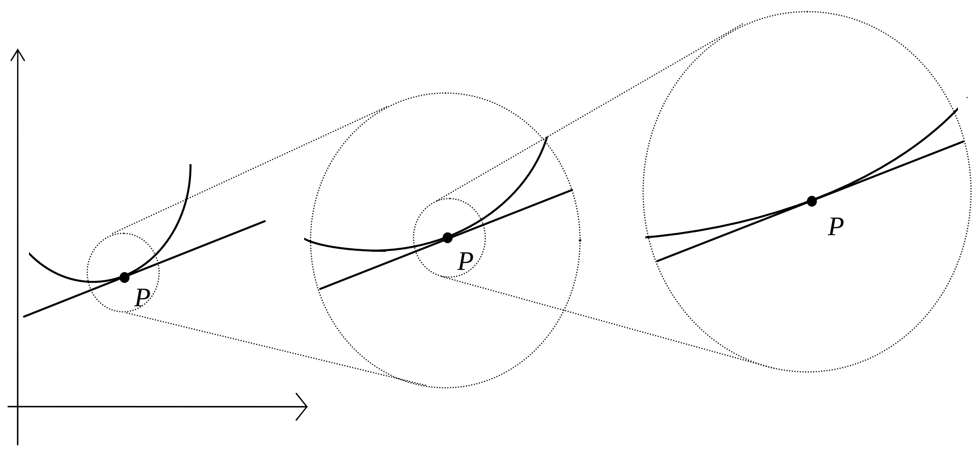
Estas observações conduzem à seguinte caracterização de função diferenciável num ponto (Weierstrass 1861):

Uma função ***f*** é **diferenciável** em x_0 se e só se existe um número real $f'(x_0)$ e uma função φ contínua em x_0 e satisfazendo a condição $\varphi(x_0) = 0$, tal que

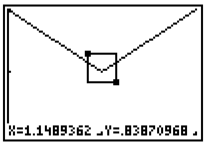
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varphi(x)(x - x_0).$$

Observe-se que a caracterização anterior não envolve explicitamente o conceito de limite, que é substituído pela continuidade de φ em x_0 (a noção de limite está aqui implícita nesta continuidade), e faz intervir a equação da tangente em $(x_0, f(x_0))$.

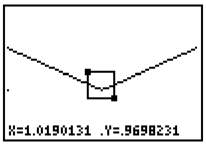
Do ponto de vista gráfico, se f é diferenciável no ponto x_0, fazendo ampliações sucessivas na vizinhança do ponto x_0, o gráfico de f torna-se cada vez mais próximo da recta de equação $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, já que, perto de x_0, o termo $\varphi(x)(x - x_0)$ é muito mais pequeno que $x - x_0$.



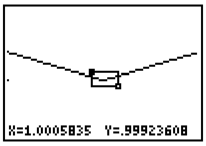
Se ampliarmos um gráfico de uma função junto a um ponto onde ela está definida mas não é diferenciável, esse gráfico em geral não se parece com uma recta. Um exemplo é o gráfico da função $f(x) = |x - 1| + 1$ junto ao ponto $x = 1$:



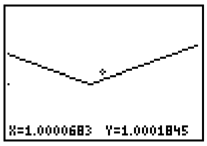
$[0,\ 2]\times[0,\ 2]$



$[0.9,\ 1.1]\times[0.9,\ 1.1]$



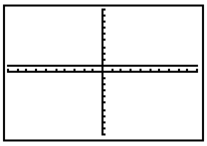
$[0.99,\ 1.01]\times\ldots$

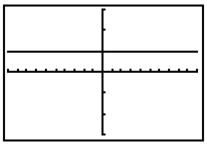


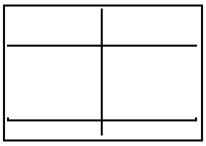
$[0.999,\ 1.001]\times\ldots$

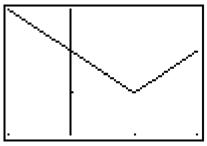
Observações:

1. O critério gráfico dado acima para avaliar a diferenciabilidade de uma função pode falhar na prática em algumas situações, já que o nosso dispositivo de visualização pode mostrar como linha recta um gráfico que não o é. Um exemplo é o da função $f(x) = 0.0001|x-1|+1$. Se partirmos de um rectângulo de visualização como $[-10,\ 10]\times[-10,\ 10]$ e fizermos sucessivas ampliações, o gráfico parece sempre uma recta,


$[-10,10]\times[-10,10]$


$[-10,10]\times[-3,3]$


$[-1,1]\times[-0.2,1.5]$


Zoom Fit:
$[-1,2]\times[0.9999,\ 1.002]$

embora a função não tenha derivada para $x=1$. Neste caso é possível ter um gráfico melhor definindo o intervalo vertical do rectângulo de visualização a partir dos valores mínimo e máximo da função num intervalo horizontal (**ZoomFit** na calculadora que usamos). Contudo esta solução não funciona se ultrapassarmos os limites da representação de números na máquina. Assim, se considerarmos a função $f(x) = 10^{-20}|x-1|+1$ e partirmos do rectângulo de visualização $[-10,10]\times[-10,10]$, qualquer que seja o **ZOOM In** que façamos, o gráfico de f aparece sempre na calculadora como uma recta, apesar da função não ter derivada para $x=1$.

2. É usual designar-se por h o acréscimo Δx da variável dependente. Essa notação será usada na sequência deste texto.

Seja f uma função diferenciável em todos os pontos de um intervalo I contido no seu domínio. Tem sentido definir em I uma nova função, a **função derivada** de f, que se nota f' e que a cada ponto $x_0 \in I$ faz corresponder a derivada de *f* nesse ponto. Conforme se recordará mais tarde, o estudo de f' é, em muitos casos, determinante para conhecer as propriedades de *f*.

Exemplos:

1. Seja *f* definida em $\Re$ por $f(x) = mx + b$ com $m, b \in \Re$ (função afim). Atendendo à interpretação geométrica da derivada e sendo a tangente a uma recta em qualquer dos seus pontos coincidente com ela própria, tem-se $f'(x) = m$ para qualquer $x \in \Re$, uma vez que *m* é o declive da recta que representa graficamente a função ***f*.**

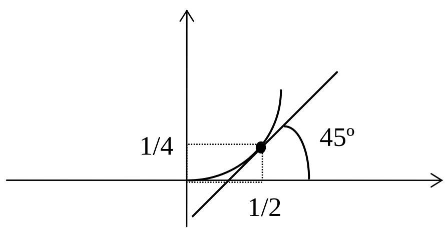
Se $m = 0$ obtem-se a função constante $f(x) = b$, que tem portanto derivada nula. A função derivada de $f(x) = b$ é a função nula.

2. A função definida em $\Re$ por $f(x) = x^2$ é diferenciável em qualquer ponto *x* de $\Re$. Com efeito, tem-se , para qualquer $h \neq 0$, que

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x+h$$

.Então, quando h se aproxima de zero a razão $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ aproxima-se de $2x$, pelo que a função derivada de *f* é definida em $\Re$ por $f'(x) = 2x$.

Geometricamente e conforme se referiu no início, a curva (parábola) de equação $f(x) = x^2$ admite uma tangente ao seu gráfico em qualquer dos seus pontos $(x_0, x_0{}^2)$, cujo declive é $2x_0$. Por exemplo, a tangente no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ tem declive igual a 1, o que equivale a dizer que ela tem uma inclinação de 45º, conforme se ilustra na figura.



Mais geralmente, seja g definida em $\Re$ por $g(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \Re$ (função quadrática). Tem-se, para qualquer $h \neq 0$, que

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - \left(ax^2 + bx + c\right)}{h} = \frac{2axh + bh + ah^2}{h} = 2ax + b$$

Então, quando h se aproxima de zero, a razão $\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$ aproxima-se de $2ax + b$, pelo que a função derivada de g é a função definida em $\Re$ por $g'(x) = 2ax + b$.

3. Seja θ definida em $\Re$ por $\theta(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ com $a, b, c, d \in \Re$ (função cúbica). Com um raciocínio análogo ao anterior deduz-se que

$$\theta'(x) = 3ax^2 + 2bx + c,\ \forall\, x \in \Re:$$

$$\begin{aligned}\frac{\theta(x+h) - \theta(x)}{h} &= \frac{a(x+h)^3 + b(x+h)^2 + c(x+h) + d - \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)}{h}\\ &= \frac{a(x+h)(x+h)^2 + b(x+h)^2 + c(x+h) + d - \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)}{h}\\ &= \frac{ax^3 + 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3 + bx^2 + 2bhx + bh^2 + cx + ch + d - \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)}{h}\\ &= 3ax^2 + 3axh + ah^2 + 2bx + bh + c\end{aligned}$$

Então, quando h se aproxima de zero a razão $\dfrac{\theta(x+h) - \theta(x)}{h}$ aproxima-se de $3ax^2 + 2bx + c$, pelo que $\theta'(x) = 3ax^2 + 2bx + c,\ \forall\, x \in \Re$.

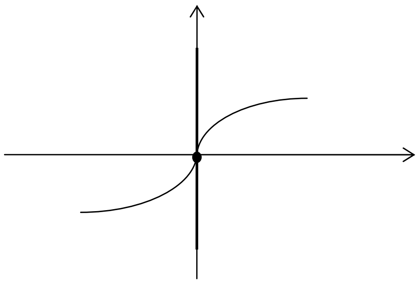
4. A função definida em $\Re$ por $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$ tem derivada infinita no ponto $x_0 = 0$.

Com efeito, tem-se

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{h}}{h} & \text{se} \quad h>0\\[2ex] \dfrac{-\sqrt{-h}}{h} & \text{se} \quad h<0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{h}} & \text{se} \quad h>0\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{-h}} & \text{se} \quad h<0\end{cases}$$

e esta razão aproxima-se de $+\infty$ quando *h* se aproxima de zero.

Geometricamente, a tangente ao gráfico de *f* no ponto $(0,0)$ é uma recta vertical; uma vez que ela passa por $(0,0)$, coincide com o eixo das ordenadas, conforme se ilustra na figura:



5. Sejam $a,b\in\Re$, sendo $a\neq 0$. A função definida em $\Re\setminus\left\{-\frac{b}{a}\right\}$ por $f(x)=\dfrac{1}{ax+b}$ é diferenciável em $\Re\setminus\left\{-\frac{b}{a}\right\}$. Com efeito, para qualquer *x* em $\Re\setminus\left\{-\frac{b}{a}\right\}$ e $h\neq 0$, tem-se

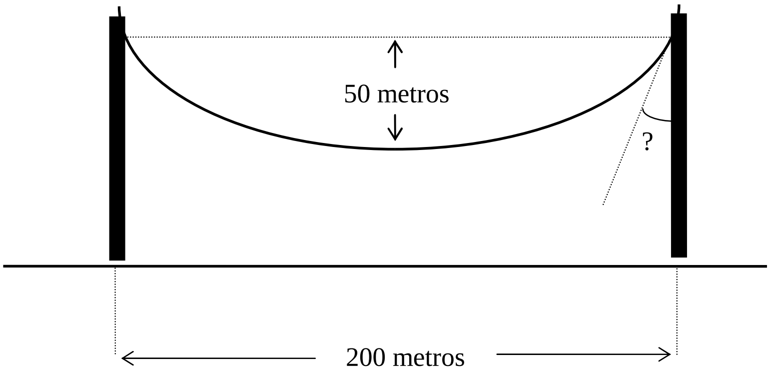
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\dfrac{1}{a(x+h)+b}-\dfrac{1}{ax+b}}{h}=\frac{ax+b-(ax+ah+b)}{h(ax+b)(a(x+h)+b)}=\frac{-a}{(ax+b)(a(x+h)+b)}$$

Então, quando *h* se aproxima de zero a razão $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ aproxima-se de $\dfrac{-a}{(ax+b)^2}$, pelo que $f'(x)=\dfrac{-a}{(ax+b)^2}$, $\forall\, x\in\Re\setminus\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

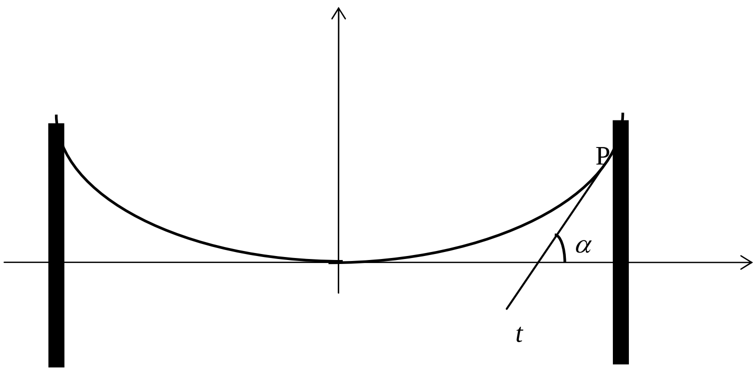
Os dois exemplos seguintes envolvem a interpretação geométrica da derivada e o cálculo de derivadas de funções estudadas nos exemplos 2 e 3:

6. O cabo de uma ponte tem a forma de uma secção de parábola que passa nos extremos de dois pilares distantes entre si de 200 metros. O ponto mais baixo do cabo está 50 metros abaixo dos pontos de fixação. Qual o ângulo entre o cabo e os pilares da ponte?

Nota: o ângulo entre o cabo e os pilares da ponte é o ângulo definido pelo pilar e pela recta tangente ao cabo no ponto de ligação ao pilar.



Considere-se (por exemplo) o sistema de eixos indicado na figura seguinte:



A parábola tem uma equação do tipo $y = g(x) = ax^2$, com a a determinar. Como o ponto P de suspensão tem as coordenadas $(100, 50)$, tem-se $50 = 10000\ a$ e assim,

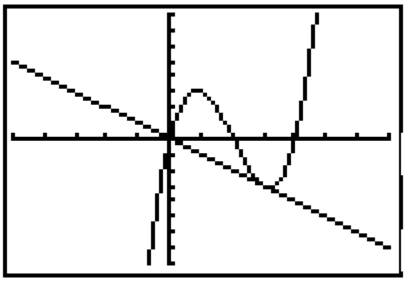
$a = 0{,}005$. A recta *t* representada na figura tem declive igual a $g'(100)$. Como $g'(x) = 0{,}01x$, tem-se $g'(100) = 1$; assim $\alpha = 45^{o}$ e o ângulo pedido é igual a $90^{o} - 45^{o} = 45^{o}$.

7. Verificar que a recta $x + y = 0$ é tangente à curva de equação $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ e indicar o ponto de tangência.

A recta toca a curva nos pontos (x, y) que são solução do sistema

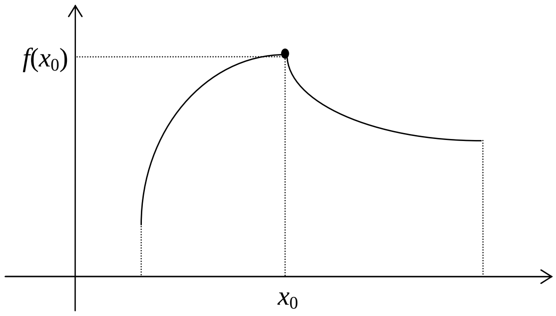
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y = x^3 - 6x^2 + 8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \end{cases}$$

isto é, nos pontos $(0,0)$ e $(3,-3)$. Como $f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$, tem-se que $f'(0) = 8$ e $f'(3) = -1$. Assim, as tangentes ao gráfico de *f* em $(0,0)$ e $(3,-3)$ têm, respectivamente, os declives 8 e -1. Como o declive da recta $x + y = 0$ é igual a -1, ela é de facto tangente ao gráfico de *f* no ponto $(3,-3)$.



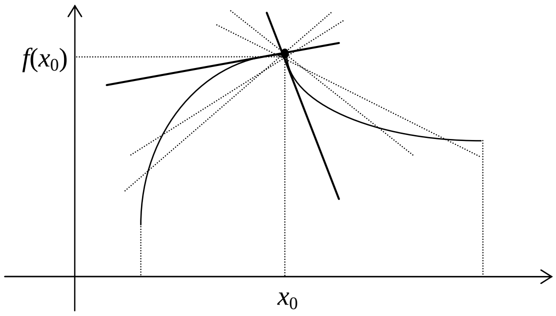
Pelo anteriormente exposto, a existência de derivada de uma função *f*, definida num intervalo aberto *I*, num ponto $x_0 \in I$ é equivalente a poder traçar-se a tangente ao seu gráfico em $(x_0, f(x_0))$.

Seja f a função definida num intervalo aberto I, cujo gráfico se representa na figura:



No caso que se segue, as rectas de declive $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, considerando pontos x do domínio de f à esquerda e à direita de x_0, isto é, as rectas de declive

$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ com $h>0$ e $h<0$ têm posições limite diferentes que são,



respectivamente, a tangente em $(x_0, f(x_0))$ ao gráfico de f restringido a $]-\infty, x_0] \cap I$ e a $I \cap [x_0,+\infty[$, conforme se ilustra na figura, não sendo possível traçar a tangente ao seu gráfico em $(x_0, f(x_0))$.

Não se pode dizer que existe, neste caso, o limite da razão incremental $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ quando h tende para zero, mas existem os limites laterais quando h tende para zero (por valores maiores que zero e por valores menores que zero), que são diferentes.

Chama-se **derivada** de f **à esquerda** de x_0 ao limite da razão incremental $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ quando h tende para zero por valores menores que zero:

$$f_e'(x_0) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Define-se analogamente **derivada** de f **à direita** de x_0 (fazendo h tender para zero por valores maiores que zero):

$$f_d'(x_0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

As **derivadas** de ***f*** à **direita** e à **esquerda** de x_0 designam-se globalmente por **derivadas laterais** no ponto x_0.

Decorre imediatamente da definição de limite (por valores diferentes) que f é diferenciável em x_0 se e só se existem derivadas laterais iguais em x_0, tendo-se então $f_e'(x_0) = f_d'(x_0) = f'(x_0)$. Geometricamente, as tangentes em $(x_0, f(x_0))$ ao gráfico de f restringido a $]-\infty, x_0] \cap I$ e a $I \cap [x_0, +\infty[$ sobrepõem-se.

Exemplos:

1. Considere-se a função f definida em $\Re$ por $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

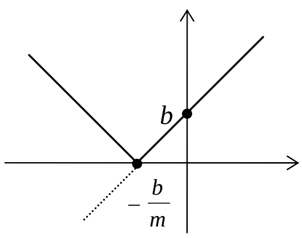
Como $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \begin{cases} \frac{h}{h} & \text{se } h > 0 \\ \frac{-h}{h} & \text{se } h < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } h > 0 \\ -1 & \text{se } h < 0 \end{cases}$, tem-se

$$f_d'(0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1 \text{ e } f_e'(0) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1.$$

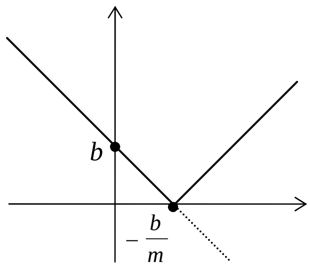
Uma vez que as derivadas laterais são diferentes, não existe derivada no ponto $x_0 = 0$.

Mais geralmente, considere-se a função $\psi(x) = |mx + b| = |m|\left|x + \frac{b}{m}\right|$ com $m, b \in \Re$ e $m \neq 0$. Esta função não tem derivada no ponto onde a recta de equação $y = mx + b$ corta o eixo das abcissas, isto é, no ponto $\left(-\frac{b}{m}, 0\right)$.

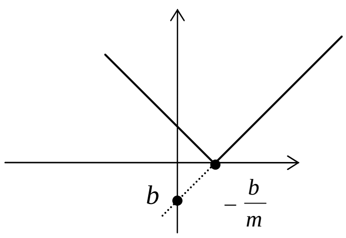
Se $b \geq 0$ e $m > 0$,



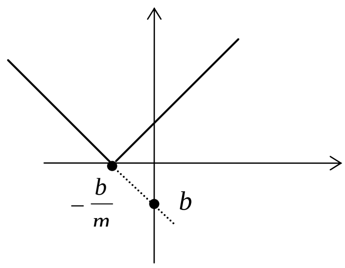
Se $b \geq 0$ e $m < 0$,



Se $b \leq 0$ e $m > 0$,



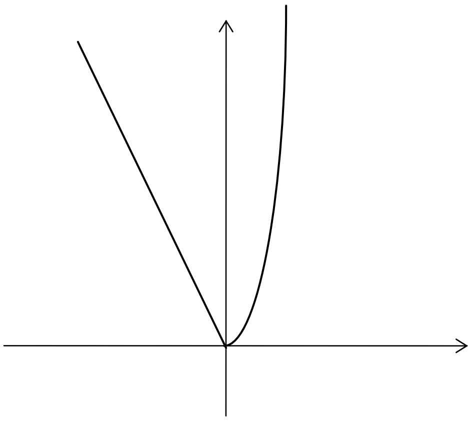
Se $b \leq 0$ e $m < 0$,



Quaisquer que sejam b e m, tem-se $\psi_d'\left(-\frac{b}{m}\right) = |m|$ e $\psi_e'\left(-\frac{b}{m}\right) = -|m|$

2. Verifique-se que a função definida em $\Re$ por $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ não tem derivada em $x_0 = 0$.

Dos exemplos 1 e 2 da página 34 resulta imediatamente que $f_d{}'(0) = 0$ $\neq f_e{}'(0) = -2$, pelo que não existe derivada de *f* em $x_0 = 0$.



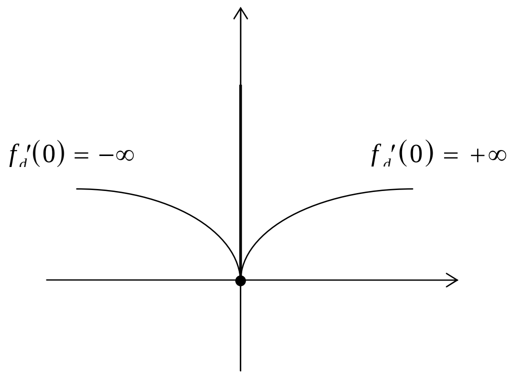
3. A função *f* definida em $\Re$ por $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$ tem derivadas laterais infinitas, com sinal diferente, no ponto $x_0 = 0$. Com efeito, tem-se

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{h}}{h} & \text{se } h > 0 \\ \dfrac{\sqrt{-h}}{h} & \text{se } h < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{h}} & \text{se } h > 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{-h}} & \text{se } h < 0 \end{cases}$$

e assim,

$$f_d{}'(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = +\infty \text{ e } f_e{}'(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -\infty$$

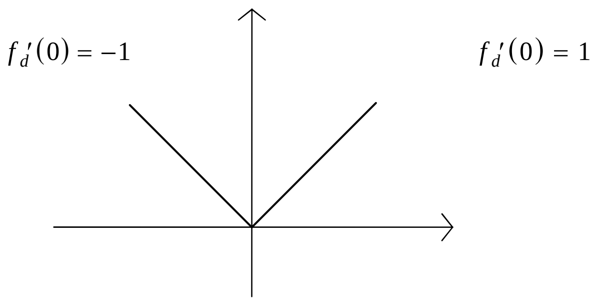
Neste caso não existe derivada de f no ponto $x_0 = 0$. A tangente à esquerda em $x_0 = 0$ corresponde a $f_e'(0) = -\infty$ e a tangente à direita de $x_0 = 0$ corresponde a $f_d'(0) = +\infty$. Geometricamente, observe-se que, embora não exista derivada de f em x_0, estas duas tangentes sobrepõem-se, coincidindo com o eixo das ordenadas, conforme se ilustra na figura seguinte:



Quando uma função está definida apenas num intervalo fechado $[a,b]$ e $f_d'(a)$ e $f_e'(b)$ existem, fala-se simplesmente de derivada em *a* e em *b* e escreve-se $f'(a) = f_d'(a)$ e $f'(b) = f_e'(b)$.

Embora a definição de função contínua só faça parte do programa do 12º ano, recorde-se que **se *f* é diferenciável em x_0 então *f* é contínua em x_0.**

A recíproca não é verdadeira. Por exemplo, a função *f* definida em $\Re$ por $f(x) = |x|$ é contínua em $x_0 = 0$ mas não é diferenciável neste ponto. Tem, no entanto, derivadas laterais em $x_0 = 0$, conforme já se viu anteriormente, sendo $f_e'(0) = -1$ e $f_d'(0) = 1$.



A função *f* definida em $\Re$ por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \text{ racional} \\ x & \text{se } x \text{ irracional} \end{cases}$$

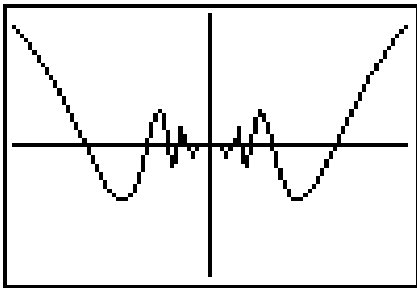
é contínua em $x_0 = 0$ mas não é diferenciável neste ponto. Com efeito, a razão incremental em $x_0 = 0$ é

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \begin{cases} \dfrac{h^2}{h} & \text{se } h \text{ racional} \\ \dfrac{h}{h} & \text{se } h \text{ irracional} \end{cases} = \begin{cases} h & \text{se } h \text{ racional} \\ 1 & \text{se } h \text{ irracional} \end{cases}$$

e, para valores de *h* a tender para zero não se tem obviamente $h = 1$, não existindo portanto o limite, nem os limites laterais da razão incremental no ponto zero quando *h* tende para zero. Observe-se que, neste caso, a função não só não é diferenciável no ponto $x_0 = 0$ como também **não possui derivadas laterais nesse ponto**.

A função *f* definida em $\Re$ por

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

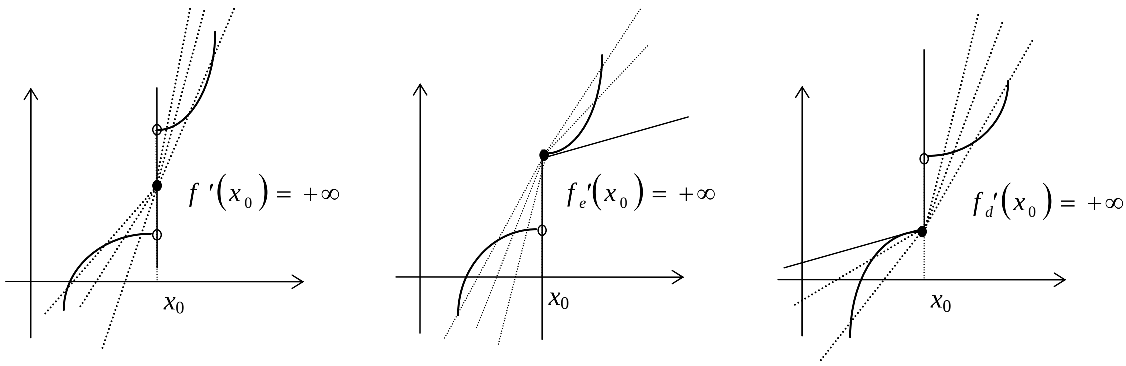


[–0.5, 0.5]×[–0.5, 0.5]

que é contínua em $\Re$ também não possui derivadas laterais em $x_0 = 0$, uma vez que

não existem os limites laterais da razão incremental nesse ponto, $\dfrac{x\sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \sin\dfrac{1}{x}$.

No estudo das funções definidas por ramos, surgem com frequência situações em que a função a estudar não é contínua num ponto do seu domínio. Conforme se acabou de referir, se uma função é diferenciável em x_0 então ela é contínua em x_0 ou, de uma forma equivalente, **se uma função não é contínua em x_0 ela não é diferenciável em x_0.** Pode, no entanto, existir derivada infinita em x_0 ou derivadas laterais em x_0, sendo uma delas infinita, como se ilustra em seguida:



Retome-se a noção de derivada de uma função f definida num intervalo aberto I, num ponto $x_0 \in I$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

A derivada em x_0 mede a rapidez de variação da variável dependente, quando a variável independente varia entre x_0 e $x_0 + h$.

Chama-se **taxa de variação média** de f em $[a,b] \subset I$ à razão $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Chama-se **taxa de variação instantânea** de f em $a \in I$ ao limite da taxa de variação média de f em $[a,b]$ quando b tende para a, ou seja à derivada de f em a.

A razão incremental $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ **mede** então **a taxa de variação média** da função f entre x_0 e $x_0 + h$. **A derivada** é pois o limite quando h tende para zero da taxa de variação média de f entre x_0 e $x_0 + h$, isto é, **é a taxa de variação instantânea** de f em x_0.

Conforme se referiu, o conceito de derivada traduz matematicamente a ideia de rapidez de variação. Os fenómenos que mais facilmente sugerem a ideia de variação são os movimentos e, neste caso, a rapidez de variação é a velocidade do movimento. Considere-se um ponto P, que se move sobre um eixo, sendo a sua posição em cada instante t determinada pela sua abcissa $x = s(t)$; a função s traduz o movimento do ponto P. Considerando dois instantes distintos t_0 e t_1, com $t_0 < t_1$, o cociente $\frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$ do espaço percorrido pelo tempo gasto no percurso, que é a taxa de variação média de $x = s(t)$ no intervalo $[t_0, t_1]$, é utilizado usualmente para dar uma ideia da rapidez do movimento de P neste intervalo, e chama-se **velocidade média** de P no intervalo $[t_0, t_1]$. Na mesma ordem de ideias, adopta-se como medida de **velocidade** de P no instante t_0 o limite quando t tende para t_0 da velocidade média no intervalo de extremos e t_0 e t (com $t \neq t_0$), caso esse limite exista, e escreve-se

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0),$$

ou, fazendo $h = t - t_0$,

$$v(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = s'(t_0)$$

Com a introdução das derivadas avançou-se extraordinariamente no estudo dos fenómenos naturais, sendo muito frequentes as situações em que intervém este conceito, já que o mundo está em constante movimento. Tenha-se presente que, embora "o infinito" não pertença ao mundo real, ele é absolutamente necessário para analisar o movimento e a mudança.

Após o estudo da velocidade, surge o exemplo da aceleração que, sendo a derivada da velocidade em ordem ao tempo, é indicativa da rapidez com que a velocidade varia em cada instante. São também exemplos concretos de derivadas os conceitos de caudal de uma corrente de água num dado instante, de intensidade de uma corrente eléctrica num dado instante e de calor específico de uma substância para uma dada temperatura, entre outros. São ainda de salientar as aplicações práticas do conceito de derivada a problemas de oferta e procura (exemplo 2) e outros, relacionados com a determinação de taxas de variação em situações como a ilustrada no exemplo 3.

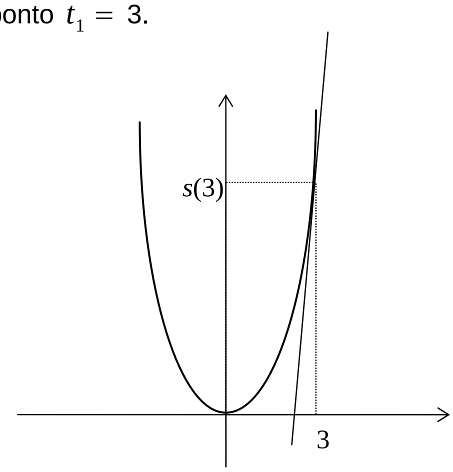
Exemplos:

1. Suponha-se que a função que traduz o movimento de um corpo que desce um plano inclinado (por acção da gravidade) é $s(t) = 3t^2$. Supondo que a origem da contagem do tempo é $t_0 = 0$, qual a velocidade atingida ao fim de 3 segundos ?

A velocidade média entre os instantes $t_1 =$ 3 e $t = 3 + h$ é dada por

$$\frac{s(3+h)-s(3)}{h} = \frac{3(3+h)^2-27}{h} = \frac{27+18h+3(h)^2-27}{h} = \frac{3h(6+h)}{h}$$

A velocidade ao fim de 3 segundos é, então, $v(3) = \lim_{h \to 0} \frac{3h(6+h)}{h} = 18$, que é a derivada da função s no ponto $t_1 =$ 3.



2. Suponha-se que a função oferta em função do preço p (em contos) de um dado produto é $\psi(p) = 50p^2$. Qual a taxa de variação média da oferta quando o preço sobe de $p = 3$ para $p = 5$ e qual a taxa de variação instantânea quando o preço é 3 contos?

Tem-se que a taxa de variação média da oferta quando o preço sobe de $p=3$ para $p=5$ é dada por $\frac{\psi(5)-\psi(3)}{5-3}=\frac{1250-450}{2}=400$.

Como $\psi'(p)=100p$, a taxa de variação instantânea quando $p=3$ é 300.

3. Suponha-se que o número de pessoas afectadas por dia (*d*), por uma doença epidémica, desde o primeiro caso diagnosticado, pode ser estimado pela função cúbica $\varphi(d)=45d^2-d^3$ com $0\leq d\leq 25$. Em termos previsionais, a que número de pessoas por dia estará a doença a alastrar no dia $d=5$ e em que dia estará a doença a alastrar a uma taxa de 600 pessoas por dia (em termos previsionais)?

Tem-se $\varphi'(d)=90d-3d^2$ (ver exemplo 2, pág. 34). Para $d=5$ tem-se $\varphi'(5)=375$, isto é, prevê-se que no 5º dia de doença diagnosticada, ela alastra à taxa de 375 pessoas por dia. Como $\varphi'(d)=90d-3d^2=600$ quando $d=10$ ou $d=20$, a doença alastra à taxa de 600 pessoas por dia imediatamente após o 10º e o 20º dias.

Derivação numérica

Em certas calculadoras existe a possibilidade de calcular uma aproximação numérica da derivada de uma função num ponto. Ao mesmo tempo é sugestivo calcular a razão incremental de uma função *f* num ponto *x*, para diversos valores do incremento $h=\Delta x$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

e observar para que valores tenderá esta razão quando se usam valores de *h* sucessivamente mais pequenos.

Nestas situações, mesmo quando a função em estudo é diferenciável no ponto x, acontece que, quando $h\to 0$, só até certo ponto se tem uma aproximação ao valor da derivada. A partir daí ocorre em geral um aumento do erro e, no limite, a aproximação obtida é sempre igual a zero.

Além disso, em certas calculadoras, são apresentadas aproximações do valor da derivada em pontos onde a função não é diferenciável.

Estas situações são perfeitamente normais se tivermos presente que a generalidade das calculadoras gráficas são máquinas essencialmente numéricas e incapazes de fazer a análise de uma função. É contudo conveniente ter consciência do que está por detrás destes "erros" das calculadoras para não esperar da calculadora uma infalibilidade que ela não tem e para explicar e evitar as situações de erro.

Com excepção das calculadoras com capacidades de manipulação simbólica (TI 92, por exemplo), o que as calculadoras apresentam como valor da derivada da função num ponto é uma aproximação numérica da mesma derivada. Para tal são em geral usadas duas fórmulas de aproximação:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{e} \quad \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}.$$

Se f é uma função diferenciável num intervalo aberto que contém o ponto x, quando $h \to 0$ a primeira expressão tende para $f'(x)$ e prova-se que o mesmo acontece com a segunda expressão. Se a primeira expressão corresponde à definição habitual da razão incremental, a segunda expressão fornece, de um modo geral, melhores aproximações para os mesmos valores de *h*. Rigorosamente, desde que *f* tenha terceira derivada contínua num intervalo I, prova-se que

$$f'(x)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\frac{h}{2}f''(\xi_h), \text{ para um certo } \xi_h \in [x, x+h],$$

e que

$$f'(x)-\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=-\frac{h^2}{6}f'''(\xi_h), \text{ para um certo } \xi_h \in [x-h, x+h].$$

De um modo geral isto significa que, cada vez que se reduz para metade o valor de h, é de esperar que o erro da primeira aproximação passe a metade do anterior, enquanto o erro da segunda aproximação se deverá reduzir a 1/4 do que era. Em contrapartida a segunda fórmula não utiliza sequer o valor de f em x o que pode conduzir a situações absurdas de se obter um valor numérico para a derivada de uma função num ponto onde essa função não é sequer contínua.

Quando se usa a derivação numérica na calculadora é ainda imprescindível ter consciência de um outro tipo de erro que afecta o resultado obtido: os erros de arredondamento. Quando a máquina calcula $x+h$, $x-h$, $f(x+h)$ e $f(x-h)$ estes valores não são obtidos exactamente, com precisão infinita, mas são obtidos com a precisão da calculadora. Quando h é muito pequeno acontece ainda que os valores de $f(x+h)$ e $f(x-h)$ são muito próximos, o que aumenta a importância relativa dos erros de arredondamento feitos antes cálculo da sua diferença. Na prática, quando $h \to 0$, na calculadora a derivada numérica calculada por qualquer uma das duas fórmulas acima indicadas converge para zero. Isto passa-se porque para valores de h tais que $\left|\frac{h}{x}\right| < \varepsilon$ (sendo ε a unidade de arredondamento da máquina; em geral $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-p}$, onde p é o número de dígitos com que a máquina representa os números) ao calcular $x+h$ e $x-h$ a máquina obtém x e a partir daí a razão incremental é sempre calculada como zero. Mesmo sem chegar a este ponto verifica-se que, à medida que h diminui, o erro no cálculo da derivada começa por diminuir mas depois volta a aumentar.

Exemplo:

Considere-se a função definida por $f(x) = 125x^3 + \pi x + 1$. Sabemos que $f'(0) = \pi$. Calculem-se, para diversos valores de h, os valores de

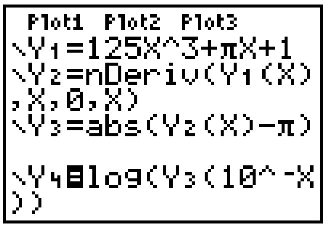
$$d(h) = \frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h} \text{ e de } e(h) = \left|\frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h} - f'(0)\right|.$$

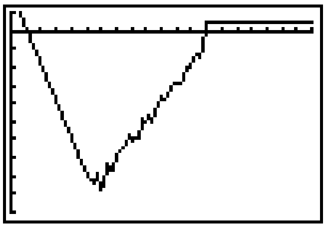
Note-se que $d(h)$ é a aproximação da derivada de f em 0 e $e(h)$ é o módulo do erro dessa aproximação. Usando a calculadora obtém-se a seguinte tabela:

h	*d(h)*	*e(h)*
0.1	4.391592654	1.25
0.01	3.154092654	0.0125
0.001	3.141717654	0.0001250000052
10^{-4}	3.141593904	0.0000012502102
10^{-5}	3.141592668	0.0000000144102
10^{-6}	3.141592675	0.0000000214102
10^{-7}	3.141592800	0.0000001464102
10^{-8}	3.141591500	0.0000011535898
10^{-9}	3.141595	0.0000023464102
10^{-10}	3.1418	0.0002073464102
10^{-11}	3.1405	0.0010926536
10^{-12}	3.12	0.0215926536
10^{-13}	0	3.141592654
10^{-14}	0	3.141592654
10^{-15}	0	3.141592654
10^{-16}	0	3.141592654

Os valores apresentados na tabela foram calculados numa calculadora TI-83 e neste caso tanto se pode usar a fórmula dada para $d(h)$ como se pode usar a função nDeriv, pois a fórmula que a máquina usa para aproximar a derivada é precisamente $d(h)$.

Pode-se agora observar que, para os valores de h tabelados, até 10^{-5} o erro da derivação numérica diminui, mas depois começa a aumentar, até que se obtém sistematicamente 0 como aproximação à derivada. Neste caso as possibilidades gráficas da calculadora dão uma ideia ainda melhor do que se passa. Fazendo $h=10^{-x}$ e variando x no intervalo $[0,20]$, estuda-se o logaritmo decimal de *e(h)* o que dá uma ideia da variação do erro da aproximação da derivada. Note-se que o simétrico do logaritmo decimal de *e(h)* dá uma ideia do número de casas decimais exactas nas aproximações numéricas da derivada.





Com os alunos será suficiente alertá-los para o facto de que a derivação incorporada na calculadora é apenas aproximada e que o valor como h = 0.001 (utilizado normalmente por algumas máquinas) é suficiente para a maioria das utilizações práticas. No caso de se fazer diminuir o valor de h utilizado, a aproximação à derivada só melhora até certo ponto.

Observação:

Os comportamentos acima referidos têm excepções em certos casos especiais. Um exemplo simples é o caso em que queremos calcular a derivada em zero. Outros casos em que as fórmulas numéricas aproximadas funcionam particularmente bem são certas funções polinomiais.

A fórmula de diferenças centradas

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h},$$

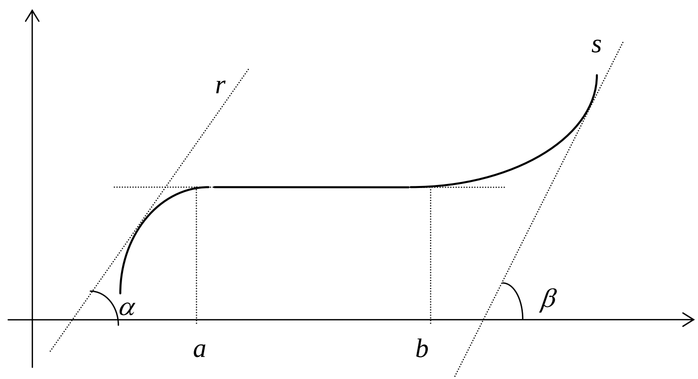
utilizada por diversas calculadoras, dá origem a outro tipo de problemas. Como não se utiliza o valor da função f em x, podem obter-se aproximações numéricas em pontos onde a função não é diferenciável ou nem sequer contínua. Dois exemplos simples são as funções $Y_5(x) = |x|$ e $Y_6(x) = \frac{1}{x}$ para as quais se obtêm os valores fictícios

nDeriv(Y_5,x,0)=0 e nDeriv(Y_6,x,0)=10^6.

Relação do sentido de variação da função com o sinal da derivada. Aplicação ao estudo dos extremos

Na brochura de Funções para o 10º ano de escolaridade, a noção de crescimento e decrescimento de uma função no seu domínio (sentido de variação da função no seu domínio) já foi tratada. Com a introdução ao estudo das derivadas, surge para as funções diferenciáveis, a questão de estudar as relações entre o sentido de variação da função e o sinal da derivada.

Seja então f uma função diferenciável num intervalo I e ***a*** um ponto interior a I. É geometricamente intuitivo que se a função cresce (decresce) em I, o declive das tangentes nos pontos do seu gráfico é não negativo (não positivo) e, reciprocamente, se o declive das tangentes em qualquer ponto do seu gráfico é não negativo (não positivo), a função cresce (decresce) em *I*.



declive de *r* = $tg\alpha > 0$

declive de *s* = $tg\beta > 0$

Observe-se que para $x \in [a,b]$ a função é constante. A tangente ao gráfico nos pontos $(x, f(x))$ com $x \in [a,b]$ coincide com a recta horizontal passando por $(a, f(a))$, que tem declive igual a zero.

Sendo o declive da tangente em cada ponto $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in I$, igual ao valor da derivada da função *f* em x_0, $f'(x_0)$, é-se naturalmente conduzido ao resultado:

Seja ***f*** uma função contínua num intervalo ***I*** e diferenciável no interior de ***I***. A função ***f*** é crescente em ***I*** se e só se $f'(x) \geq 0$ para todo o ***x*** no interior de ***I***.

É uma consequência simples das propriedades dos limites que se ***f*** é crescente numa vizinhança de um ponto ***a*** de ***I***, isto é, em $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ com $\varepsilon > 0$, em $[a, a+\varepsilon[$ se ***a*** é extremo esquerdo de ***I*** ou em $]a-\varepsilon, a]$ se ***a*** é extremo direito de ***I***, então a derivada no ponto ***a*** é não negativa, isto é, $f'(a) \geq 0$, resultando que se ***f*** é crescente em ***I*** então $f'(x) \geq 0$ para todo o ***x*** em ***I***. A recíproca resulta directamente do **teorema de Lagrange:** *Se* ***f*** *é uma função contínua em* $[a,b]$ *e diferenciável em* $]a,b[$*, existe* $c \in]a,b[$ *tal que* $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$*.* Geometricamente, significa que existe um ponto $c \in]a,b[$ onde a tangente é paralela à corda de extremos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

<u>Nota:</u> Observe-se que o sinal da derivada no interior do intervalo está relacionado com o seu crescimento no intervalo. O programa aconselha a considerar apenas, nesta abordagem elementar do resultado anterior, funções definidas em intervalos abertos. Tenha-se presente que, no caso de a função não estar definida num intervalo, o sinal da derivada dá apenas informação sobre a monotonia da função em intervalos contidos no domínio da função. Por exemplo, a função definida em $\Re \setminus \{0\}$ por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tem derivada negativa em $\Re \setminus \{0\}$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ e $f(x) = \dfrac{1}{x}$ não é decrescente em $\Re \setminus \{0\}$, uma vez que se $a > 0$ tem-se $-a < a$ e $f(-a) = -\frac{1}{a}$,

$-\frac{1}{a} < \frac{1}{a}$ e como $\frac{1}{a} = f(a)$, então $f(-a) < f(a)$.

Na brochura de Funções para o 10º ano, fez-se uma abordagem dos extremos de uma função e referiu-se que é <u>condição suficiente</u> para que uma função contínua tenha um extremo num ponto interior ao seu domínio, que o seu sentido de variação mude quando se passa da esquerda do ponto para a sua direita.

No caso das funções diferenciáveis, o teorema seguinte dá uma condição necessária de existência de um extremo num ponto interior ao domínio da função, isto é, <u>permite seleccionar em que pontos interiores ao seu domínio uma função diferenciável pode ter extremos</u>. Mais precisamente, tem-se:

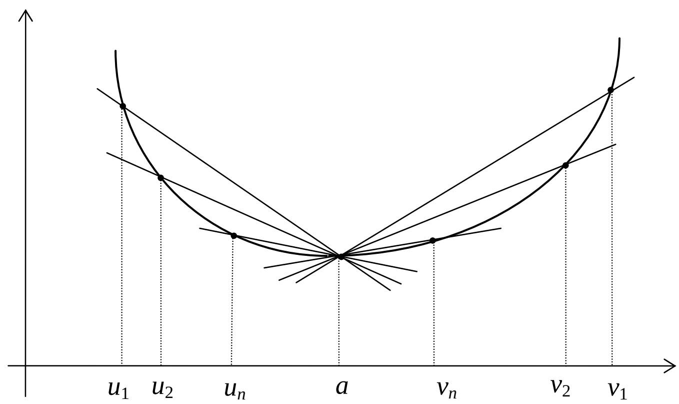
<u>Teorema de Fermat:</u>

Seja f uma função definida num intervalo I e a um ponto interior a I. Se f é diferenciável em a e tem um extremo em $(a, f(a))$ então $f'(a) = 0$.

Este teorema pode-se demonstrar por um processo rigoroso, que é geometricamente intuitivo:

Admita-se então que f tem, por exemplo, um mínimo relativo em $(a, f(a))$. Existe então $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \geq f(a)$, para todo o *x* em $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.

Tomem-se duas sucessões (u_n) e (v_n), convergentes para *a* tais que $u_n \in]a-\varepsilon, a[$ e $v_n \in]a, a+\varepsilon[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, sendo (u_n) crescente e (v_n) decrescente.



Então, $\dfrac{f(u_n)-f(a)}{u_n-a}\leq 0$ e $\dfrac{f(v_n)-f(a)}{v_n-a}\geq 0$, isto é, os declives das secantes que unem os pontos $(u_n, f(u_n))$ com o ponto $(a, f(a))$ são não positivos e os declives das secantes que unem os pontos $(v_n, f(v_n))$ com o ponto $(a, f(a))$ são não negativos. Como f é diferenciável em a, tem-se (atendendo à definição de limite segundo Heine) que $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\dfrac{f(u_n)-f(a)}{u_n-a}=\lim\dfrac{f(v_n)-f(a)}{v_n-a}$.

Como $\lim\dfrac{f(u_n)-f(a)}{u_n-a}\leq 0$ (porque $\dfrac{f(u_n)-f(a)}{u_n-a}\leq 0$) e $\lim\dfrac{f(v_n)-f(a)}{v_n-a}\geq 0$ (porque $\dfrac{f(v_n)-f(a)}{v_n-a}\geq 0$), resulta que $f'(a)\leq 0$ e $f'(a)\geq 0$ logo, $f'(a)=0$.

Sendo o **teorema de Fermat** apenas aplicável à classificação de extremos em pontos interiores a um intervalo onde a função é diferenciável, recordam-se em seguida procedimentos a adoptar noutros casos.

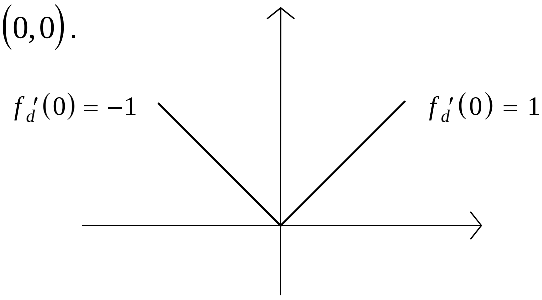
Resulta facilmente das propriedades básicas da noção de limite que:

Se uma função f, definida num intervalo I de $\Re$, possui derivadas laterais (finitas ou não) de sinais contrários num ponto a interior a I, então a função possui um extremo relativo em $(a, f(a))$, que será um mínimo se $f_e'(a)<0$ e $f_d'(a)>0$, e um máximo se $f_e'(a)>0$ e $f_d'(a)<0$. Se as derivadas laterais em a são do mesmo sinal, a função não possui extremo relativo em $(a, f(a))$.

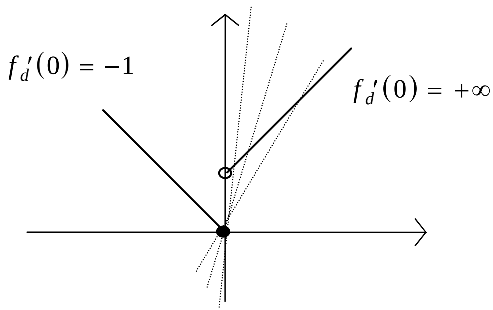
O resultado anterior aplica-se sempre que existam derivadas laterais (finitas ou não) no ponto *a* interior ao domínio da função, quer a função seja contínua nesse ponto ou não.

Exemplos:

1. No caso da função *f* definida em $\Re$ por $f(x)=|x|$, tem-se $f_e'(0)<0$ e $f_d'(0)>0$, pelo que *f* tem um mínimo (relativo) em $(0,0)$.

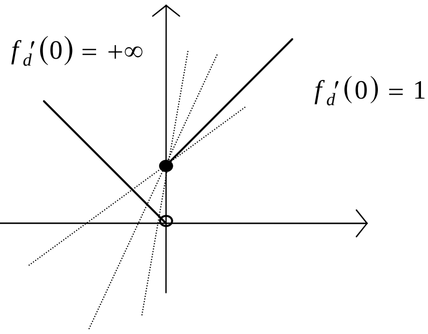


2. A função definida em $\Re$ por $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se} \quad x > 0 \\ -x & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$ não é diferenciável no ponto **0** porque não é contínua nesse ponto. Existem no entanto derivadas laterais com sinais contrários nesse ponto, pelo que a função tem um extremo no ponto $(0,1)$,



que é um mínimo uma vez que $f_e'(a) < 0$ e $f_d'(a) > 0$,

3. A função definida em $\Re$ por $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$ não é diferenciável no ponto **0** porque não é contínua nesse ponto. Existem no entanto derivadas laterais com o mesmo sinal nesse ponto, pelo que a função não tem um extremo no ponto $(0,1)$.



Apresentam-se em seguida alguns **exemplos** “tipo” de exercícios de aplicação das derivadas ao estudo do sentido de variação de uma função:

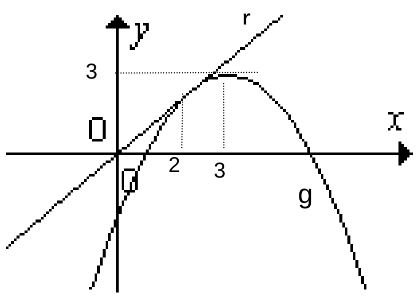
É dada a função definida por $g(x) = x^3 + 2$.

1. Verifica que $g'(3) = 29$

2. Determina uma equação da tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa **3.**

Sejam f e g duas funções reais tais que:

- $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$ e domínio de f R\{1}
- g, representada graficamente na figura junta.
- A recta r passa na origem do referencial e é tangente ao gráfico de g no ponto (2, 2).



- No ponto $x = 3$ a recta tangente ao gráfico de g é horizontal.

1. Estuda o sinal da função $f'(x)$ e indica os intervalos de monotonia de f.

2. Mostra que existem duas rectas tangentes ao gráfico de f paralelas à bissectriz dos quadrantes pares.

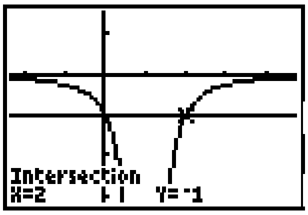
3. Verifica que não existem rectas tangentes ao gráfico de f perpendiculares à recta $2x + 3y - 1 = 0$

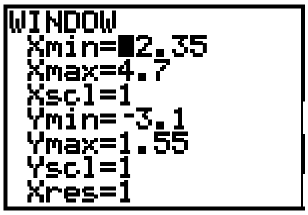
4. Calcula:

a) $f'(2) + g'(2)$ **b)** $f'(3) \times g(3) - g'(3)$

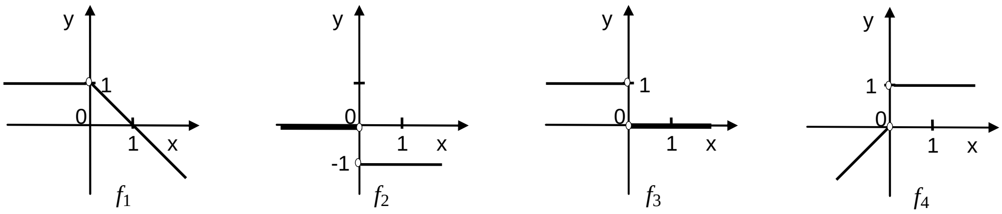
Neste exemplo, analisando a expressão analítica da função f', conclui-se que é negativa em todo o seu domínio, logo a função f é decrescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$. As rectas paralelas à bissectriz dos quadrantes pares têm declive –1.

Trata-se de procurar os pontos de ordenada –1, de $f\,'$,o que pode ser feito determinando a intersecção de $f\,'$ com a recta $y = -1$





Os gráficos seguintes representam respectivamente as funções f_1, f_2, f_3, e f_4, todas de domínio **R**\{0}.



Das afirmações que se seguem qual delas é verdadeira?

1. [A] $f_1 \times f_2 = f_3$ [B] $f_1 \circ f_4 = f_3$ [C] $\dfrac{f_2}{f_4} = f_3$ [D] $f_2 \times f_4 = f_3$

2. [A] $(f_1)' = f_3$ [B] $(f_3)' = f_2$ [C] $(f_1)' = f_2$ [D] $(f_3)' = f_4$

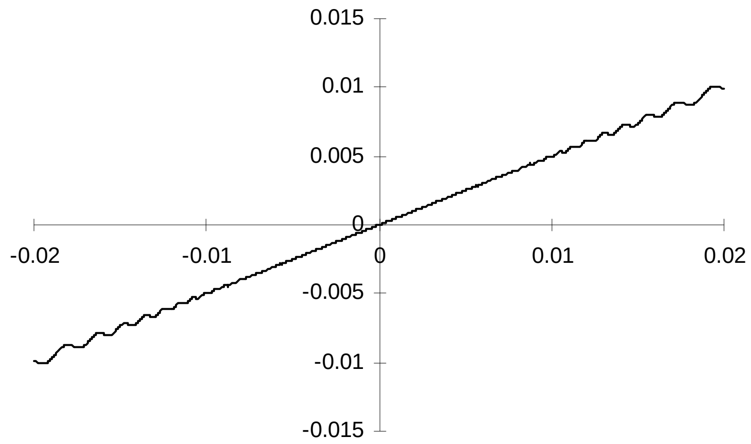
Alguns complementos sobre extremos e monotonia

As funções estudadas no 11º ano são tão "bem comportadas" que dificilmente podem originar contra-exemplos de algumas "ligações perigosas" que se estabelecem entre sinal da derivada e sentido de variação da função e entre extremos e monotonia. Ilustram-se em seguida duas situações, com exemplos que, embora ultrapassando o âmbito do programa do 11º ano, podem ser objecto de uma análise gráfica.

1. Conforme se referiu anteriormente, o estudo do sinal da derivada num intervalo aberto que contenha um dado ponto ***a*** permite tirar conclusões sobre o sentido de variação da função nesse intervalo. Não se infira daí que o sinal da derivada num ponto fornece informação sobre o sentido da sua variação numa vizinhança desse ponto. Mais precisamente, **é falso** afirmar que, se uma função ***f*** é diferenciável num intervalo aberto ***I***, $a \in I$ e $f'(a) > 0$ ($f'(a) < 0$), então a função cresce (decresce) numa vizinhança de ***a***.

Com efeito, considere-se a função $f : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ definida por

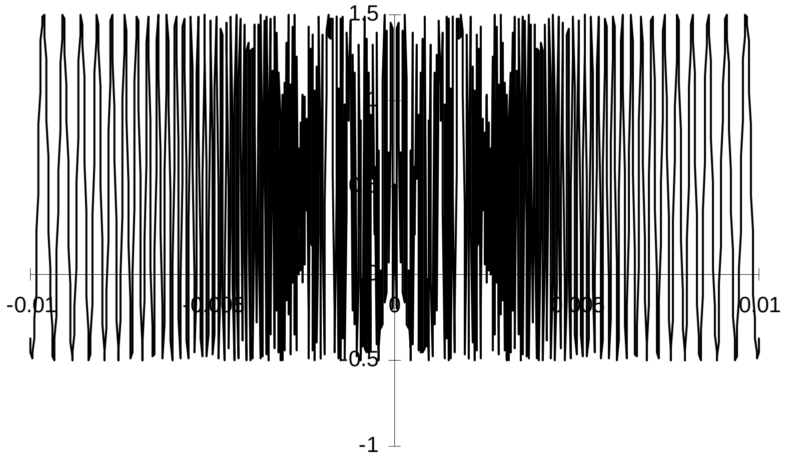
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$



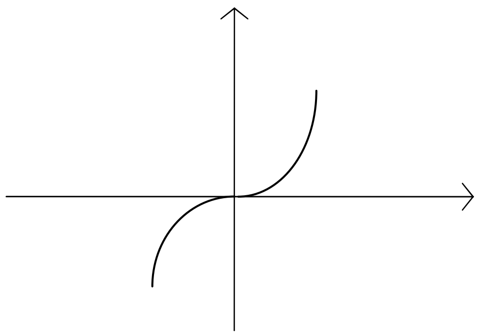
Trata-se de uma função diferenciável em $\mathfrak{R}$, sendo

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Tem-se que $f'(0)=\frac{1}{2}>0$ e f' não é positiva numa vizinhança da origem, conforme se observa no gráfico de f' (a derivada assume valores positivos e negativos em qualquer vizinhança da origem):



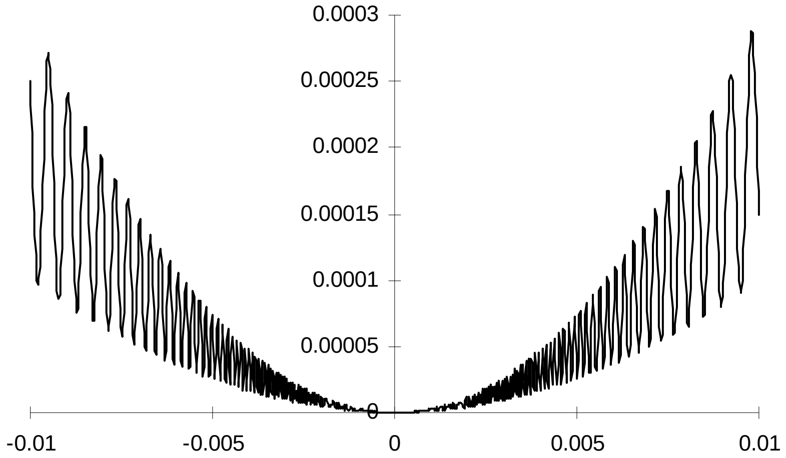
2. O facto de uma função ***f*** diferenciável num intervalo aberto ter derivada nula num ponto ***a*** desse intervalo, <u>não quer dizer</u> que exista $\varepsilon>0$ tal que a derivada f' <u>mude de sinal</u> quando passa de $]a-\varepsilon, a[$ para $]a, a+\varepsilon[$. Por exemplo, a função definida em $\Re$ por $g(x)=x^3$ tem derivada que se anula em $a=0$ sem mudar de sinal.



<u>Mesmo no caso da função ser diferenciável numa vizinhança de um ponto ***a*** interior ao seu domínio e ter um extremo para $x=a$, a sua derivada pode não mudar de sinal</u>

quando passa de $\left]a-\varepsilon, a\right[$ para $\left]a, a+\varepsilon\right[$. Com efeito, considere-se a função $f : \Re \rightarrow \Re$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \left(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) x^2 & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}.$$

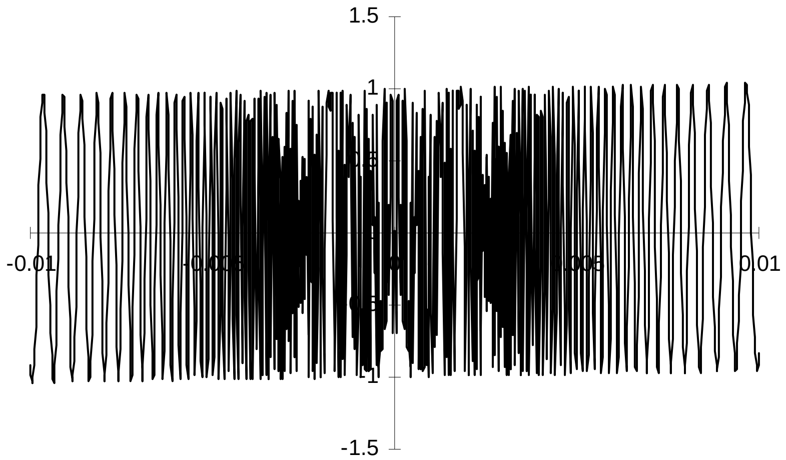


A função tem um mínimo no ponto $(0,0)$, porque $f(x) \geq 0$ e $f(0) = 0$.

Trata-se de uma função diferenciável em $\Re$, sendo

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\left(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

O comportamento da derivada de *f* numa vizinhança de $(0,0)$, que não é positiva nem negativa, observa-se no gráfico seguinte:



Com este exemplo fica justificado que <u>não é condição necessária</u> para a existência da um mínimo (máximo) num ponto *a* interior ao domínio de uma função contínua que ela decresça (cresça) em $\left]a-\varepsilon, a\right[$ e cresça (decresça) em $\left]a, a+\varepsilon\right[$, para algum $\varepsilon > 0$. Esta condição <u>é apenas suficiente</u>: Se *f* é uma função contínua em *a* e existe $\varepsilon > 0$ tal que em $\left]a-\varepsilon, a\right[$ a função *f* é crescente (decrescente) e em $\left]a, a+\varepsilon\right[$ a função *f* é decrescente (crescente) então a função *f* tem um máximo (mínimo) em $(a, f(a))$.

No caso das funções diferenciáveis, o teorema de Fermat permite seleccionar os pontos onde pode existir um máximo ou um mínimo. O exemplo anterior evidencia que a análise do sinal da derivada à esquerda e à direita do ponto em questão pode não ser o bastante para concluir se ele é um extremo.

Operações com funções

Sejam ***f*** e ***g*** duas funções cujos domínios são subconjuntos ***A*** e ***B*** de $\Re$. Podem definir-se em $A \cap B$ as funções **soma** de *f* e *g*, $f+g$, e **produto** de *f* e *g*, *fg*, por

$$\boxed{\begin{array}{ccc} A \cap B & \xrightarrow{f+g} & \Re \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{ccc} A \cap B & \xrightarrow{fg} & \Re \\ x & \mapsto & f(x)g(x) \end{array}}$$

isto é, $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ e $(fg)(x) = f(x)g(x)$

Em $A \cap B \cap \{x \in B: g(x) \neq 0\}$ pode-se definir a função **quociente** de *f* por *g*, $\dfrac{f}{g}$, por

$$\boxed{\begin{array}{ccc} A \cap B \cap \{x \in B: g(x) \neq 0\} & \xrightarrow{\frac{f}{g}} & \Re \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}}$$

isto é, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Se $f(A) \subseteq B$, tem sentido definir em ***A*** uma nova função, denominada a **função composta** de *g* com *f*, $g \circ f$, aplicando sucessivamente *f* e *g*,

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & f(A) \subseteq B & \xrightarrow{g} & \Re \\ & & \underbrace{\hphantom{f(A) \subseteq B}}_{g \circ f} & & \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \end{array}}$$

isto é, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Analogamente, se $g(B) \subseteq A$, tem sentido definir em *B* uma nova função, denominada a **função composta** de *f* com *g*, $f \circ g$, aplicando sucessivamente *g* e *f*,

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{g} & g(B) \subseteq A & \xrightarrow{f} & \Re \\ & & \underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxx}}_{f \circ g} & & \\ x & \mapsto & g(x) & \mapsto & f(g(x)) \end{array}}$$

Exemplos:

1. Considerem-se funções $f : [0, +\infty[\to \Re$ e $g :]-\infty, 0] \to \Re$. Só tem sentido definir $f \pm g$ e $f \times g$ no ponto zero, uma vez que $]-\infty, 0] \cap [0, +\infty[= \{0\}$ e pode-se definir o quociente f/g no ponto zero se $g(x) \neq 0$. Se h é a função definida por $h(x) = g(|x|)$, $\forall x \in [0, +\infty[$, tem sentido definir $f \pm h$ e $f \times h$ em $[0, +\infty[$ e f/h em $[0, +\infty[\backslash \{x \in [0, +\infty[: h(x) = 0\}$

2. Seja $f : [0, +\infty[\to \Re$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ e $g : \Re \to \Re$ definida por $g(x) = x^2$ e estudem-se as funções compostas $g \circ f$ e $f \circ g$. A função $g \circ f$ está definida em $[0, +\infty[$ por $(g \circ f)(x) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$ e a função $f \circ g$ está definida em $\Re$ por $(f \circ g)(x) = f(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$. Existem, neste caso, ambas as compostas, $f \circ g$ e $g \circ f$, que são funções **diferentes**, pois têm domínios diferentes (e expressões analíticas diferentes). A composição de funções não goza, portanto, da **propriedade comutativa**.

3. Considerem-se duas funções ímpares definidas em $\Re$ e analise-se a paridade de

$f+g$ e $f \times g$, tem-se que

$$(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = -f(x)-g(x) = -(f(x)+g(x)) = -(f+g)(x), \forall x \in \Re$$

concluindo-se que a soma de duas funções ímpares é uma função ímpar. Quanto ao produto,

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x) = (fg)(x), \forall x \in \Re,$$

concluindo-se que o produto de duas funções ímpares é uma função par.

Analogamente se conclui que a soma de duas funções pares é uma função par e o produto de duas funções pares é uma função par.

E quanto às compostas? Tem-se:

$$(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x)) = -(f \circ g)(x), \forall x \in \Re,$$

concluindo-se que a composta de funções ímpares é uma função ímpar.

4. Analise-se a composta de três funções. Será que a composição de funções é associativa?

Sejam então $A, B, C \subseteq \Re$ e $f: A \to \Re$, $g: B \to \Re$, $h: C \to \Re$ tais que $f(A) \subseteq B$ e $g(B) \subseteq C$. Tem então sentido considerar as funções $(h \circ g) \circ f$ e $h \circ (g \circ f)$:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))), \forall x \in A$$

e

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))), \forall x \in A$$

concluindo-se que $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, isto é, a composição de funções goza da propriedade **associativa**.

Com os alunos podem ser trabalhados exercícios como os que se seguem:

Dá exemplo de duas funções, uma crescente e outra decrescente, cuja soma seja uma função:

1. crescente

2. decrescente

3. não monótona

Uma possível solução será:

1. $y_1 = 2x$, $y_2 = -x$ 2. $y_1 = x$, $y_2 = -2x$ 3. $y_1 = x^2$, $y_2 = -x$ (definidas em IR^+)

Dá exemplo de duas funções, uma crescente e outra decrescente, cuja produto seja uma função:

1. crescente

2. decrescente

3. não monótona

Uma possível solução:

1. $y_1 = (\sqrt{x})^3$, $y_2 = \dfrac{1}{x}$ (definidas em IR^+) 2. $y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = -x$ 3. $y_1 = x$, $y_2 = -x$

Numa calculadora gráfica faz $y_1 = x^2$ e $y_2 = x - 1$

1. Representa graficamente as funções y_1 e y_2.

2. Faz $y_3 = y_1\,(y_2)$ e representa graficamente y_3.

3. Compara os gráficos de y_1 e y_2 com o da função y_3.

4. Faz $y_4 = y_2\,(y_1)$ e representa graficamente y_4.

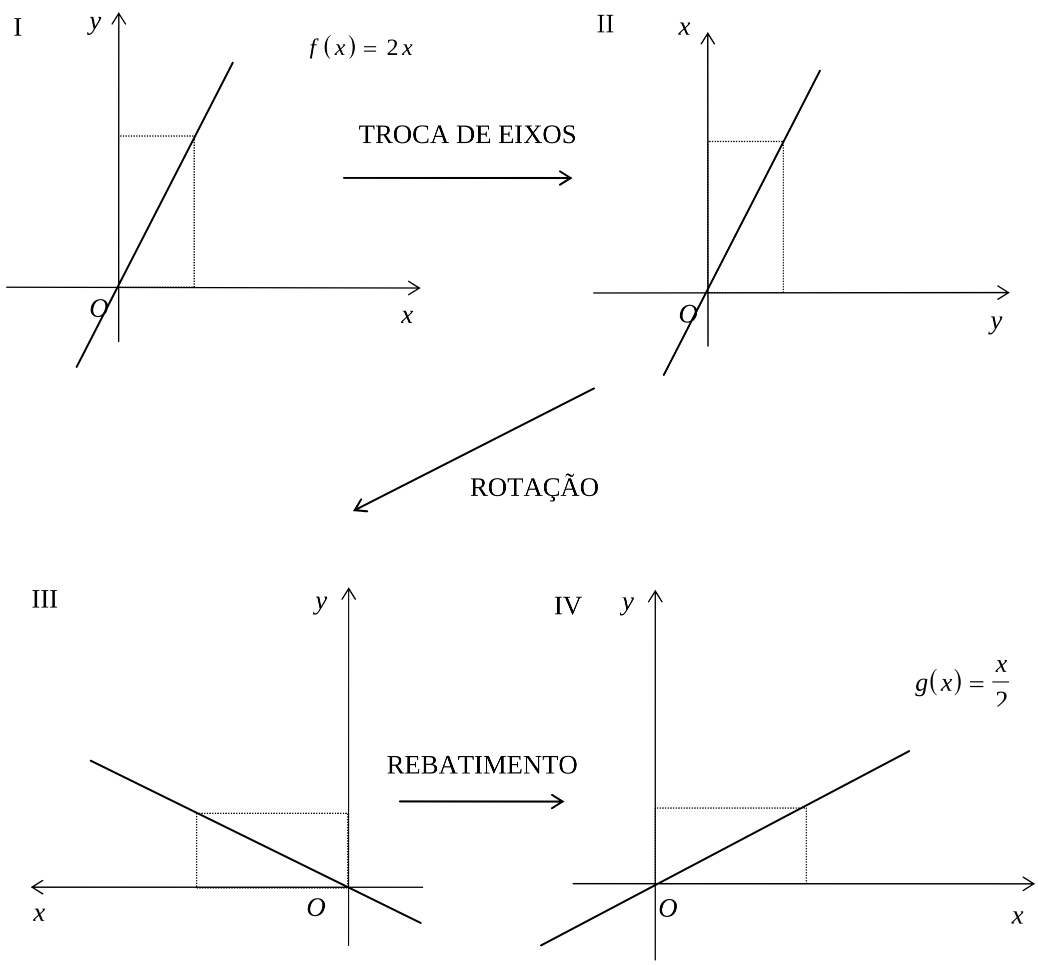
5. Que podes concluir relativamente à comutatividade da composição de funções?

A função inversa

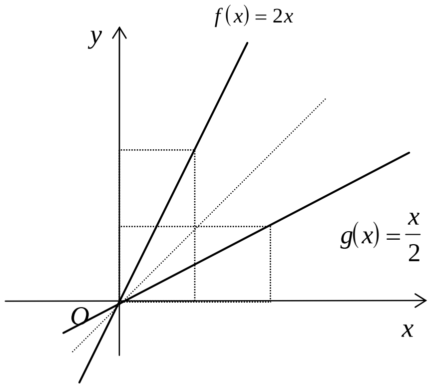
Sejam ***f*** e ***g*** duas funções definidas em $\Re$ por $f(x) = 2x$ e $g(x) = \dfrac{x}{2}$; se $y = f(x) = 2x$, tem-se que $g(y) = \dfrac{y}{2} = \dfrac{2x}{2} = x$. Diz-se então que ***g*** é a função **inversa** de ***f***, e escreve-se $g = f^{-1}$.

Como estão afinal relacionadas as funções ***f*** e ***g*** ? Tem-se que se $y = f(x)$ então $x = g(y)$. Graficamente, este facto traduz-se pela simetria dos gráficos de f e g relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares, pois ao "trocar" os eixos (a função inversa exprime x como função de y) e uma vez que se tem de manter o sentido directo (*xOy*), tem que se fazer um **rebatimento.** [Diz-se que um plano se rebate sobre outro quando se roda o primeiro plano em torno da recta intersecção dos dois planos, de modo a fazê-lo coincidir com o segundo. A recta intersecção dos dois planos é denominada charneira do rebatimento. No caso presente, a charneira é o eixo *Oy*.]

Nas figuras seguintes procura ilustrar-se essa sequência de operações:



Representam-se em seguida, numa mesma figura, os gráficos da função e da sua inversa, estando patente a simetria em relação à bissectriz dos quadrantes ímpares (a tracejado):



Mais geralmente, seja $A \subseteq \Re$ e h: $A \to \Re$. Uma função j definida em $B = h(A)$ diz-se **função inversa** de h, e escreve-se $j = h^{-1}$, se sempre que $y = h(x)$ então $j(y) = x$.

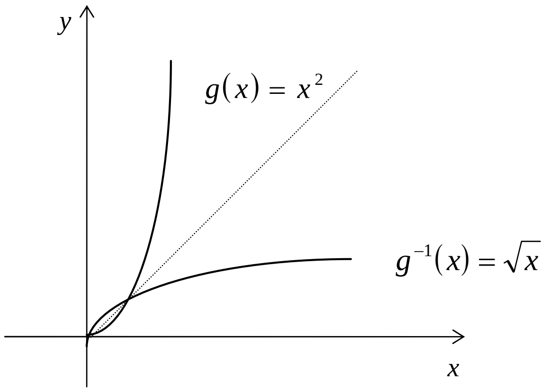
Então, se $y = h(x)$ para uma certa função h, será que para determinar a inversa de h basta exprimir x em função de y? A resposta será afirmativa se existir função inversa. Põe-se então a questão essencial: **a que condições deve obedecer uma função para existir função inversa ?** Suponha-se que a função h dá origem a uma mesma imagem para objectos diferentes, isto é, se existem dois elementos diferentes x_1 e x_2 do domínio da função h tais que $h(x_1) = h(x_2) = y$. Não se pode dizer que existe uma função que a y faz corresponder dois valores diferentes x_1 e x_2 , pois a unicidade da imagem é essencial ao conceito de função. Não se pode neste caso falar de **função** inversa. Então, só existe função inversa para as funções h que satisfaçam a condição: se $h(x_1) = h(x_2)$ então $x_1 = x_2$. Uma função nestas condições diz-se **injectiva**.

Exemplo:

Seja $f : \Re \to \Re$ a função definida por $f(x) = x^2$. Esta função não é injectiva pois, por exemplo, $f(-1) = f(1) = 1$. Não se pode falar então de função inversa de f. Mas considere-se a restrição da função f a $\left[0, +\infty\right[$, isto é, uma função

$g:[0,+\infty[\rightarrow \Re$ definida por $g(x)=x^2$. Esta função já é injectiva no seu domínio. Qual é a sua função inversa ? Se $y=g(x)=x^2$ tem-se que $x=\sqrt{y}$, e a inversa é a função com domínio $[0,+\infty[$ definida por $g^{-1}(x)=\sqrt{x}$.

Na figura seguinte representam-se os gráficos das funções g e g^{-1}, estando indicada a tracejado a bissectriz dos quadrantes impares, relativamente à qual existe simetria:



ACTIVIDADES PARA A SALA DE AULA

À semelhança da brochura sobre o mesmo tema para o 10º ano, apresentamos de seguida um conjunto de tarefas a propor aos alunos, em trabalhos individuais ou em grupo, na sala de aula ou fora dela.

Para uma maior facilidade de leitura, mantivemos no essencial os títulos do anexo 1 ao programa sem que isto signifique uma sequência obrigatória.

Algumas das actividades são comentadas ou simplesmente indicadas soluções possíveis pretendendo-se com isto transmitir de alguma forma a nossa leitura do programa. Não sentimos no entanto necessidade de comentar com tanto pormenor como no 10º ano dado que as orientações metodológicas não sofreram alterações.

Estudo intuitivo tanto a partir de um gráfico concreto como usando calculadoras gráficas de propriedades das funções e dos seus gráficos

Ao retomar o tema "Funções" já iniciado no 10º ano, para além de uma revisão dos aspectos já estudados, pode-se aproveitar para assinalar alguns aspectos que não tenham sido tratados no 10º ano. Cada professor, de acordo com as turmas que lecciona, deve tentar encontrar exercícios que simultaneamente sirvam de revisão e sejam apropriados para completar o programa do 10º ano.

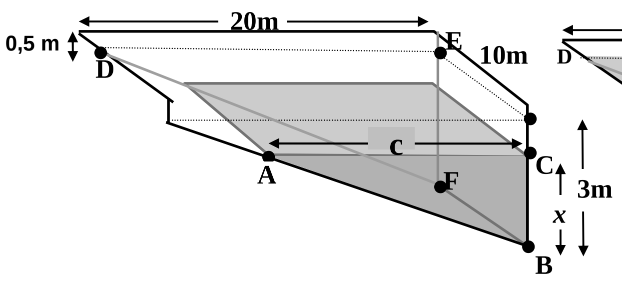
Vamos encher a piscina

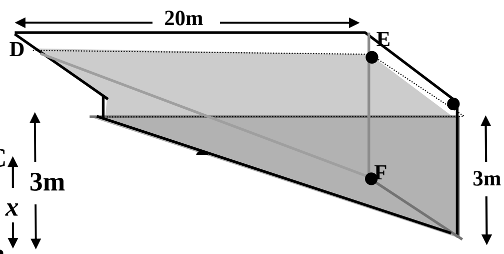
1. Que volume de água é necessário para encher uma piscina que tem 20m de comprimento por 10m de largura e a profundidade é de 3,5 m num dos lados e de apenas 0,5m do outro lado, tal como mostra a figura? Considera que a piscina está cheia quando tiver água até 0,5m do bordo?

2. Como varia o volume de água com a altura x, relativa à zona de maior profundidade?

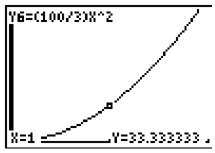
3. Qual é o volume de água quando a altura é 1 metro? E quando é 2 metros?

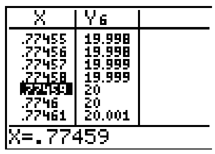
4. Qual é a altura da água na zona de maior profundidade quando o volume é de 20 m^3? E quando é 100 m^3?





Comentário:





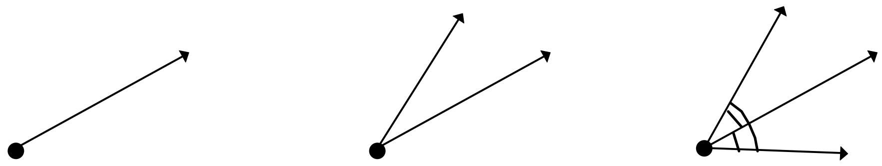
O volume é o de um prisma triangular de base [ABC] e altura 10 . Os triângulos [ABC] e [DFE] são semelhantes, logo $c = \frac{20x}{3}$ e portanto $V(x) = \frac{1}{2} \times \frac{20x}{3} \times x \times 10 = \frac{100}{3} x^2$.

$V(1) \approx 33{,}3$ m^3 ; $V(2) \approx 133{,}3$ m^3 ; $V(x) = 20m^3$ para $x \approx 0{,}77$ e $V(x) = 100m^3$ para $x \approx 1{,}73$.

Este problema coloca os alunos perante a necessidade de relacionarem conhecimentos de geometria e funções. Deve recorrer-se para a sua resolução às potencialidades da calculadora. Não faz sentido perante um problema destes exigir soluções exactas, os valores aproximados às décimas ou às centésimas são suficientes, será uma boa oportunidade para recordar como, com auxílio das tabelas das calculadoras, se pode garantir o número de casas decimais pretendido.

Ângulos e semi-rectas

Vamos construir **ângulos** de amplitude inferior a 180°. Com um segmento não formamos nenhum ângulo. Com dois segmentos aplicados no mesmo ponto (vértice) obtemos um ângulo. Com três segmentos com o mesmo vértice obtemos três ângulos. Quantos ângulos são obtidos com 5 segmentos? Com 10? E com *n*?



Comentário

Nº de segmentos	1	2	3	4	5	6
Nº de ângulos obtidos	0	1	3	6	10	15

Se os alunos representarem graficamente este conjunto de pontos, encontrados a partir das primeiras experiências, são levados a conjecturar que a função que se adequa a esta situação é uma função quadrática. A partir daí encontram $P(n) = 0.5n^2 - 0.5n$, podendo depois confrontar os resultados que a expressão fornece com os próximos casos (n=7, n=8).

Gráficos por telefone

Imagina que um amigo teu te pede ajuda pelo telefone para fazer um trabalho de casa de Matemática. Ele precisa de representar o gráfico da função $\mathbf{-2f(x+1)-3}$ a partir do gráfico da função ***f*** que ele conhece. Não se sabe qual a expressão analítica de ***f***. Ajuda o teu amigo explicando-lhe como é que ele deve fazer as transformações necessárias para resolver a questão. Lembra-te que estás ao telefone e por isso o teu amigo não pode ver nada do que tu possas desenhar.

Transformar

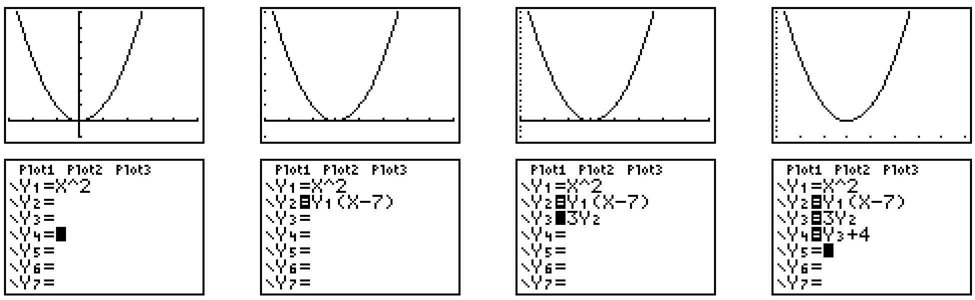
Uma representação gráfica de uma determinada função f pode ser visualizada numa calculadora gráfica no rectângulo de visualização $[-3, 5]\times[-1, 7]$.

Descreve de que forma é que cada um dos números representados a **bold** na função $g(x) = \mathbf{3}f(x - \mathbf{7}) + \mathbf{4}$ transforma o gráfico de $\boldsymbol{f}$. Qual o rectângulo de visualização apropriado para representar o gráfico de $\boldsymbol{g}$?

Comentário

Os alunos devem saber relacionar os efeitos de cada um dos parâmetros com as modificações que são necessárias fazer ao rectângulo de visualização.

Os alunos podem começar por fazer experiências com uma função conhecida, por exemplo $y = x^2$. Neste caso, uma sequência possível seria:



$[-3, 5]\times[-1, 7]$ $[-3+\mathbf{7}, 5+\mathbf{7}]\times[-1, 7]$ $[4, 12]\times[-1\times\mathbf{3}, 7\times\mathbf{3}]$ $[4, 12]\times[-3+\mathbf{4}, 21+\mathbf{4}]$

É natural que os alunos ao utilizarem a calculadora tentem introduzir os três parâmetros simultaneamente competindo ao professor alertar para a vantagem de os estudar em separado, única forma de ver o efeito que cada um deles provoca.

É desejável que no final os alunos consigam traduzir as conclusões a que chegaram para qualquer função e indiquem exactamente os intervalos de visualização que resultam do intervalo dado: $[-3 + \mathbf{7}, 5+ \mathbf{7}]\times[-1, 7]$; $[4, 12]\times[-1\times\mathbf{3}, 7\times\mathbf{3}]$;

$[4, 12]\times[-3 + \mathbf{4}, 21+ \mathbf{4}]$;

Representa graficamente cada uma das funções, não esquecendo de assinalar os pontos relevantes (intersecções com os eixos, extremos, etc.)

1. $y = 3(x + 4)^2 + 0.01$ **2.** $y = -x(x + 4)(x + 1)(x - 2)(x - 5)$

Sem fazer o gráfico, indica, justificando, quantas vezes é que o gráfico da função $y = 4x(x - 4.4)(x + 3)(x - 23)(x + \sqrt{2})$ intersecta o eixo das abcissas.

1. Faz um gráfico da função polinomial $y = (x + 3)(x + 1)(x - 4)(x - 6)$.
2. Sem fazer o gráfico, indica, justificando, qual a diferença entre o gráfico da alínea anterior e o de $y = -(x + 3)(x + 1)(x - 4)(x - 6)$.

Desloca o gráfico da função $y = |x|$ duas unidade para a esquerda na horizontal e três unidades para cima na vertical. Escreve uma expressão da função que corresponde ao gráfico obtido.

Descreve como é que o gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 5$ pode ser obtido a partir do gráfico da função $y = x^2$

<u>Comentário</u>

Com estes primeiros exercícios pretende-se fazer uma revisão dos principais aspectos estudados sobre funções relacionando representação gráfica e expressão analítica. O facto de se escolherem algumas funções polinomiais de grau superior ao segundo, permite-nos tentar sintetizar características de funções polinomiais de qualquer grau.

Nos quatro primeiros exercícios propostos, podemos estudar a relação existente entre expressão analítica e zeros, entre zeros e pontos de intersecção com o eixo das abcissas, entre ***f*** e – f, relacionar as várias formas de escrita de um polinómio, etc.

No caso do último exercício é necessário transformar a expressão analítica da função escrevendo-a na forma $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ onde se percebe que o gráfico da função $y = x^2$ foi deslocado na horizontal duas unidades para a direita e na vertical uma unidade para cima. Pode-se aproveitar para pedir aos alunos que entreguem por escrito a resolução deste exercício para que se vá melhorando a escrita matemática e as justificações apresentadas.

Depois de alguma revisão os alunos podem ser encorajados a sintetizar o estudo que foi feito sobre funções polinomiais e é esse o objectivo dos dois exercícios que se seguem.

Considera a função polinomial $f(x) = 0{,}5\,x^2 - 1{,}25\,x - 0{,}75$

1. Representa ***f*** graficamente.

2. Escreve a expressão analítica de ***f*** na forma factorizada.

3. Escreve a expressão analítica de ***f*** na forma $y = \mathrm{a}(x - \mathrm{h})^2 + \mathrm{k}$.

Uma expressão polinomial de qualquer grau maior ou igual a um pode ser escrita de várias maneiras. Indica as principais informações que se podem retirar de cada uma delas.

1. Escreve tudo aquilo que consideres importante sobre as características de um polinómio de grau ímpar (primeiro grau, terceiro, quinto, etc.). Assinala aquilo que é específico deste tipo de polinómios e aquilo que poderá ocorrer ou não

2. Em que é que seria diferente a tua resposta caso o polinómio fosse de grau par (segundo grau, quarto, sexto, etc.).

Uso da calculadora para uma aproximação experimental da noção de limite

Representa graficamente a função $f(x) = \dfrac{4x}{x+1}$

1. Completa a tabela e indica para que valor tende a função quando $x \to +\infty$

x	100	1000	10000	100000	.....
$f(x)$					

2. Completa a tabela e indica para que valor tende a função quando $x \to -\infty$

x	–100	–1000	–10000	–100000	.....
$f(x)$					

3. Completa a tabela e indica qual o comportamento da função quando $x \to -1$

x	– 0,9	– 0,999	– 0,9999	–1,01	–1,0001	–1,00001	...
$f(x)$							

1. Usando a calculadora, estuda o comportamento de cada uma das funções quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.

a) $y = \dfrac{5x+1}{3}$ **b)** $y = \dfrac{2}{x+4}$ **c)** $y = \dfrac{2x-1}{x+4}$ **d)** $y = \dfrac{2x^2-1}{x-4}$

2. Estuda o comportamento de cada uma das funções quando $x \to 3$

a) $y = \dfrac{1}{x-3}$ **b)** $y = \dfrac{(x-3)^2}{x-3}$ **c)** $y = \dfrac{x-3}{(x-3)^3}$

1. Dá exemplos de funções polinomiais cujo limite quando $x \to +\infty$ seja

a) $+\infty$ **b)** $-\infty$

2. Dá exemplos de funções polinomiais cujo limite quando $x \to -\infty$ seja

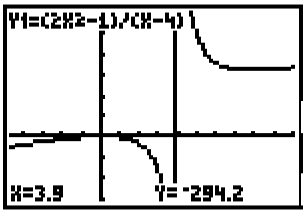
a) $+\infty$ **b)** $-\infty$

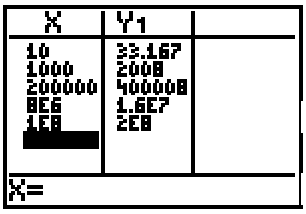
3. Dá exemplos de funções cujos limites, quando $x \to -\infty$ e quando $x \to +\infty$, sejam ambos

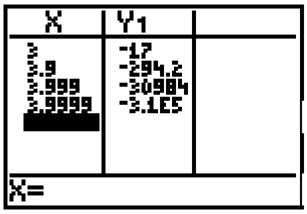
a) $+\infty$ **b)** $-\infty$

Comentário

Com estas propostas pretende-se fazer uma primeira abordagem das assimptotas paralelas aos eixos, uma vez que um estudo mais completo das assimptotas só será feito no 12º ano.







O estudo de limites, nesta altura, deve ser sempre realizado de forma intuitiva em pontos onde se justifique e recorrendo ao gráfico das funções.

No 11º ano só devem ser tratadas as assimptotas paralelas aos eixos e de forma intuitiva.

A última proposta poderá servir para discutir com os alunos o facto das funções polinomiais de grau superior ou igual a 2 não terem assimptotas. Poder-se-á verificar que no caso dos polinómios de grau ímpar os limites são infinitos de sinais contrários quando $x \to -\infty$ e quando $x \to +\infty$ e no caso dos polinómios de grau par são infinitos do mesmo sinal. Nesta altura não tem muito interesse tratar com os alunos os casos especiais como seja a família $y = \text{b}$.

Funções racionais. Referência à hipérbole, informação das suas principais propriedades e da sua importância histórica

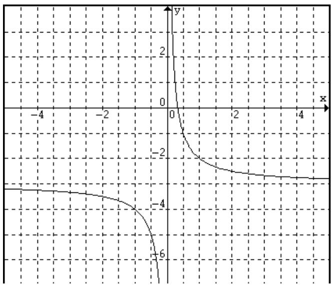
Funções racionais e representações gráficas

Os gráficos das funções racionais são muito variados. Embora nem sempre seja fácil encontrar situações da realidade para todas elas, os seus gráficos são tão interessantes que vale a pena fazer algumas experiências:

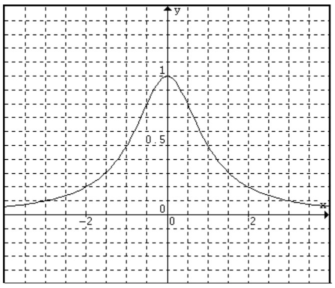
1. Observa os gráficos com atenção, descreve-os e relaciona-os com as respectivas expressões analíticas.

2. Para cada uma das funções indica o domínio, continuidade, paridade, extremos e monotonia.

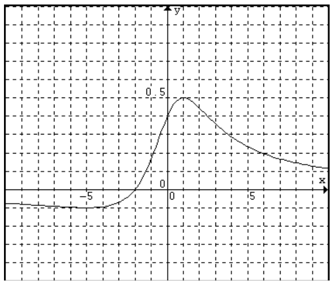
$y=\frac{1}{x}-3$



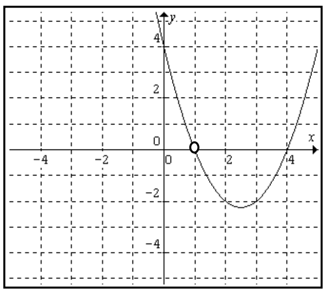
$y=\frac{1}{x^2+1}$



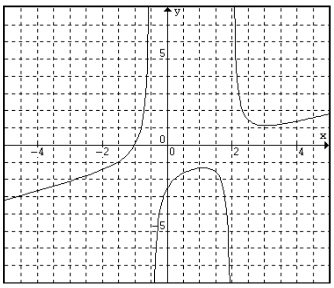
$y=\frac{x+2}{x^2+5}$



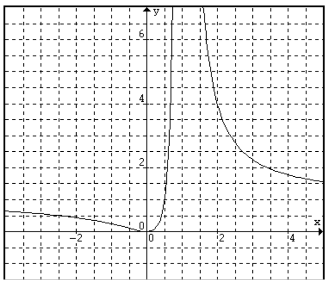
$y=\frac{(x-1)(x^2-5x+4)}{x-1}$



$y=\frac{x^3-3x^2+x+5}{2x^2-3x-2}$



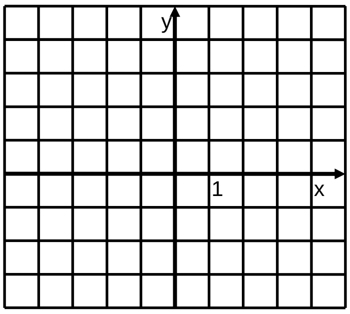
$y=\frac{x^2}{(x-1)^2}$



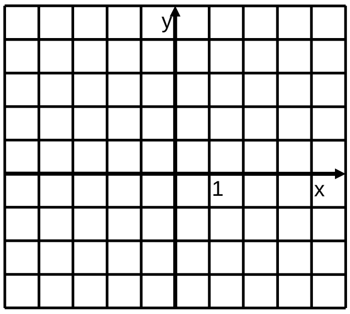
Relacionar gráficos

1. Em cada referencial representa as funções f e $\frac{1}{f}$.

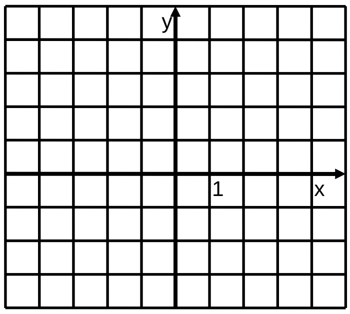
$f(x) = x$



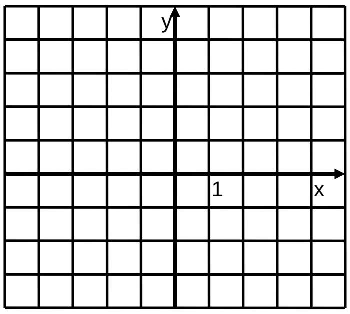
$f(x) = x - 2$



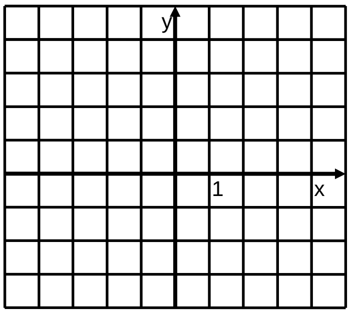
$f(x) = -x$



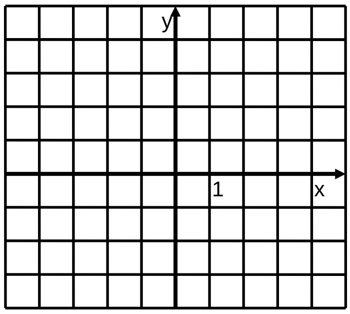
$f(x) = x^2$



$f(x) = x^2 - 2$



$f(x) = x^2 + 2$



2. Em cada caso observa:

a) a relação existente entre os zeros de f e o domínio da função $\frac{1}{f}$.

b) analisa o comportamento da função $\frac{1}{f}$ na proximidade dos zeros de f.

c) os valores que as funções tomam quando x assume valores muito grandes ou muito pequenos.

3. Tenta relacionar os gráficos de cada par de funções e faz um relatório sobre as conclusões a que chegaste.

Comentário

Qualquer uma destas actividades pode servir para introduzir as funções racionais. A análise dos gráficos permite recordar os conceitos de domínio, contradomínio, extremos, monotonia, paridade.

Pode aproveitar-se a oportunidade para decompor em factores os polinómios do numerador e do denominador e perceber a utilidade dessa decomposição na análise da função. O conceito intuitivo de assimptotas verticais e horizontais pode também ser introduzido a partir desta actividade.

Deve ser chamada a atenção dos alunos para o facto de em alguns casos os pontos não pertencentes ao domínio não serem detectáveis através da representação gráfica da calculadora, embora sejam identificáveis, em geral, na tabela, através da mensagem de ERRO.

A determinação dos extremos de cada função deve ser feita com base na análise do gráfico e deve ser dada com a aproximação que deverá ser solicitada em cada caso pelo professor.

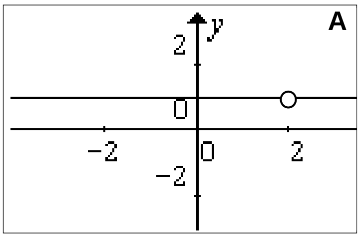
Relativamente à segunda tarefa, a relação existente entre os gráficos de ***f*** e de $\frac{1}{f}$, e a relação da expressão analítica com o gráfico de cada uma das funções, possibilita a análise da influência dos zeros de ***f*** no aparecimento de assimptotas verticais no gráfico de $\frac{1}{f}$.

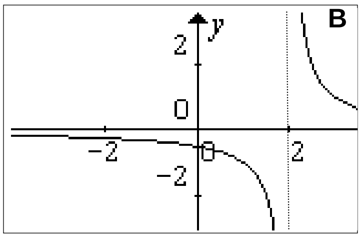
Na actividade que se apresenta na página seguinte, para além de observarem as assimptotas horizontais ($y = 0$) e as assimptotas verticais correspondentes aos zeros do denominador nos gráficos (3), (4), (B) e (C), os alunos devem ainda perceber: que no gráfico (1) e (A) a expressão é sempre igual a 1 excepto no caso em que o quociente é $\frac{0}{0}$ ($x = -2$ ou $x = 2$); que nos gráficos (2) e (D) as expressões que definem a função são equivalentes a $y = x - 2$ ou a $y = -x + 1$ excepto para os caso em que o quociente é $\frac{0}{0}$ ($x = 1$, $x = 2$). Os gráficos (4) e (C) correspondem a expressões que são sempre positivas. Evidentemente que o aluno perante esta tarefa pode indicar soluções de outro tipo. Por exemplo, para o caso do gráfico 1 poderá ser indicada a função $f(x) = 1$ com domínio $IR\backslash\{-2\}$.

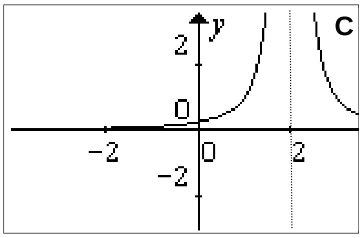
Investigando funções racionais

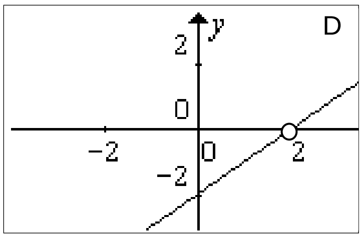
1. Considera e analisa os gráficos seguintes. Faz corresponder a cada gráfico uma das seguintes expressões analíticas e relaciona a expressão escolhida com o aspecto do gráfico na proximidade do ponto de abcissa 2.

$y_1 = \dfrac{1}{(x-2)^2}$; $\quad y_2 = \dfrac{1}{x-2}$; $\quad y_3 = \dfrac{(x-2)^2}{x-2}$ e $\quad y_4 = \dfrac{x-2}{x-2}$.

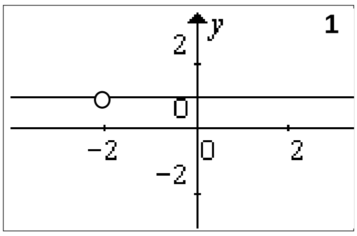


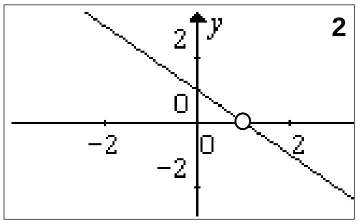


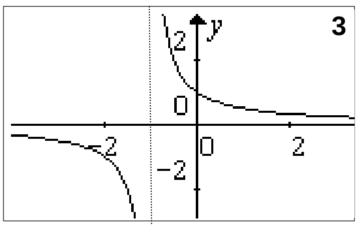


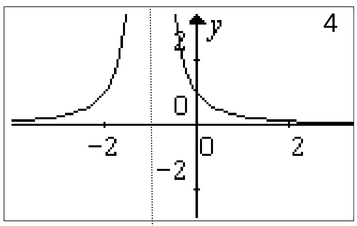


2. Escreve uma expressão analítica para cada um dos gráficos. Confirma com a calculadora as tuas conjecturas.









3. Faz uma síntese do que aprendeste com esta investigação acerca de assimptotas e de pontos, a que vamos chamar "pontos abertos", que aparecem nos gráficos das funções racionais.

adaptado de "*Advanced Algebra Trough Data Exploration*"

Funções racionais e gráficos

1. Traça o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$. Indica o domínio, contradomínio e assimptotas.

2. Escreve as expressões analíticas das funções cujo gráfico relativamente ao anterior:

a) se deslocou horizontalmente 2 unidades para a direita.

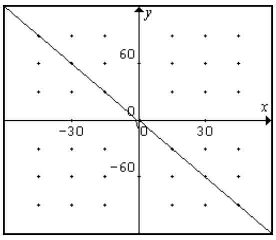
b) se deslocou verticalmente duas unidades para cima.

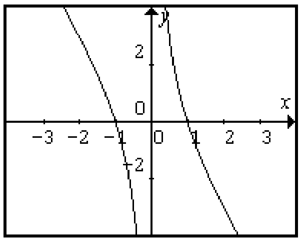
3. Confirma os teus resultados com a calculadora

4. Pensa no gráfico da função $y = x$.Traça o gráfico de $y = \frac{1}{x} + x$?

5. Altera o rectângulo de visualização de modo a obteres na calculadora um gráfico que pareça uma recta. Qual é a equação dessa recta? Tenta encontrar uma justificação para o resultado encontrado.

6. Os dois gráficos que se seguem dizem respeito à mesma função, em rectângulos de visualização diferentes. Qual será a expressão analítica desta função?





Sugestão:

a) Observa e regista os aspectos que te parecem mais significativos em cada um dos gráficos.

b) Escreve uma equação para a recta que parece estar representada no primeiro gráfico.

c) Escreve uma expressão de uma função com uma assimptota vertical $x = 0$.

d) Escreve uma expressão analítica de uma função polinomial com os zeros que observas no segundo gráfico.

e) Escreve uma expressão analítica para a função representada.

f) Confirma com a calculadora a tua função nos dois rectângulos de visualização considerados. Se não estiver bem tenta perceber porquê e corrige a expressão analítica da função.

adaptado de "*Advanced Algebra Trough Data Exploration*"

Comentário

Na primeira parte desta proposta pretende-se destacar a relação entre os deslocamentos efectuados nos gráficos e as expressões analíticas das funções resultantes, salientar que, tal como $y=\frac{1}{x}$, também os outros gráficos obtidos continuam a ser hipérboles e referir o facto de $y=\frac{1}{x}+x$ também representar uma hipérbole.

a) No primeiro caso o gráfico parece a recta de equação $y = -2x$. No segundo caso observa-se uma assimptota vertical, $x = 0$ e dois zeros, $x = \pm 1$; b) $y = -2x$.; c) Por exemplo, $y = \frac{1}{x}$; d) Por exemplo, qualquer expressão do tipo $y = a(x-1)(x+1)$; e) Por exemplo $y = \frac{a(x-1)(x+1)}{x}$ ou $y = -2x + \frac{b}{x}$. O valor de **a** e **b** podem ser calculados por comparação das duas expressões.

Considera as funções $y_1 = \frac{2x-5}{x-3}$, $y_2 = \frac{x+7}{3x+2}$

1. Escreve as expressões analíticas de y_1 e y_2 na forma $y = a + \frac{b}{cx+d}$
2. Representa graficamente as funções.
3. Relaciona o parâmetro **a** com as equações das assimptotas do gráfico da função.

Representa graficamente $f(x) = \frac{x-3}{x+3}$.

1. Escreve uma equação para cada uma das assimptotas ao gráfico de f.

2. Escreve uma expressão, d_1 , que dê a distância de qualquer ponto do gráfico à assimptota vertical. Escreve também uma expressão, d_2 , que dê a distância de qualquer ponto do gráfico à assimptota horizontal.

3. Considera a função $h = d_1 \times d_2$ e preenche a tabela

x	0	–1	–2	–3	–5	–10	–20
h							

4. Explica o significado dos resultados observados na tabela anterior.

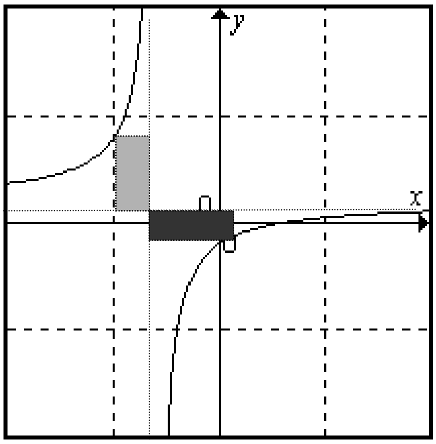
Comentário

Esta actividade tem como principal objectivo referir o facto de ser constante o produto das distâncias de qualquer ponto da hipérbole às assimptotas.

Distância de qualquer ponto do gráfico à assimptota vertical: $d_1 = |x + 3|$

Distância de qualquer ponto do gráfico à assimptota horizontal: $d_2 = \left| \frac{6}{x+3} \right|$

Neste caso, h = 6. Com a questão 4 espera-se que os alunos consigam referir, por exemplo, que os rectângulos têm a mesma área, como se pode observar no gráfico junto.



1. O gráfico da função y = **Erro!**tem a assimptota $x = 3$. Multiplica a função por outra de modo que o gráfico da função produto seja:

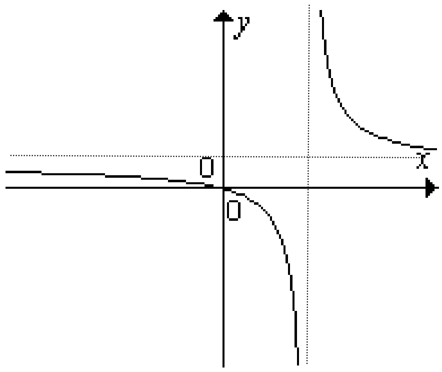
a) uma recta horizontal com um "ponto aberto" para $x = 3$.

b) uma recta oblíqua relativamente aos eixos, com um "ponto aberto" para $x = 3$.

c) uma parábola, com um "ponto aberto" para $x = 3$.

2. Procede do mesmo modo relativamente à função y = **Erro!**, de modo a obteres uma função cujo gráfico tenha um ponto aberto para $x = 2$ em vez de uma assimptota vertical.

A hipérbole da figura junta tem por assimptotas as rectas $x = 2$ e $y = 1$.



1. Indica, justificando, qual das expressões pode definir $f(x)$:

a) $1 - \dfrac{2}{x-2}$ **b)** $\dfrac{x}{2-x}$

c) $1 + \dfrac{2}{x-2}$ **d)** $\dfrac{x-3}{x-2}$

2. Determina, recorrendo a intervalos, o conjunto solução das condições:

a) $f(x)\,(x^2 - 4) \geq 0$ b) $\dfrac{|x|-1}{f(x)} \leq 0$

3. Determina a e b reais, sabendo que $h(x) = f(x + a) + b$ é uma função ímpar.

4. Desenha os gráficos das funções g e i tais que $i(x) = |f(x)|$ e $g(x) = f(|x|)$ e indica para essas funções:

a) os intervalos de monotonia

b) as assimptotas dos seus gráficos

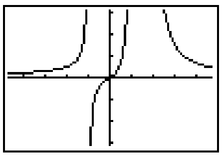
c) os extremos relativos

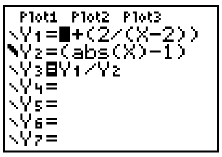
Comentário

Com a questão 1. pretende-se que os alunos, sem recorrer à calculadora, utilizem argumentos que lhes permitam relacionar a expressão analítica com o gráfico. Podem analisar os zeros e com isso excluir a alínea d), ter em conta a assimptota horizontal e excluir a alínea b), e depois utilizar uma estratégia (por exemplo, atribuir o valor zero a x) que lhes permita optar entre a) e c).

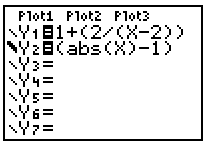
Relativamente ao ponto 2. não se pretende uma resolução analítica. Os alunos, recorrendo à calculadora, poderão utilizar vários processos, nomeadamente:

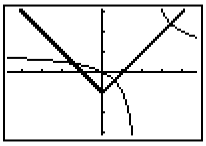
- analisar o gráfico do quociente





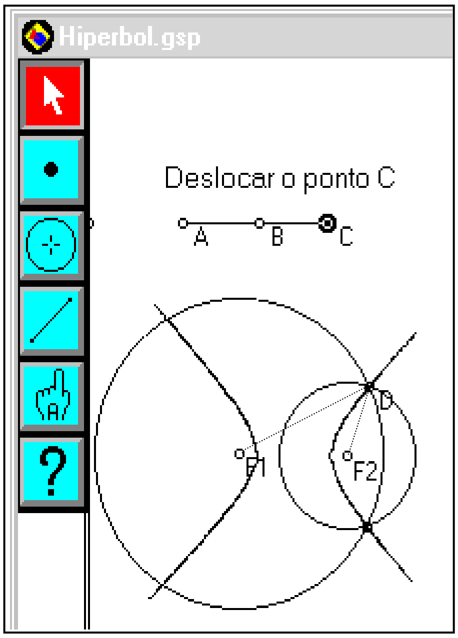
- sobrepor os gráficos das funções que se encontram no numerador e no denominador e elaborar a partir daí um quadro de sinais que os auxilie a indicar o conjunto solução.





Hipérboles com o Sketchpad

Com o programa Sketchpad (ou Cabri II), constrói uma hipérbole.



1. Marca os pontos F_1 e F_2, focos da hipérbole.

2. Traça uma recta e sobre ela o segmento AB, de modo que $\overline{AB} < \overline{F_1F_2}$

3. Desenha um ponto C sobre a recta e constrói os segmentos AC e BC.

4. Constrói os círculos de centros em F_1 e F_2 e raios respectivamente com as medidas de [AC] e de [BC].

5. Constrói os pontos de intersecção dos dois círculos.

6. Desloca o ponto C para um e outro lado de [AB] e observa o lugar geométrico dos pontos de intersecção das duas circunferências.

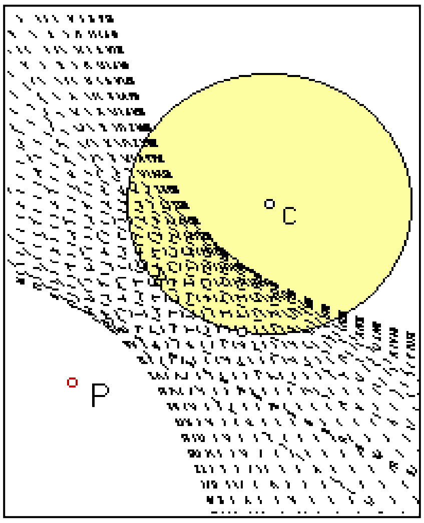
7. Verifica que se trata de facto de uma hipérbole observando que, de acordo com a construção, $\overline{DF_1} - \overline{DF_2} = \overline{AC} - \overline{BC} = \overline{AB}$, no caso geral $\left|\overline{DF_1} - \overline{DF_2}\right| = \overline{AB}$.

Hipérbole com dobragens

Tal como a elipse também a hipérbole pode ser obtida com dobragens de uma folha de papel.

Faz dobragens sucessivas de uma folha de papel onde foi previamente traçada uma circunferência de centro C e um ponto P exterior ao círculo.

Dobra sucessivamente a folha, com paciência, fazendo coincidir o ponto P com "cada" ponto da circunferência. Como resultado verás aparecer uma hipérbole.



Comentário

Depois do estudo das funções racionais, introduzidas as hipérboles que são gráficos de funções, uma actividade como a da dobragem com uma folha de papel ou uma construção num programa de geometria, é uma boa oportunidade para falar da hipérbole como lugar geométrico.

Com a mesma construção pode obter-se a elipse fazendo $\overline{AB} > \overline{F_1F_2}$ e deslocando o ponto C entre A e B.

No exemplo tratado optámos por utilizar o Geometer'sketchpad, mas poderíamos ter utilizado um outro programa de geometria, por exemplo o Cabri II.

O programa do 11º ano não prevê o estudo completo das equações da hipérbole.

Resolução de problemas envolvendo as funções anteriores tanto sob os aspectos analíticos como numéricos e gráficos

A soma de dois números é 50 e o seu produto é 25.
Verifica graficamente que o problema tem solução, ou seja, que existem dois números nestas condições.
Determina a soma dos inversos desses números.

Comentário

Fazendo $x+y = 50$ e $xy = 25$, podemos introduzir numa calculadora as funções

$y = 50 - x$ e $y = \frac{25}{x}$ e verificar que os gráficos das duas funções se intersectam.

Como $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$, então $\frac{x+y}{xy} = \frac{50}{25} = 2$

Fabricante de calculadoras

Um fabricante de calculadoras verificou que para a nova calculadora a lançar no mercado, o custo médio, em contos, de uma calculadora por cada x calculadoras produzidas, era dado pela função $C(x) = \frac{5000+5x}{x}$.

1. Se ele só produzir uma calculadora, qual o preço desse exemplar?

2. Quantas calculadoras terá ele que produzir para que o custo seja inferior a 10 contos?

3. Atendendo a que há uma grande procura de calculadoras e por isso é necessário produzir uma grande quantidade, de que valor se aproxima o custo de cada calculadora?

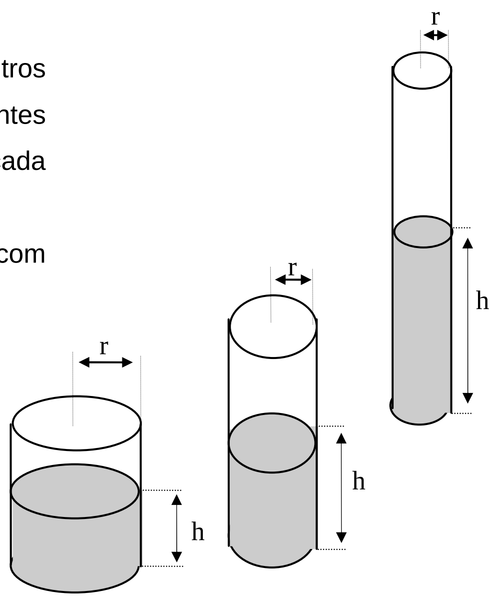
4. A expressão $\frac{5000+5x}{x}$ pode ser escrita na forma $5 + \frac{5000}{x}$. Relaciona esta expressão com o preço de custo de cada calculadora.

Comentário

Caso a função seja representada graficamente, é necessário que os alunos não esqueçam qual o domínio da função. É natural que o gráfico seja apresentado em IR^+ como se a variável fosse contínua, mas nas respostas às perguntas formuladas é necessário não esquecer que o domínio da função é IN.

O volume constante

1. Num recipiente de forma cilíndrica coloca um líquido até um altura h.
Coloca o mesmo volume (**V**) de líquido noutros recipientes com a mesma forma mas diferentes bases. Qual é altura do líquido em cada recipiente?
Investiga como varia a altura (**h**) do líquido com o raio (**r**) da base do recipiente?



Sugestão:
Simula a experiência. Escreve a expressão que te permite relacionar a altura (h) de um determinado volume (V) de líquido com o raio da base. Representa graficamente a função ***h***. Discute entre que valores pode variar a altura do líquido.

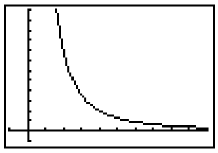
2. Experimenta com recipientes de outras formas.

Comentário

Nesta altura a simulação da experiência pode ser baseada na fórmula matemática do volume. Seja **V** o volume dado então h = $\frac{V}{\pi r^2}$.

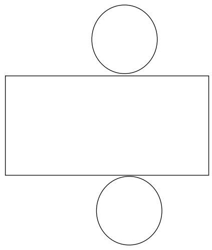
Os alunos podem atribuir a **V** um determinado valor e estudar a função obtida.

Por exemplo, se V = 100, h = $\frac{100}{\pi\ r^2}$. O gráfico mostra claramente a relação de proporcionalidade inversa entre r^2 e h pois $r^2 \times h = \frac{100}{\pi}$.



As peças cilindricas

Uma empresa de alumínio pretende fabricar uma peça de forma cilíndrica, com a capacidade de 500 cm^3. As tampas superior e inferior são feitas de alumínio especial que custa 5$00 por centímetro quadrado. A superfície lateral é feita de material mais barato que custa 2$00 por centímetro quadrado.



1. Exprime o custo (C) da peça em função do raio (r) da base.

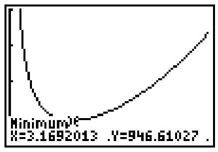
2. Faz uma representação gráfica da função C = C(r).

3. Qual o valor de r para o qual a peça é mais barata, indica o valor aproximado ao milímetro?

4. Qual o custo mínimo da peça?

<u>Comentário</u>

$h = \frac{500}{\pi r^2}$; $c(r) = 10\pi r^2 + \frac{2000}{r}$. A peça é mais barata quando o raio for cerca de 32mm e o preço de fabrico será de 947$00.



Compostos ácidos

Juntou-se ácido puro a 30 gramas de uma substância 30% ácida. Seja x o número de gramas de ácido puro adicionado.

1. Determina uma expressão que represente a concentração do composto formado.

2. Representa graficamente a função da alínea anterior (tem em atenção o domínio).

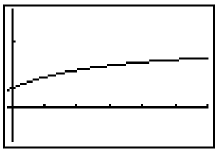
3. Entre que valores varia a função?

4. Qual a quantidade de ácido puro que devemos adicionar para produzir uma solução 75% ácida.

<u>Comentário</u>

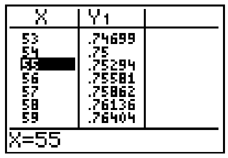
Como 30g × 0.3 = 9g a concentração é dada pela expressão $C(x) = \dfrac{9+x}{30+x}$

Como x representa o número de gramas de ácido adicionado, só faz sentido representar esta função no conjunto dos números reais positivos incluindo o zero, logo a

representação gráfica da função será 

[–1, 60]×[–0.5, 1.5]

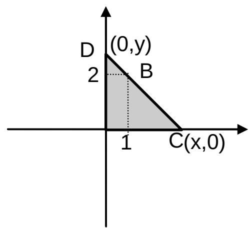
A função varia em $[\frac{3}{10}, 1[$.



Para produzir uma solução 75% ácida, precisamos de juntar 54 gramas de ácido puro.

Áreas e perímetros de triângulos

Seja B, um ponto de coordenadas (1, 2). A cada ponto C(x, 0) do eixo OX, com x >1, faz corresponder um ponto D (0, y) do eixo OY, de modo que B, C e D sejam colineares.



1. Exprime y em função de x.

2. Mostra que a área $A(x)$ do triângulo ODC é dada por

$$A(x) = \frac{x^2}{x-1}, \; x > 1$$

3. Representa, o gráfico de $A(x)$ e indica:

a) para que valor de x é que A é mínima.

b) o maior intervalo onde A é crescente e o maior intervalo onde é decrescente.

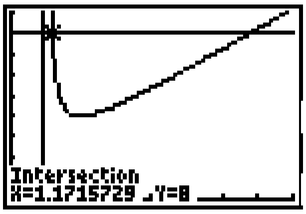
4. Determina, com aproximação ás centésimas, o perímetro do triângulo ODC que tem área mínima.

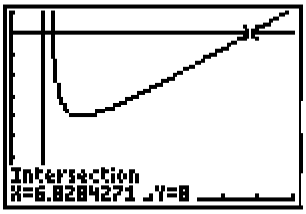
5. Determina para que valores de x, $A(x) \leq 8$

Comentário

Seja y = b e x = a. A recta que contém os três pontos é $y = -\frac{b}{a}x$ + b. Como (1, 2) pertence à recta então b = $\frac{2a}{a-1}$, logo $y = \frac{2x}{x-1}$.

Para responder à questão 5, cuja solução exacta é o conjunto $[4-2\sqrt{2}\,,\ 4+2\sqrt{2}\,]$, os alunos poderão resolver analiticamente ou recorrer à representação gráfica da função $A(x)$ e da recta y = 8.





Rectângulos de área 50

Considera os rectângulos de área 50 cm^2. Seja P a função que a cada x (medida da base) faz corresponder o perímetro do rectângulo.

x

1. Verifica que:

a) $P(x) = 2x + \frac{100}{x} \quad \wedge x > 0$

b) $P(x) \geq 4\sqrt{50}\,,\ \forall x \in R^+$

2. Representa o gráfico da função P e indica:

a) os intervalos de monotonia de P

b) as dimensões do rectângulo que tem perímetro mínimo.

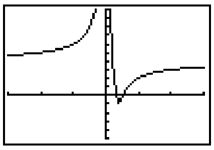
Comentário

As resoluções gráfica e analítica devem aparecer relacionadas, pelo que os alunos devem também ser solicitados a resolver questões por via analítica. É o que se pretende com a alínea 1.b)

Resolve a inequação $|5 - \frac{2}{x}| < 1$ por meio de dois processos gráficos distintos e por um processo analítico.

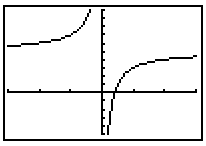
Comentário

Um processo é fazer o gráfico da função $y = |5 - \frac{2}{x}| - 1$.

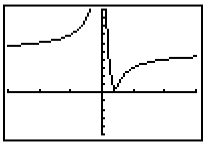


[–3; 3]×[–5; 10]

Apesar deste não ser um gráfico completo, sabe-se que os zeros existentes estão visíveis porque já foi estudada a família de funções do tipo $y = a + \frac{b}{cx+d}$. Logo pode-se pensar no gráfico de $y = 5 - \frac{2}{x}$ e no de $y = |5 - \frac{2}{x}|$ e finalmente no de $y = |5 - \frac{2}{x}| - 1$



[–3; 3]×[–5; 10]



[–3; 3]×[–5; 10]

De seguida, utilizando um dos processos possíveis da calculadora, *Trace* e *Zoom*, *Tabelas* ou *Cálculo*, podemos determinar os zeros que são $x = 0{,}5$ e $x = 0.(3)$ ou seja $\frac{1}{3}$

Em geral a calculadora permite passar de uma dízima infinita periódica para a representação sob a forma de fracção. Pode-se chamar a atenção dos alunos, que para terem a certeza que $\frac{1}{3}$ é zero da função, deverão substituir esse valor na função. Outro processo é fazer o gráfico das funções $y_1 = |5 - \frac{2}{x}|$ e $y_2 = 1$, determinar os pontos de intersecção das duas funções e a partir daí indicar a solução.

Operações com funções

As funções *f* e *g* estão definidas respectivamente por $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

1. Determina o domínio das funções *f* e *g*.

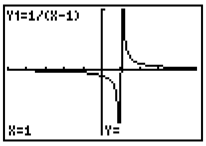
2. Representa graficamente, no mesmo referencial, as funções *f* e *g*.

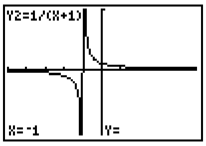
3. Determina as expressões de $(f + g)$, $(f - g)$, $(f \times g)$. Representa estas funções graficamente e determina os respectivos domínios.

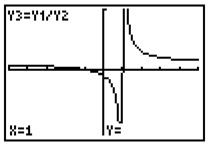
4. Repete o exercício com outras funções de domínios diferentes. O que se pode observar relativamente aos domínios das funções soma, diferença, e produto?

Comentário

Depois dos alunos terem tirado conclusões para os domínios da soma e do produto de funções, podemos levá-los a analisar a situação do quociente. Este é um exercício de grau de dificuldade superior em que os alunos recorrendo à tabela poderão observar o domínio da função que não é visível com o gráfico. Este tipo de exercícos dá significado à necessidade de relacionar a expressão analítica com o gráfico das funções.







Indica, justificando o valor lógico de cada uma das afirmações:

1. a soma de duas funções crescentes é uma função crescente.

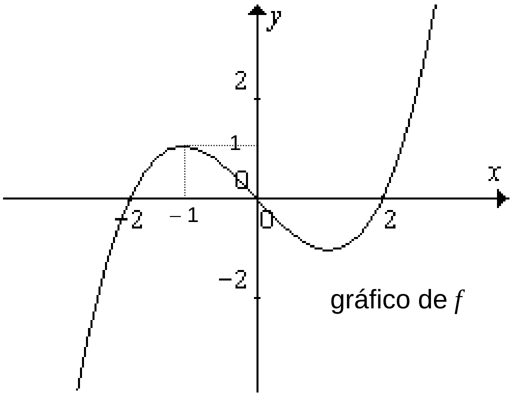
2. a soma de duas funções decrescentes é uma função decrescente.

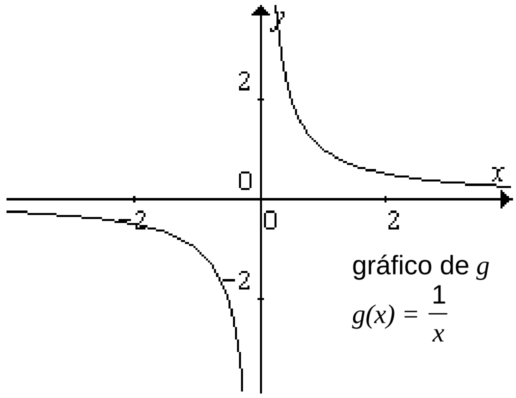
3. o produto de duas funções crescentes é uma função crescente.

Comentário

É falso o ponto 3., por exemplo $y_1 = 2x$, $y_2 = x$ e $y_3 = y_1 \times y_2$ não é monótona.

Os gráficos que se seguem representam, respectivamente as funções f e g, reais de variável real.





1. Determina:

a) $(g + f)(-1)$ **b)** $(g \circ f)(-1)$

2. Determina o domínio das funções:

a) $\dfrac{f}{g}$ b) $g \circ f$

3. Representa graficamente as funções $|g(x)|$ e $(g|x|)$. Justifica que as funções anteriores são idênticas.

4. Sabendo que f é uma função polinomial de grau 3, mostra que $(f \circ g)(x) = \dfrac{1-4x^2}{3x^3}$

para qualquer x pertencente ao domínio de $f \circ g$.

5. Resolve, graficamente, as condições:

a) $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$ **b)** $g(x) \leq x$

Comentário

Os exercícios anteriores devem ser abordados quer numa perspectiva gráfica quer analítica relacionando sempre as duas representações.

Investigar transformações em alguns gráficos

1. Representa graficamente no mesmo referencial as seguintes funções

$f(x) = x + 1$ $\qquad g(x) = f(\frac{1}{x})$ $\qquad h(x) = \frac{1}{f(x)}$

2. Determina o domínio de cada uma das funções anteriores.

3. Compara os três gráficos. Quais os pontos dos gráficos de ***g*** e de ***h*** que se mantêm invariantes relativamente ao gráfico de ***f***?

4. Repete o exercício agora com as funções

$m(x) = x^3 – 1$ $\qquad n(x) = m(\frac{1}{x})$ $\qquad p(x) = \frac{1}{m(x)}$

5. Volta a repetir com as funções

$a(x) = 3$ $\qquad b(x) = a(\frac{1}{x})$ $\qquad c(x) = \frac{1}{a(x)}$

6. Regista as tuas conclusões acerca das transformações sofridas pelas funções f, m e a?

Comentário

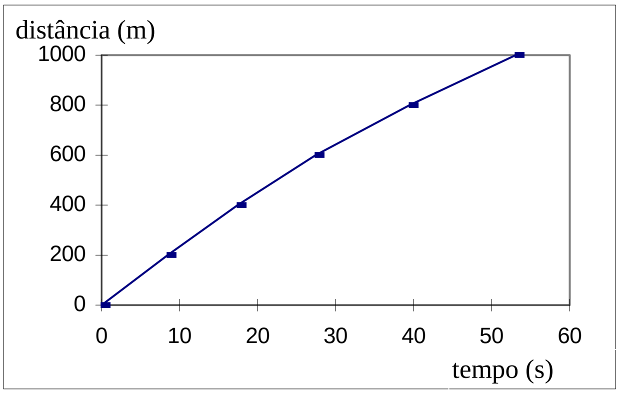
Muitas vezes são feitas confusões entre as transformações sofridas pelo gráfico de uma função ***f*** quando se representa $f(\frac{1}{x})$ e $\frac{1}{f(x)}$. No primeiro caso trata-se da função composta, no segundo caso trata-se da função inverso aritmético de ***f***. Muitas vezes esta confusão resulta do facto de ser vulgar partir-se da função $f(x) = x$ e neste caso $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{f(x)}$. É oportuno referir que todos os números reais no intervalo $]0, 1]$ têm o seu inverso em $[1, +\infty[$ e vice-versa.

Quando se comparam os gráficos de uma função $f(x) = ax + b$ com $f(\frac{1}{x})$ e $\frac{1}{f(x)}$ percebemos que os pontos que se mantêm invariantes entre $f(x)$ e $f(\frac{1}{x})$ são os pontos de abcissa ± 1 e quando comparamos os gráficos de $f(x)$ e $\frac{1}{f(x)}$ são os pontos de abcissa $\frac{1-b}{a}$ e $\frac{-1-b}{a}$ que não variam. É ainda de estudar o caso da função constante, verificando que a composta da função constante com qualquer função se mantém invariante, com excepção dos pontos que deixam de pertencer ao domínio da composta. Os alunos poderão verificar este facto recorrendo à tabela de uma calculadora gráfica, já que em muitos casos o gráfico não dá indicações sobre o domínio da função. Depois de estudarem a função inversa de f, deve ser sublinhado que f^{-1} é diferente de $\frac{1}{f}$.

Noção de taxa média de variação; cálculo da taxa média de variação

A corrida

Numa corrida de 1000 metros organizada na escola o Pedro fez os tempos indicados no gráfico.



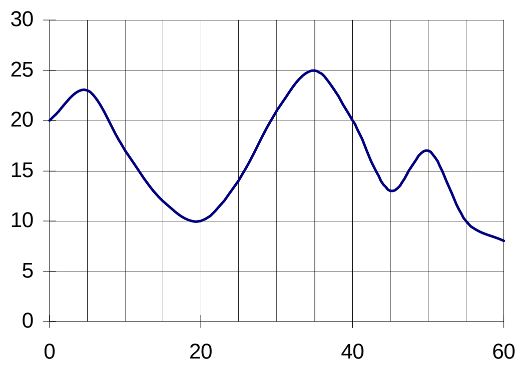
Distância em metros	Tempo em segundos
0	0
200	8.5
400	17.5
600	27.5
800	39.5
1000	53

1. Qual foi a velocidade média do Pedro no total do percurso?

2. Qual foi a velocidade média em cada um dos intervalos considerados?

3. Quando revelou o Pedro sinais de cansaço?

Observa o gráfico



Indica:

1. um intervalo onde a taxa média de variação seja positiva.

2. um intervalo onde seja negativa.

3. um intervalo onde seja nula

4. um intervalo onde a taxa média de variação seja negativa e a função não seja monótona.

Comentário

Com esta actividade os alunos devem observar a relação existente entre a taxa de variação média e a monotonia da função. Deve-se salientar o facto de, por exemplo, uma taxa de variação negativa não significar que a função é decrescente nesse intervalo, embora o contrário seja verdadeiro. Do mesmo modo a uma taxa de variação média nula pode não corresponder um intervalo onde a função seja constante.

O jogador de ténis

Um jogador de ténis dá uma forte raquetada numa bola elevando-a no ar. A altura da bola, em função do tempo é descrita pela equação $\mathbf{a = 25}\boldsymbol{t} - \mathbf{5}\boldsymbol{t}^2$.

1. Qual é a velocidade média da bola nos seguintes intervalos de tempo:

[1, 2]; [1,5; 2]; [1,8; 2]; [1,95; 2]; [1,99; 2].

2. Qual te parece ser a velocidade da bola **2** segundos após a raquetada?

Verdade ou falso

Indica, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações:

1. Uma função polinomial com taxa média de variação positiva num intervalo $[a,b]$ do seu domínio é crescente nesse intervalo.

2. Uma função polinomial crescente no intervalo $[a,b]$ do seu domínio tem taxa de variação média positiva nesse intervalo.

3. Se uma função racional f tem taxa média de variação negativa em todos os intervalos do seu domínio então f é monótona decrescente.

Interpretação geométrica da taxa de variação
Definição de derivada. Determinação da derivada em casos simples

A bola no plano inclinado

Uma bola desce um plano inclinado. A distância (d), em centímetros, percorrida pela bola em função do tempo (t), em segundos, é dada por $d = 2t^3 + 3t^2 + 4$.

1. Representa graficamente a função d na situação descrita.

2. Determina a velocidade média da bola no 1º segundo de movimento.

3. Qual será a velocidade da bola no instante $t = 2$ segundos?

4. Em que instante terá a bola uma velocidade de 30 cm/s?

5. Constrói o gráfico da velocidade da bola em função do tempo.

Comentário

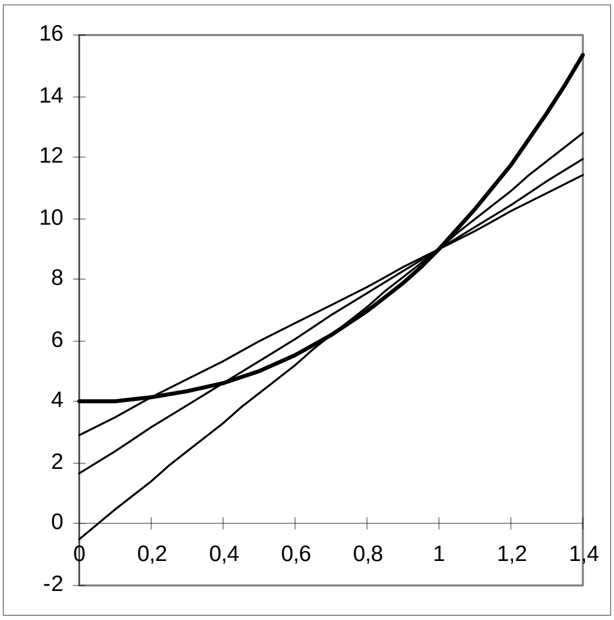
A noção intuitiva de derivada e a noção geométrica da taxa de variação podem ser introduzidas recorrendo a um problema concreto como o do jogador de ténis ou a bola no plano inclinado.

Começando por determinar a velocidade média da bola no primeiro segundo, os alunos devem ser conduzidos a determinar outras velocidades médias agora em intervalos cada vez mais pequenos em que o limite inferior do intervalo se vai aproximando de 1.

Para cada intervalo os alunos podem representar a recta que passa nos pontos cujas abcissas são os extremos do intervalo, percebendo que as rectas secantes tendem para a tangente ao gráfico no ponto de abcissa 1. Nesta altura deve-se relacionar a velocidade média em cada intervalo com o declive da recta, surgindo assim a derivada num ponto como o declive da recta tangente à curva nesse ponto.

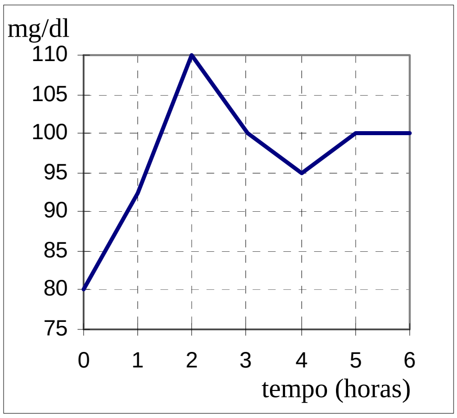
É necessário discutir a diferença entre recta tangente à curva num ponto e recta que intersecta a curva nesse ponto.

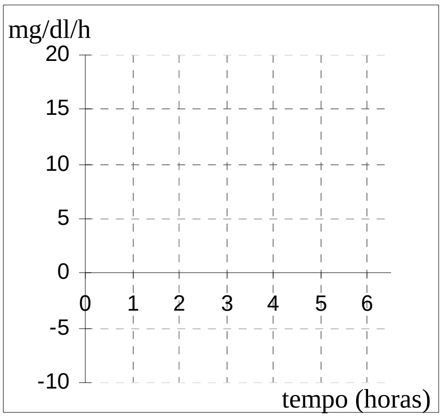
Na Internet existem disponíveis várias simulações relativas à interpretação geométrica do conceito de derivada (ver secção de recursos)



Concentração de açúcar no sangue

Um piloto, durante um voo de 6 horas, foi sujeito a medições de concentração de açúcar no sangue, hora a hora.



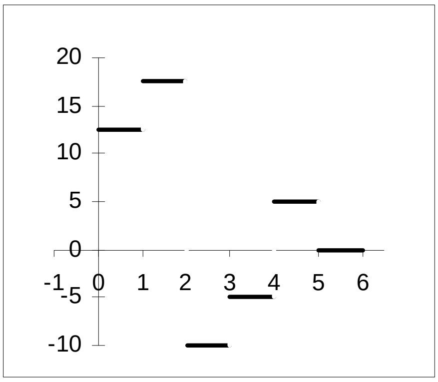


1. Observa os dados e a partir deles constrói, no referencial ao lado, o gráfico das taxas de variação média da concentração de açúcar em cada hora.

2. Indica em que altura a concentração de açúcar cresceu mais rapidamente?

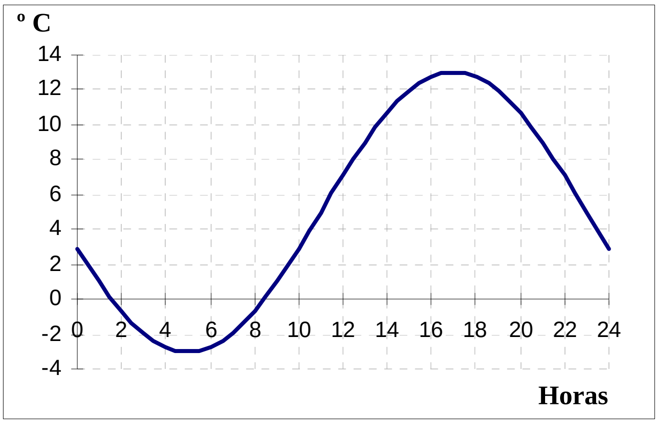
__Comentário__

O gráfico da variação média das concentrações de açúcar será como este, onde a variável independente é o tempo em horas e a dependente a taxa de variação da concentração em mg/dl/hora.



Como varia a temperatura

Observa o gráfico, que descreve a temperatura, em graus centígrados, durante um dia, numa determinada região, em função da hora do dia.



1. A que horas se verificou a temperatura máxima? e a mínima?

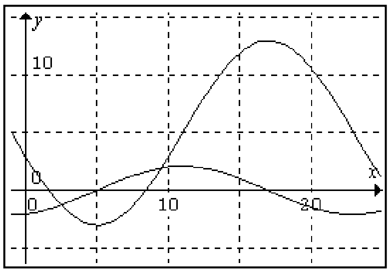
2. Indica os intervalos em que a taxa de variação da temperatura é positiva e os intervalos em que é negativa.

3. Traça tangentes ao gráfico em vários pontos (por exemplo de duas em duas horas), determina o seu declive e esboça o gráfico da função derivada.

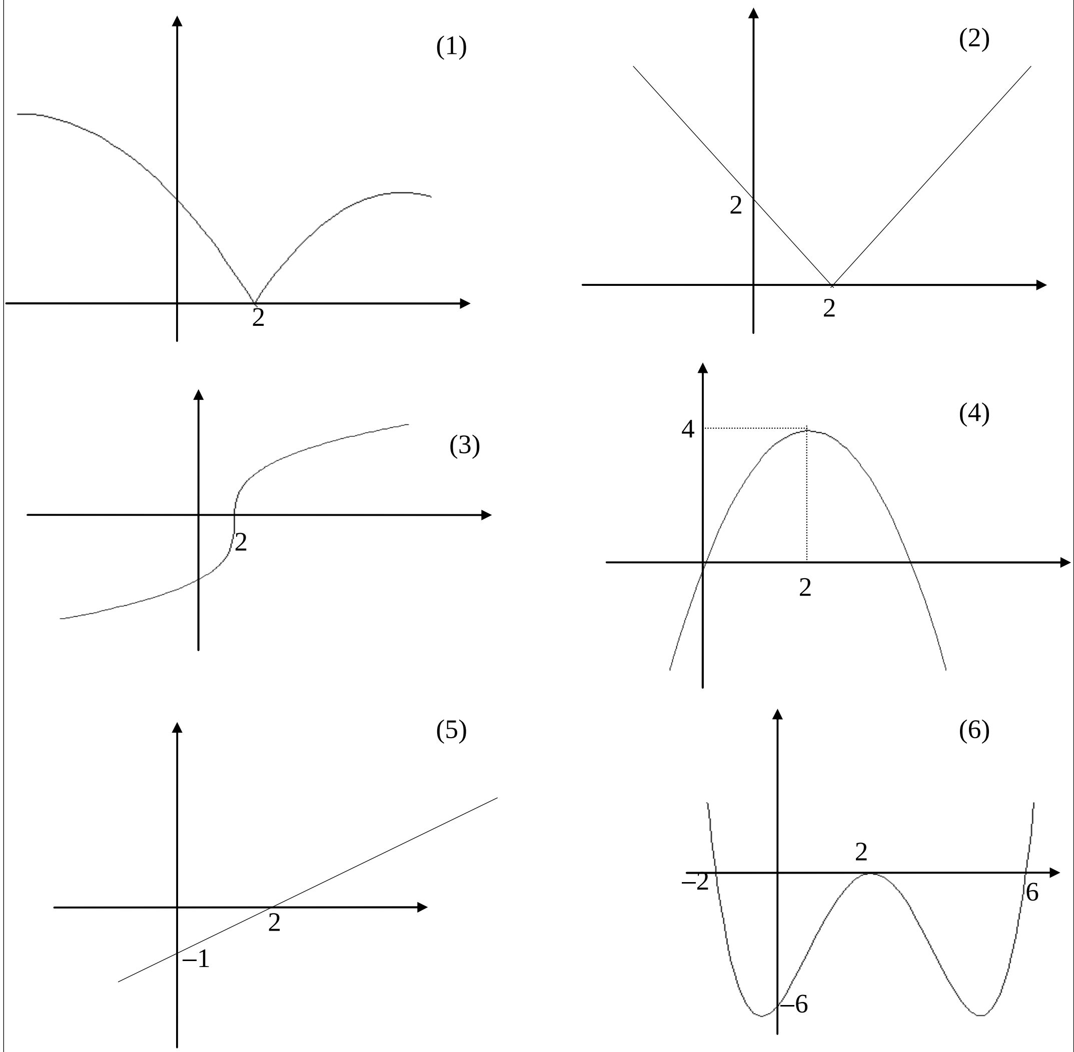
4. Que informação te dá a função derivada relativamente à situação representada?

Comentário

Um problema como este contribuirá para que os alunos clarifiquem a interpretação geométrica do conceito de derivada bem como o seu conceito físico como taxa de variação instantânea. A representação da função e da derivada no mesmo referencial ajudará os alunos a relacionar a monotonia com o sinal da derivada, bem como os máximo e mínimo com zeros da derivada.



Observa os gráficos e indica se as funções são ou não diferenciáveis no ponto de abcissa **2**.Consideramos a função diferenciável num ponto se tiver derivada finita nesse ponto, ou seja se existir a recta tangente ao gráfico da função nesse ponto e essa recta não for vertical.



2. Para as que forem diferenciáveis indica o valor da derivada no ponto indicado.

3. Escreve expressões analíticas para as funções representadas em (2); (4); (5) e (6).

Verdadeiro ou Falso

Indica, justificando, o valor lógico das afirmações:

1. "Se $\frac{f(2)-f(1)}{2-1} < 0$**,** então f é decrescente em $]1, 2[$".

2. "Se $f'(0) = 0$, então f tem um extremo em $x = 0$".

3. "Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in [0, +\infty[$ então f é crescente em em $[0, +\infty[$".

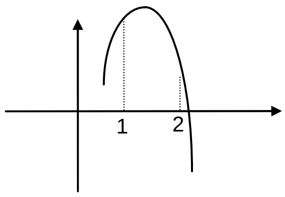
4. "A função $f(x) = |x|$ tem derivada nula em $x = 0$".

5. "A função $f(x) = x^3$ tem um extremo em $x = 0$".

6. "Se f tem um extremo relativo, então f' tem um zero".

Comentário

Todas as afirmações são falsas excepto a 3. Os alunos podem apresentar contra-exemplos sob a forma de representações gráficas ou analíticas.

1. 

2. $y = x^3$

4. A afirmação é falsa. as calculadoras indicam que $f'(0) = 0$. Os alunos devem ser alertados para este facto.

6. $y = |x|$

Considera a função $y = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0 \\ 2x - 1, & x > 0 \end{cases}$

1. Representa-a graficamente.

2. Descreve o gráfico da função indicando nomeadamente o domínio, contradomínio, extremos e intervalos de monotonia.

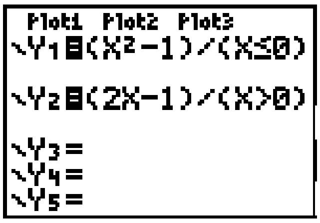
3. Estuda a existência de derivada no ponto de abcissa 0? Que conclusão tiras?

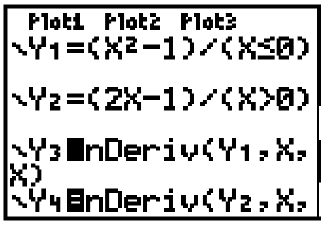
4. Esboça o gráfico da função derivada de y.

Comentário

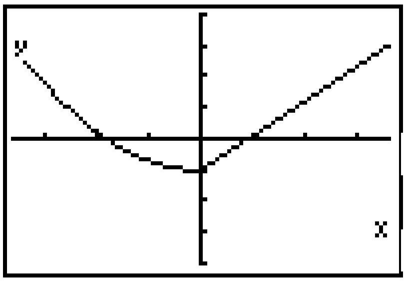
Os alunos podem recorrer à calculadora para traçar ou confirmar os gráficos.

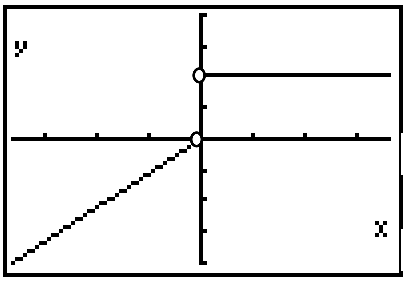
As funções podem ser introduzidas assim.





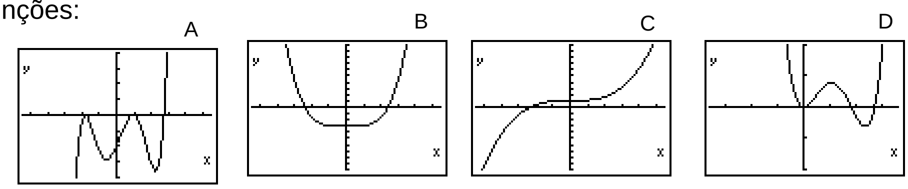
É necessário mais uma vez alertar os alunos para as limitações da calculadora que não assinala o ponto aberto. Esta função é mais um bom exemplo de uma função que tem um mínimo absoluto e a derivada não se anula aí, uma vez que não existe.



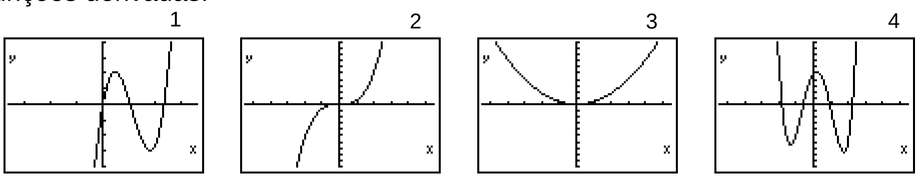


Associe a cada um dos gráficos representados o gráfico da sua função derivada:

Funções:

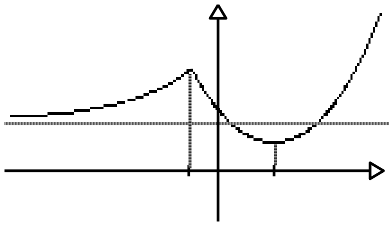


Funções derivadas:

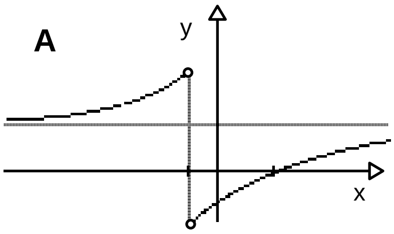


Derivadas e gráficos

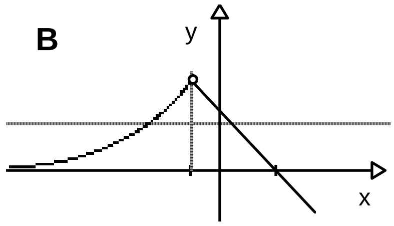
Aqui ao lado tens o gráfico da função h.
Um dos quatro gráficos abaixo é o da derivada de h.
Indica qual é ele, explicando claramente porquê, e porque é que os outros não servem.



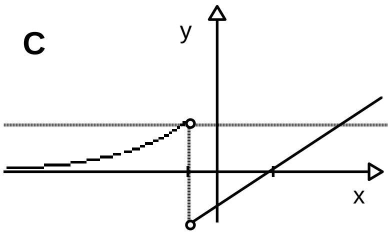
A



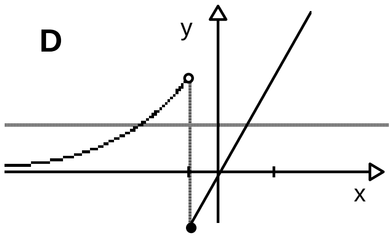
B



C



D



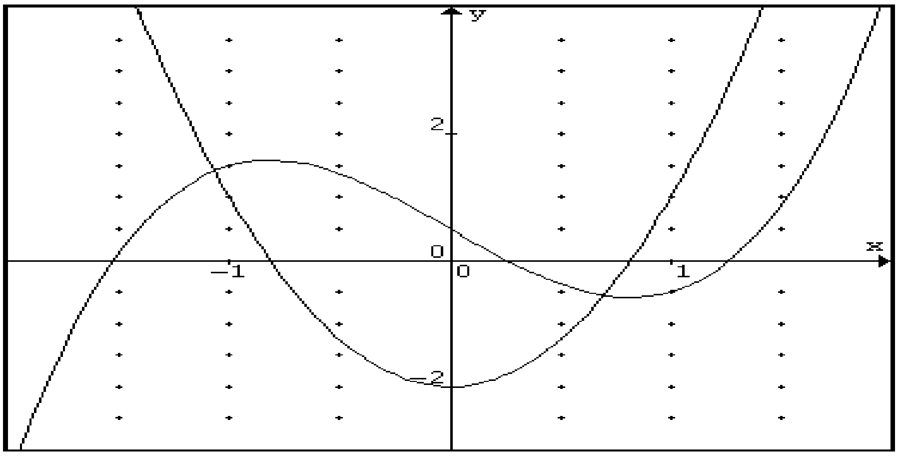
O quadro seguinte apresenta alguns valores e o sinal de ***f*´**, derivada da função ***f***, real de domínio IR.

x	$-\infty$		**2**		**4**		$+\infty$
$f'(x)$		**–1**	//	**+**	0	–	

Domínio de f' é R\{2}
Define graficamente duas funções distintas que tenham f' por derivada.

Qual é qual?

Observa o gráfico. Estão representadas uma função *f* e a sua derivada *f'*. Qual é o gráfico da função e qual é o da derivada? Justifica.



Extremos e derivada

Considera a função $f(x) = x^3 - x$.

1. Representa-a graficamente.

2. Com auxílio da calculadora representa a função derivada de *f*.

3. Observa os gráficos e relaciona os extremos da função *f* com os zeros da derivada (indica valores aproximados às décimas para uns e para outros).

4. Analisa o gráfico e a tabela da função derivada e a partir dos valores da tabela encontra a sua expressão analítica.

5. Utiliza a definição de derivada e confirma a expressão que encontraste anteriormente.

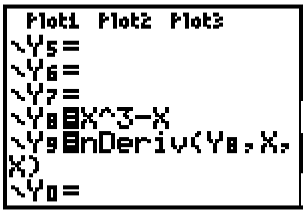
6. Discute agora um processo para determinar os valores exactos dos extremos da função *f* e determina-os.

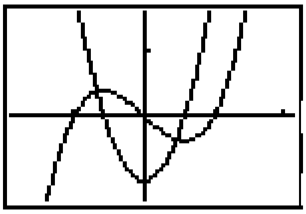
Comentário

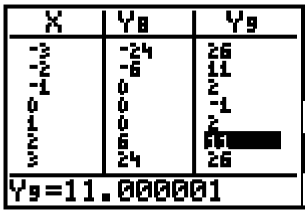
Não se pretende que os alunos conheçam, nesta fase, as regras de derivação, mas sobretudo que percebam o conceito de derivada e a relação existente entre zeros da derivada e extremos de funções polinomiais.

Este exercício pressupõe como indispensável o uso da calculadora e conduz a uma ligação sistemática entre os aspectos gráficos e analíticos.

O cálculo algébrico da derivada deve surgir depois de o aluno ter percebido a situação e tirado conclusões. Assim a calculadora aparece como instrumento de investigação e o cálculo algébrico como confirmação de resultados, seguindo as etapas propostas:







os alunos poderão chegar à expressão da derivada a partir dos dados da tabela, neste caso, nas colunas x e y_9. Sem dificuldade encontrarão o vértice (0, –1), que pode ser confirmado pela simetria dos outros pontos relativamente ao eixo das ordenadas. Com auxílio de outro ponto, por exemplo (1, 2) encontrarão a função $y = 3x^2 - 1$ para derivada de f. Poderão então observar que através desta função é possível calcular os extremos de forma exacta o que não acontecia antes por serem irracionais.

Calculando $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ e imaginando $h = 0$ os alunos encontrarão para a expressão da derivada $y = 3x^2 - 1$. Repare-se que o conceito de limite só será estudado no 12º ano tratando-se aqui apenas de uma abordagem intuitiva. Este é um processo que é demorado e não se vê muito interesse em que seja repetido muitas vezes. Mesmo que a função derivada seja uma expressão do 2º grau completa, os alunos poderão sempre obter a sua expressão, recorrendo à leitura de três pontos, na calculadora e resolvendo um sistema de três equações a três incógnitas. Algumas calculadoras gráficas já dispõem de um programa de resolução de sistemas de equações e nas outras o programa pode ser introduzido. Este processo não deve ser considerado uma técnica para encontrar a expressão da derivada, mas pode ser um exercício em que se relacionam conhecimentos.

Numa calculadora, o gráfico da função

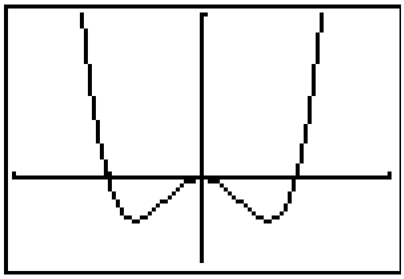
$f(x) = x^2(x-1)(x+1)$ é este.

1. Prova que a função é par.

2. Determina o seu contradomínio.

3. Utiliza a calculadora para determinar $f'(1)$.

4. Determina uma equação da tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa 1.



Comentário

Neste caso não será necessário recorrer à função derivada para determinar o contradomínio da função. Pretende-se que o aluno observe que a função é par e que determine o mínimo correspondente a um dos minimizantes.

Não faz parte do programa do 11º ano a determinação de derivadas de funções polinomiais de grau superior ao terceiro. No entanto, em muitos casos, um aluno que trabalha regularmente com a calculadora gráfica pode utilizar a função derivada da calculadora para determinar a derivada num ponto como acontece no exercício anterior.

Resolução de problemas envolvendo derivadas num contexto de aplicações

Os problemas de aplicação das derivadas a resolver no 11º ano com os alunos, devem essencialmente estar relacionados com o conceito de derivada entendido como uma taxa de variação. Exemplos deste tipo de problemas são os relativos a custos marginais, que tem mais significado para os alunos do terceiro agrupamento, e problemas relativos a velocidades e acelerações, que podem estabelecer algumas ligações com outras disciplinas, nomeadamente com a Física.

A resolução de problemas de optimização, usando derivadas, pelo menos aqueles que nesta altura podem ser resolvidos com os alunos, apresentam em geral pouco interesse. Muitos deles têm vindo a ser resolvidos desde o 10º ano e do ponto de vista da aprendizagem não contribuem para o esclarecimento do conceito de derivada.

O custo marginal

Em economia o custo da produção muitas vezes depende do número de unidades produzidas. A taxa de variação do custo relativamente ao número de unidades produzidas chama-se custo marginal.

Uma empresa de produção de componentes electrónicos estima que o custo da produção de x peças para o fabrico de brinquedos é dado por:

$$C(x) = 0.0001x^2 + 0.05x + 200.$$

1. Completa a tabela e interpreta os resultados

Nº de peças (x)	Custo $C(x)$	Custo médio $\frac{C(x)}{x}$	Custo marginal $C'(x)$
500			
1 000			
1 400			
5 000			

2. Estuda a evolução do custo médio.

3. Faz uma proposta ao fabricante para o número de peças a produzir.

Comentário

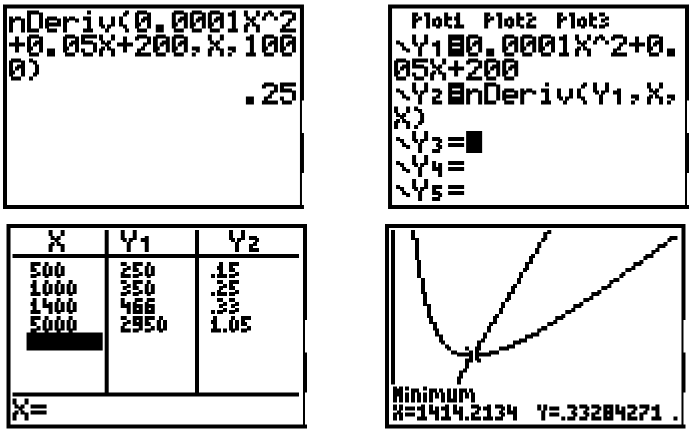
Os problemas relativos a custos marginais são uma aplicação com mais significado para os alunos de Economia. O que se pretende é que os alunos identifiquem o custo marginal com a derivada da função custo e utilizem a calculadora para responder às questões colocadas.

Quando a produção é muito grande os economistas costumam fazer h = 1 na expressão $C'(x) = \frac{C(x+h)-C(x)}{h}$. Sendo assim o custo marginal associado à produção de x

unidades é dado por $C'(x) = C(x+1) - C(x)$, ou seja o custo marginal é o custo de produção da peça número x.

Neste problema quando se pede aos alunos que interpretem os resultados da tabela, pretende-se que observem que o custo aumenta com o número de peças, mas o mesmo não acontece com o custo médio. O custo médio vai diminuindo até um determinado número de peças e depois volta aumentar.

Para preencher a tabela os alunos podem recorrer à função derivada da máquina calculando directamente a derivada nos pontos pedidos a partir do ecrã principal, ou introduzindo y = nDeriv(....) e consultando a tabela.



[0,5000]×[0.2, 0.6]

A representação gráfica do custo médio e do custo marginal ajudará a responder à questão 3.

O custo marginal 2

Um fabricante de pequenos motores estima que o custo da produção de x motores por dia é dado por $C(x) = 100 + 50x + \frac{100}{x}$.

Compara o custo marginal da produção de 5 motores com o custo da produção do 6º motor.

Lançamento de um projéctil

Um projéctil é lançado verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 120m/s. A sua distância ao solo após t segundos é $d(t) = -4.9t^2 + 120t$.

1. Representa o gráfico da função d.

2. Qual é a altura máxima?

3. Em que instante chega ao solo?

4. Qual é a velocidade do projéctil em cada instante?

5. Com que velocidade chega ao solo?

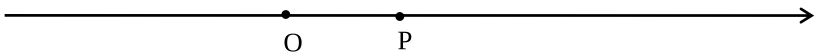
6. A aceleração é a taxa de variação instantânea da velocidade. Qual é a aceleração do projéctil no instante ***t*?**

7. Compara os gráficos da altura, velocidade e aceleração do projéctil.

Posição de um ponto sobre uma recta

O ponto **P** move-se sobre a recta **r** durante um certo intervalo de tempo. A sua posição em relação ao ponto O, em função do tempo é dada pela equação $d(t) = t^3 - 21t^2 + 72t + 70$. Uma posição –5 significa que o ponto se encontra 5 unidades à esquerda de O , + 5 significa 5 unidades à direita de O.

O ponto P move-se durante exactamente 20 segundos.



1. No instante 0 em que posição se encontra o ponto P? E no instante 20?

2. Qual é a distância máxima do ponto P a O? Em que instante se verifica? Está à direita ou à esquerda de O? Indica o valor exacto.

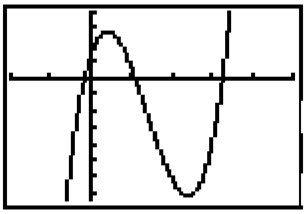
3. Indica exactamente os intervalos de tempo em que a partícula se desloca para a esquerda e para a direita sobre a recta r.

4. Em que instantes é zero a velocidade do ponto? Que significado têm estes zeros?

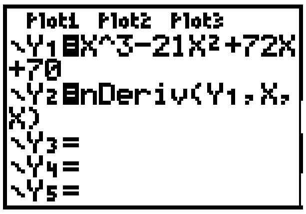
5. Representa graficamente a posição do ponto e a velocidade no intervalo de tempo considerado.

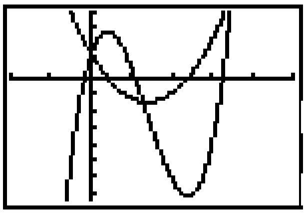
Comentário

É natural começar por introduzir na calculadora a função ***d***, com a intenção de a estudar a partir de uma representação gráfica, mas sem a preocupação de a visualizar no seu domínio que é o intervalo $[0, 20]$. Depois de algumas experiências, é possível ter uma representação como a que se apresenta no primeiro gráfico. A velocidade pode ser obtida directamente com a calculadora a partir da função derivada.



[–10, 25]×[–370, 200]





Para responder ao ponto 5 desta questão, pretende-se que os alunos reproduzam no seu caderno uma representação gráfica da função no domínio considerado, $[0, 20]$.

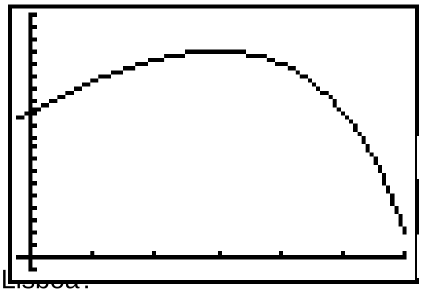
Temperatura do ar

A evolução da temperatura do ar em Lisboa entre as 0 e as 24 horas do dia 1 de Fevereiro foi dada pela função

$f(x)$ = 17 + **Erro!**

com f em graus e x em horas.

Na figura está parte do gráfico desta função obtido numa calculadora gráfica.



1. Qual foi a temperatura máxima nesse dia em Lisboa?

2. E a temperatura mínima?

3. Qual era a taxa de aquecimento do ar às 10 horas da manhã?

Comentário

Este é um exemplo em que os alunos só necessitam de recorrer à função derivada (da calculadora) para responder à questão 3.

Operações com funções: inversão.
Funções com radicais

Uma investigação sobre funções inversas

Seja f, a função real de variável real, tal que $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$.

1. Mostra que $f(x) = 1 - \frac{3}{x+1}$

2. Representa na tua calculadora o gráfico de f e indica:

a) pontos de intersecção com os eixos coordenados;

b) equações das assimptotas;

c) contradomínio;

3. Justifica que existe f^{-1}, função inversa de f e mostra que $f^{-1}(x) = -1 + \frac{3}{1-x}$

4. Representa no mesmo referencial os gráficos de f e f^{-1} .

5. Compara os dois gráficos nos seguintes aspectos:

a) os pontos de intersecção com os eixos coordenados;

b) as assimptotas;

c) o domínio e o contradomínio.

Tira conclusões.

6. Desenha no mesmo referencial os gráficos de $y = x$, de f e de f^{-1} . Que podes observar sobre os gráficos de f e de f^{-1} relativamente ao gráfico da recta $y = x$?

7. Repete este exercício para outras funções da família $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $a, b, c, d \in$ IR e $c \neq 0$

Das funções que se seguem indica justificando as que têm inversa. Das que têm inversa, representa no mesmo referencial o seu gráfico e o da função inversa.

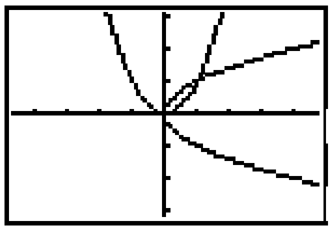
1. $y_1 = -x - 2$ **2.** $y_2 = x^2$ **3.** $y_3 = x^3$ **4.** $y_4 = \dfrac{1}{-x-2}$

5. $y_5 = \dfrac{1}{x^2}$ **6.** $y_6 = \dfrac{1}{x^3}$ **7.** $y_7 = \sqrt{x}$ **8.** $y_8 = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

9. $y_9 = \sqrt{x^2+1}$

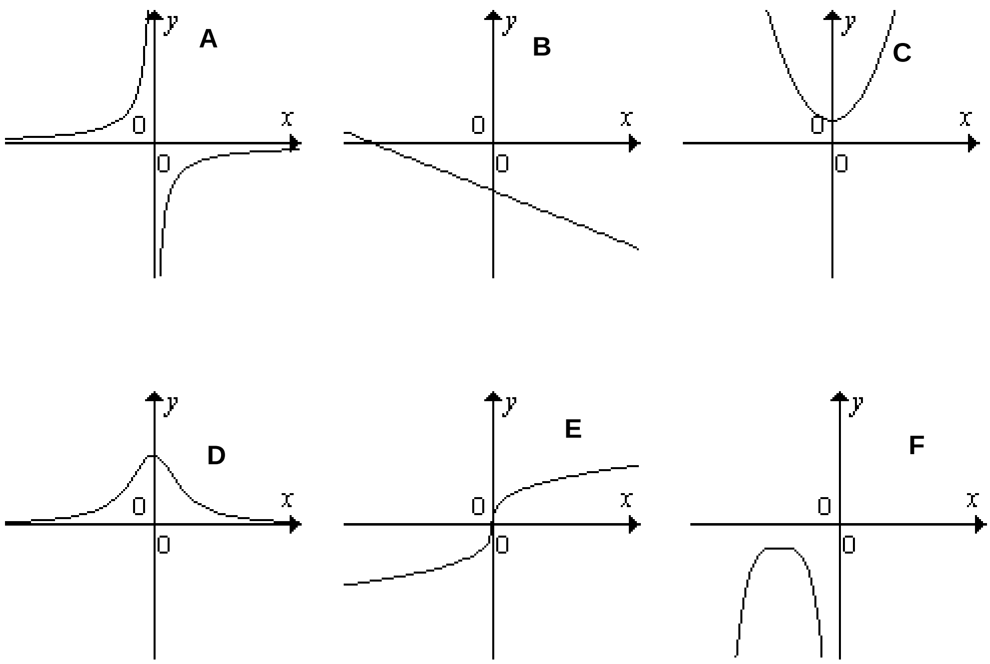
<u>Comentário</u>

Algumas calculadoras fazem correspondências inversas. Por exemplo, se se pedir na calculadora a inversa de $y = x^2$, aparecerá a seguinte representação gráfica



Os alunos precisam de ser alertados para a necessidade de discutir se a função tem ou não inversa.

Das funções cuja representação gráfica se segue, representa o gráfico da respectiva função inversa, caso exista:



Comentário

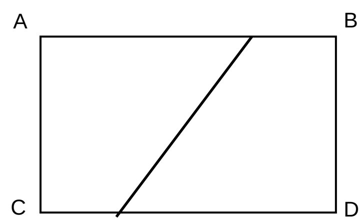
Neste caso não é possível utilizar a calculadora uma vez que os alunos não possuem a expressão analítica da função. Um processo será utilizar papel vegetal e seguir o esquema indicado na pág. 68, outro será considerar a simetria relativamente a $y = x$.

Depois dos alunos efectuarem algumas actividades deste tipo, podem observar a simetria existente entre os gráficos de uma função e da sua inversa relativamente a bissectriz dos quadrantes ímpares. Deve-se relacionar também a existência ou não de inversa com a injectividade da função.

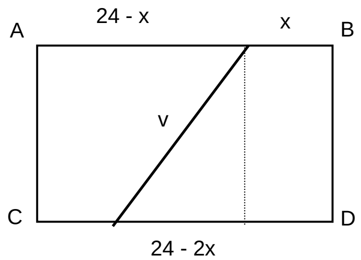
Funções irracionais

Comprimento do vinco

Considera uma folha de papel rectangular de comprimento 24 e largura 18. Dobramos a folha de papel de modo que o vértice A coincida com o vértice D e vincamos a folha. Qual o comprimento do vinco?



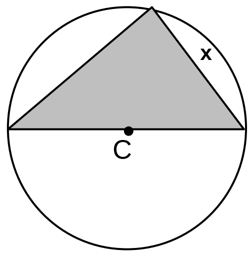
Comentário



Utilizando a folha de papel dobrada é fácil aos alunos verificarem que 24 – x é a hipotenusa de um triângulo rectângulo cujos catetos são x e 18. Então, utilizando o Teorema de Pitágoras, tem-se que $24 - x = \sqrt{18^2 + x^2}$

Triângulo inscrito

Considera o triângulo da figura inscrito numa semi-circunferência de centro C.



1. Justifica que o triângulo é rectângulo.

2. Exprime a área (A) do triângulo em função do raio e do cateto **x**.

3. Qual deve ser o raio da circunferência para que o triângulo tenha área 10 e um cateto seja o dobro do outro?

4. Se o raio for igual a 5, qual é a maior área do triângulo inscrito?

__Comentário__

2. $A(x) = \dfrac{x\sqrt{4r^2 - x^2}}{2}$

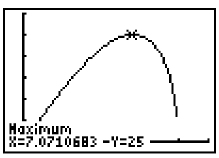
3. A = x^2 . Se A = 10 então $x = \sqrt{10}$

$(2r)^2 = (2x)^2 + x^2 \Leftrightarrow 4r^2 = 4x^2 + x^2 \Leftrightarrow 4r^2 = 5x^2$, então r = $\sqrt{\dfrac{5}{4}x^2}$. Se x = $\sqrt{10}$, então

r = $\sqrt{\dfrac{5}{4}\times 10} \Leftrightarrow$ r = $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

4. Seja b o outro cateto. $10^2 = b^2 + x^2$, então b = $\sqrt{100 - x^2}$

$$A = \frac{b \times x}{2}, \text{ então } A = \frac{x\sqrt{100 - x^2}}{2}.$$



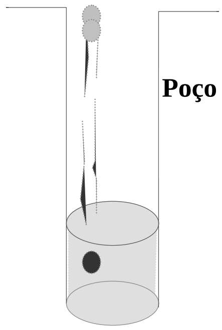
[−1, 12]×[−1, 30]

Pode-se procurar o máximo da função, utilizando uma calculadora gráfica. Esta função está definida no intervalo [0, 10] apesar da representação gráfica poder sugerir um outro domínio, o que acontece muitas vezes quando se trabalha com funções irracionais.

Som e distâncias

Para medir a altura de um poço o João deixou cair uma pedra e mediu o tempo que decorreu desde esse momento até ouvir o som da pedra a bater na água. Para fazer os cálculos considerou as seguintes funções:

$$t_1 = \sqrt{\frac{e}{4{,}9}} \qquad \text{e} \qquad t_2 = \frac{e}{340}$$



em que t_1 representa o tempo (em segundos) que a pedra demorou a chegar à água e t_2 o tempo (em segundos) que o som demorou desde o momento em que a pedra bateu na água até ao ouvido do João, em função da profundidade (***e***) .

1. Exprime o tempo total (***t***)em função do espaço (***e***) e representa graficamente a função encontrada.

2. Observa o gráfico e preenche a tabela seguinte:

profundidade (***e***)	0	5	20	25	45	50
tempo (***t***)						

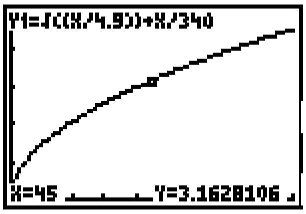
3. A partir da tabela calcula as taxas de variação média para o tempo entre os 0 e 5 metros, os 20 e 25 metros e os 45 e 50 metros. O que acontece à taxa à medida que a profundidade aumenta?

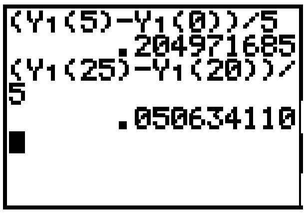
Descreve o melhor possível como varia o tempo necessário para ouvir o som da pedra na água com a profundidade do poço.

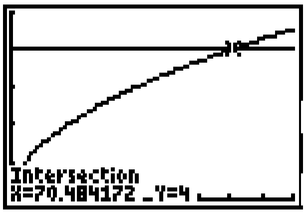
4. A que profundidade se encontra a água num poço sabendo que o tempo decorrido desde o momento que se lançou a pedra até ouvir o som foi de 4 segundos?

<u>Comentário</u>

Os estudantes podem introduzir a função na calculadora e depois no ecrã principal determinar imediatamente as taxas de variação média pedidas em 3.







Apenas deve ser exigida a resolução gráfica da equação $t = 4$. Uma forma de a resolver será considerar a intersecção da função t com a função $y = 4$.

Os alunos não percebem porque lhes exigimos muitas vezes cálculos complicados quando já se encontrou a solução. Num problema da realidade, onde o valor encontrado vai ser sempre aproximado e a aproximação obtida directamente com a calculadora vai ser melhor não há qualquer justificação para a resolução analítica.

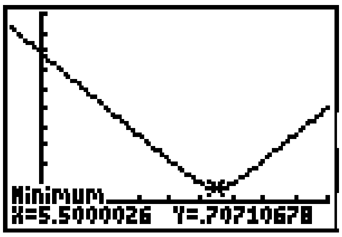
Distância entre automóveis

Dois carros circulam à mesma velocidade em estradas perpendiculares em direcção a um cruzamento. Um deles está a 5 km do cruzamento e outro a 6 km.
Representa o gráfico que dá a distância entre os dois automóveis à medida que se aproximam do cruzamento.
Quando é que a distância entre os automóveis é mínima?

Comentário

Sendo x a distância percorrida por cada automóvel em função do tempo, então, em cada instante, a distância entre os automóveis é dada por

$d = \sqrt{(6-x)^2 + (5-x)^2}$



A distância entre os automóveis é mínima quando eles se encontram a cerca de 0,5 km do cruzamento, tendo um deles passado o cruzamento e o outro ainda não o alcançou.

O Parque

Um fabricante de parques para bebés construiu um modelo de fundo quadrado, com as partes laterais articuladas de modo a poderem abrir-se e a serem fixadas numa parede da casa, fazendo com a parede ângulos de 90º.

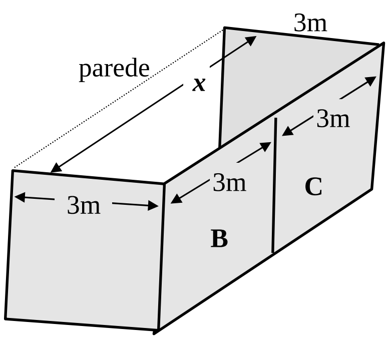


fig.1

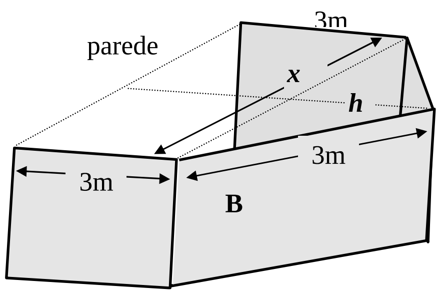


fig.2

Deste modo, colocando o parque como se indica na fig.1 a área de chão disponível passa de 9 m^2 para o dobro 18 m^2.

No entanto, alterando a distância ***x***, é possível colocar os lados **B** e **C** do parque noutra posição como mostra a fig. 2. Estuda em que situação é máxima a área de chão disponível dentro do parque.

Sugestão:

1. Exprime a área (***A***) do chão do parque em função da distância (***x***) entre os dois lados paralelos.

2. Utiliza a calculadora para representares graficamente a função ***A***.

3. Através do gráfico determina o valor de x para o qual a área é máxima. Indica uma aproximação ao centímetro.

4. Desenha, no papel, o gráfico da função que descreve esta situação.

Comentário

Altura do triângulo isósceles: $\frac{1}{2}\sqrt{36-x^2}$

Área do triângulo isósceles: $\frac{1}{2}x(\frac{1}{2}\sqrt{36-x^2})$

Área do rectângulo: $3x$

Área total: $A(x)=3x+\frac{x\sqrt{36-x^2}}{4}$

Os alunos, com auxílio da calculadora, devem ser capazes de determinar, com a aproximação exigida, a área máxima, recorrendo à função TRACE ou ao cálculo da intersecção se as calculadoras tiverem esta opção. Está fora do âmbito deste programa a exigência da resolução algébrica da equação irracional.

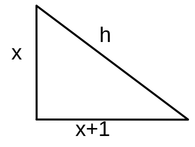
É importante que os alunos percebam que ao passarem para o papel o gráfico da função que modela a situação têm que considerar o seu domínio no contexto da situação em estudo ou seja D = [0,6]. Em algumas calculadoras é fácil fazer a restrição do domínio, mas o importante é que os alunos sejam capazes de passar para o papel tendo-o em conta.

A área máxima é cerca de 19,81 m^2 obtida para x ≈ 5.58.

Sobre um triângulo rectângulo de hipotenusa h, sabe-se que as medidas dos seus lados são números inteiros e que os comprimentos dos catetos diferem entre si de uma unidade. Sabendo que nenhum dos lados tem comprimento superior a 200, quantos triângulos existem nestas condições?

Comentário

Seja h = $\sqrt{2x^2+2x+1}$



Recorrendo à tabela da calculadora, verifica-se que no intervalo considerado, existem três soluções para o problema: (3, 4, 5), (20, 21, 29) e (119, 120, 169).

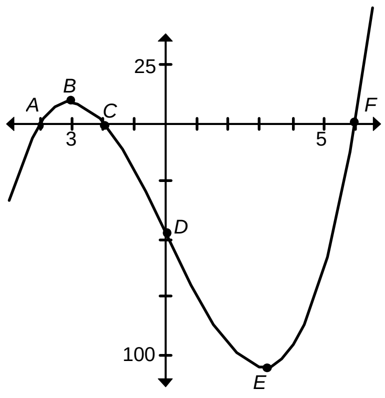
Uma actividade de investigação

Considera a família de funções quadráticas $y = ax^2 + bx + c$. Em que condições é que a expressão $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ não representa uma função?
Atribui valores a a, b e c e faz uma tabela que te possa ajudar a sistematizar as conclusões.

Comentário

Como é dito que a família é de funções quadráticas então sabe-se que $a \neq 0$. Desde que $a > 0$, $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ representa sempre uma função cujo domínio varia com b e c.

Valores dos parâmetros		$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ é uma função?	Esboço do gráfico	Observações
a > 0	b = 0 c = 0	Sim		$\sqrt{ax^2} = \sqrt{a}\ \lvert x \rvert$
	b = 0 c > 0	Sim		D = IR
	b = 0 c < 0	Sim		D = $]-\infty, -\sqrt{-\frac{c}{a}}\,] \cup [\,\sqrt{-\frac{c}{a}}, +\infty[$
	b ≠ 0 c = 0	Sim		
	b ≠ 0 c ≠ 0	Sim		
a < 0	b = 0 c = 0	y = 0		D = {0}
	b = 0 c > 0	Sim		D =$[-\sqrt{-\frac{c}{a}}, \sqrt{-\frac{c}{a}}\,]$
	b = 0 c < 0	Não		
	b ≠ 0 c = 0	Sim		
	b ≠ 0 c ≠ 0	Depende do radicando assumir ou não valores positivos ou zero.		



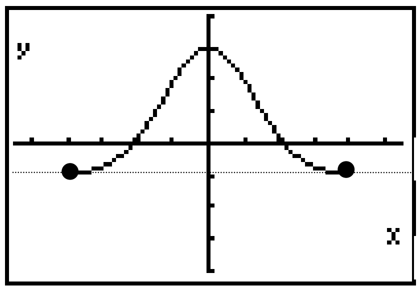
Observa o gráfico da função $\boldsymbol{f}$ representado ao lado.

1. Qual o domínio da função $g(x) = \sqrt{f(x)}$

2. Qual o domínio da função $h(x) = \dfrac{2}{\sqrt{f(x)}}$

3. As funções $\boldsymbol{g}$ e $\boldsymbol{h}$ terão extremos? Haverá alguma relação entre os extremos da função $\boldsymbol{f}$ e os das funções $\boldsymbol{g}$ e $\boldsymbol{h}$?

Considera a função f de domínio $[-4, 4]$ contradomínio $[-1, 3]$ representada na figura.



1. Indica os extremos de f.

2. Indica o domínio das expressões:

$\sqrt{f(x)+1}$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{f(x)}+\dfrac{1}{f(x)}$

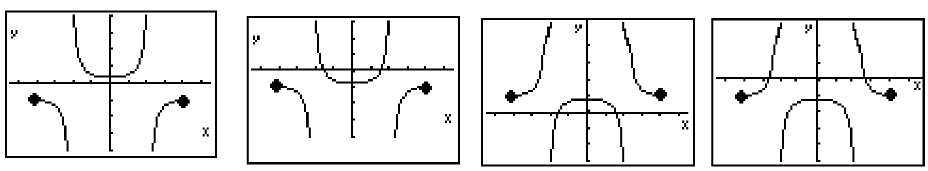
3. Considera as equações $|f(x)| = \text{k}$ e indica para que valores de k a equação tem:

a) 4 soluções

b) 2 soluções

c) nenhuma solução

4. Indica, justificando qual dos gráficos seguintes pode representar a função h, tal que $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$



5. Apresenta um gráfico para a função i, tal que $i(x) = \dfrac{1}{f(x-2)}$

Investigar transformações em alguns gráficos

1. Representa graficamente $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

a) Qual é o domínio da função?

b) Quais as coordenadas dos pontos de intersecção com os eixos?

c) Classifica a função quanto à paridade

2. No referencial da alínea anterior, representa o gráfico da função $h(x) = f(\frac{1}{x})$

a) Qual o domínio e o contradomínio de h?

b) Classsifica h quanto à paridade.

c) Quais as coordenadas dos pontos de intersecção com os eixos?

d) Quais as coordenadas dos pontos de intersecção dos gráficos de f e h ?

3. Considera as funções $f(x) = \sqrt{a-bx^2}$ e $g(x) = \frac{1}{x}$. Existe relação entre:

a) o contradomínio da função composta $f(g(x))$ e os contradomínios das funções $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$?

b) a paridade da função composta e a paridade das funções $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$?

4. Experimenta para outras funções e tenta fazer uma conjectura tendo por base a investigação que fizeste.

Comentário

No estudo das funções racionais, os alunos já tiveram oportunidade de relacionar o gráfico de uma função $\boldsymbol{f}$ com os gráficos de $f(\frac{1}{x})$ e de $\frac{1}{f(x)}$. Se recordarem o que então estudaram talvez consigam prever o tipo de gráfico da função composta. O estudo efectuado anteriormente é agora novamente aplicado no caso de novas funções. Este será um exemplo possível para voltar a referir o facto de o domínio da função composta não ser a intersecção dos domínios das componentes. Verificar que $D_f = [-3, 3]$, que o domínio de $y = \frac{1}{x}$ é o conjunto IR\ {0} e que $D_h =]-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, \infty[$. Poderá voltar a ser referido o facto do gráfico da função composta poder ser obtido de imediato com a calculadora fazendo, por exemplo, $y_1 = \sqrt{9-x^2}$, $y_2 = \frac{1}{x}$, e $y_3 = y_1 (y_2)$. Mais uma vez se verificará que a tabela, mais do que a representação gráfica, nos dá informações importantes nomeadamente sobre domínio e zeros da função composta.

Funções e mais funções...

Ao longo dos anos foste estudando diversas famílias de funções: polinomiais (linear, quadrática, etc.), racionais, irracionais, etc.

Descreve as principais características que aprendeste acerca de cada uma delas (tipo de gráfico, zeros, domínio, contradomínio, intersecção com o eixo das ordenadas, assimptotas, etc.)

Encontra relações entre algumas destas famílias.

AVALIAÇÃO

A avaliação já foi tratada com algum pormenor quer na brochura das Funções do 10º ano, quer na brochura da Didáctica. Recomenda-se a leitura das páginas relativas a este tema visto a filosofia ser a mesma.
O programa em vigor, recomenda a utilização de vários instrumentos de avaliação. À semelhança da brochura anterior, apresentam-se, a título de exemplo, algumas actividades que podem ser utilizadas.

Trabalhos individuais

Para além das perguntas típicas de testes, de relatórios sobre algumas das actividades desenvolvidas e de apresentações orais, pode ser solicitado aos alunos que respondam a questões como as que se seguem:

- Com este assunto foram introduzidos alguns conceitos e ideias novas. O que é que aprendeste de novo com o estudo deste capítulo? Sê claro e justifica as tuas respostas.
- Procura um problema, ou inventa-o, que seja representativo das novas aprendizagens que fizeste.
- Dá exemplo de um problema que exemplifique a relação existente entre a matemática aprendida neste capítulo e a realidade.
- Dá exemplo de um problema que mostre que existe relação entre a matemática que agora aprendeste e a matemática aprendida anteriormente.
- Relativamente a cada um dos tipos de funções da lista que se segue, dá exemplo de uma situação da realidade que possa ser modelada por cada tipo de função.

Justifica a tua escolha.

Tipos de funções:

- função quadrática
- função polinomial de grau superior ao segundo
- função racional não polinomial
- função irracional

- Pensa no papel desempenhado pela calculadora gráfica ao longo do estudo efectuado este ano sobre funções. Descobriste novas vantagens na utilização da calculadora gráfica. Quais?
- Relativamente à utilização da calculadora gráfica, que novas aprendizagens tiveste que fazer para estudar este ano o capítulo das funções?
- Ainda há poucos anos não era permitido o uso de calculadoras gráficas na aula de matemática, mas já nessa altura se estudavam funções racionais e as respectivas representações gráficas. Se fizesses uma viagem ao passado que indicações gerais darias aos estudantes para que eles tivessem maior facilidade em representar o gráfico de funções do tipo:

  a) y = $\frac{a}{x-b}$ **b)** y = $ax+b+\frac{c}{x}$ **c)** y = $\frac{(x+a)(x+b)}{(x+a)(x+c)}$

- Trabalhaste algumas vezes em grupo na sala de aula. Faz uma reflexão sobre o papel que desempenhaste nesses trabalhos de grupo. Pensas que seria bom continuar a trabalhar em grupo? Explica claramente a tua opinião.

Trabalhos de grupo

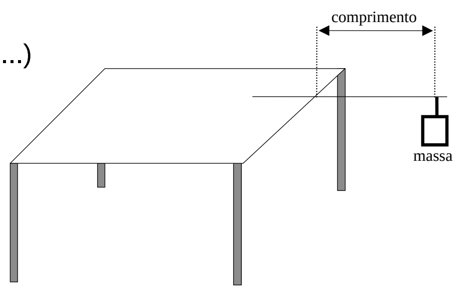
Muitas das tarefas propostas ao longo desta brochura podem ser apresentadas aos alunos para que eles as efectuem em trabalho de grupo. Apresentações orais de um problema ou de um assunto que estudaram num livro, podem também constituir boas oportunidades para trabalho de grupo.

Apresentam-se a seguir dois exemplos de actividades que podem ser resolvidas em grupo na sala de aula.

A resistência do esparguete

Material

- fio de pesca
- pequenos pesos todos iguais (moedas, ...)
- vários paus de esparguete
- uma caixa leve (um saco plástico) para colocar dentro os pesos.



Experiência

Coloca um pau de esparguete numa mesa, perpendicular ao bordo, com uma parte fora da mesa, tal como está na figura.
Prende a caixa com o fio de pesca de forma a poderes suspendê-la do pau de esparguete (cola com fita-cola para o fio não deslizar do esparguete).
Mede o comprimento do esparguete que ficou para fora do bordo da mesa.
Coloca na caixa (e conta) os pesos, um a um, até o esparguete partir.
Regista o comprimento do esparguete e o número de pesos necessários para ele partir.
Repete a experiência várias vezes alterando o comprimento do esparguete.

1. Regista, os dados recolhidos, numa tabela:

comprimento do esparguete (cm)	20	18	15	12	9	6	3
número de pesos							

2. Introduz os dados na calculadora e faz um gráfico que relacione o comprimento do esparguete com o número de pesos necessários para o partir.

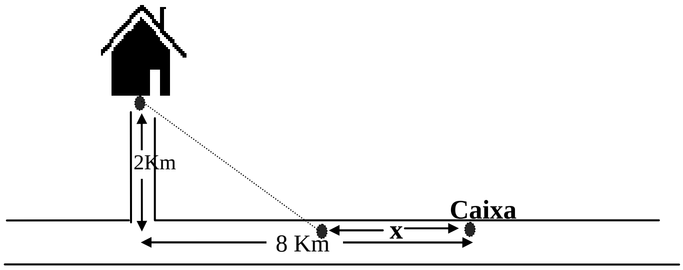
3. Encontra uma função que descreva esta situação.

Sugestão 1: Multiplica as duas listas dos dados e analisa os resultados.
Sugestão 2: Utiliza uma das funções de regressão da calculadora.

adaptado de "*Advanced Algebra Trough Data Exploration*"

Instalação da TV cabo

Os serviços da TV Cabo foram solicitados para fazer uma instalação numa quinta situada a 2Km de uma estrada onde o cabo passa. A caixa de derivação mais próxima está situada a 8Km da estrada secundária que conduz à quinta, tal como está indicado na figura.



A instalação custa 2000$00 por Km se for por estrada e 2300$00 se for através dos campos.

Que caminho deve seguir o cabo?

1. Escreve uma expressão para o custo (C)da instalação em função da distância (x) da caixa de derivação existente ao ponto onde o cabo deixa a estrada principal.

2. Representa graficamente a função C=C(x).

3. Que valores pode tomar x?

4. Qual é o custo da instalação se x for 2Km? E se for 3Km? E 5 Km?

5. Qual o valor de x para o qual o custo é mínimo?

adaptado de "Algebra &Trigonometry"

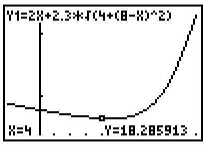
<u>Comentário</u>

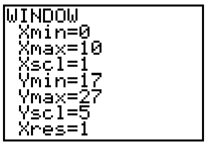
A função é $C(x) = 2x + 2.3\sqrt{4 + (8 - x)^2}$, *x* em *Km* e *C* em contos.

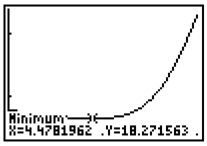
No contexto do problema o domínio da função é [0,10].

A determinação do custo mínimo será feita com recurso à calculadora gráfica, usando TRACE ou a opção de cálculo da calculadora nos casos em que está disponível.

O custo mínimo verifica-se para x aproximadamente igual a 4,5 Km.







Os alunos podem ainda observar o que se passa com a extensão a IR desta função. Poder-se-á pedir uma justificação para o domínio IR, relacionando esse facto com a respectiva expressão analítica.

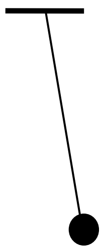
Trabalhos de projecto

As actividades de projecto que se apresentam a seguir são actividades mais prolongadas que podem dar origem a pesquisas noutras áreas e que podem ser apresentadas aos alunos como trabalhos de projecto

O pêndulo

I parte - experiência

O período de oscilação de um pêndulo é o tempo necessário para uma oscilação completa ou seja o tempo que o pêndulo demora a passar de uma posição extrema a outra e a regressar à primeira.



1. Utiliza um pêndulo e descobre um processo para determinar o seu período.
2. Regista os dados relativos ao período do pêndulo e ao seu comprimento.
3. Altera, de forma significativa o comprimento do pêndulo. Regista de novo este comprimento e o período do pêndulo.
4. Repete a experiência pelo menos mais 5 vezes alterando sempre o comprimento do pêndulo.
5. Representa graficamente o período do pêndulo em função do seu comprimento.
6. Tenta encontrar uma função que descreva esta relação.

O pêndulo

II parte

Os físicos usam para descrever a relação entre o período de um pêndulo e o seu comprimento a seguinte função $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, onde $\boldsymbol{T}$ é o período em segundos , l o comprimento em metros e $\boldsymbol{g}$ a aceleração da gravidade.
A aceleração da gravidade na terra é **9,8 m/s²**.

Compara esta função com a que encontraste a partir dos dados da experiência realizada.
Nota: este modelo é válido para pequenas amplitudes

III parte

1. Utiliza a calculadora gráfica para representar a função $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

2. Representa graficamente as funções $T(l+0.1)$; $T(l+0.2)$; $T(l+0.3)$
A partir destes gráficos discute como varia o período quando acrecentas 10cm, 20 cm, 30 cm, ao comprimento do pêndulo, etc..

3. Representa agora as funções $T(2l)$; $T(3l)$; $T(4l)$etc.
Discute como varia o período de um pêndulo se o seu comprimento duplicar, triplicar, etc.

4. Representa em cada um dos casos as funções quociente $T(l+1)/T(l)$ .... $T(2l)/T(l)$. Que conclusões tiras?

5. Por que número é multiplicado o período de um pêndulo se o seu comprimento duplicar, triplicar, quadriplicar, ...?

O pêndulo

IV Parte

A aceleração da gravidade à superfície varia de planeta para planeta, imagina-te numa viagem pelo sistema solar. Analisa como varia o período de oscilação de um pêndulo de comprimento determinado com a aceleração da gravidade.

Qual é o período na lua? E em Júpiter?

Em que planeta é maior o período do pêndulo? Em qual é menor?

Supõe que tens um pêndulo de comprimento 1 metro. Qual é o seu período de oscilação na Terra?

Investiga como terias que alterar o comprimento se deslocasses o pêndulo para os outros planetas mantendo o período de oscilação.

Em qual dos planetas o comprimento do pêndulo é maior?

Planeta	Aceleração (m/s^2)	Planeta	Aceleração (m/s^2)
Mercúrio	3.60	Júpiter	25.90
Venus	8.80	Saturno	11.30
Terra	9.80	Urano	11.50
Lua	1.60	Neptuno	11.60
Marte	3.70	Plutão	4.60

V parte

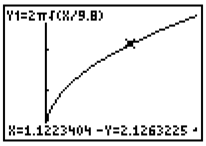
Imagina um relógio de pêndulo que atrasa sistematicamente, discute um processo para o arranjares.

Comentário

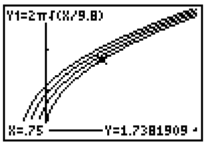
1. A experiência pode ser realizada com auxílio de um pêndulo (existente em quase todos os Laboratórios de Física) e de um cronómetro. Para evitar erros pode ser medido

o tempo correspondente a 10 oscilações. Outro processo será utilizar um sensor de distância - o CBR e a partir do gráfico obter o período.
Nos gráficos que se apresentam foi considerado o comprimento do pêndulo em [0,1].

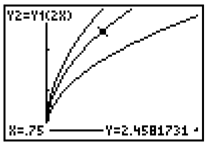
Os alunos poderão perceber a relação entre o que se passou na experiência que realizaram e as informações a que conduzem as funções $T(l+0.1)$, $T(l+0.2)$, ... ou $T(2l)$, $T(3l)$, ... Será interessante que discutam as diferenças entre os gráficos (2) e (3). O gráfico (4) certamente levará os alunos a conjecturar que quando o comprimento duplica, triplica, etc... o período é multiplicado por uma constante, podem tentar descobrir essa constante por análise dos digitos da calculadora e alguns alunos poderão ser desafiados a provar analiticamente que $T(2l)/T(l) = \sqrt{2}$, ... $T(nl)/T(l) = \sqrt{n}$..



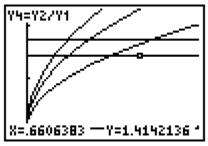
(1)



(2)

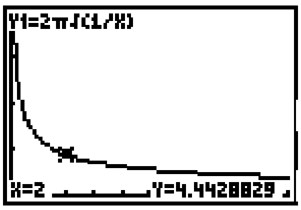


(3)



(4)

Na IV parte a variável em estudo é a aceleração da gravidade. Os alunos devem considerar um pêndulo de comprimento fixo, por exemplo 1 metro. Será interessante observar que sendo irracional esta função (5) apresenta um gráfico bastante diferente dos anteriores e discutir porquê. Com auxílio da calculadora e com a função TRACE ou recorrendo a tabelas os alunos poderão responder ás questões colocadas, na lua por exemplo, o período de oscilação de um pêndulo de 1m será de aproximadamente 5 segundos.

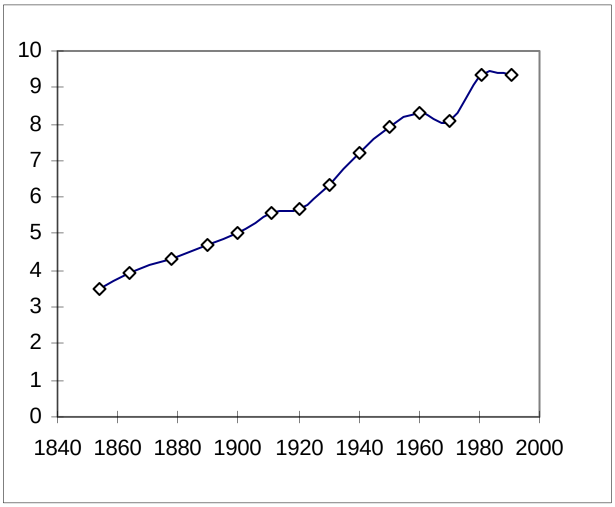


(5)

Para arranjar o relógio os alunos podem indicar apenas que se trata de diminuir o comprimento do pêndulo, mas podem também concretizar e determinar exactamente por que número deve ser multiplicado o comprimento para que o relógio passe a estar certo.

Como cresceu a população portuguesa?

Este gráfico foi obtido a partir dos dados relativos à população portuguesa residente no continente, nos diversos censos desde 1851, ilustra a evolução da população ao longo deste período de tempo.



Anos	*População (em milhões)*
1854	3,499
1864	3,927
1878	4,303
1890	4,713
1900	5,039
1911	5,586
1920	5,668
1930	6,34
1940	7,219
1950	7,921
1960	8,293
1970	8,075
1981	9,337
1991	9,363

1. Calcula as taxas de variação média da população entre cada dois sensos.

2. Representa graficamente a evolução das taxas de variação média ao longo deste período de tempo. Que significado tem este gráfico?

3. Observa os dois gráficos e responde às questões seguintes:

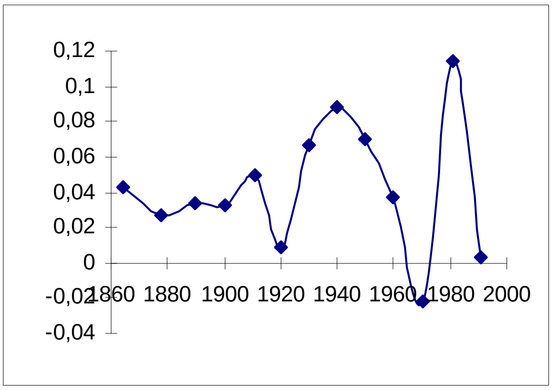
- Por volta do ano 1920 a população aumentou ou diminuiu, em valores absolutos?
- E entre 1970 e 1981?

4. Porque apresenta o gráfico relativo às taxas de variação uma zona situada abaixo do eixo dos xx, no período entre 1960 e 1980. Neste período a população cresceu ou decresceu, em valores absolutos?

5. Que acontecimentos estarão relacionados com as grandes irregularidades do gráfico das taxas? Analisa também estes períodos no gráfico dado.

Comentário

O gráfico junto representa a evolução da taxa de crescimento.



È importante chamar a atenção que os valores negativos significam uma redução em valor absoluto da população, independentemente de a taxa estar a decrescer ou a crescer. Da mesma forma entre 1960 e 1980 apesar de a taxa decrescer significativamente a população continuou a crescer em valores absolutos.

Os períodos mais irregulares correspondem à primeira guerra mundial, à guerra colonial e ao período de descolonização após o 25 de Abril.

RECURSOS

No ano anterior fizemos referência a vários recursos a utilizar no programa de Matemática. para além das calculadoras gráficas demos destaque a alguns programas de computador, nomeadamente a Folha de Cálculo, Modellus, Graphmatica, Cabri II e Geometer´sketchpad. Todas estas ferramentas continuam actuais e são cada vez mais indispensáveis para que se atinjam os objectivos do programa. Aconselhamos portanto a leitura do capítulo dos Recursos da brochura do 10º ano.

Ao longo deste ano, algumas escolas foram iniciando a construção do Laboratório de Matemática, que é cada vez mais um espaço indispensável e facilitador do desenvolvimento de actividades experimentais/investigativas.

Na brochura deste ano optámos por destacar dois recursos a que não demos tanto realce no ano anterior: a utilização de sensores e a Internet.

Apesar de já termos referido no ano anterior o programa Modellus, não queremos deixar de o destacar novamente uma vez que o consideramos bastante adequado ao programa do secundário, de fácil utilização pelos alunos e disponível para todas as escolas.

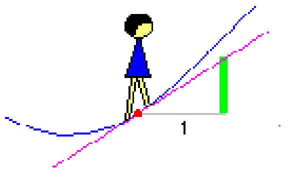
Na página da Internet criada este ano no âmbito do Acompanhamento do Programa de Matemática do ensino secundário (**http://www.terravista.pt/IlhadoMel/1129**) está disponível algum software, nomeadamente o Modellus bem como várias versões de demonstração de outros programas aconselhados.

A Internet é hoje uma fonte de recursos de fácil acesso onde podemos encontram muitos pequenos, mas interessantes programas. Alguns deles podem ser gravados e utilizados posteriormente. A título de exemplo indicamos um conjunto de simulações sobre derivadas que podem encontrar em:

- **http://www.ies.co.jp/math/java/heihen/heihen.html**
- **http://www.ies.co.jp/math/java/bib3ji/bib3ji.html**
- **http://www.math.psu.edu/dna/calculus/secants/ secants2/ secants-g.html**
- **http://www.math.psu.edu/dna/calculus/bounce/bounce2/bounce-g.html**

As actividades *Surf na Internet* e *Intensidade da Luz e CBL* que apresentamos a seguir, pretendem ilustrar os recursos que destacámos.

Surf na Internet

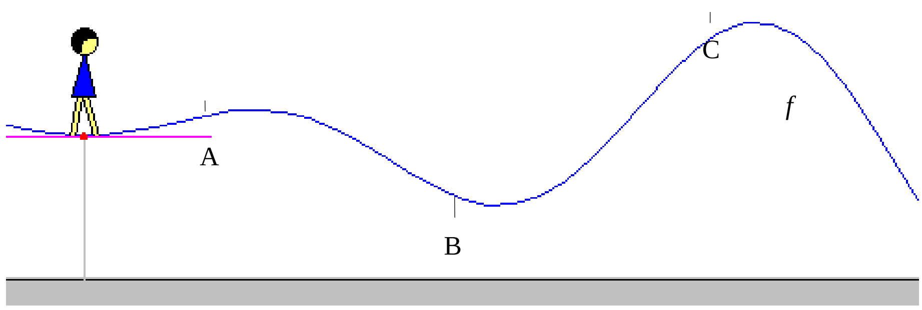


A prancha do surfista está em cada instante tangente à onda, aqui representada pela curva *f.*

Imagina que o surfista se desloca ao longo da onda, durante um pequeno período de tempo e determina o declive da recta que representa a prancha num número de pontos que consideres suficiente para poderes representar graficamente a função assim obtida, ou seja a função dos declives das rectas tangentes á curva em cada instante.

Analisa o que acontece quando a prancha se encontra em A, B e C.

Traça o gráfico desta função no referencial abaixo indicado.



Procura, na Internet, o seguinte endereço: ***http://www.ies.co.jp/math/java/doukan***

Corre a simulação, se necessário, corrige o teu gráfico.

Faz um relatório do que observaste. Compara as duas curvas e tenta descobrir relações entre uma e outra.

Intensidade da luz e CBL

Os dados da tabela relacionam a intensidade luminosa de uma lâmpada com a distância a que é colocada e foram recolhidos experimentalmente com o auxílio de sensores.

Distância	Intensidade
1,0	0,29645
1,1	0,25215
1,2	0,20547
1,3	0,17462
1,4	0,15342
1,5	0,13521
1,6	0,11450
1,7	0,10243
1,8	0,09231
1,9	0,08321
2,0	0,07342

1. Faz um gráfico (diagrama de dispersão) que te permita analisar a Intensidade da luz (I) em função da distância (d).

2. Encontra uma função que se ajuste o melhor possível ao conjunto de pontos.

3. Quanto será a intensidade da luz se a lâmpada for colocada a 2,5 m, de acordo com o teu modelo?

4. Sabe-se que a intensidade luminosa é inversamente proporcional ao quadrado da distância, ou seja que $I = \frac{a}{d^2}$. Compara a função que encontraste com esta.

Nota: Se tiveres acesso a sensores de intensidade luminosa realiza tu mesmo a experiência.

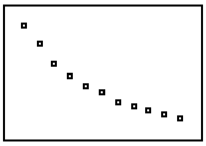
Comentário

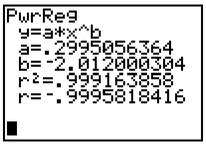
Esta experiência pode ser realizada com um CBL, um sensor de intensidade luminosa e uma calculadora gráfica.

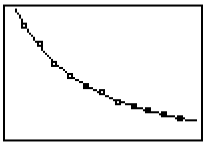
Um programa para a realização da experiência está disponível nos materiais desta brochura, na página da Internet da Comissão de Acompanhamento. Este programa está preparado para ser utilizado pela calculadora TI 83.

Se não for possível realizar a experiência os alunos podem efectuar a tarefa proposta recorrendo aos dados fornecidos.

De acordo com estes dados e utilizando uma função de regressão disponível na calculadora podemos considerar a função $I = \dfrac{0{,}3}{d^2}$ como modelo da situação.







Bibliografia utilizada na elaboração da brochura

Albuquerque, C., Calculadoras gráficas – alguns contra-exemplos, Boletim da SPM, n.º 34, 1996, pp. 3-13.

Ferreira, J. (1985). *Introdução à Análise Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Figueira, M. S. R. (1996). *Fundamentos de Análise Infinitesimal*. Lisboa: Dep. de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Fiolhais, C., Valadares, J., Silva, L., & Teodoro, V. (1994). *Física 10º ano - Manual de Actividades*. Lisboa: Didáctica Editora.

Hairer, E. e Wanner, G. (1995). *Analysis by its History*. Springer.

Heid, M.K. (1995).*Algebra in a Technological World.* Reston:NCTM

Murdock, J., Kamischke, E. e Kamischke, E.(1997). *Advanced Algebra Through data Exploration*. California: Key Curriculum Press.

Pina, Heitor. (1995). *Métodos Numéricos*. McGraw-Hill.

Ponte, J., Canavarro, A. (1997). *Matemática e Novas Tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta

Rosa, A. P., Derivação e calculadoras: exemplos na TI83, Boletim da SPM, n.º 37, 1997, pp. 81-92.

Sebastião e Silva, J. (1975-78). *Compêndio de Matemática e Guias de Utilização*. Lisboa: GEP - Ministério da Educação.

Sebastião e Silva, J. e Silva Paulo, J. D. (1970). *Compêndio de Álgebra* - Tomo 1 - 6.º Ano. Braga: Livraria Cruz, 2.ª ed.

Sullivan, M. (1998). *Algebra & Trigonometry - Graphing and Data Analisys*. Prentice Hall: London

Veloso, E., O fascínio das cónicas, Histórias da Matemática, Público Magazine, 1995.

Waits, B. (1995). *Calculus - A graphing Approach*. Addison Wesley:New York.

<u>Locais da Internet</u>

ACOMPANHAMENTO DE MATEMÁTICA**: http://www.terravista.pt/IlhadoMel/1129**

ENSINO DA MATEMÁTICA:

- **http://www.mat.uc.pt/~jaimecs**
- **http://correio.cc.fc.ul.pt/~jponte/**

APM: **http://www.apm.pt**

SPM**: http://ptmat.lmc.fc.ul.pt/~spm**

NCTM: **http://www.nctm.org.**

MAA: **http://www.maa.org.**

CURVAS (Hipérbole): **http://www.synapse.net/~euler/maths/scenario**

DERIVADAS:

Average Rate of Change and Derivatives: **http://www.ies.co.jp/math/java/heihen**

Derivatives of Cubic Functions: **http://www.ies.co.jp/math/java/bib3ji**

Differential and differences: **http://www.math.psu.edu/dna/calculus/differential**

http://www.math.psu.edu/dna/calculus/bounce/bounce2/bounce-g.html

Secants and tangent: **http://www.math.psu.edu/dna/calculus/secants**

Visual Calculus -Derivatives: **http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/2**

Zooming in on a tangent: **http://www.math.psu.edu/dna/calculus/tangent**

Surfing**: http://www.ies.co.jp/math/java/doukan**

MATH FORUM: **http://forum.swarthmore.edu**

MATH ARCHIVES: **http://archives.math.utk.edu**

***Software* educativo:**

Modellus: **http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus**

GraphMatica: **http://www8.pair.com/ksoft/**

Cabri: **http://ftp.imag.fr/pub/CABRI**

Geometer'sketchpad: **http://www.keypress.com/sketchpad/**

Derive: **http://www.derive.com/**

Casio: **http://pegasus.cc.ucf.edu/~ucfcasio**

Texas: **http://www.ti.com/**

Autores da brochura:

Adelina Precatado (aprecatado@mail.telepac.pt)

Carlos Albuquerque (albuquer@lmc.fc.ul.pt)

Paula Teixeira (pteixeira@mail.telepac.pt)

Suzana Nápoles (napoles@lmc.fc.ul.pt)

Moradas:

APM - ESE de Lisboa, Rua Carolina Michaellis de Vasconcelos, 1500 Lisboa
e-mail: apm@mail.telepac.pt
e-mail: info@apm.rcts.pt

SPM - Avenida da República, 37, 4º, 1050 Lisboa.
e-mail: spm@lmc.fc.ul.pt

UNIÃO EUROPEIA
FUNDO SOCIAL EUROPEU