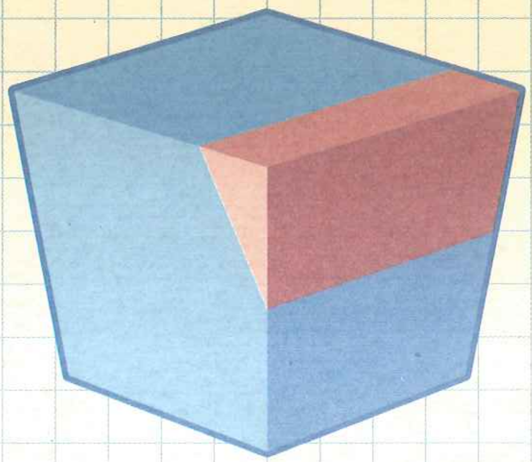
MATEMÁTICA

Ministério da Educação
*Departamento do **Ensino Secundário***

Geometria

10º ano de escolaridade

Cristina Loureiro
A. Franco de Oliveira
Elfrida Ralha
Rita Bastos



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
prodep
PROGRAMA DE DESENVOLVIMENTO EDUCATIVO PARA PORTUGAL

APRESENTAÇÃO

A Comissão de Acompanhamento do Programa de Matemática tomou a iniciativa de propor ao Departamento do Ensino Secundário a edição de brochuras para apoiar os professores na implementação deste novo programa. Uma das ideias base desta iniciativa é pôr à disposição dos professores um conjunto diversificado de textos que ajudem a fundamentar a filosofia do programa e dêem contributos para enriquecer, sob múltiplas perspectivas, o conhecimento científico e pedagógico dos professores.

É no âmbito desta iniciativa que surge esta brochura, *Geometria para o 10º ano*, elaborada por um grupo de professores com experiências e formações muito diferentes. Confrontados com as nossas diferenças, com um assunto tão vasto e problemático como é o Ensino da geometria e com limitações de tempo e de espaço, optámos por construir um texto em três partes distintas. Temos consciência que este é um texto necessariamente incompleto, mas consideramo-lo um primeiro passo para que os professores, individualmente e em grupo, se interessem por conhecer mais sobre geometrias, reflictam e discutam sobre o ensino da geometria e produzam e avaliem materiais curriculares para os seus alunos.

Assim, esta brochura é constituída pelas seguintes partes:

Metodologia da Geometria: Uma abordagem para o 10º ano de escolaridade
Elfrida Ralha
Geometrias e sua História
Augusto Franco de Oliveira
Actividades Comentadas
Cristina Loureiro e Rita Bastos

ÍNDICE

Metodologia da Geometria: Uma abordagem para o 10º ano de escolaridade
Introdução ... 9
Geometria: porquê? ... 11
Geometria: qual? ... 15
Geometria: como? ... 17
Avaliação ... 29
Bibliografia ... 31

Geometrias e sua História
1. Geometria e História da Geometria: porquê? ... 33
2. Um pouco de história
   2.1 Origens da geometria ... 34
   2.2 A Geometria de Euclides ... 40
   2.3 O problema das paralelas ... 48
   2.4 Tentativas modernas e o aparecimento das geometrias não-euclidianas ... 49
3. Demonstrando … ... 54
4. Bibliografia ... 61

Actividades comentadas
Resolver problemas em geometria
   Problemas em geometria ... 65
   Os modelos geométricos ... 67
   O computador ... 70
   A avaliação ... 70
Problemas de construção ... 71
Problemas de contagem ... 76

Problemas de representação 78
Problemas de cortes 88
Problemas com aparente falta de dados 93
Problemas que dão significado aos números 95
Problemas de proporcionalidade geométrica 98
Problemas de lugares geométricos com recurso a referenciais 104
Problemas de geometria analítica em que a visualização evita cálculos … 107
Problemas de demonstração 115
Problemas que conduzem ao estudo de funções 120
Bibliografia comentada 123

METODOLOGIA DA GEOMETRIA
Uma abordagem para o 10º ano de escolaridade

Introdução

Longe vão os tempos em que um professor de Geometria dos Ensinos Básico e Secundário em Portugal se podia sentir seguramente formado, que é como quem diz, com a sua formação completa, no momento em que lhe era concedida "licença" para ensinar Matemática, isto é, no dia em que acabava a sua licenciatura em Matemática (ramo Educacional) numa qualquer universidade do país; especificamente:

- longe vão os tempos em que **os métodos e as técnicas** que um professor de Geometria tinha que implementar nas suas aulas eram exactamente os mesmos que ele próprio vivenciara enquanto aluno;

- longe vão os tempos em que a **ciência exacta** que o professor de Geometria ensinava aos seus alunos era um conjunto fixo e bem determinado de elementos que se mantinha inalterado durante décadas e que se encontrava claramente sistematizado num único livro-texto que "alguém" determinara nacionalmente;

- longe vão os tempos em que a **população estudantil** (em muito menor número) não estava, ou, pelo menos, não dava mostras de estar, tão social e tão dramaticamente, dependente do facto de ter que aprender Matemática em geral e, muito em particular, Geometria.

De facto, o papel da Matemática na sociedade contemporânea é muito mais destacado do que há relativamente poucos anos atrás e, além disso, mudanças curriculares mais ou menos profundas, mais ou menos originais e mais ou menos clarificadas para o professor comum têm, particularmente desde a década de 50 - com o "Sputnik" que deu origem à "Matemática (dita) Moderna" dos conjuntos e respectivas operações e "Dieudonné" e "Piaget" que contribuíram decisivamente para a substituição, nos currículos, da “Geometria Euclideana” pela “Geometria das Transformações” -, vindo a acontecer ciclicamente (o período médio de duração é de 5 anos) um pouco por todo o mundo.

Hoje em dia, os resultados práticos que as alterações curriculares em Matemática produziram estão à vista e são amplamente discutidos. Destacamos as seguintes consequências ao nível da aprendizagem da Geometria:

- por um lado temos a impressão, a julgar pelos comentários que fazem sobre a Geometria, que tais alterações curriculares nem sequer foram, em primeiro lugar, verdadeiramente apreendidas pelo professor que é sempre quem tem como missão implementá-las;

- por outro lado percebemos que as mudanças curriculares que (pelo menos de um ponto de vista teórico) se têm vindo a implementar nas nossas escolas, se manifestam, na vasta maioria dos nossos alunos, em conhecimentos técnicos que facilmente se reduzem a manipulações algébricas e/ou aritméticas de valor real duvidoso.

Surpreendentemente, quando na Universidade abordamos questões específicas de Geometria damo-nos conta que, de facto, estudantes diferentes, em anos lectivos distintos, que foram ensinados por professores diferentes e com conhecimentos geométricos diversificados parecem bloquear sempre nos mesmos temas, nomeadamente:

- conseguem manipular algebricamente (com os vícios usuais, entenda-se) as questões que lhes são colocadas; no entanto, não conseguem esboçar os entes geométricos;

- escrevem (com um vocabulário pobre, entenda-se) sobre determinados entes geométricos; no entanto, não sabem falar sobre eles;

- lembram-se de termos-chave como *isometria* ou *homotetia*, *perímetro* ou *área* ou *volume*, *polígono* ou *poliedro*, *ponto*, *recta* ou *plano*; no entanto, não se atrevem a explicar, nem de cor nem por palavras suas e nem em termos analíticos nem em termos geométricos, o significado desses nomes.

Além disto, as dificuldades sentidas por estes estudantes sobre questões de Geometria são, por eles próprios, caracterizadas como *dificuldades de visualização*; as quais são, frequente e convenientemente, remetidas para factores genéticos inatos.

Assim, a verdadeira Geometria vê-se, mais vezes do que seria desejável, ensombrada pelo mecanicismo da Aritmética e/ou da Álgebra nas suas formas menos naturais, isto é, com fórmulas e receitas e respectiva memorização que estão muito longe do **conhecimento do mundo real, do processamento e da interpretação “visuais” e do raciocínio lógico/dedutivo** que costumava caracterizar a Geometria nos seus mais nobres atributos, independentemente de ênfases históricas diversificadas: mais aritméticas (para os Babilónicos e para os Egípcios), mais axiomáticas (para os Gregos e para Hilbert), ou mais algébricas (para Descartes, depois de Viète e para Monge).

Geometria: porquê?

Atestadas que estão, através de estudos de investigação nacionais e internacionais, no Ensino da(s) Geometria(s) das nossa escolas, as seguintes falhas:

1. Não reconhecimento do mundo que nos rodeia

Exemplo(s) - *Geometria + Universo*: qualquer fotografia de uma calçada portuguesa, um prédio em construção, um jardim arranjado por um jardineiro; qualquer cesto, um pote de barro ou uma panela de alumínio são recursos materiais perfeitamente adaptados para discussões produtivas nas aulas de Geometria; qualquer insecto a que se retiram as asas e se estudam ao microscópio ou quaisquer bolinhas de sabão obtidas a partir de palhinhas que sopramos podem ser estudados nas aulas de Geometria.

2. Recurso a estágios desajustados de desenvolvimento mental aritmético/algébrico

Exemplo - *Geometria + Sistemas Métricos*: No primeiro ciclo do Ensino Básico ensina-se que "*O metro quadrado é um quadrado com 1 metro de lado* ". Se é verdade que todas as unidades de medida se podem de uma forma deveras interessante, com recurso à evolução histórica, definir a partir do "metro" dito padrão temos, neste caso, a nítida sensação que nem sempre estarão acauteladas questões de desenvolvimento mental do tipo aritmético/algébrico (nomeadamente as "potências") quando se ditam tais definições. Ora, no caso particular da medição de áreas o facto de "1 metro x 1 metro = 1 metro quadrado" acarreta - por meio de raciocínio lógico baseado em associações que o aluno facilmente faz, mesmo quando ninguém lhe diz para o fazer - generalizações do tipo

> se " 1 metro x 1 metro é 1 metro quadrado", então " 2 metros x 2 metros serão 2 metros quadrados", daí afirmarem frequentemente que " 2 metros quadrados é a área de 1 quadrado com 2 metros de lado".

3. Não apreciação dos conhecimentos informais que os alunos adquirem fora da escola

Exemplo - *Geometria + Vocabulário (terminologia)*: O que é um "quadrado"? Porque é que os azulejos com que revestimos as nossas cozinhas e as nossas casas-de-banho não costumam ser "pentágonos"? A razão dos nomes que atribuímos aos entes geométricos é, regra geral, etimologicamente acessível para os alunos portugueses.

4. Desconhecimento e/ou não relacionamento dos conteúdos fragmentados que foram no passado ou serão no futuro ensinados aos mesmos alunos por outros professores em outros níveis de ensino

Exemplo - *Geometria + Programas curriculares a médio e a longo prazo / interdisciplinaridade*: Relações, directas ou não, entre diferentes definições de paralelismo de duas rectas em diversos níveis de ensino; esclarecimento destas diferenças e das eventuais semelhanças;.

5. Incapacidade na representação (bidimensional e tridimensional) gráfica dos entes geométricos

Exemplo - *Geometria + Arte*: Visitas de estudo a museus ou a galerias de arte são motivo de proveitosas discussões sobre, por exemplo, as razões pelas quais alguns quadrados parecem mais reais do que outros; tal actividade propicia projectos deveras interessantes a serem conduzidos, individualmente ou em grupo, por alunos com a supervisão do professor de Geometria.

6. Incapacidade na representação verbal de conceitos geométricos

7. Incapacidade na representação "espacial" dos entes e conceitos geométricos

Exemplo - *Geometria + Manipulação (física, gráfica e mental) de objectos*: o recurso a objectos manipulativos e à construção de materiais geométricos, o estudo das formas geométricas a partir de orientações físicas diversificadas, a ajuda do computador ou de uma simples calculadora gráfica trazem benefícios atestados ao nível da verificação rápida e eficaz de diferentes conjecturas geométricas; contribui-se assim também para o desenvolvimento da, dita, intuição geométrica.

8. Desprezo pelas potencialidades lógico-dedutivo do raciocínio geométrico. Note-se que quando nos referimos ao raciocínio lógico/dedutivo não pretendemos significar o recurso a teorias formais de ordem axiomática pois essas, de acordo com as normas dos Programas oficiais, não deverão ser implementadas nestes níveis de Ensinos Básico e Secundário. Neste caso pretendemos realçar as potencialidades do raciocínio geométrico no estabelecimento de certezas na resolução dos problemas.

Identificadas ainda outras falhas ao nível da aprendizagem que os alunos fazem da Geometria que, em teoria, lhes ensinámos como são exemplos os inúmeros episódios que qualquer professor costuma relatar quase de uma forma anedótica; recordo, por exemplo, uma aluna universitária que no ano de estágio (da licenciatura em Ensino de Física e Química) conseguiu "provar" (à maneira dela, entenda-se: admitindo que a raíz quadrada de uma adição é a adição das raízes quadradas das parcelas) que, citamos:

não é possível obter-se o perímetro de uma circunferência porque se trata de uma equação algebricamente "equivalente" à de uma recta.

Ocorre-nos por todas estas razões uma questão central: Vale a pena continuar a apostar no Ensino da Geometria? Ou seja, justifica-se, por parte dos professores, um esforço adicional no seu trabalho por forma a melhor ensinar Geometria aos seus alunos? Ou será que se vislumbra, por exemplo, a hipótese de a Geometria ser, a curto prazo, substituída por qualquer outro tópico menos problemático?

Estamos, como se entende, a questionar a importância da Geometria. É, antes de mais, relativamente fácil encontrar citações de pessoas relevantes que, desde sempre, atestaram esta importância. Por exemplo:

- No século IV a. C, Platão escrevia

(para além da utilidade evidente para a guerra e não só) os objectos do conhecimento geométrico são eternos e (portanto) conduzem a mente para a verdade e para o desenvolvimento do raciocínio... a Geometria é o conhecimento do que existe sempre;

- No século XVI Pedro Nunes motivado pelos descobrimentos marítimos, descobria formas concretas de ajudar os nossos marinheiros a orientarem-se no mar e publicava a sua Geometria num livro de "Álgebra" onde encontramos conselhos de ordem didáctica deveras interessantes:

ainda que os triângulos venham primeiro do que os quadrados, trataremos primeiro dos quadrados,... porque por eles recebem os triângulos a sua medida;

- No século XVII, escrevia Kepler:

palavras para quê? A Geometria já existia antes da criação do mundo... foi a geometria que forneceu a Deus o modelo para essa criação;

- Há cerca de 40 anos, o francês Jacques Hadamard manteve correspondência escrita com alguns dos mais eminentes cientistas da época, a respeito da forma como desenvolviam o seu trabalho. A carta que então recebeu de Albert Einstein dizia assim:

as características essenciais no pensamento produtivo ...são do tipo visual

E, Hadamard concluía o seu relato da seguinte forma:

praticamente todos (os cientistas) evitam o uso mental dos símbolos... usam "imagens";

- Recentemente, o professor Alexandrov, ilustre geómetra soviético realçava também as três razões fundamentais que também já referimos logo no início deste texto e que justificam o ensino da Geometria aos alunos. Escrevia assim:

> *a Geometria é essencialmente a combinação de uma imagem viva e de uma lógica rigorosa que se organizam e se guiam mutuamente... o ensino da Geometria tem pois, consequentemente, como função o desenvolvimento nos alunos de três qualidades: a imaginação espacial, a compreensão concreta e o pensamento lógico... as duas primeiras características são fundamentais... a terceira faz, nos dias que correm, cada vez mais sentido.*

Por conseguinte destacamos, uma vez mais, em jeito de resumo as três grandes qualidades da Geometria, que é unanimemente escolhida como tópico obrigatório de ensino aos cidadãos de todo o mundo. Ensinamos Geometria porque esta ciência desenvolve simultaneamente:

- o conhecimento do mundo real,

- o processamento e a interpretação visuais (a imaginação espacial, segundo Alexandrov),

- o raciocínio lógico/dedutivo.

Contribuir para o desenvolvimento simultâneo de tão importantes e tão diversificadas capacidades não está ao alcance de qualquer tópico que se ensine. Diz-se, por exemplo, que o jogo do xadrez desenvolve também o raciocínio lógico dedutivo mas dificilmente se encontrará um outro tópico - que não a Geometria - que para além dessa função também potencialize as outras duas características fundamentais na formação de qualquer cidadão.

Por outro lado e de um ponto de vista metodológico - seguindo o método de Sócrates (as ideias já estão nas mentes dos alunos e o papel do professor deverá ser o de uma parteira que as ajuda a nascer) colocamos aos alunos as perguntas pertinentes que conduzirão à descoberta - sabemos que **a Geometria trata de formas, das suas propriedades e das suas relações** e, por isso, basta tão somente olharmos à nossa volta para rapidamente tomarmos consciência de que na Natureza são produzidas e reproduzidas determinadas formas e que, além disso, a Natureza prefere certas formas em relação a outras também possíveis. Por exemplo:

- O azeite que deitamos no caldo verde forma, na superfície da sopa, círculos, em vez de qualquer outra forma geométrica.

- As colmeias das abelhas obedecem a um padrão (pavimentação) hexagonal.

- O vento produz, na superfície dos oceanos, ondas com uma determinada forma, em vez de ondas quadradas.

- Em qualquer instante, existe sempre na superfície terrestre pelo menos um furacão.

- Três bolinhas de sabão, se deixadas livremente, formarão sempre ângulos de 120º. E que relação existe entre estas formas que criamos por brincadeira e as formas patentes nas asas de determinados insectos?

Podíamos, como facilmente se entenderá, continuar a enunciar factos geométricos que a Natureza nos oferece e perceber, de imediato, que o desejo humano de compreender esta Natureza é, provavelmente, contemporâneo do próprio Homem. As respostas a estas perguntas foram sendo dadas, ao longo da História, de uma maneira simples - não necessariamente fácil, entenda-se -, através de sistemas de raciocínio lógicos e a partir de conceitos deveras interessantes, pela GEOMETRIA.

A importância da Geometria está pois naturalmente (a partir da Natureza) patenteada e está subjacente - de forma consciente ou não - na sua inclusão obrigatória em qualquer programa curricular, de qualquer nível de ensino, de qualquer escola, de qualquer parte do mundo.

Geometria: qual?

Ilustrada a importância da Geometria é fácil perceber, como referimos, um consenso generalizado sobre essa importância e que se manifesta especificamente na inclusão da Geometria em qualquer programa escolar. Tal consenso deixa, no entanto, de existir quando se trata de decidir, de entre tantas e tão diversificadas hipóteses, qual a Geometria que vamos ensinar num determinado nível e o consenso também desaparece quando temos que optar por um ou outro método de ensino da Geometria.

Tais decisões passam, como seria de imaginar, por uma avaliação rigorosa das vantagens e das desvantagens das diversas geometrias que, actualmente, se conhecem e são, basicamente, determinadas por especialistas (equipes que englobam matemáticos, psicólogos, pedagogos, etc.) em função de pressões nem sempre explicitadas nos documentos oficiais. Tomadas essas decisões, não está o professor de Geometria libertado de qualquer responsabilidade na implementação desse programa nem sequer está o professor alheado de determinado meio social que o rodeia. Em 1986, o Professor G. Howson - especialista inglês em desenvolvimento curricular de Matemática - escrevia assim sobre este assunto:

> *Embora os professores de Matemática tenham metas e tenham razões para ensinar Matemática, outras partes interessadas, pais, alunos, entidades emprega-doras, etc., também têm opiniões sobre o papel a desempenhar pela Matemática dentro do currículo escolar. As razões dos outros grupos só muito raramente se encontram listadas com pormenor; muitas vezes só se percebem por causa das pressões exercidas nos professores, uma vez que as pressões são um sintoma de que as razões estão em conflito. É importante que o professor saiba que os seus motivos para ensinar matemática não serão, muito provavelmente, partilhados por todos aqueles com quem contacta, que estes provavelmente irão causar conflitos e que há uma necessidade constante de mediação a ser feita e de explicação a ser dada.*

No caso português cabe, como se sabe, ao Ministério da Educação a função de fazer, nacionalmente, chegar junto das Escolas dos Ensinos Básico e Secundário os programas oficiais em vigor; o qual, no presente caso, foi publicado em Janeiro de 1997 através do Departamento do Ensino Secundário. Citamos de seguida algumas das passagens que, em termos programáticos, se podem ler nesse documento. Nas páginas 18 e 19 é dito que:

> *A Geometria do 10º ano de escolaridade (36 aulas) é uma Geometria no Plano e no Espaço (I):*
>
> *... Resolução de problemas de geometria no plano e no espaço... Modos de definir um plano... Intersecção de sólidos com um plano dado... estabelecimento de relações métricas entre figuras...*
>
> *... Geometria Analítica (no plano e no espaço) ...Referenciais cartesianos, ortogonais e monométricos,... Circunferência, círculo, elipse e mediatriz,... Esfera e plano mediador,... Vectores livres no plano e no espaço,... Componentes e coordenadas de um vector num referencial ortonormado do espaço,... Equação vectorial da recta no plano e no espaço, Equação reduzida da recta no plano...*

E, se os professores se limitarem a ler, nesse documento, estes títulos correm certamente o risco de não fazerem, especialmente com a Geometria Analítica, nada de novo relativamente aquilo que tem sido enfatizado, em anos anteriores, no Ensino dessa Geometria. A verdadeira mudança, neste caso, como noutras passagens destes Programas oficiais, está na **metodologia** que se prevê ser implementada nas nossas aulas de Ensino de Geometria, isto é, reconhecidas todas as deficiências do ensino tal como vinha sendo implementado até agora nas nossas escolas, propõem-se alterações significativas mais ao nível dos métodos de ensino do que ao nível do currículo propriamente dito.

Mais uma vez a responsabilidade da compreensão de tão importante tópico como é a Geometria está, na forma de Geometria Analítica elementar, imputada ao professor que, procurando acima de tudo, **interessar** os seus alunos conseguirá necessariamente o tão desejável sucesso nesta disciplina, sem que isso signifique redefinir os currículos de Geometria de acordo com preferências individuais nem evitar os capítulos de Geometria na matéria leccionada durante o ano lectivo. Se, nas nossas aulas de Geometria do 10º ano de escolaridade, formos capazes de arranjar para discussão verdadeiros desafios (em vez de tarefas que a grande maioria dos nossos alunos se sentem obrigados a cumprir), estamos de certeza a

despertar o interesse

que é a chave do verdadeiro sucesso. A perspicácia, a rapidez, o esforço, o prazer e, enfim, a aprendizagem necessários virão então de forma imperceptível e natural.

Geometria: como?

Desde Euclides (século II antes de Cristo) até Descartes (século XVII) que a Geometria que ensinamos aos alunos vem sendo apresentada como uma mistura de pontos, linhas e planos que se combinam entre si, que se combinam ainda com números, com coordenadas, com vectores e que depois se baralham e se distribuem mais ou menos aleatoriamente.

Temos consciência de que uma confusão generalizada está patente na cabeça de grande parte daqueles que diariamente lidam com estes problemas do Ensino e da Aprendizagem da Geometria. Não é por acaso que muitos professores de Geometria desenvolvem uma aversão, um desconforto ou uma insegurança pela verdadeira Geometria e se refugiam - numa pseudo analiticidade (chamando Analítica a essa forma de Geometria distante da verdadeira Geometria Analítica) - tomando como garantido o conjunto dos números reais, numa metodologia manipulativa de números e equações onde os problemas propostos são tratados independentemente uns dos outros, completamente desligados de uma **abordagem experimental.** Sabe-se, por exemplo, que:

os conteúdos curriculares de Geometria vão sendo - de uma forma que se prevê continuada e complementar em teoria, mas que, na prática, está fragmentada ao longo dos anos e, muitas vezes, distribuída por vários professores - ensinados aos nossos alunos; muitos desses alunos completam satisfatoriamente a escolaridade obrigatória; a maioria deles ingressa no Ensino Secundário e, apesar disto tudo

- não compreenderam que um quadrado com x metros quadrados de área não é um quadrado com x metros de lado;

- não sabem estimar perímetros, áreas ou volumes;

- não conhecem lugares geométricos básicos;

- não abordaram, nas suas aulas de Geometria, problemas impossíveis, ou com falta de dados ou ainda com demasiada informação, como os que os esperam diariamente fora da sala de aula;

- não conseguem raciocinar segundo um modelo lógico, quer indutivo quer dedutivo;

- não são críticos em frente dos conhecimentos que se lhes ministram;

- não colocam dúvidas pertinentes.

Por isto, sem um fio condutor lógico da inteira responsabilidade de todos os professores de Geometria que ensinam um determinado aluno, a Geometria dificilmente se tornará consistente e, muito menos, atraente, para o aluno comum.

É claro que são necessários muitos conhecimentos de Geometria antes de começarmos a "brincar" com eles. Daí que as referências iniciais deste programa de Geometria do 10º ano nos pareçam fundamentais:

> *este tema introduz-se a partir de actividades... (relativas a) situações concretas... partindo de modelos... cubo, tetraedro, octaedro, icosaedro e dodecaedro...*

E só depois se ensinará a Geometria Analítica. Historicamente foi Viète quem, por volta de meados do século XVI, usou pela primeira vez variáveis algébricas para simbolizar quantidades desconhecidas. Uma ideia simples e, no entanto, dificilmente seguida pela grande maioria dos nossos alunos do Ensino Secundário. Por exemplo:

Se a grande maioria dos nossos alunos escrevem, já na Universidade (depois de 12 anos de instrução básica de Matemática), que $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ *?*

então como podem alguma vez esses alunos perceber as curvas geométricas à custa das equações algébricas?

A disciplina que nasceu da extraordinária descoberta de Descartes - 50 anos depois de Viète - dá pelo nome de Geometria Analítica e apesar de utilizar variáveis algébricas é, em particular, essencial para a compreensão da "Análise Matemática" (estudo de funções). No entanto, a Geometria Analítica não tem necessariamente que se desligar **da intuição, do experimental ou do visual;** a Geometria Analítica nos dias de hoje pode retirar grandes vantagens do uso das calculadoras gráficas e dos programas (mais ou menos específicos e mais ou menos elaborados) de computadores portáteis; e, por outro lado, a verdadeira Geometria Analítica deverá entender-se tão **Geometria Algébrica** como **Álgebra Geométrica**. Por exemplo:

- tanto se pode representar, no plano cartesiano real, uma linha recta (ente geométrico) por uma equação do primeiro grau nas variáveis x e y (ente algébrico: $ax+by+c=0$, com a, b e c parâmetros reais);

- como se pode mostrar aos nossos alunos que equações nas variáveis x e y (entes algébricos) do tipo

$(x+y)^2=R$ ou $x^2+y^2=R$ ou $(x+y)x2=R$, com R parâmetro real

algebricamente semelhantes (são, como se sabe, frequentemente confundidas pelos nossos alunos) são distintas como se atesta facilmente representando-as geometricamente;

ou se pode ainda mostrar que a equação

$xy=R$, com R parâmetro real

é uma equação do segundo grau nas variáveis x e y, apesar de apresentar expoentes 1 (são, como também se sabe, frequentemente confundidas, pelos nossos alunos, com equações lineares a partir da identificação dos expoentes e porque não conseguem "associar" os monómios x e y); geometricamente a resposta é visualmente clara já que xy se pode representar como a área de um rectângulo de lados x e y da mesma forma que x^2 se pode traduzir geometricamente pela área de um quadrado de lado x, enquanto que $x+y$ é uma dimensão linear (passível de ser traduzida por um comprimento).

Mas os nossos alunos estão presentemente a sair das Escolas Secundárias directamente para as Universidades sem saberem, por exemplo, traçar linhas; apesar de terem sido "bombardeados" com fórmulas e receitas e manipulações algébricas repetidas vezes sem conta nas aulas, em casa ou com os explicadores privativos tão em voga entre os alunos de Matemática. Nem mesmo assim eles aprenderam esta Geometria que tanta gente lhes tentou ensinar.

Um aluno (do 10º ano de escolaridade) dizia-nos no final de uma aula sobre a "representação vectorial de uma recta que passa por um ponto e tem a direcção de um dado vector" e depois de haver tentado dizer ao seu professor que afinal *"porque é que uma recta agora já não passa por dois pontos..."*

a ideia que o meu professor de Matemática faz da Geometria é a de nos repetir que nós estamos redondamente enganados sempre que abrimos a boca...

Apesar de nem sempre ser esta a ideia que os alunos fazem do seu professor de Geometria a verdade é que é possível reformular-se o modo como se ensinam as Geometrias. Presentemente esse ensino é principalmente feito à custa da *repetição* (muitos exercícios do mesmo tipo) e da *mímica* (imitação do que o professor faz) onde são explorados *métodos mecânicos* - piores do que os de memorização simples - sem nunca se compreenderem. A alternativa, segundo Pierre van Hiele que citaremos mais à frente neste texto, é ensinar:

*em primeiro lugar os "**factos**", e só depois as **"propriedades**" e, finalmente, as "**relações**", partindo sempre da intuição e do experimental.*

Ora, sem as bases preconizadas no programa oficial de Geometria para o 10º ano, dificilmente se apreenderiam, em primeiro lugar os factos (revisão, eventualmente, das definições básicas) e depois se estabeleceriam as propriedades dos entes geométricos básicos (pontos, linhas e planos) para finalmente se conseguirem estabelecer as desejáveis relações pois, e ainda segundo van Hiele, a passagem de um nível de aprendizagem de Geometria para o outro só é possível depois de cumprir integralmente os requisitos do nível imediatamente anterior. Propõem-nos nos programas que, em linhas gerais, ensinemos geometria a partir dos factos e das propriedades antes de passarmos às "relações" e através de:

- processos de raciocínio geométrico individualizado,

- processos de descoberta à custa da visualização,

- métodos geométricos aplicados à Aritmética e à Álgebra em vez de métodos aritméticos e algébricos aplicados à Geometria,

- integração da Geometria Analítica em outras disciplinas,

- exploração das componentes gráficas, verbal e gestual (manipular, gesticular, observar).

No programa de matemática para o ensino Secundário, que temos vindo a referir, lê-se também que:

> *Tanto em geometria plana como em geometria do espaço todo o ponto de vista axiomático é excluído devendo a prática com as figuras ter um papel central e decisivo no ensino das noções matemáticas que estão em jogo. O professor deve propor actividades de construção, de manipulação de modelos e ligadas a*

problemas históricos fazendo surgir a partir do problema e do caminho que se faz para a sua resolução uma grande parte dos resultados teóricos que pretende ensinar ou recordar.

A exploração de programas adequados no computador pode ajudar eficazmente o aluno a desenvolver a percepção dos objectos do plano e do espaço.

Devem explorar-se sempre que possível as conexões da Geometria com outras áreas da Matemática e o seu desenvolvimento devem prolongar-se noutros temas.

Uma parte substancial da culpa na Aprendizagem da Geometria será, em última análise, imputada aos professores que têm, algumas vezes, poucos conhecimentos de Geometria e estão, a maior parte das vezes, pouco interessados nesse assunto.

Resta-nos pois, neste texto, e perante as explícitas orientações metodológicas presentes nos documentos oficiais, sugerir algumas actividades concretas de implementação destas directivas (o que fazemos na parte final desta brochura) e referir alguns cuidados teóricos presentes na abordagem dos temas de Geometria no 10º ano de escolaridade nas nossas Escolas Secundárias. Um estudo aprofundado destas raízes teóricas aconselha-se aos mais interessados em investigar o assunto e sumariaremos de seguida algumas directivas sob a forma de referências que, por razões distintas mas de alguma forma complementares, consideramos fundamentais em Didáctica da Geometria, nomeadamente:

1. Jean Piaget

Jean Piaget com os seus quatro **estágios** (sensório/motor, pré-operatório, concreto e formal) de desenvolvimento humano, baseados na idade cronológica dos indivíduos, tornou-se uma referência obrigatória quando, na sequência dos seus estudos clínicos - desenvolvidos principalmente com crianças brancas de classe média-alta na Suíça - concluía também que:

a ordem pela qual os conceitos "espaciais" (geométricos) são apreendidos é: primeiro os topológicos, depois os projectivos e finalmente os euclideanos.

Perceba-se, antes de mais, que tal ordem sugerida por Piaget e pelos seus seguidores é, em termos da evolução histórica da Matemática, exactamente a ordem inversa do aparecimento histórico das correspondentes geometrias (Grécia Clássica, Renascença e Revolução Industrial) mas, apesar disso, os estudos de Piaget serviram em particular para, na devida altura, justificarem profundas alterações curriculares em Geometria que também experimentámos em Portugal.

Parece-nos, neste momento, relevante salientar que existem interpretações diferentes da teoria de Piaget sobre o assunto da aprendizagem da Geometria mas, estudados os textos originais em vez dessas interpretações posteriores, ficamos, apesar de tudo, com a impressão de que a teoria de Piaget foi, talvez indevidamente, utilizada como justificação para o abandono, relativamente cedo, de materiais concretos de apoio às nossas aulas de Geometria.

Estudos posteriores têm vindo a mostrar que, na prática, tais materiais são indispensáveis em qualquer nível de Ensino - mesmo para alunos no estágio formal de desenvolvimento (Ensino Secundário) - e que, além disso, é perfeitamente possível encontrar alunos que, apesar de terem a mesma idade cronológica, se encontram no caso da aprendizagem da Geometria em estágios de desenvolvimento muito distintos. Sabemos hoje através de investigação validada que essa manipulação é não só desejável como defensável no ensino da Geometria em qualquer estágio de desenvolvimento humano.

Sabemos também que ao desenvolvimento baseado na maturidade (idade da pessoa) é já contraposto o desenvolvimento (segundo Vygotski, por exemplo) fundamentalmente baseado na instrução.

Resta-nos pois apresentar o motivo pelo qual decidimos referir Piaget nesta listagem de referências didácticas de relevo: o **método clínico** - “estudos de caso”. Este método de diagnóstico é, parece-nos, especialmente indicado numa metodologia de ensino da Geometria como a entendemos nos Programas oficiais. Trata-se de um estilo de estudo não estatístico que se baseia no estudo profundo de cada indivíduo (neste caso, de cada aluno) e na consequente caracterização individual. Tal método justificará, por exemplo, o interesse do professor por qualquer dúvida que surja na aula, independentemente desta ser ou não comum a mais do que um aluno; isto é, a importância das dúvidas nas aulas de Geometria não se pode medir em termos estatísticos mas sim em termos individuais. Uma metodologia de tipo “clínica” a ser implementada nas nossas aulas de Geometria contribuirá para o tão desejável desenvolvimento da **intuição geométrica**, característica esta que nos parece particularmente individualizada.

2. Vadim Krutetskii

Na sequência do que anteriormente referimos acerca de Piaget, justifica-se agora o aconselhamento do leitor para o estudo de uma obra ainda não muito divulgada mas que, acredita-se, pode a breve prazo contribuir para reformas curriculares em Matemática tão ou mais profundas do que as preconizadas pelo próprio Piaget. Este autor, tal como outros autores russos, defende a instrução como forma indispensável do desenvolvimento das capacidades dos alunos acreditando ainda que

> *as capacidades matemáticas não são inatas, desenvolvem-se à custa de instrução adequada...*

Krutetskii conduziu, durante 12 anos, uma investigação notável não só pela diversidade dos métodos que empregou no seu estudo como ainda pela variedade e pela riqueza dos problemas que utilizou. Há, por tudo isto, quem acredite que o seu trabalho poderá vir a ter, em Educação Matemática, um impacto muito grande. Trata-se, sem dúvida, de um trabalho muito mais relacionado com o desenvolvimento curricular em Matemática e, portanto, mais facilmente adaptável do que o do próprio Piaget. Krutetskii defende os seguintes quatro aspectos que, nos parecem, apresentarem ideias chave no Ensino da Geometria:

> *a) Qualquer aluno tem capacidades potenciais individuais em qualquer tópico... que não estão igualmente distribuídas em todos os tópicos e que são alteráveis por meio de instrução adequada... As capacidades não são inatas (não se herdam), desenvolvem-se ao longo da vida e do esforço de cada um... Qualquer criança normal, mentalmente saudável é capaz de ser ensinada e de aprender os programas escolares da educação secundária...*

Ou seja, está basicamente nas mãos do professor de Matemática a recuperação de cada aluno nas suas aulas já que **as capacidades matemáticas não são inatas**, alteram-se por meio de instrução (eventualmente individualizada) adequada.

> *b) A necessidade de uma aptidão especial para o estudo e a compreensão da Matemática é, frequentemente, exagerada... Capacidades humanas médias e ordinárias são suficientes para -* ***com uma boa supervisão e bons livros -*** *lidar com a Matemática do ensino (Básico e) Secundário.*

Ou seja, não existem alunos irrecuperavelmente perdidos para a Matemática já que capacidades humanas ordinárias bastam para a aprendizagem das matérias curriculares dos Ensinos Básico e Secundário de Matemática. A ênfase do sucesso está, por outro lado, colocada em bons livros e boa supervisão.

> *c) Na resolução de problemas em Matemática, reconhecem-se três estágios básicos de actividade mental:*
>
> *1- **recolha** da informação requerida para resolver o problema,*
>
> *2- **processamento** dessa informação por forma a obter uma solução e*

*3- **retenção** da informação relativa à solução.*

A cada um destes estágios corresponderão uma ou mais capacidades (exemplos: capacidade para desviar, sempre que necessário, a atenção; capacidade para encontrar soluções "elegantes"; capacidade para fixar relações, etc.).

Mais à frente, a respeito de G. Polya, explicitaremos o modo como se poderão atingir estes três estágios de actividade mental básica, nomeadamente com exemplos concretos de desenvolvimento de um modelo sistemático e ordenado de resolução de problemas em Geometria.

d) Na casta mental Matemática (tendência para interpretar o mundo que nos rodeia matematicamente) identificam-se três tipos:

1- Analítico - que tende a pensar em termos logico-verbais;

2- Geométrico - que tende a pensar em termos pictorico-visuais;

3- Harmónico - que combina características dos outros dois.

Ou seja, à partida podemos admitir três tendências básicas para fazermos uso da Matemática no mundo que nos rodeia: uma mais analítica, outra mais geométrica e finalmente uma do tipo harmónico. Ora, segundo Krutetskii, os nossos alunos deveriam ser instruídos no sentido de se tornarem **harmónicos**, isto é, combinarem um raciocínio analítico com um raciocínio geométrico e que melhor forma de se conseguir esta desejável harmonia que a de lidarmos com Geometria Analítica? O nosso desafio é pois o de, à custa dos conteúdos matemáticos da Geometria do 10º ano de escolaridade tornarmos os nossos alunos perfeitamente capazes de, consoante o problema que pretendem resolver, pensarem quer em termos analíticos quer em termos geométricos.

3. George Polya

Interessar os nossos alunos no nosso Ensino da Geometria é, na verdade, um desafio crucial para a aprendizagem desejável e o sucesso de todo o processo instrutivo. Entendemos, como já referimos atrás, que mais do que fórmulas e receitas, mais do que técnicas e truques mágicos, mais do que ditados e cópias, na Geometria existem, acima de tudo, ideias que os alunos deverão descobrir tanto quanto possível, sozinhos com a orientação adequada por parte do professor. Atrevemo-nos, por exemplo, a propor o recurso a imagens impressionantemente belas de Geometria dos Fractais para despertarmos o interesse dos nossos alunos para questões de Geometria.

Contudo, motivar nas aulas de Geometria duas ou três dezenas de alunos com interesses diversificados e expectativas distintas é uma missão que não tem, como seria de imaginar, nem resposta imediata nem sequer única, ou seja, não teremos pela frente um desafio fácil já que, hoje como há 2000 anos atrás, continua a ser verdadeira a afirmação que Euclides terá proferido como resposta ao rei Ptolomeu I:

Não há estrada real para a Geometria...

Temos, no entanto, a certeza de que tão importante tópico na formação dos nossos alunos merece um esforço de aperfeiçoamento didáctico e, eventualmente, científico por parte do professor que retirará toda a satisfação no sucesso dos seus ensinandos.

Para o sucesso desta missão importa então relembrar os dois primeiros mandamentos do professor de Matemática que George Polya enunciou sobre **o interesse e a sabedoria;** a primeira característica necessária e a segunda suficiente. Polya que nos seus textos se dirige ao leitor utilizando o discurso directo, dizia assim:

1º Mandamento: Estar interessado na matéria

acrescentando, mais à frente:

... há um único método de ensino que é infalível: se o professor estiver aborrecido com a matéria então toda a classe vai estar infalivelmente aborrecida também... se um assunto não despertar o interesse do professor então não deve ensiná-lo porque jamais será capaz de o fazer de uma forma aceitável.

Relativamente ao segundo mandamento, enuncia-o assim:

2º Mandamento: Saber a matéria

continuando depois da seguinte forma:

... o interesse é pois condição “sine qua non”, uma condição necessária, indispensável; mas, por si só, não é uma condição suficiente. Não há interesse nem

existem métodos de ensino que permitam explicar aos alunos um assunto que o professor não percebe de uma forma clara.

Polya apresenta também um "esquema" de resolução de problemas de Matemática suficientemente divulgado e, de resto, semelhante a outros esquemas que outros autores têm vindo a apresentar sobre o assunto e que a seguir reproduziremos pela sua especial aplicação ao caso da resolução de problemas em Geometria. O próprio Polya recorre muitas vezes a problemas de geometria para ilustração dos seus modelos que apelida de generalizáveis à Matemática e cuja leitura e estudo sugerimos ao leitor. As quatro fazes de resolução de um problema de Matemática, segundo Polya, são:

<u>1. Compreensão do problema</u>

Sobre a *compreensão* diremos que esta se deve desenvolver como um todo, isto é, interessa garantir que o aluno que vai resolver determinado problema consiga apreender todo o seu enunciado; dando ao aluno algum tempo para "interiorizar" o problema que lhe foi colocado, fazendo perguntas directas do tipo "o que é que pretendemos saber?" ou "quais os dados do problema?" ou ainda "que condições temos no problema?", o professor pode eficazmente perceber se o aluno compreendeu ou não o problema que se propõe resolver antes de começar a fazer cálculos ou a referir fórmulas, de forma anárquica, sobre o mesmo. Um bom treino para o desenvolvimento desta fase é o recurso a **problemas**, ditos, **de reconstrução**; *por exemplo*:

O aluno relembra um problema à sua escolha e a sua resolução; depois o professor altera o "desenho" drasticamente - dá-lhe outro sólido, roda a figura, altera as letras, etc. - e pede novamente ao aluno que resolva este "novo" problema, começando por estabelecer um enunciado apropriado.

<u>2. Estabelecimento de um plano</u>

Sobre o *estabelecimento de um plano* diremos que agora sim, pode fazer sentido "partir" o enunciado, reformulá-lo em termos mais simples por forma a, por exemplo, torná-lo semelhante a outro problema que já se resolveu; salientamos também o artigo indefinido que é utilizado nesta fase: "um"; o que significa que, eventualmente, existem muitos possíveis planos que se podem estabelecer e, portanto, o aluno deverá ser deixado livremente neste seu estabelecimento de "um" plano de resolução. Acrescentaremos ainda que esta segunda fase é, provavelmente, aquela que envolve mais trabalho sendo muito dele frequentemente mental e que, consequentemente, é de muito difícil avaliação. Um conselho para a avaliação desta fase é "impedir" os alunos de usarem apagadores e, em vez disso, passarem a traçar os planos que vão abandonando tendo sempre o cuidado de referirem o porquê desse abandono. Desta forma, os cadernos dos alunos podem - ainda que, aparentemente mais desorganizados - constituir instrumentos de estudo e de verdadeira revisão de matérias leccionadas de valor muito grande para o próprio aluno; serão, como facilmente se deduz, verdadeiros elementos de estudo individualizado. Um bom treino para o desenvolvimento desta fase é o recurso a **problemas com várias resoluções**; *por exemplo*:

Provar que existe uma única perpendicular a uma recta e que passa por um ponto exterior a esta.

3. Execução do plano

Sobre a *execução do plano* começaremos por referir que sendo, tradicionalmente, a fase mais realçada na resolução de problemas em matemática esta não é, na realidade, de forma alguma a mais importante; reveste-se, normalmente, de um carácter mecanicista e manual já que a manipulação mental já foi feita na fase anterior e a solidificação dos conhecimentos assim como a certeza desta execução serão atestadas na fase seguinte.

4. Verificação

Finalmente sobre a *verificação*, temos a impressão de que esta fase deveria revestir na prática comum de cada resolução de cada problema de geometria um carácter de “obrigatoriedade”. É nesta fase da resolução de problemas que, como referimos anteriormente, se consolidam conhecimentos, se estabelecem as certezas e também se descobrem novos problemas. Um bom treino para a implementação sistemática desta fase é o recurso a **sofismas geométricos** (problemas que, de alguma forma, parecem estar correctamente resolvidos, mas que se assim fosse significariam ser verdades coisas que sabemos serem falsas)**;** *por exemplo:*

Um desenho que “prove” que num dado ponto de uma recta se podem traçar DUAS perpendiculares a essa recta.

4. José Sebastião e Silva

O professor José Sebastião e Silva deixou-nos uma obra didáctica que consideramos obrigatória para qualquer pessoa que, nomeadamente em Portugal, esteja interessada no Ensino da Matemática. No seu “Guia para a utilização do Compêndio de Matemática” editado em 1975 pelo GEP, escrevia assim, nomeadamente sobre o **método heurístico** que defendemos no ensino da Geometria Analítica, em particular, e que nos absteremos de comentar por serem recomendações suficientemente claras:

O método heurístico (da descoberta) só ao princípio poderá parecer mais moroso... a criança que aprende a nadar com flutuadores, aprende na realidade mais devagar e pior ainda que ilusoriamente pareça aprender mais depressa...

Só errando se aprende verdadeiramente. Ai daqueles que não aprendem à custa da experiência própria...

O treino... não deve de modo algum confundir-se com mecanização (prática onde o aluno é habituado a não pensar)... por meio de receitas aplicadas sem conhecimento de causa.

Para o desenvolvimento do espírito crítico, é essencial encorajar o aluno à discussão livre e disciplinada...

O professor deve... estabelecer diálogos com os alunos e estimular a imaginação destes, de modo a conduzi-los... à redescoberta.

Alunos e professor devem assumir as aulas de uma forma descontraída que afaste, tanto quanto possível, a ideia da nota que irá ser atribuída no final do período.

5. Pierre van Hiele

Os cinco **níveis** teóricos de desenvolvimento em Geometria inicialmente propostos por Pierre van Hiele (**reconhecimento, análise, ordem, dedução e rigor**) não aparecem, na prática, necessariamente disjuntos. De resto o próprio autor posteriormente reduziu para três estes níveis por meio de uma junção dos três últimos. Para van Hiele *estes níveis são atingidos a partir de um ensino e de experiências de aprendizagem especializados* e não dependem, como para Piaget, de questões cronológicas de maturidade. Daí o estabelecimento de comparações entre esta teoria e a de autores russos, alguns dos quais já citados anteriormente.

Identificar-se-ão então os seguintes três níveis que, de acordo com a terminologia que já adoptámos anteriormente designaremos, para efeitos de aplicação directa aos conteúdos programáticos oficiais para o 10º ano de escolaridade (e não para a formação a longo prazo que van Hiele refere), por:

1º *Factos* - o aluno relembra (estuda coerentemente pela primeira vez, se for caso disso) as definições geométricas básicas a partir da exploração de actividades diversificadas como as que são referidas noutra secção deste texto; este reconhecimento será pois feito por meio actividades experimentais segundo uma metodologia heurística e com considerações visuais, verbais, gráficas, manipulativas e escritas, quando for caso disso;

2º *Propriedades* - O aluno estabelece uma análise - comparando, associando, dividindo, etc. das partes componentes e dos atributos dos entes geométricos de modo a chegar ao estabelecimento das propriedades;

3º R*elações* - O aluno chega finalmente às relações específicas entre a Álgebra e a Aritmética e a Análise com a Geometria; está então a aprender Geometria Analítica, utilizando um raciocínio lógico/dedutivo que não é obrigatoriamente formal.

Usar-se-ão sempre materiais diversificados e recorrer-se-á, sempre que se justifique, ao uso de calculadoras gráficas e/ou computadores.

A formação de conceitos geométricos faz-se, apesar desta adaptação específica que fizemos,

> *ao longo de períodos de tempo relativamente grandes e requerem um ensino específico;*

pelo que não pretendemos dizer que, no 10º ano de escolaridade, os alunos adquirirão todos os conhecimentos das formas geométricas, das suas propriedades e das suas relações. Afinal os alunos já passaram por 9 anos de escolaridade e, muitos deles, terão ainda mais alguns anos para serem instruídos em geometria. O que pretendemos transmitir aqui foi que é possível os alunos estejam, muito provavelmente, deficientes em conhecimentos geométricos elementares, justificando-se por isso um tratamento específico à custa da utilização dos mais diversos materiais e problemas concretos como diagnóstico desta situação e como alicerce para uma um "rigor" e um formalismo posteriores ao Ensino Secundário.

Avaliação

A avaliação desempenha um papel quase sempre preponderante na área do Ensino da Matemática e constitui um campo de problemas para professores e alunos.

Mudanças curriculares em Matemática trazem, como seria de imaginar, questões de avaliação subjacentes que, por sua vez, costumam desencadear as pressões e as forças que também dão origem a mudanças curriculares; isto é, trata-se de um círculo, em Educação Matemática, onde a avaliação é simultaneamente causa e efeito para as mudanças.

Ao longo deste texto temos, de uma forma implícita, sugerido formas de avaliação mais diversificadas do que as que tradicionalmente implementamos no nosso ensino; a Geometria é, em particular, um tópico fértil para a organização de projectos de investigação, elaboração de “portfolios”, implementação de avaliação informal, etc. cuja supervisão estará, como se espera, sempre a cargo do professor. Supervisor, orientador, educador e tutor são classificações desejáveis para o professor de Geometria que transmitem também, implicitamente, formas de avaliação menos formais do que as habituais e que consideramos de implementação desejável.

A fundamentação teórica sobre avaliação em Matemática é suficientemente abundante para que, à partida, a possamos relatar neste texto; resumimos então algumas das recomendações fundamentais que nos parecem poderem os professores de Geometria implementar, nomeadamente:

1. *A concepção da avaliação em Geometria como um processo público, participativo e dinâmico*; em vez de secreto, exclusivo e fixo.
2. *O uso dos resultados da avaliação para assegurar que cada aluno tenha oportunidade de desenvolver o seu potencial;* em vez de o comparar com os outros.
3. *A coerência da avaliação com o currículo e com a instrução;* em vez de a tratar como parte independente.
4. *O uso de múltiplas fontes de evidência;* em vez de considerar poucos dados quantificáveis para gerar os resultados da avaliação.
5. *A visão dos alunos como participantes activos;* em vez de objectos de avaliação.
6. *A consideração da avaliação como um processo contínuo e recursivo;* em vez de algo esporádico e conclusivo.

Sugerimos pois diversificadas formas de avaliação onde se

valore o melhor de cada aluno;

e onde se acentue a tendência para abarcar o máximo repertório possível das habilidades de cada aluno.

Bibliografia

Fernandes, Domingos (1994): *Das Prioridades de Investigação e de Formação às Práticas na Sala de Aula*; Revista Educação n.º 8 - Porto Editora.

Krutetskii, V. A. (1976): *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren;* The University of Chicago Press - London.

Piaget, Jean e Inhelder, B. (1967): *The Child´s Conceprtion of Space;* Routledge and Kegan Paul - London.

Piaget, Jean e Inhelder, B. e Szerminska, A. (1960): *The Child´s Conceprtion of Geometry;* Routledge and Kegan Paul - London.

Polya, George (1954): *Mathematics and Plausible Reasoning.* Princeton University Press.

Polya, George: *A Arte de Resolver Problemas: Um Novo aspecto do Método Matemático.* Editora Interciência - Rio de Janeiro.

Niss, M. (1993): *Cases of Assessment in Mathematics Education.* ICMI Study. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

Ralha, Elfrida (1991): *Didáctica da Matemática (perspectivas gerais sobre Educação Matemática)*. Universidade Aberta - Lisboa.

Serres, Michel (1997): *As Origens da Geometria.* Edições Terramar - Lisboa.

Silva, J. Sebastião (1975,1977). *Guia(s) para a utilização do Compêndio de Matemática para o Curso Complementar do Ensino Secundário;* edição do GEP - Lisboa.

Van Hiele, P. (1980): *Levels of Thinking, how to meet them, how to avoid them.* Artigo apresentado no Encontro do National Council of Teachers of Mathematics, Seattle.

Van Hiele, P. (1986): *Structure and Insight - A Theory of Mathematics Education.* Academic Press - New York.

Vermont Department of Education (1995): A Different Way of Looking at Math: The Vermont Mathematics Portfolio Project. Montpelier VDE.

GEOMETRIAS E SUA HISTÓRIA

1. Geometria e História da Geometria: porquê?

O ensino da geometria tem sofrido muitas vicissitudes nos últimos decénios, tanto a nível elementar como superior, e não apenas em Portugal. O resultado final de tais vicissitudes tem sido, genericamente, a impreparação de docentes e discentes para as coisas da geometria e a criação de um grande espaço vazio ou "terra de ninguém" onde pululam as mais variadas teorias sobre os conteúdos e os métodos mais adequados para colmatar as grandes falhas na formação geométrica que todos ou quase todos, entretanto, reconhecem como graves e a necessitar de reparação urgente.

Independentemente dos conteúdos programáticos dos *Guia*s elementares ou superiores, é certo, porém, que uma preparação adequada dos docentes passa por um estudo da(s) geometria(s) que contemple, pelo menos, os seguintes aspectos:

1. um pouco de História da Geometria e da sua relação com outras áreas matemáticas, nomeadamente a Álgebra elementar, desde as origens heurísticas (egípcios e babilónicos), passando pelo desenvolvimento e sistematização durante o período helenístico (axiomática de Euclides) e cobrindo, a traços largos, desenvolvimentos posteriores (o problema das paralelas) até ao descobrimento das geometrias não-euclidianas no século XIX;
2. o estudo, relativamente desenvolvido, de alguma apresentação moderna (axiomática) dos fundamentos da geometria euclidiana e, possivelmente, de elementos de alguma ou algumas geometrias não euclidianas, hiperbólica, esférica, projectiva, ... Em particular, é imprescindível o conhecimento dos resultados básicos sobre o papel do axioma de paralelismo (na versão de Playfair, para a geometria plana: *para toda a recta r e ponto P não em r, existe uma única paralela a r passando por P*), a congruência e a semelhança de triângulos e sobre circunferências e tangentes, ângulos inscritos, áreas e volumes elementares, etc., que são instrumentais nas aplicações e na resolução de inúmeros e variados problemas, bem como um pouco de geometria sólida;

3. o conhecimento funcional de estruturas geométricas concretas como as chamadas (modelos de) geometrias finitas e, muito particularmente, do plano e do espaço euclidianos, sob o ponto de vista analítico (isto é, da geometria analítica em tais espaços);
4. o conhecimento das transformações geométricas e seus grupos, no plano e no espaço euclidianos, suas propriedades, pontos e rectas invariantes e classificação.

Todavia, devemos ter em conta que a maioria dos actuais e futuros docentes de matemática não tiveram *Guia*s formativos que cobrissem todos os tópicos anteriores ou, sequer, uma percentagem significativa de tais tópicos, e não é certamente de esperar que os adquiram por excepcional intuição a partir dos fragmentos dispersos que podem consultar nos manuais escolares. Daí a necessidade imperiosa de investir algum esforço na aprendizagem autodidacta através de algumas leituras bem escolhidas.

Este Guia vai um pouco na sensibilização para essas faltas, sobretudo, nesta parte, no sentido de encaminhar o leitor interessado para algumas visitas guiadas a manuais e outros elementos de estudo criteriosamente escolhidos nos quais encontrará, para além das matérias científicas pertinentes, elementos de natureza lúdica, aplicações interessantes, e inúmeros problemas de diferentes graus de dificuldade para utilizar na sala de aula, na certeza de que a Geometria é a seara das mais ricas e gostosas colheitas.

2. Um pouco de história

2.1 Origens da geometria

A geometria tem origem provável na agrimensura ou medição de terrenos, no Egipto antigo, segundo o historiador grego Heródoto (Séc. V a.C.), mas é certo que muitas outras civilizações antigas possuíam conhecimentos de natureza geométrica, da Babilónia à China, passando pela civilização Hindu. O termo "geometria" deriva do grego *geometrein*, que significa medição da terra (*geo* = terra, *metrein* = medir).

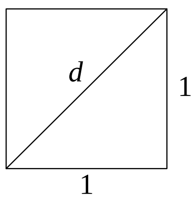
Em tempos recuados, a geometria era uma ciência empírica, uma colecção de regras práticas para obter resultados aproximados. Os babilónicos, entre 2000 e 1600 a.C., consideravam o valor de π (razão entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência) como sendo igual a 3, valor este que também se encontra mencionado em escritos chineses antigos e é utilizado por arquitectos romanos, apesar de alguns povos como os judeus e os egípcios conhecerem aproximações melhores, como $^{22}\!/_{7}$ e $\left(^{16}\!/_{9}\right)^2$.

Os geómetras egípcios acertavam, por vezes, no resultado correcto, como no caso do cálculo do volume de um tronco de pirâmide de base quadrada, outras vezes erravam grosseiramente, como na área de um quadrilátero convexo arbitrário, calculada como se fora um rectângulo [produto das semisomas das medidas dos lados opostos, que corresponde à fórmula $\frac{1}{4}\ (a+c)(b+d)$]. Os babilónicos eram bastante mais avançados que os egípcios em aritmética e álgebra e conheciam bem o famoso *Teorema de Pitágoras*, cuja primeira demonstração é atribuída aos pitagóricos muitos séculos mais tarde, e o seu recíproco.

Mas é sem dúvida com os geómetras gregos, começando com Táles de Mileto (c. 624-547 a.C.), que a geometria é estabelecida como teoria dedutiva. A intuição, a descoberta empírica e a experimentação têm o seu lugar, mas é o raciocínio dedutivo, a demonstração ou dedução a partir de hipóteses conhecidas ou admitidas que estabelece a veracidade das proposições geométricas. O trabalho de sistematização em geometria iniciado por Táles é continuado nos séculos posteriores, nomeadamente pelos pitagóricos. Pitágoras (c. 572–497 a.C.), após longas viagens pela Babilónia e Egipto, estabeleceu-se em Crotona, cidade grega no sul da Itália, por volta de 530 a.C., onde fundou um culto religioso e filosófico que cultivava a purificação do espírito através da música e da matemática. São mais conhecidas as descobertas e atribulações da escola pitagórica com os números, nomeadamente, com a descoberta dos incomensuráveis [a diagonal de um quadrado é incomensurável com o lado, o que quer dizer que a razão entre o comprimento da diagonal e o comprimento do lado não é exprimível como uma fracção de inteiros (positivos)] e o consequente descalabro da escola pitagórica. O poder (e a magia) dos números são elementos essenciais da crença pitagórica na racionalidade do universo mas, admitindo apenas inteiros (positivos) e suas razões [ou, como se diz modernamente, números racionais (positivos)], tal descoberta pôs em causa os fundamentos filosóficos da escola e determinou o seu encerramento. Como diz o historiador Proclo (410–485): «É sabido que o homem que primeiro tornou pública a teoria dos irracionais pereceu num naufrágio, para que o inexprimível e inimaginável nunca fosse revelado.»

Não existem documentos matemáticos de produção pitagórica, nem é possível saber-se exactamente a quem atribuir a origem das descobertas matemáticas dos pitagóricos na aritmética e na geometria, mas o essencial das suas contribuições geométricas consta nos *Elementos* de Hipócrates de Quios (o matemático, não o médico homónimo) por volta de 400 a.C., também perdido para a historiografia mas sistematizado nos Livros I a IV dos *Elementos* de Euclides um século mais tarde. A aritmética dos pitagóricos, por seu turno, está contida no livro VII do famoso tratado de Euclides, enquanto o livro V contém uma resolução do problema dos incomensuráveis com uma nova teoria das proporções atribuída a Eudóxio de Cnido (c. 408–355). Eudóxio é um dos maiores matemáticos da antiguidade, juntamente com Arquimedes, e um dos expoentes da Academia fundada por Platão (c. 429–347 a.C.) em Atenas no ano de 387 a.C.

Na *República*, Platão expõe a sua concepção da matemática como «uma actividade mental mais valiosa do que mil olhos, pois só através dela pode a verdade ser apreendida». Os sentidos só percepcionam sombras de coisas reais (alegoria da caverna). Para corrigir os erros dos sentidos, somente o pensamento dialéctico, exercitado através do estudo da matemática. Como exemplo pertinente de aplicação do método socrático, percursor do método indirecto (*reductio ad absurdum*) Platão citava a famosa demonstração de incomensurabilidade da diagonal do quadrado com o lado (que, modernamente, se exprime pela irracionalidade de $\sqrt{2}$).



$$d^2 = 2$$

Não existem inteiros positivos
m,n tais que d = m / n

Figura 1

A pertinência deste exemplo consiste na observação de que a referida incomensurabilidade nunca poderia ser descoberta a partir de observações ou medições experimentais, as quais estão sempre sujeitas a um erro maior ou menor. A matemática, portanto, é um produto do puro pensamento discursivo — as suas verdades são estabelecidas pelo raciocínio dedutivo e não pela verificação experimental. Isto não quer dizer, obviamente, que as noções e teorias matemáticas não sejam motivadas por, ou tenham aplicações em coisas práticas, mas apenas que estes aspectos são em algum sentido estranhos aos requisitos e critérios matemáticos intrínsecos. Esta concepção é exemplarmente desenvolvida pelo discípulo da escola platónica, Euclides de Alexandria (c. 323–285 a.C.), no tratado *Elementos*, em treze volumes ou livros publicado por volta de 300 a.C. Euclides baseia-se nos seus predecessores gregos: os pitagóricos, nos livros I–IV, VII e IX, Arquitas no livro VIII, Eudóxio nos livros V, VI e XII e Taeteto nos livros X e XIII. Mas Euclides não se limita a expor as teorias destes mestres. No que respeita à geometria, Euclides organiza as matérias de um modo sistemático a partir de primeiros princípios e definições, procedendo ao desenvolvimento por via dedutiva. Inaugura assim, de maneira brilhante que domina o mundo matemático durante mais de vinte séculos, o chamado *método axiomático*. Analisaremos com mais pormenor o trabalho de Euclides na secção seguinte. Terminamos esta secção com algumas referências a outros grandes matemáticos do período helenístico.

Arquimedes de Siracusa (c. 287–212) é o segundo grande matemático da chamada primeira escola de Alexandria. Os seus escritos são em regra concisos, mas plenos de originalidade. A sua obra prima é o tratado *Da esfera e do cilindro* contendo, entre outros, o célebre resultado de que a razão entre as áreas da superfície de uma esfera e de um cilindro no qual a esfera está inscrita é igual a $2/3$, e é também igual à razão entre os respectivos volumes. Num importante documento escrito, na forma de uma carta dirigida a Eratóstenes (bibliotecário no Museu de Alexandria) recuperado num antiquário em 1887, publicado em 1906 por Heiberg e conhecido por *O Método*, Arquimedes descreve como descobria os seus resultados. Os argumentos que utilizava — decomposição de superfícies e sólidos em faixas ou fatias infinitesimais e sua colocação judiciosa nos pratos de uma alavanca interfixa, entre outros — são percursores das técnicas sofisticadas do cálculo integral moderno. Num desses argumentos, sendo conhecidos o volume do cone e do cilindro de bases circulares, Arquimedes equilibra uma esfera e um cone circular (com altura e raio da base iguais ao diâmetro da esfera) com quatro cilindros circulares (também com altura igual ao diâmetro da esfera e raio da base igual ao raio da esfera) para deduzir a fórmula do volume da esfera $(V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3)$.

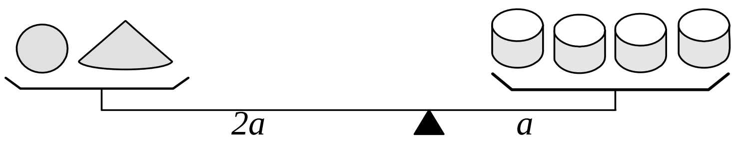


Figura 2

Todavia, Arquimedes não confia no rigor justificativo dessas técnicas, por isso, ao publicar os seus resultados, fá-los acompanhar de demonstrações no estilo euclidiano clássico, usualmente pelo método de exaustão e compressão (uma dupla redução ao absurdo).

Um exemplo de uma heurística infinitesimal (utilizada por Kepler no séc. XVII) para descobrir a relação entre a área (A) e o perímetro (P) de um círculo de raio r é a seguinte. Imagine-se um polígono regular inscrito na circunferência do círculo com um número muito grande de lados, e tirem-se raios do centro da circunferência para os vértices, formando um número igual de pequenos triângulos cujas bases são os lados do polígono. Se o número de lados for infinitamente grande[1], cada lado é infinitamente pequeno, o polígono confunde-se com a circunferência e a altura de cada triângulo confunde-se (é infinitamente próxima de) com o raio r da circunferência. Assim, a área de cada triângulo é praticamente igual a

$$\frac{1}{2} \times (base) \times (altura) = \frac{1}{2} \times (base) \times r \,,$$

a área da região poligonal é a soma das áreas de todos estes triângulos e confunde-se com a área do círculo.

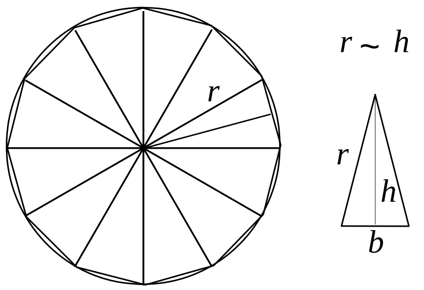


Figura 3

Ora, somando todas as áreas triangulares, a soma das bases dá o perímetro P da circunferência, donde $A = \frac{1}{2} \times P \times r$. O resultado está correcto!

---

[1] Entidades numéricas infinitamente grandes e pequenas (infinitesimais) foram utilizadas heuristicamente desde a antiguidade, e especialmente durante os séculos XVII e XVIII pelos matemáticos que precederam e pelos que contribuíram para o estabelecimento e desenvolvimento do cálculo infinitesimal modernos, como Newton, Leibniz, Euler, etc. O seu estatuto ontológico foi sempre objecto de dúvida e polémica e, na segunda metade do século XIX, durante a chamada rigorização ou aritmetização da Análise, foram postos de lado a favor da teoria dos limites. Todavia, durante a década de 60 teve lugar a sua reabilitação e justificação rigorosa na chamada *Análise Não-standard* criada pelo matemático e lógico A. Robinson.

O terceiro expoente da primeira escola de Alexandria é Apolónio de Perga (c. 262–190), um quarto de século mais novo do que Arquimedes. Apolónio estudou e permaneceu em Alexandria, tendo sido cognominado "O Grande Geómetra" pelo seu tratado *Cónicas*, a última obra prima da matemática grega em oitos volumes, dos quais apenas o último chegou até nós. Num outro trabalho, *Tangências*, discute o seguinte problema, que ficou célebre: dadas três figuras planas, cada uma das quais é um ponto, uma recta ou uma circunferência, determinar as circunferências tangentes às três figuras dadas.

O período áureo da matemática grega declina a partir do terceiro século a.C., particularmente após a morte de Ptolemeu III em 221 a.C. e a agitação política e social que culmina com a destruição parcial do museu/biblioteca de Alexandria. Nos três séculos seguintes são apenas dignos de menção pelas suas contribuições matemáticas Hiparco de Niceia (c. 180–125 a.C.), astrónomo e fundador da trigonometria, por necessidade de ofício, e o geómetra Menelau de Alexandria, já no final do primeiro século da era cristã. No século II desta época são de mencionar o astrónomo Claúdio Ptolemeu, cujas obras *Almageste* e *Geografia* dominam os estudos astronómicos durante muitos séculos. Entre 250 e 350 assiste-se a um ressurgimento dos estudos matemáticos em Alexandria, com Herão, matemático, físico e comentador dos *Elementos*, Diofanto, autor da *Aritmética*, e Papo, outro comentador de Euclides e historiador da geometria. Mencionem-se ainda Teão (c. 364), editor dos *Elementos*, a sua bela e desventurada filha Hipácia (370–415), comentadora dos trabalhos de Apolónio, Ptolemeu e Diofanto, vítima do fanatismo cristão inflamado por Cirilo, patriarca de Alexandria e, finalmente, Proclo (410–485) que estudou em Alexandria mas mudou para Atenas, tornando-se director da Academia. O seu comentário ao livro I dos *Elementos* contém valiosa informação sobre a história da geometria pré-euclidiana. O último director da Academia ateniense foi Damasco que, com o seu discípulo Simplício, conseguiu fugir para Bagdade quando o imperador Justiniano encerrou aquela instituição em 529, alegadamente por motivo do ensino pagão e perverso que aí se ministrava. Esse ano marcou o início da Idade das Trevas.

2.2 A Geometria de Euclides

O *quadrivium* era constituído pelas disciplinas de Aritmética, Harmonia (matemática da música), Geometria e Astrologia, que toda a pessoa culta devia estudar, desde finais da era dos pitagóricos. Euclides escreveu sobre todos estes assuntos, sendo os *Elementos* a parte da sua obra que contempla a aritmética e a geometria. Embora os *Elementos* tenham algumas deficiências lógicas, pelos padrões actuais, tais deficiências passaram despercebidas durante mais de dois milénios. O movimento crítico iniciou-se talvez nos finais do séc. XVII, com John Wallis (1616–1703), continuando um pouco difuso durante o século seguinte, com o abade jesuíta Saccheri (1667–1733) e os matemáticos Lambert (1728–1777) e Gauss (1777–1855), mas é já bem dentro do século XIX que a crítica a Euclides se assume até às últimas consequências, culminando quer na proposta de geometrias alternativas (Bolyai, Lobachewski, Riemann), quer numa completa revisão dos fundamentos da geometria euclidiana (Pasch, Pieri, Hilbert), quer ainda no surgimento de novas concepções sobre a classificação das geometrias (Félix Klein). A par destas críticas e inovações, mudou também a concepção dos matemáticos sobre a natureza da matemática e a metodologia das teorias matemáticas. Nada disto retira valor à monumental obra de Euclides. Como dizem Borsuk e Szmielew: «Se o valor de um trabalho científico pode ser medido pelo tempo durante o qual se mantém a sua importância, então os *Elementos* de Euclides são a obra científica mais válida de todos os tempos.»

Como a maioria dos treze livros que compõem os *Elementos*, o Livro I começa com uma lista de definições (23, ao todo) sem qualquer comentário. Na realidade, as primeiras definições da lista são simplesmente explicações ou descrições para benefício do leitor, que não chegam a ser utilizadas posteriormente. Euclides utiliza o termo "linha" no sentido englobante de "linha curva" (de comprimento finito), e "linha recta" onde diríamos "segmento". Algumas outras diferenças podem ser assinaladas: o que Euclides chama "triângulo" chamamos actualmente "região triangular", define "círculo" mas refere-se a "circunferência" (linha que limita um círculo) sem ter dado a definição, etc. Reproduzimos apenas algumas das referidas definições, modernizando e comentando quando possível a terminologia em inserções contidas entre "[ ]". Mais adiante, os termos geométricos que utilizamos neste *Guia* serão objecto de definições próprias. Chama-se a atenção para o facto de a geometria de Euclides exposta nos *Elementos* ser uma geometria sintética, quer dizer, sem números (v. adiante).

<u>2.2.1 Algumas definições de Euclides</u>

1. Um ponto é o que não tem partes.
2. Uma linha é uma extensão sem largura.
3. As extremidades de uma linha são pontos.
4. Uma linha recta [segmento] é uma linha que assenta a direito com os pontos sobre ela.
5. ...
6. Um ângulo plano é a inclinação entre duas linhas num plano que se encontram [numa extremidade comum] mas não estão contidas numa linha recta.
7. E quando as linhas contendo o ângulo são linhas rectas, o ângulo diz-se rectilíneo.
8. Quando uma linha recta cai numa linha recta de modo a fazer iguais os ângulos adjacentes, cada um dos ângulos diz-se recto, e a linha recta que cai sobre a outra diz-se perpendicular a ela.
9. Um ângulo obtuso é um ângulo maior do que um ângulo recto.
10. Um ângulo agudo é um ângulo mais pequeno do que um ângulo recto.
11. ...
12. Um círculo é uma figura plana limitada por uma linha de tal modo que todas as linhas rectas que caem nela partindo de um mesmo ponto situado dentro da figura são iguais.
13. E o ponto é chamado o centro do círculo [e a linha que limita o círculo é uma circunferência, e as linhas rectas que caem nela partindo do centro são os raios].
14. Um diâmetro de um círculo é uma linha recta passando pelo centro do círculo e terminando na circunferência do círculo, bissectando o círculo.
15. ...
16. Linhas rectas paralelas são linhas rectas que, contidas num mesmo plano e prolongadas indefinidamente em ambos os sentidos jamais se encontram.

Nas definições que omitimos Euclides define superfície, semicírculo e diversas figuras rectilíneas como triângulos e quadriláteros de diferentes formas. Euclides reconheceu a necessidade de *proposições primitivas* (isto é, não demonstradas — v. adiante) mas não de conceitos primitivos, isto é, não definidos, por isso deu as definições que precedem. Todavia, como é aparente, as primeiras sete, pelo menos, não seriam consideradas definições no sentido moderno e, curiosamente, não são utilizadas por Euclides em nenhuma ocasião.

2.2.2 Postulados e Noções Comuns

A seguir às definições, no Livro I, aparecem os Postulados e as Noções Comuns ou Axiomas, por esta ordem. Os Postulados são proposições geométricas específicas. "Postular" significa "pedir para aceitar". Assim, Euclides pede ao leitor para aceitar as cinco proposições geométricas que formula nos Postulados. Os três primeiros são, na realidade, construções com régua e compasso. A régua é o "instrumento" que efectua a primeira construção, e o compasso é o "instrumento" que efectua a construção referida no terceiro postulado. Visto de outra maneira, podemos dizer que os postulados 1 e 3 fornecem-nos os instrumentos básicos de toda a geometria de Euclides — a régua (não graduada) e o compasso. Apenas podemos conjecturar por que razão Euclides apenas considerou estes dois instrumentos, quando matemáticos anteriores e posteriores a ele consideraram também outros instrumentos: eram tudo quanto Euclides necessitava para a teoria básica ou "elementar" dos *Elementos*.

1. Construir uma linha recta de um ponto a outro ponto.
2. Prolongar continuamente uma linha recta numa linha recta.
3. Construir um círculo [uma circunferência] com centro e raio dados.
4. Todos os ângulos rectos são iguais.
5. Se uma linha recta cai em duas linhas rectas de forma a que os dois ângulos internos de um mesmo lado sejam [em conjunto, ou "soma"] menores que dois ângulos rectos, então as duas linhas rectas, se forem prolongadas indefinidamente, encontram-se num ponto no mesmo lado em que os dois ângulos são menores que dois ângulos rectos.

Os comentários que têm sido feitos a estes postulados ao longo dos séculos encheriam um grosso volume, particularmente no que respeita ao termo "continuamente" no segundo postulado e especialmente no que respeita ao último, chamado o *postulado de paralelismo* (de Euclides). O quarto postulado é notável, na sua aparente simplicidade, pois encerra o significado profundo da "homogeneidade" do espaço: os ângulos rectos num certo lugar (digamos, no planeta Terra) são iguais aos ângulos rectos noutro lugar qualquer (digamos, na Lua). Visto de outra forma, Euclides pretende estabelecer um ângulo padrão ou unidade fundamental para os ângulos. O termo "iguais" aqui utilizado (bem como na definição 15) deve ser entendido de um modo especial, que modernamente é expresso pelo termo "congruentes" e, no ensino elementar, costuma ser expresso pelo termo "geometricamente iguais": significa intencionalmente "mesma forma e grandeza" (o que quer que seja que isto significa).

Aos postulados seguem-se as Noções Comuns ou Axiomas. São cinco proposições supostamente de conhecimento geral e universalmente aceites. As três primeiras são de natureza lógica (como “coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais”). A quarta (“coisas que coincidem uma com a outra são iguais”) tem sido considerada como contendo implícita a ideia de movimento rígido que permite a Euclides deslocar (mentalmente) as figuras de uma posição para outra sem alterar forma ou dimensões de modo a que, em caso de sobreposição, elas se consideram "iguais". Finalmente, a quinta (“o todo é maior do que a parte”) não é problemática desde que se limite às aplicações que Euclides tem em vista ou a grandezas físicas como medidas de segmentos, ângulos, áreas e volumes. Ela não se aplica, por exemplo, aos cardinais de conjuntos infinitos, mas esta é uma aplicação que estava de todo fora do pensamento de Euclides.

2.2.3 Proposições do Livro I

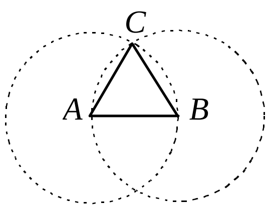
Às Noções Comuns seguem-se quarenta e oito Proposições, a maioria das quais (mas não as respectivas demonstrações) dataria dos tempos primórdios da matemática grega. A existência de pontos é assumida tacitamente, constituindo, por isso, uma fonte de crítica dos comentadores modernos. A existência de linhas rectas [segmentos] e de círculos [e circunferências] é assegurada pelos postulados. Para além destas entidades básicas, a existência tem de ser demonstrada. Euclides sabia que a definição de uma entidade não implica a sua existência. As três primeiras proposições são outros tantos problemas ou construções. Ao enunciado segue-se a demonstração (construção) da entidade requerida.

I.1. *Sobre uma linha recta dada, construir um triângulo equilátero.*

I.2. *Aplicar num ponto dado (como extremidade) uma linha recta igual a uma linha recta dada.*

I.3. *Dadas duas linhas rectas desiguais, separar da maior uma linha recta igual à mais pequena*.

A demonstração de Euclides da Proposição I.1 é a mesma que fazemos, hoje em dia, excepto num ponto, literalmente falando: nenhum postulado de Euclides permite justificar que as duas circunferências se cortam de facto! Aqui, como em outras circunstâncias, Euclides parece basear-se na intuição sobre as figuras geométricas desenhadas, para justificar a construção efectuada. Isto é uma falha grave. Na realidade, nas versões modernas da Geometria Euclidiana (a não confundir com a geometria de Euclides exposta nos *Elementos*!), só é possível demonstrar rigorosamente o referido teorema bem para diante, após o estudo das propriedades de continuidade das figuras geométricas. A existência dos pontos de intersecção das duas circunferências é um facto não trivial que envolve considerações totalmente ausentes nos *Elementos*. Euclides utiliza o termo "iguais" com diferentes significados, ao longo dos *Elementos*, e cabe ao leitor moderno desta obra distinguir uns significados de outros, conforme o contexto.



Proposição I.1

Hip: dado o segmento [AB].

Tese: construir C tal que o [ABC] é equilátero.

Figura 4

A proposição I.2 seria enunciada, hoje em dia, do seguinte modo: *Dados um segmento* [BC] *e um ponto* A, *existe um ponto* D *tal que* [AD] *é congruente com* [BC]. Uma aplicação desta proposição resulta numa extensão da utilização do compasso dado pelo postulado 3. Com efeito, para construir uma circunferência, este postulado exige que seja dado um ponto (o centro) e outro ponto ou um raio — é um compasso colapsível, que só pode ser usado uma vez com aquele centro e ponto ou raio. Mas, por I.2, já bastará dar o centro e outra linha recta (isto é, um segmento) qualquer, pois podemos sempre construir um raio "igual" à linha recta dada. Vem a propósito referir que, modernamente, em matemática, "existência" não é sinónimo de "ser possível construir". Todavia, as demonstrações de existência de Euclides (aquelas que ele faz) são todas construtivas, quer dizer, mostram como construir, com régua e compasso, as entidades que se afirma existirem.

O "jogo" das construções com régua e compasso é um dos mais antigos e interessantes, tendo aliciado muitos matemáticos e amadores de todas as épocas. Interessantes pelo desafio que colocam, importantes pelas questões de fundo que revelam. Três problemas clássicos desafiaram os melhores matemáticos durante séculos, a saber:

1. *O problema da quadratura do círculo:* construir um quadrado com área igual a um círculo dado;
2. *o problema da trissecção de um ângulo arbitrário:* dividir um ângulo qualquer em três partes iguais;
3. *o problema da duplicação do cubo:* construir a aresta de um cubo com o dobro do volume de um cubo dado.

A dificuldade destes problemas está na imposição feita aos métodos ou instrumentos admissíveis para a sua resolução: régua (não graduada) e compasso, em conformidade com o *princípio da parcimónia* de Platão. Sem esta restrição, muitas foram as soluções encontradas, utilizando os mais variados instrumentos (curvas especiais como a *Quadratriz* de Hípias, etc.), alguns concebidos de propósito para esse fim. Todavia, com a restrição referida, nunca ninguém conseguiu resolver um só dos três problemas. O que impedia a sua resolução não era, porém, a falta de empenhamento ou de engenho, mas sim o facto, desconhecido, da sua impossibilidade. Efectivamente, o desenvolvimento da Álgebra e da Análise durante o século passado permitiu demonstrar que aquelas construções são impossíveis de realizar com os instrumentos referidos. Regressemos, por agora, à descrição dos *Elementos* de Euclides.

A proposição I.4 que enunciamos a seguir é modernamente conhecida por Teorema *Lado-Ângulo-Lado* (abreviadamente: LAL) por razões óbvias.

I.4. *Se dois triângulos têm dois lados iguais a dois lados, respectivamente, e os ângulos neles contidos iguais, então também têm o outro lado igual ao outro lado, os triângulos são iguais, e os restantes ângulos são iguais aos restantes ângulos, respectivamente, nomeadamente, os que são opostos aos lados iguais.*

Esta é a primeira proposição do Livro I que não depende das três construções que a precedem. Não é explícito o que Euclides entende por ângulos iguais, nem por triângulos iguais. Além disso, a demonstração de Euclides assume tacitamente que uma linha, num dado plano, tem dois lados (semiplanos), o que é uma propriedade de separação no plano tornada explícita somente no século XIX, e utiliza a ideia de sobreposição supostamente validada pela Noção Comum 4. Na realidade, é antes uma espécie de recíproca desta Noção Comum que parece estar em jogo, e que não é fácil de precisar. As axiomáticas modernas para a Geometria Euclidiana contornam a dificuldade admitindo (LAL) como um axioma. A versão moderna desta proposição é a seguinte, utilizando o símbolo "≡" para exprimir congruência (de segmentos, de ângulos e de triângulos). A definição de triângulos congruentes contém a última parte do enunciado correspondente a I.4 [em triângulos congruentes, lados homólogos (quer dizer: correspondentes) são congruentes e ângulos homólogos são congruentes].

<u>Teorema</u> (Critério LAL, Euclides I.4) *Dados os triângulos* ΔABC *e* ΔDEF*, se* [AB] ≡ [DE], $\angle$BAC ≡ $\angle$EDF *e* [AC] ≡ [DF], *então* ΔABC ≡ ΔDEF[2].

Há outras falhas e omissões em Euclides que têm de ser compensadas, e foram-no efectivamente nas axiomáticas modernas. Fundamental, também, é a relação *estar (situado) entre*, instrumental, por exemplo, na definição sintética de segmento: o segmento [AB] é o conjunto dos pontos A, B e todos os pontos P tais que P está entre A e B[3].

Damos um salto na descrição do Livro I, para as proposições I.27 e I.28, que envolvem a noção de paralelismo de linhas rectas (num plano). Nestas proposições Euclides enuncia o chamado *Teorema dos Ângulos Alternos-Internos* e um seu corolário. É o teorema que diz que *se dois ângulos alternos-internos* (v. Figura 5) *determinados por duas linhas rectas (r e s) e uma transversal comum (t) forem iguais, então as duas linhas rectas são paralelas.* Este teorema é utilizado, por exemplo, para construir uma paralela a uma linha recta dada (construindo *t* perpendicular a *r* e, depois, *s* perpendicular a *t*, de tal modo que os dois ângulos alternos internos são rectos).

Até aqui, Euclides nunca utilizou o postulado 5. É na demonstração da proposição I.29 (a recíproca de I.27), que aquele postulado é utilizado pela primeira vez, diz-se que com alguma relutância. Esta proposição afirma que *se as rectas r e s com transversal comum t forem paralelas, então os ângulos alternos-internos são iguais* [implicação $r \parallel s \Rightarrow a = b$ na figura].

---

[2] Note que a notação ΔABC ≡ ΔDEF pressupõe tacitamente que a correspondência entre os vértices é A↔D, B↔E, C↔F. Isto determina a correspondência entre os restantes elementos dos triângulos: o lado [AB] corresponde ao lado [DE], o ângulo $\angle$A corresponde ao $\angle$D, etc.

[3] Escreve-se A-P-B para exprimir que P está entre A e B.. Usando a distância euclidiana, esta noção pode-se definir por A≠B e AB = AP + PB. Denotamos por PQ o comprimento do segmento [PQ].

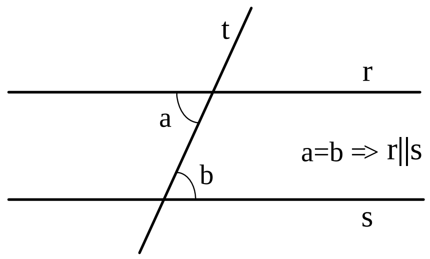


Figura 5

Nenhuma outra proposição matemática foi tão controversa ao longo dos séculos como aquele postulado, mas esta história merece ser tratada numa secção à parte.

O Livro I termina com as proposições I.47, o famoso Teorema de Pitágoras, e a sua recíproca I.48 (tantas vezes mais útil). Vale a pena recordar o enunciado original da primeira.

<u>Teorema de Pitágoras</u> (Euclides I.47) *Em triângulos rectângulos, o quadrado sobre o lado oposto ao ângulo recto é igual aos quadrados sobre os lados contendo o ângulo recto.*

Aqui, o termo "igual" é utilizado com um novo significado (introduzido, aliás, na proposição I.35 sem qualquer aviso prévio), significando, numa primeira aproximação, "igual em área" (o termo moderno é "equivalente"). Mas devemos ter cuidado e não pensar que isto quer dizer exactamente o mesmo que hoje em dia. Por exemplo, quando Euclides diz "quadrado" está a pensar mesmo num quadrado geométrico e não no quadrado do comprimento do lado. Com efeito, não devemos perder de vista que a geometria de Euclides é uma *geometria sintética*, como já se disse, e se é verdade que muitos jovens do ensino secundário e seus professores são capazes de demonstrar facilmente (?) o teorema pitagórico na versão numérica habitual, já é duvidoso que conheçam a demonstração de Euclides! Nas proposições I.35 a I.46 Euclides prepara pacientemente o caminho que conduz ao teorema pitagórico pelo método de dissecção de uma figura em "pedaços", que podem ser reagrupados para produzir uma outra figura equivalente (isto é, com a mesma área). Desta proposição existem, aliás, mais de três centenas de demonstrações.

A figura que acompanha a demonstração de Euclides é a seguinte.

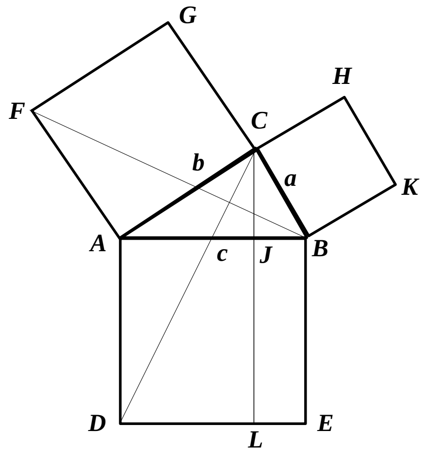


Figura 6

2.3 O problema das paralelas

Como se disse anteriormente, o quinto postulado de Euclides foi, desde o início, objecto de polémica, principalmente por não possuir, aparentemente, o mesmo grau de "evidência" que os restantes postulados. Observe-se que, até há pouco mais de cem anos, a "auto-evidência" (digamos física) de um postulado era uma condição necessária da sua aceitação. Euclides somente o utilizou da Proposição I.29 em diante. A geometria de Euclides sem o quinto postulado é chamada *geometria absoluta*. Próclo (410-485), cujos comentários constituem uma das principais fontes de informação sobre a geometria dos gregos, criticou aquele postulado nos termos seguintes: «Este postulado deve ser mesmo riscado da lista, pois é uma proposição com muitas dificuldades que Ptolemeu, num certo livro, se propôs resolver... A asserção de que as duas linhas rectas, por convergirem mais e mais à medida que forem sendo prolongadas, acabam por se encontrar, é plausível mas não necessária.»

Como ilustração do seu pensamento, Próclo dá o exemplo de um ramo de hipérbole que se aproxima mais e mais da assimptota sem nunca a encontrar. O exemplo pode não convencer algumas pessoas que objectam que o referido ramo de hipérbole não é "rectilíneo". Todavia, haveria que definir "rectilíneo" com precisão, o que não é fácil nem foi feito na antiguidade, e a solução moderna (em geometria diferencial) não vem refutar o exemplo como se poderia julgar. Em todo o caso, o que é importante assinalar é que o comentário de Próclo permite imaginar conclusões e desenvolvimentos diferentes dos de Euclides — a possibilidade antevista por Próclo é possível na geometria hiperbólica!

Próclo acrescenta: «É claro, portanto, que devemos procurar uma demonstração da presente proposição, e que esta é estranha ao carácter especial dos postulados.» Bem se procurou demonstrá-lo, ao longo dos séculos. É claro que, para ser convincente, uma demonstração do quinto postulado deve ser conduzida sem ele, isto é, na geometria absoluta. E se fosse possível demonstrá-lo nesta geometria, então esta geometria compreenderia toda a geometria de Euclides. Todas as tentativas, por matemáticos de todas as grandezas e épocas foram goradas mas, em geral, alguma coisa nova se aprendeu com cada fracasso. Mais precisamente, a detecção do "erro" traduziu-se, quase sempre, na descoberta de uma proposição que se revelou ser equivalente ao postulado 5, proposição essa que, inadvertidamente ou tacitamente os geómetras introduziram nos seus argumentos.

A primeira tentativa de que há conhecimento é a de Cláudio Ptolemeu de Alexandria (nada a ver com a dinastia ptolemeica). O argumento de Ptolemeu peca por circularidade, pois ele admite que não pode existir mais de uma paralela a uma linha recta dada, suposição esta que é equivalente ao que ele queria demonstrar. Com efeito, a *existência* de paralelas é demonstrável na geometria absoluta [postulados 1 a 4] — é a *unicidade* que é a fonte de todos os problemas. Próclo tenta corrigir o argumento de Ptolemeu , mas o argumento de Próclo, como o de Ptolemeu, é circular.

2.4 Tentativas modernas e o aparecimento das geometrias não-euclidianas

Os exemplos acima ilustram o cuidado que devemos ter ao lidar com a noção de paralelismo. As imagens ou visões que possuímos sobre duas rectas paralelas apenas podem ser justificadas na geometria euclidiana. Em particular, a noção de paralelismo é sintética, não métrica: num dado plano, as rectas r e s são *paralelas*, e escreve-se $r \| s$, se e só se $r = s$ ou r e s não têm pontos comuns. *Só na geometria euclidiana é que paralelismo é equivalente a equidistância*, e só pelo confronto com alternativas não-euclidianas é possível entender bem o que é, realmente, a geometria euclidiana. Do mesmo modo que os astros, no firmamento, só são visíveis à noite, graças ao contraste luminoso.

Mencionemos outro exemplo de uma tentativa frustada de contornar o postulado 5 de Euclides, desta feita por John Wallis (1616-1703), matemático britânico antecessor de Isaac Newton. Wallis desistiu da pretensão de demonstrar o postulado de paralelismo de Euclides na geometria absoluta, mas propôs substituí-lo por outro mais plausível a partir do qual fosse possível demonstrar aquele. Assim, removiam-se as objecções ao quinto postulado e nada se perdia da geometria de Euclides. O postulado que Wallis propôs é o seguinte:

<u>Postulado de Wallis</u>: *Dados um triângulo* ΔABC *e um segmento* [DE], *existe um triângulo* ΔDEF *semelhante ao triângulo dado.*

Dois triângulos dizem-se *semelhantes* sse[4] for possível estabelecer uma bijecção entre os respectivos vértices de tal modo que ângulos homólogos (ou correspondentes) são congruentes.

Prova-se, na geometria euclidiana, que em triângulos semelhantes, lados homólogos (ou correspondentes) são proporcionais. Na figura seguinte está esquematizado o que isto significa, modernamente, em termos numéricos[5].

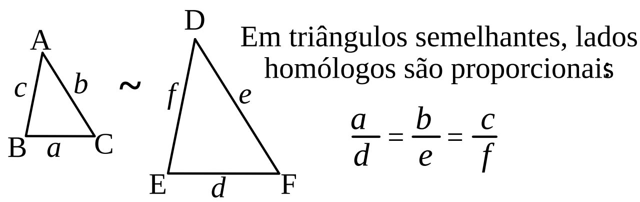


Figura 7

Em termos informais, o postulado de Wallis afirma que qualquer triângulo pode ser "ampliado" ou "reduzido" sem distorção, tanto quanto se queira. Tudo isto está certo, mas escapou a Wallis o facto seguinte: é que o quinto postulado de Euclides implica, por sua vez, o postulado de Wallis, de modo que os dois postulados são, afinal, equivalentes. O que aconteceu com a tentativa de Wallis aconteceu com muitas outras

[4] Abreviatura de "se e só se".
[5] Devemos esclarecer que, para os matemáticos gregos na antiguidade, uma razão entre duas magnitudes da mesma espécie (dois segmentos, duas figuras planas ou dois sólidos) $a : d$, que modernamente escrevemos $\frac{a}{d}$, tem um significado qualitativo e não quantitativo, quer dizer, é interpretada como uma relação entre as magnitudes e não como representando um número. Assim, por exemplo, e reportando-nos à mesma figura, a proporção $a : d :: b : e$ significa que o segmento [BC] está para [EF] assim como [AC] está para [DF], e isto é inteligível mesmo que não saibamos medir os comprimentos dos segmentos em causa, tal como é inteligível dizer-se que um segmento cabe duas vezes noutro, ou que é três vezes maior do que outro sem que, para dizer isso, necessitemos de os medir exactamente. Este é outro aspecto da geometria sintética que, por vezes,

(por matemáticos como Saccheri, Clairaut, Legendre, Taurino e Lambert, entre outros): proposições mais ou menos óbvias, evidentes ou plausíveis, intencionalmente destinadas a substituir mas implicando o quinto postulado de Euclides são, afinal de contas, equivalentes a este. Em 1763 o jovem G. S. Klugel submeteu uma tese de doutoramento em que identificava 28 pseudo-demonstrações do quinto postulado na geometria absoluta, e manifestou a dúvida de que fosse possível fazer uma tal demonstração. Isto levou o matemático e enciclopedista francês d'Alembert a referir-se à situação como o "escândalo da geometria". Mencionemos, a título de curiosidade, algumas das proposições (da geometria plana) que se mostrou serem equivalentes ao postulado de paralelismo de Euclides:

(A) O recíproco do teorema dos ângulos alternos-internos.

(B) A proposição I.30 dos *Elementos*: duas rectas paralelas a uma terceira recta são paralelas entre si.

(C) O postulado de Playfair: por um ponto exterior a uma recta passa uma e uma só paralela.

(D) Uma recta perpendicular a uma de duas rectas paralelas é perpendicular à outra.

(E) As mediatrizes de dois lados de um triângulo intersectam-se.

(F) Por quaisquer três pontos não colineares passa uma circunferência.

(G) Uma recta cortando perpendicularmente um lado de um ângulo agudo corta o outro lado.

(H) A proposição I.32 dos *Elementos*: a soma das medidas dos ângulos de um triângulo é igual a π (ou 180°, conforme a unidade que se utilize).

(I) A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos remotos.

(J) Um triângulo inscrito numa semicircunferência é rectângulo.

(K) Se o ângulo $\angle ABC$ é recto, então B está sobre a circunferência de diâmetro [AC].

(L) A Hipótese dos ângulos Rectos de Saccheri ou, equivalentemente: existe um rectângulo.

(M) Existem duas rectas equidistantes.

(N) Se três dos ângulos de um quadrilátero são rectos, então o quarto ângulo também é recto.

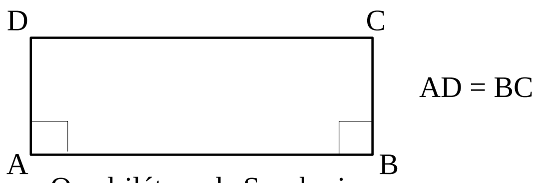
(O) O postulado de Wallis.

---

por simples comodidade notacional, não é aparente nas formulações modernas de alguns resultados clássicos.

Tudo isto sugere fortemente que o postulado de paralelismo de Euclides não é consequência dos restantes e que a geometria euclidiana não se pode reduzir à geometria absoluta. E leva-nos a reverenciar ainda mais o génio de Euclides nesta matéria. Mas a sugestão é uma coisa e a demonstração é outra. Será possível demonstrar de alguma maneira que o quinto postulado de Euclides não é consequência dos restantes? Se for possível tal coisa, tratar-se-á certamente de uma demonstração de um tipo nunca antes visto nem suspeitado. Os tempos não estavam ainda maduros para tal possibilidade.

O padre jesuíta G. Saccheri (1667-1733) foi talvez o primeiro a ensaiar uma abordagem inteiramente nova. No seu último livro *Euclides ab omni naevo vindicatus* tentou utilizar a técnica da redução ao absurdo, admitindo a negação do postulado de paralelismo de Euclides com vista a obter algum absurdo ou contradição. Centrou o seu estudo em certos quadriláteros, conhecidos por quadriláteros de Saccheri, com dois ângulos rectos na base (digamos, A e B) e os lados adjacentes congruentes ([AD] e [BC]).



Quadrilátero de Saccheri

Figura 8

Facilmente se prova na geometria absoluta que os ângulos no topo (lado oposto à base) são também congruentes (isto é, os ângulos C e D). Há, então, três casos a considerar:

- *Caso 1*: os ângulos do topo são rectos;
- *Caso 2*: os ângulos do topo são obtusos;
- *Caso 3*: os ângulos do topo são agudos.

No primeiro caso [a Hipótese dos ângulos Rectos no enunciado (L) acima, sob uma forma equivalente], o quadrilátero ABCD será um rectângulo. Saccheri pretendeu mostrar que este é o único caso possível (caindo, assim, na geometria euclidiana), mostrando que qualquer um dos outros casos conduz a uma contradição. Do caso 2 sai, efectivamente, uma contradição (com um teorema da geometria absoluta, o Teorema de

Saccheri-Legendre, de que a soma dos ângulos de um triângulo é menor ou igual a 180º). Porém, por mais que tentasse, Saccheri não conseguiu extrair uma contradição do caso 3. Tudo quanto conseguiu foi uma grande lista de resultados "estranhos" (por exemplo: a soma das medidas dos ângulos de um triângulo é menor que π). Completamente frustado e esgotado pelo esforço, Saccheri exclama, em jeito de conclusão: «A hipótese dos ângulos agudos (caso 3) é absolutamente falsa, pois é repugnante à natureza da linha recta.»

Estranha conclusão para um trabalho matemático brilhante. Sem o saber, Saccheri tinha descoberto a geometria não-euclidiana! O trabalho de Saccheri permaneceu ignorado durante século e meio. Outros grandes matemáticos, como Karl F. Gauss (1777–1855), o "Príncipe das Matemáticas", redescobriram e desenvolveram a geometria em bases semelhantes às de Saccheri (quer dizer, negando o quinto postulado), sem nunca chegarem a uma contradição. Receando a ridicularização pelos seus contemporâneos, Gauss nada publica sobre estas questões que vinha estudando desde os 15 anos de idade. Numa carta a W. Olbers, em 1817, diz: «Estou cada vez mais convencido de que a necessidade da nossa geometria [euclidiana] não pode ser demonstrada, pelo menos não pela razão humana, nem por culpa dela. Talvez, numa outra vida, consigamos obter a intuição sobre a natureza do espaço que, no presente, é inatingível.»

Outros, mais ousados, não recuaram perante o estranho mundo novo que se abria a seus olhos. Apesar de avisado insistentemente por seu pai para não prosseguir no "mar morto infernal" das paralelas, o jovem húngaro János Bolyai (1802–1860) admite a negação do postulado de paralelismo de Euclides como uma hipótese não absurda (e sem o intuito de buscar um absurdo a partir dela), isto é, como um novo postulado, a juntar aos postulados habituais da geometria absoluta. O seu trabalho é publicado em 1831, num apêndice de 26 páginas ao livro *Tentamen* da autoria de seu pai. Pela mesma época, e trabalhando independentemente, o jovem russo Nicolai Lobachewski (1792–1856) publica em 1829 a sua versão da geometria não-euclidiana à qual chama, primeiramente "imaginária" e depois "pangeometria". Actualmente, esta geometria é chamada geometria hiperbólica.

A mera publicação dos trabalhos de Bolyai e Lobachewski não garantiu a nenhum destes matemáticos o reconhecimento que mereciam. Pelo contrário, permaneceram praticamente ignorados durante mais de trinta anos. O que eles propunham era simplesmente inconcebível e contrário à teoria kantiana do espaço que dominava (e domina ainda, em muitos aspectos) a filosofia do conhecimento. Para Kant, o espaço existe intuitivamente na mente humana e os postulados euclidianos são juízos *a priori* impostos à mente sem os quais não é possível qualquer raciocínio coerente sobre o espaço. Ora, a geometria hiperbólica aparece como uma geometria para qual não se enxerga nenhum "espaço" possível e, a existir um tal "espaço", ele não seria deste mundo e não seria, portanto, objecto de conhecimento. Novos desenvolvimentos na matemática e na física teriam de surgir para se fazer justiça a todos os pioneiros das novas geometrias. O que estava em jogo era, nada mais, uma revolução no pensamento matemático, e não apenas em geometria. A natureza da matemática e, em particular, da geometria, teria de ser repensada. O método axiomático modelado nos *Elementos* de Euclides teria de ser revisto e ampliado no seu âmbito e aplicabilidade. O espaço físico tridimensional, motivação privilegiada das concepções euclidianas, perderia para sempre o privilégio do reinado absoluto nas interpretações físicas das teorias geométricas. Tudo isto acontece, ou começa a acontecer, nos anos sessenta do século passado.

3. Demonstrando...

Vamos ilustrar, através de alguns exemplos simples, a natureza da demonstração em geometria. Uma vez que não apresentámos uma axiomática onde o desenvolvimento da geometria seja sistematizado como é habitual em alguns tratados (tradição que remonta a Euclides!) teremos o cuidado de enunciar previamente os pressupostos a partir dos quais se farão as justificações necessárias. Além disso, é suposto que o leitor está ciente dos significados dos termos geométricos utilizados, nomeadamente, dos conceitos recta, semi-recta, segmento, triângulo, perpendicularidade de rectas ou segmentos, mediatriz de um segmento, ponto médio de um segmento, ângulo, ângulo de um triângulo, bissectriz de um ângulo, etc. Um ângulo $\angle ABC$ denota-se simplesmente $\angle B$, se não houver possibilidade de confusão.

<u>Suposições ou pressupostos</u>

1. Critério Lado-Ângulo-Lado (LAL) de congruência de triângulos.
2. Critério Ângulo-Lado-Ângulo (ALA) de congruência de triângulos: *se dois triângulos tiverem um lado e os ângulos adjacentes congruentes a um lado e os ângulos adjacentes, respectivamente, então os triângulos são congruentes.*

Teorema 1 (*Pons Asinorum*[6]) *Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.*

Explicação preliminar. Explicitemos:

Hipótese: É dado o ΔABC com $AB = AC$.

Tese: $\angle B \equiv \angle C$.

É convenção tácita chamar *base* ao lado desigual de um triângulo isósceles. Os pressupostos 1 e 2 são os únicos que nos habilitam a provar que dois segmentos ou dois ângulos são congruentes. Isto leva-nos a procurar, partindo dos dados, dois triângulos que envolvam os ângulos B e C separadamente. Isto pode-se obter traçando [AD] perpendicular a [BC], mas os nossos pressupostos não nos permitem provar que os triângulos ΔABD e ΔACD são congruentes. Se, porém, traçarmos [AD] de modo a bissectar o $\angle A$ já poderemos completar o argumento.

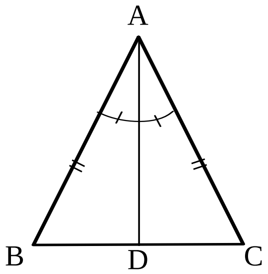


Figura 9

Demonstração. Tracemos [AD] de modo a bissectar o $\angle A$[7], e pensemos nos triângulos ΔABD e ΔACD. Então

$AB = AC$, por hipótese,

[6] Nome dado a esta proposição na Idade Média, significando "ponte dos burros" devido à forma da figura geométrica que acompanha a demonstração de Euclides e, também, devido ao facto de representar um grau de dificuldade maior do que as proposições precedentes dos *Elementos*, pondo à prova a capacidade do aprendiz em prosseguir no estudo da geometria euclidiana.

[7] Esta passagem é, na verdade, mais subtil do que pode parecer. O problema é garantir que a bissectriz do $\angle A$ corta o lado oposto num ponto D entre B e C. Para provar isto rigorosamente é necessário saber lidar com o conceito *estar (situado) entre* e as propriedades das figuras que dependem deste conceito, ausente formalmente (mas não intuitiva e implicitamente) nos *Elementos* de Euclides e ausente também, devido à sua intrínseca subtileza e dificuldade, nos tratamentos elementares da geometria. No caso preciso em questão, o resultado é conhecido por teorema da barra transversal: *se* D *é um ponto interior ao ângulo* $\angle BAC$, *então a semi-recta* $[A \rightarrow D]$ *corta o segmento* [BC] *num ponto interior a este (isto é, num ponto entre* B *e* C*).*

$\angle BAD \equiv \angle CAD$, por construção, e

AD=AD,

logo $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$, pela suposição 1 (LAL). Isto significa, em particular, que $\angle B \equiv \angle C$, como queríamos demonstrar.□

Da conclusão $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$ podemos extrair, também, que os ângulos $\angle ADB$ e $\angle ADC$ são congruentes e, por serem suplementares adjacentes, que [AD] é perpendicular a [BC]. Além disso, D é o ponto médio de [BC] — este é o conteúdo do teorema seguinte que, a bem dizer, é um corolário do teorema 1, e cuja demonstração fica como simples exercício. O teorema 3 é igualmente consequência do que precede, mais exactamente, da suposição 2 e do teorema 1 acima demonstrado, e fica também como exercício. O leitor deve, em todo o caso, formular com cuidado as hipóteses e a tese, com letras relativas a certa figura a desenhar que ilustre a situação, à semelhança do que se fez na explicação a seguir ao enunciado do teorema 1.

<u>Teorema 2</u> *Num triângulo isósceles, a bissectriz do ângulo oposto à base corta esta ao meio.*□

<u>Teorema 3</u> *Num triângulo isósceles, a semi-recta com origem no vértice oposto à base que passa pelo ponto médio da base é a bissectriz do ângulo oposto à base.*□

No exemplo seguinte enunciamos correctamente um teorema e fazemos uma demonstração incorrecta. Trata-se de descobrir o passo incorrecto e corrigi-lo. A incorrecção em causa é um exemplo de *petitio principii* ("petição de princípio" ou "circularidade", quer dizer, utilizar na demonstração aquilo que se quer demonstrar).

<u>Teorema 4</u> *Se um lado de um triângulo é cortado ao meio por uma perpendicular que passa pelo vértice oposto, então o triângulo é isósceles, tendo por base aquele lado.*

Hipóteses: dados o ΔABC e um ponto $D \in [BC]$ tal que $[AD] \perp [BC]$ e BD = CD.

Tese: AB = AC.

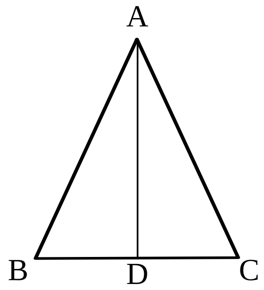


Figura 10

"Demonstração". Nos triângulos ΔABD e ΔACD tem-se

$\angle BDA \equiv \angle CDA$, porque $[AD] \perp [BC]$, por hipótese

$BD = CD$, por hipótese

$\angle DBA \equiv \angle DCA$, porque se dois lados de um triângulo são congruentes, os ângulos opostos são congruentes, donde

$\Delta ABD \equiv \Delta ACD$, pelo critério (ALA) (suposição 2).

Então, pela definição de congruência de triângulos, vem $AB = AC$, como queríamos demonstrar.□

Outras vezes é a figura, não o argumento, que é faltosa, na medida em que, por não corresponder às condições ou hipóteses enunciadas ou à construção supostamente feita na demonstração, induz em erro. O que acontece, provavelmente, é o argumento apoiado na figura "faltosa"[8] não demonstrar efectivamente nada do que se pretendia, ou demonstrar uma falsidade absoluta. Existem muitos exemplos de argumentos falaciosos baseados em figuras falseadas, por exemplo, aquele que se baseia na figura seguinte, onde é suposto que o ponto O é a intersecção de uma perpendicular ao lado [AB] no ponto médio M com a bissectriz do $\angle ACB$, com vista a mostrar que *todos os triângulos são isósceles.* O leitor provará isto (nomeadamente, que $AC = BC$) sem dificuldade a partir dos dados da figura (onde, do ponto O saem linhas perpendiculares aos outros lados e linhas para os outros vértices).

[8] Todas as figuras geométricas desenhadas são faltosas, de uma maneira ou de outra, pois são sempre aproximadas. Não é de mais repetir que a correcção de um argumento não se pode basear nunca numa figura mas sim, em última análise, na utilização correcta das definições, postulados ou suposições admitidas e nas proposições anteriormente demonstradas.

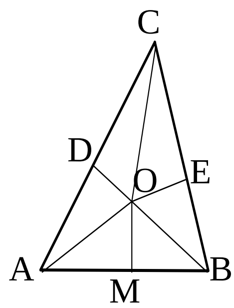


Figura 11

Mesmo dando o desconto de que as figuras nunca podem ser perfeitas e o que interessa é o raciocínio, a questão é que a figura está distorcida a ponto de sugerir uma situação (e consequente argumentação) na verdade impossível: o ponto O, construído como se indica, nunca ficaria no interior do triângulo (e pode-se prová-lo)!

Damos seguidamente uma demonstração do Teorema de Pitágoras, baseada em triângulos semelhantes e no resultado euclidiano seguinte, como pressuposto:

Teorema 5 *A altitude*[9] *relativa à hipotenusa divide um triângulo rectângulo em dois triângulos semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo dado.*

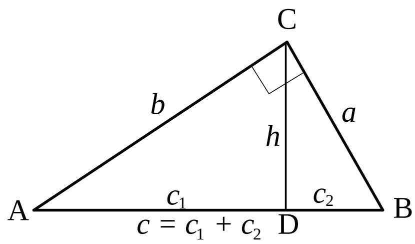


Figura 12

De acordo com a figura acima, o teorema afirma que são válidas as semelhanças $\Delta ABC \sim \Delta ACD$, $\Delta ABC \sim \Delta CBD$ e $\Delta ACD \sim \Delta CBD$[10], donde resultam as proporções

[9] Nome que se dá ao segmento da perpendicular tirada de um vértice para o lado oposto, também chamado (uma) altura, embora este termo signifique mais propriamente o comprimento da altitude.

[10] Tal como para a congruência de triângulos, a notação pressupõe que os vértices se correspondem pela ordem em que são escritos: A↔C, C↔B e D↔D.

$$\frac{c}{b} = \frac{a}{h} = \frac{b}{c_1} \qquad \frac{c}{a} = \frac{a}{c_2} = \frac{b}{h} \qquad \frac{b}{a} = \frac{h}{c_2} = \frac{c_1}{h}$$

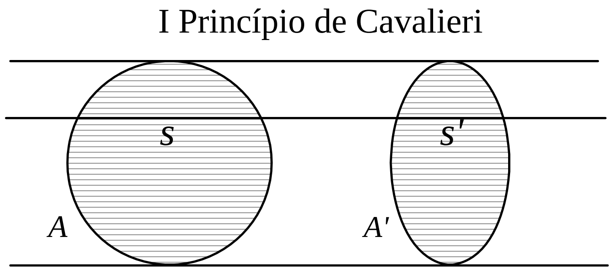
respectivamente. A partir destas proporções interessa obter uma relação entre a, b e c, sabendo que $c = c_1 + c_2$. Obtemos, do primeiro grupo de proporções, $c \times c_1 = b^2$, e do segundo grupo $c \times c_2 = a^2$, donde, somando membro a membro, $c \times (c_1 + c_2) = a^2 + b^2$, ou seja, $c^2 = a^2 + b^2$, que corresponde exactamente ao enunciado do Teorema de Pitágoras.□

Terminamos esta secção com algumas questões relativas a áreas e volumes, emanantes dos chamados *princípios de Cavalieri.* Bonaventura Cavalieri (1598-1647) foi discípulo de Galileu e é conhecido principalmente por ter redescoberto e desenvolvido o *método dos indivisíveis* tão do agrado (como método de descoberta) de Arquimedes, aplicado a áreas e volumes, nos tratados *Geometria indivisibilus continuorum nova quadam ratione promota* (*Geometria, promovida de uma nova maneira pelos indivisíveis dos continua*) e *Exercitationes geometricae sex* (*Seis exercícios geométricos*). A ideia básica de Cavalieri é a de encarar uma figura plana (sólida) como composta de segmentos (secções) paralelos(as) — os *indivisíveis* da figura — e explorar esta ideia através de dois princípios gerais para comparar áreas e volumes. A razão da inclusão desta matéria reside no facto de tais princípios serem de grande interesse didáctico para obter resultados que, de outra maneira, só se poderiam justificar com recurso ao cálculo integral moderno[11]. O primeiro princípio, relativo a figuras planas, enuncia-se:

I. *Se duas figuras planas compreendidas por duas linhas rectas paralelas são tais que quaisquer dois segmentos determinados numa e noutra por uma recta paralela àquelas estão numa certa razão constante, então as áreas das duas figuras estão nessa mesma razão.*

Ilustra-se o caso de um círculo com raio a e uma elipse com eixo maior de comprimento $2a$, e mostrar-se-á, aplicando o I Princípio, como determinar a área da elipse, conhecida a área do círculo (πa^2).

[11] V., por exemplo, o Cap. 19 da monografia de MOISE e DOWNS referida na Bibliografia.



$$\frac{s}{s'} = \frac{A}{A'}$$

Figura 13

Para descobrir a razão entre os comprimentos s e s' vamos utilizar um pouco de geometria analítica, nomeadamente, as equações cartesianas da circunferência e da elipse num referencial cartesiano, colocadas como na figura seguinte. Sem perda de generalidade, estabelecemos a razão entre as ordenadas positivas y_1 e y_2 de dois pontos, um sobre a circunferência e outro sobre a elipse, respectivamente, correspondentes a uma mesma abcissa x (de modo que $s = 2y_1$, $s' = 2y_2$, respectivamente). Vamos supor, além disso, que o comprimento do eixo menor da elipse é $2b$.

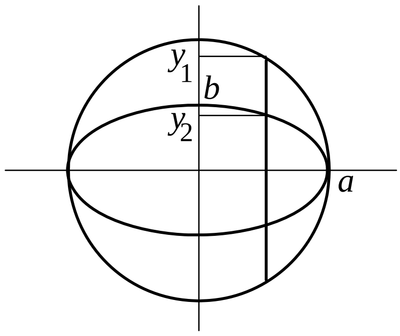


Figura 14

Ora, como sabemos, as equações cartesianas da circunferência e da elipse são

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

respectivamente, donde, resolvendo em ordem a *y* e aproveitando apenas o valor positivo, vem

$$y_1 = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y_2 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

respectivamente, logo obtemos

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{a}{b},$$

que é, também, a razão entre as áreas (A e A') das duas figuras planas. Como $A = \pi\, a^2$, obtemos finalmente

$$A' = \frac{b}{a} \times \pi a^2 = \pi\, ab. \square$$

Demonstrar em geometria é um mundo que apenas aflorámos. Ao longo dos tempos, novos métodos foram utilizados, sendo a geometria analítica um dos que deu muitos contributos à demonstração. Essa e outras partes das geometrias e sua História ficam por contar aqui, deixamo-las ao leitor através da bibliografia.

4. Bibliografia

1. ALSINA, C. e TRILLAS, E. — *Lecciones de Algebra y Geometría, Curso para estudiantes de Arquitectura*, 7ª edición, Ed. Gustavo Gili, 1995.
2. BIRKHOFF, G. D. — A set of postulates for Plane Geometry, based on Scale and Protactor, *Annals of Math.,* 33 (1932), 329–345.
3. BIRKHOFF, G. D. e BEATLY, R. — *Basic Geometry*, Third Edition, Chelsea, 1959.
4. BLUMENTHAL, L. M. — *A Modern View of Geometry*, W. H. Freeman, 1961.
5. BOLD, B. — *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*, Dover, 1982.
6. BONOLA, R. — *Non-Euclidean Geometry*, Dover, 1955.
7. BURTON, D. M. — *The History of Mathematics, An Introduction*, Second Edition, Wm. C. Brown Publishers, 1988.
8. CEDERBERG, J. N. — *A Course in Modern Geometries*, Springer-Verlag, 1989.

9. CLEMENS, C. H. e CLEMENS, M. A. — *Geometry for the Classroom*, Springer-Verlag, 1991.

10. COXETER, H. S. M. — *Introduction to Geometry, Second Edition*, J. Wiley & Sons, 1969.

11. COXETER, H. S. M. e GREITZER, S. L. — *Geometry Revisited*, MAA, 1967.

12. COXFORD, A. F. Jr. et al — *Geometria a Partir de Múltiplas Perspectivas*, Associação de Professores de Matemática, 1993.

13. CUNHA, J. A. da —, *Princípios Matemáticos*, Reprodução fac-símile da edição publicada em Lisboa em 1790, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, 1987.

14. DEVLIN, K. — *Mathematics: The New Golden Age*, Penguin Books, 1990.

15. EVES, H. — *A Survey of Geometry*, vols. I, II, Allyn & Bacon, 1963, 1965; 15a — *An Introduction to the History of Mathematics*, Sixth Edition, Sounders College Publishing, 1990; 15b — *College Geometry*, Jones and Bartlett, 1995.

16. FERNANDES, A. do N. P. — *Elementos de Geometria para o Ensino Secundário*, Plátano Editora, 1981.

17. GREENBERG, M. J. — *Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Development and History*, Third Edition, W. H. Freeman, 1993.

18. HEATH, T. L. — *Euclid, the thirteen books of The Elements*, Vols. I, II e III, Second edition, Dover, 1956.

19. HENDERSON, D.W. — *Experiencing Geometry on Plane and Sphere*, Prentice Hall, 1996.

20. HILBERT, D. — *Foundations of Geometry*, Second English Edition (translated from the tenth german edition), Revised and Enlarged by P. Bernays, Open Court, 1971; 19a — *Fundamentos da Geometria*, tradução da 7ª edição alemã (1930), com exclusão dos Apêndices, por Maria do Pilar Ribeiro e José da Silva Paulo, Instituto para a Alta Cultura, 1952; 19b — *Fundamentos de la Geometria*, tradução da 7ª edição alemã, com Apêndices, Consejo Sup. Inv. Científicas, 1991.

21. KRAUSE, E. F. — *Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry*, Dover, 1983.

22. LANG, S. e MURROW, G. — *Geometry, A High School Course*, Springer-Verlag, 1983.

23. LEITZEL, J. R. C. (Editor) — *A Call for Change: Recommendations for the Mathematical Preparation of Teachers of Mathematics*, MAA, 1991.

24. MARTIN, G. E. — *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*, Springer-Verlag, 1975; 23a — *Transformation Geometry, An Introduction to Symmetry*, Springer-Verlag, 1994.

25. MOISE, E. E. — *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, Third Edition, Addison-Wesley, 1990.

26. MOISE, E. E. e DOWNS Jr., F. L. — *Geometry, Teacher's Edition,* Addison-Wesley Publ. C., 1982.

27. OGILVY, C. S. — *Excursions in Geometry, Dover*, 1990.

28. OLIVEIRA, A. J. F. — *Geometria*, 2ª edição, Univ. Évora, 1988; 27a — *Geometria Euclidiana*, Universidade Aberta, 1995. A Errata deste volume será publicada em *Transformações Geométricas*, Univ. Aberta, 1997.

29. PASTOR, J. R., SANTALÓ, L. A. e BALANZAT, M. — *Geometría analítica*, Editorial Kapelusz (Buenos Aires), Cuarta edición, 1959.

30. PERRY, E. — *Geometry, Axiomatic Developments with Problem Solving*, Marcel Dekker, 1992.

31. ROE, J. — *Elementary Geometry, An Introduction*, Oxford University Press, 1993.

32. RYAN, P.J. — *Euclidean and Non-euclidean Geometry, An Analytic Approach*, Cambridge U. P., 1994.

33. TUNNER, A. — *A Modern Introduction to Geometries*, Van Nostrand, 1967.

34. VASCONCELLOS, F. de A. e — *História das Matemáticas na Antiguidade*, Aillaud e Bertrand, 1925.

Comentários

- O item 2 introduz os chamados *postulados métricos da régua e transferidor*, como alternativa às exposições tradicionais de geometria sintética. Em forma de manuais para o ensino elementar foram publicados os livros 3, 21 e 26, todos eles escritos por professores universitários em colaboração com professores do ensino secundário, de que 9, 19, 21 e 27 constituem interessante e acessível complemento. Os livros 8, 15, 25, 31 e 33 são de nível universitário.
- O ponto de vista sintético (Euclides) é exposto de forma elementar em 15 e, de forma mais avançada, em 17, 20 e 30. O livro de Hilbert é a referência moderna para este ponto de vista. A obra de Euclides está magistralmente traduzida e comentada em 17.
- Os livros 10, 11 e 15b contêm muita geometria de índole mais moderna.

- Os *Princípios* de Anastácio da Cunha são de interesse sobretudo histórico mas merecem a melhor atenção pela qualidade do conteúdo matemático (geometria euclidiana). Para a história geral das geometrias consulte-se 6, 7, 15 e 32.
- O livro 8 contém uma descrição dos diferentes sistemas axiomáticos para a geometria, e pequenos capítulos de geometria euclidiana (à Euclides) e não-euclidiana (à Lobatchewski), além de uma introdução às geometrias finitas e às transformações geométricas. Sobre este último assunto são de recomendar 23a e 32.
- Os *Elementos* de Euclides, com figuras interactivas, estão disponíveis na Internet: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html.
- O ponto de vista analítico (geometria analítica) pode ser consultado em obras como 1, 29, 31 e 32. Este último trata principalmente de transformações geométricas em diferentes estruturas geométricas (plano euclidiano, esfera, plano projectivo real, plano hiperbólico real (semiplano de Poincaré)).
- A recomendar um único livro, de entre todos os referidos, pela sua excelência científica e didáctica, escolheríamos a monografia 26 de MOISE e DOWNS.

Frases para meditar:

- Do físico E. Mach: «Conheci um professor, aliás excelente pedagogo, que obrigava os seus alunos a acompanhar todas as demonstrações com figuras incorrectas, de acordo com a doutrina de que a ligação lógica dos conceitos, não a figura, é que era essencial.»
- «Ao estudar geometria, é muito importante desenhar figuras apropriadas. As figuras ilustram qual é, provavelmente, o teorema correcto e indicam como poderemos proceder para tentar demonstrá-lo. É claro que a demonstração efectiva tem de se sustentar logicamente a si mesma e ser independente das figuras. Na geometria e, de facto, em toda a matemática, devemos ter sempre presente o perigo das figuras e viver perigosamente. Façam muitas figuras!», in E. SNAPPER & R. J. TROYER, *Metric affine geometry*, Dover, 1989, p. 7.

ACTIVIDADES COMENTADAS

Resolver problemas em geometria

Problemas em geometria

Resolver problemas em geometria é uma actividade fascinante. Não são precisos muitos conhecimentos para ter acesso a problemas verdadeiramente desafiantes e que se revelam de uma grande simplicidade quando os conseguimos resolver. Simultaneamente, as imagens que podemos associar a esses problemas são tão fortes que nos acompanham mesmo quando o problema já está resolvido. E isso é bom porque o nosso imaginário se enriquece e nos vai permitindo fazer articulações que acabam por ser a ferramenta mais poderosa quando temos de resolver um novo problema.

Esta é uma das razões porque no ensino da geometria podemos ter uma espécie de banco de bons problemas que são a base fundamental de toda a aprendizagem.

Estes problemas conduzem-nos muitas vezes à formulação de novos problemas. É importante ter em atenção que não é possível, nem desejável, esgotar todas as questões que se vão colocando. Nem sempre podemos demonstrar todas as conjecturas que se vão fazendo, não interessa cair em situações de cálculos complicados que nos fazem desviar dos aspectos mais importantes ou que implicam operacionalização de tantos conhecimentos que se tornam praticamente inacessíveis aos alunos. Cada professor, em função dos alunos que tem, deve ponderar o aprofundamento a dar aos problemas e às extensões que eles permitem. Por outro lado, é interessante que os professores, entre si, resolvam e discutam problemas mesmo que estes não sejam para propor aos seus alunos. Para melhor conhecer os problemas e percebermos as suas potencialidades para a aprendizagem podemos encarar cada um deles por um ponto de vista especialmente significativo, quer da sua resolução, quer dos conhecimentos geométricos envolvidos.

O novo programa de Matemática do 10º ano, no que se refere ao tema geometria, considera duas partes: Resolução de problemas de geometria no plano e no espaço e geometria analítica. Para o primeiro subtema, a lista de conteúdos é intencionalmente curta, e deixando em aberto o aprofundamento a dar aos tópicos. A leitura cuidadosa do programa para este tema, nomeadamente da sua introdução e indicações metodológicas, ajuda a entender que na escolha das situações a explorar, e na sua exploração, devemos ter sempre como pano de fundo os seguintes aspectos:

– valorizar as vantagens do recurso à visualização;

– valorizar os instrumentos matemáticos (simetrias, propriedades, relações) e tecnológicos que vão sendo postos à disposição como meios de simplificação e de enriquecimento;

– evitar cálculos supérfluos ou a complicação de cálculos que faz perder de vista a visualização ou as ideias geométricas;

– recorrer o mais possível a modelos e representações diversas das situações;

– recorrer à argumentação e explicitação de processos de resolução, nomeadamente na distinção entre o particular e o geral e no papel do contra-exemplo;

– evitar demonstrações pré-estruturadas.

No que respeita ao segundo subtema, geometria analítica, embora os conteúdos sejam mais explícitos, há também uma preocupação de valorizar os aspectos de raciocínio e evitar os cálculos que afastam da visualização. A geometria analítica não é uma geometria, mas mais um processo para resolver problemas da geometria euclidiana. Como tal, deve ser utilizada como um método matemático para resolver problemas e não como um conjunto de conhecimentos e procedimentos a explorar em si mesmos, desligados da sua utilidade e significado.

Assim, decidimos fazer uma lista classificada de problemas de vários tipos: de construção, de contagem, de representação, sobre cortes, com aparente falta de dados, que dão significado aos números, de proporcionalidade geométrica, de lugares geométricos, de geometria analítica, de demonstração, e problemas que conduzem ao estudo de funções.

Não há qualquer ordem subjacente à classificação que elaborámos, nem pretendemos enfatizar a designação dada ao tipo de problema, até porque há problemas que podiam aparecer em várias categorias. Para cada tipo de problemas damos uma breve explicação da ideia base subjacente e fazemos comentários sobre a sua resolução, as suas potencialidades e as suas ligações. Estes comentários, não são exaustivos, isto é, não pretendem esgotar todas as maneiras de os resolver, apenas têm como objectivo chamar a atenção de particularidades de exploração interessantes, sugerir processos de resolução menos comuns e apontar algumas conexões menos triviais.

Hoje em dia, a resolução de problemas em geometria tem que ser encarada com os recursos disponíveis e com as preocupações metodológicas actuais. Estamos a falar dos modelos geométricos, do computador, do trabalho de grupo e da avaliação que têm que estar presentes nas opções que tomamos para fazer propostas de trabalho aos alunos. Ao planificar actividades para a geometria, é importante ter presentes todas estas perspectivas e ter em conta que há problemas mais adequados para introduzir e explorar conceitos, outros para trabalhar em grupo, outros em que o recurso ao computador dá-lhes novas potencialidades, outros mais favoráveis para a avaliação, outros que podem ser mais ou menos aprofundados conforme o nível dos alunos, outros que estão mais centrados no desenvolvimento de capacidades, etc.

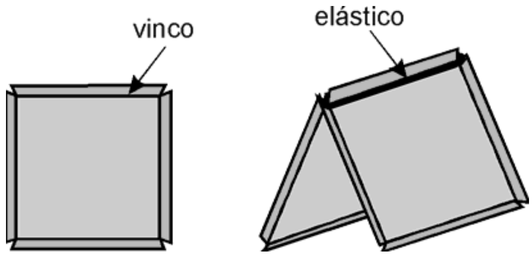
Os modelos geométricos

O recurso a modelos geométricos no ensino da geometria é universalmente reconhecido, de tal forma que a própria indústria tem vindo a produzir materiais especificamente com este objectivo e com o apoio de equipas de investigadores e professores. É importante conhecer alguns deles e utilizá-los mas não podemos deixar de valorizar também o papel formativo da própria construção de alguns modelos, e além disso ter em conta as condições financeiras das escolas. E por isso é preferível adquirir poucos materiais, bem seleccionados, e construir os outros com os alunos. Apontamos aqui algumas sugestões seguindo esta ordem de ideias.

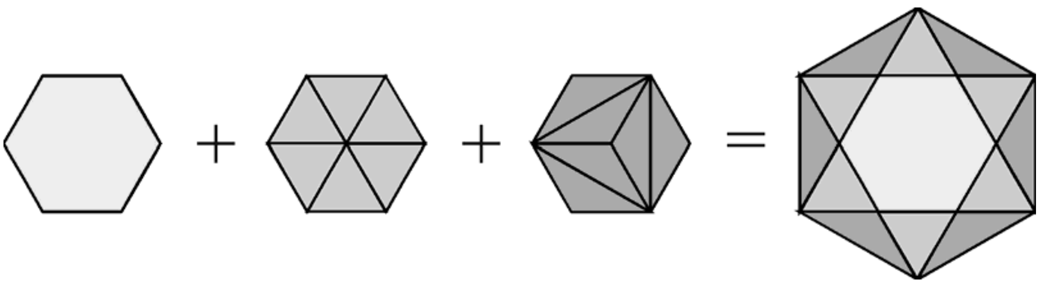
<u>Cartolina, acetato ou folha de plástico rígido</u>

Estes materiais são bons para construir sólidos a partir das suas planificações. Os modelos assim construídos ficam com as faces representadas, e se o material for transparente é possível unir pontos das faces com linhas ou varetas e obter outros poliedros com eles relacionados, diagonais, referenciais, etc.

Também se podem fazer polígonos regulares e não regulares de vários tipos, com abas que servem para os unir com elásticos. Estes polígonos são óptimos para fazer experiências de construção de poliedros, nomeadamente dos poliedros platónicos, arquimedianos, estrelados, deltaedros, antiprismas, etc.



Para o estudo da geometria no plano também se podem construir polígonos com estes materiais, e experimentar padrões e pavimentações, construir puzzles, etc.



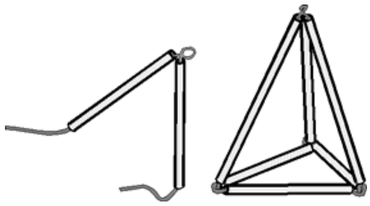
No mercado especializado há à venda polígonos de um material plástico com encaixes, para fazer pavimentações e construção de poliedros. Este material é de origem inglesa, chama-se Polydron, e tem sido bastante divulgado em encontros de professores e pela Associação de Professores de Matemática.

Jogo Mikado ou espetos

Para simular rectas no espaço podem ser utilizadas as varetas coloridas do jogo Mikado ou as varetas de madeira que usualmente se vendem para pequenas espetadas. Este material pode ser combinado com as palhinhas, como veremos a seguir.

Palhinhas

Com as palhinhas que se usam para bebidas, e passando uma linha por dentro delas as vezes que for preciso, podem ser construídos óptimos modelos de “esqueletos de sólidos”. Nos vértices, as linhas devem ter sempre um nó para os fixar.

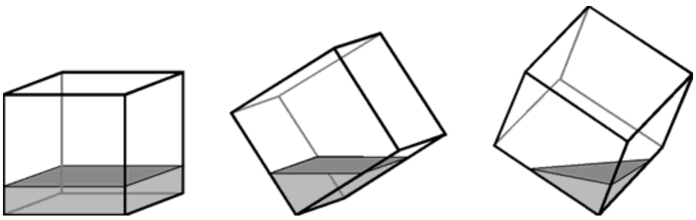


Estes modelos têm algumas vantagens. Uma delas é ver-se muito bem as posições relativas de arestas e diagonais por se poder ver o sólido por dentro (as diagonais espaciais por exemplo, que também podem ser feitas com palhinhas). Outra é pela facilidade de representar um referencial enfiando varetas nas palhinhas ou entre elas. Ainda é possível obter outro tipo de relações furando as palhinhas para unir alguns pontos das arestas com uma linha esticada.

Sobre a utilização deste material há um artigo e propostas de actividades na revista Educação & Matemática nº 38, “*Incentivando a visualização espacial através de propriedades geométricas de tetraedros duais*”, de Ana Maria Kaleff e Dulce M. Rei.

<u>Poliedros transparentes</u>

Para o estudo de cortes em sólidos, os modelos mais adequados são poliedros de acrílico transparente com uma abertura que permite introduzir um líquido colorido lá dentro. Assim, a superfície plana do líquido simula o plano de corte e se se for variando a posição do poliedro vai-se observando as várias possibilidades de cortes.



Este material tem sido muito divulgado pela Associação de Professores de Matemática e pode ser mandado fazer em casas da especialidade ou adquirido nesta Associação. Sobre as potencialidades da utilização destes modelos há um artigo bastante completo na revista Educação & Matemática nº 26, “*Tudo o que há num cubo*”, de Eduardo Veloso.

O Computador

Nos últimos anos têm sido desenvolvidos programas de computador especificamente para o ensino da geometria – Cabri-Géometre e Geometer's Sketchpad. Estes programas são já bastante conhecidos de alguns professores, têm sido divulgados em encontros de professores e sessões de formação, e experimentados com alunos em situações de sala de aula e de clubes de Matemática. Futuramente estes programas vão ter um peso cada vez maior no ensino da geometria, nomeadamente no ensino secundário.

As potencialidades e interesse destes programas são de tal ordem que é impossível apontá-los em meia dúzia de linhas e desenvolver aqui a forma de os explorar. Chamamos a atenção, na bibliografia, de publicações em português sobre a sua utilização e vamos assinalar, com o símbolo 🖱, algumas actividades que, embora estejam formuladas para resolver com papel e lápis, podem, com vantagens, ser exploradas com este tipo de software.

A avaliação

Num tema que se intitula "Resolução de Problemas" é impensável que a avaliação seja feita só com instrumentos do tipo dos testes tradicionais, em que as questões são directas, de resposta única, e o que é classificado é o resultado.

A avaliação deve ter um grande peso formativo, deve reflectir a aprendizagem e valorizar processos e produtos e, por isso, aparecer como uma vertente das actividades de aprendizagem desenvolvidas dentro ou fora da aula. Muitas dessas actividades, de investigação, de resolução de problemas, de construção de modelos, de trabalhos de projecto, de pesquisa histórica, etc., podem ser objecto de avaliação, desde que o professor lhes associe instrumentos para isso. Por exemplo, um relatório, uma exposição oral, a resposta por escrito a uma ou mais questões particulares que se levantaram durante a actividade, uma exposição pública de materiais produzidos pelos alunos. Todo este tipo de trabalhos a avaliar podem ser realizados individualmente ou em grupo, na sala de aula ou fora dela.

Problemas de construção

Entendemos por construção a obtenção de figuras geométricas, no plano ou no espaço, segundo determinadas condições. Essa construção pode ser feita através de um desenho ou de um modelo manipulável. Actividades deste tipo, bem orientadas, podem conduzir à descoberta de propriedades e relações, à formulação de conjecturas, e à necessidade de as validar.

Nesta categoria integram-se muitas das actividades que podem ser desenvolvidas recorrendo a programas de computador. Estes programas têm grandes vantagens em relação aos desenhos pelo facto das figuras serem dinâmicas e poderem, por isso, ser manipuladas.

Dizemos que um polígono está inscrito numa figura se os seus vértices forem pontos da linha que limita a figura.
Num quadrado inscreve triângulos

- um triângulo escaleno;
- um triângulo isósceles;
- um triângulo equilátero.

Num quadrado inscreve quadrados.

Uma actividade aberta como esta, que admite várias soluções, permite que os alunos confrontem soluções e estabeleçam relações. Não se pretende obter uma construção óptima, mas sim explorar características de cada figura para a inscrever no quadrado. Não é fácil obter um triângulo equilátero sem recorrer às relações entre os ângulos. Esta actividade pode ser aproveitada para introduzir ou consolidar questões de trigonometria do triângulo rectângulo.

Qual é o máximo número de ângulos agudos que um polígono convexo pode ter? E qual é o máximo número de ângulos rectos? Justifica.

Este problema pode ser resolvido de muitas maneiras e permite recorrer à soma dos ângulos internos ou externos de um polígono. É uma boa maneira de rever estas relações recorrendo a um problema novo e pouco habitual porque o que estamos à espera é que não haja limite máximo para este tipo de ângulos. O que acontece é que para polígonos com mais de 4 lados todos os ângulos podem ser obtusos, mas há no máximo 3 ângulos rectos ou 3 ângulos agudos. O que se pretende é que os alunos não se limitem a observar alguns exemplos, mas que sejam capazes de argumentar a veracidade da sua conclusão para todos os casos.

Utilizando polígonos regulares, constrói poliedros com faces todas iguais.
Basta que as faces sejam polígonos regulares para que os poliedros sejam regulares?
Quantos poliedros regulares consegues construir com:

- triângulos equiláteros?
- quadrados?
- pentágonos?
- hexágonos?

Quantos poliedros regulares existem? Estabelece, para cada um, as principais características.

Construir um conjunto de poliedros é uma das formas mais apropriadas e atractivas para fazer experiências de construção de modelos matemáticos. Ao longo dos tempos, os vários tipos de poliedros – platónicos ou regulares, arquimedianos ou semiregulares, estrelados… – têm exercido um grande fascínio sobre os matemáticos.

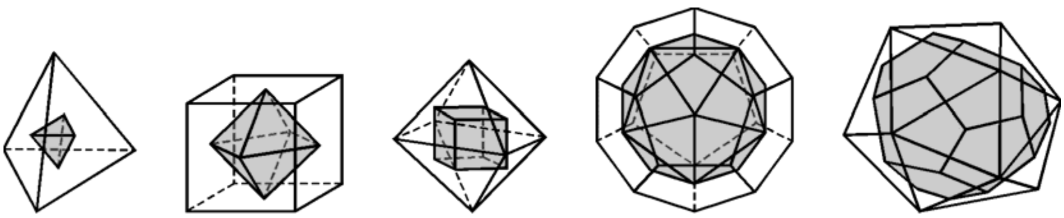
Os cinco poliedros regulares, também chamados sólidos platónicos, constituem o grupo mais simples de poliedros. Todas as suas faces são polígonos regulares congruentes (geometricamente iguais) e os seus vértices são todos do mesmo tipo, isto é, o número de faces concorrentes em cada vértice é sempre o mesmo. Estas condições garantem que todas as faces são congruentes, assim como todas as arestas, todos os ângulos das faces e todos os diedros.

Esta actividade permite retomar alguns conhecimentos sobre polígonos, regulares ou não, nomeadamente no que respeita à soma dos ângulos internos de um polígono de *n* lados e à medida do ângulo interno de um polígono regular qualquer. Naturalmente irão aparecer os casos em que os polígonos pavimentam o plano e por isso não formam o vértice de um poliedro. Como não são só os polígonos regulares que pavimentam o plano, fica aqui um pretexto para estudar outras pavimentações.

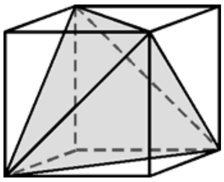
Se, num poliedro regular, unirmos com segmentos de recta os centros de faces consecutivas, obtemos as arestas de um outro poliedro, o seu dual.
Qual é o poliedro dual de cada poliedro regular?
Estabelece relações entre cada poliedro regular e o seu dual.

O Princípio da Dualidade estabelece que qualquer figura tridimensional constituida por vértices, arestas e faces, tem uma figura dual, cujas faces correspondem aos vértices da figura original e vice versa. Assim, para qualquer poliedro existe o seu dual, mas só para os poliedros regulares é possível definir os duais de uma forma tão simples como a que adoptámos aqui, isto é, recorrendo aos centros das faces. Facilmente se vê que o dual de um poliedro regular é outro poliedro regular e por isso é possível estabelecer relações interessantes entre os seus elementos.

POLIEDROS	nº lados por face	nº de faces	nº de vértices	nº de arestas	nº arestas por vértice	
Tetraedro	3	4	4	6	3	Tetraedro
Octaedro	3	8	6	12	4	Cubo
Icosaedro	3	20	12	30	5	Dodecaedro
Cubo	4	6	8	12	3	Octaedro
Dodecaedro	5	12	20	30	3	Icosaedro
	nº arestas por vértice	nº de vértices	nº de faces	nº de arestas	nº lados por face	DUAIS



Num cubo podemos considerar uma diagonal em cada face, de modo que as 6 diagonais representadas concorram só em 4 dos vértices do cubo. Esses segmentos são as arestas de um novo poliedro. De que poliedro se trata?



Não estamos muito habituados a ver um tetraedro dentro de um cubo, mas esta relação entre os dois sólidos revela-se muito útil no conhecimento do tetraedro, nomeadamente no que respeita a diedros, posições relativas e estudo em referencial.

Constrói o esqueleto de um cubo com palhinhas, passando uma linha por dentro das palhinhas (a linha pode passar dentro de cada palhinha as vezes que for necessário).
Que tipo de dificuldades se encontram na construção do cubo? Porquê?
Uma maneira de ser bem sucedido na construção do modelo é colocar palhinhas nas diagonais das faces do cubo. Qual é o número mínimo de diagonais que se devem colocar? Porquê?

Um poliedro cujas faces são triângulos equiláteros todos iguais chama-se deltaedro.
Constrói todos os deltaedros convexos e descreve as características de cada um deles.

Há oito deltaedros convexos e um número infinito de deltaedros não convexos, o que faz com que esta investigação seja uma situação interessante para um trabalho de grupo a realizar com materiais manipuláveis. Por estas razões, é também uma boa proposta para avaliação.

Dados três pontos A, B e C, não colineares, constrói no plano por eles definido:

- o ponto equidistante dos três pontos dados;
- o conjunto de pontos equidistantes das rectas AB e AC;
- o ponto equidistante das rectas AB, AC e BC.

Discute a existência de solução para este problema com mais de três pontos complanares.
Caracteriza os mesmos lugares geométricos, agora no espaço.

Estes problemas são conhecidos, mas usualmente formulados para triângulos. Esta formulação do problema no plano vai consolidar e ampliar o conceito de distância e facilitar a visualização e caracterização dos lugares geométricos no espaço. Por outro lado dá abertura para ligar com problemas análogos como o que se segue.

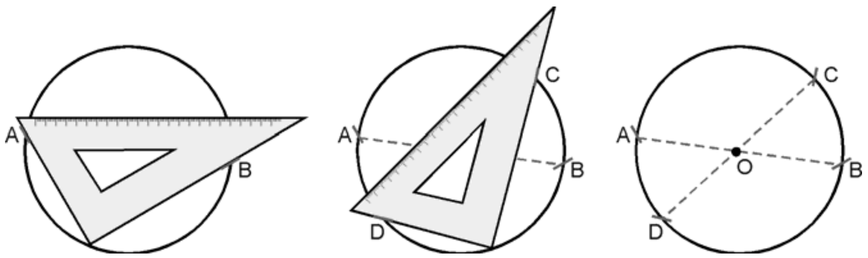
Tanto este problema como o seguinte constituem actividades de investigação óptimas para trabalhar com software dinâmico.

Dados dois pontos, constrói algumas rectas que estejam à mesma distância dos dois pontos. Explica o processo utilizado.
Encontra processos para obter uma ou mais rectas que estejam à mesma distância de três pontos não colineares.
Discute a existência de solução para este problema com mais de três pontos.

Há uma infinidade de rectas que estão há mesma distância de dois pontos, apesar da nossa tendência ser procurar um eixo de simetria. É por isso que este problema se revela interessante, porque explora bastante a distância de um ponto a uma recta. Para três pontos há três soluções e para 4 ou mais pontos, pode existir, ou não, solução. No espaço, este problema torna-se bastante complexo.

Dada uma circunferência, encontra o seu centro utilizando
- só um esquadro;
- um compasso e uma régua.

Um ângulo recto cujo vértice é um ponto de uma circunferência, está inscrito numa semicircunferência. Isto significa que os pontos em que os seus lados intersectam a circunferência são extremos de um diâmetro.



Obtendo dois diâmetros por este processo, o seu ponto de encontro é o centro da circunferência.

Utilizando a régua e o compasso recorre-se à intersecção das mediatrizes de duas cordas da circunferência.

Problemas de contagem

Contar não é uma actividade geométrica, isto é, não tem nada a ver com a natureza da geometria. Porém, contar pode exigir capacidades de visualização e por isso a sua ligação com a geometria tem que ser explorada.

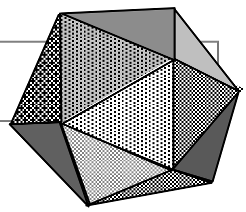
Há processos de contagem que não são directos, isto é, em que a contagem não é feita um a um. É possível contar rapidamente um grande número de objectos aproveitando a forma como esses objectos estão agrupados ou relacionados. Estes processos de contagem permitem-nos evitar erros intermédios, tão frequentes numa contagem directa, e garantir que o número obtido está certo. É por isso que eles são eficazes e que constituem uma actividade matemática rica, articulada e que conduz a generalizações. Os problemas de contagens ajudam a estabelecer ligações entre a geometria e os números.

Quantas diagonais tem um polígono convexo de *n* lados?
Qual é a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de *n* lados?

Estes problemas podem ter sido já abordado por alguns alunos no 3º ciclo, mas a experiência tem-nos mostrado que a maior parte dos alunos nunca pensou neste tipo de questões.

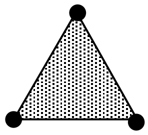
São um óptimo ponto de partida para se começar a pegar na geometria. Por um lado permitem a articulação de velhos e novos conhecimentos, por outro são actividades de investigação que levam a generalizações e demonstrações simples.

Quantas arestas tem um icosaedro? E quantos vértices ?

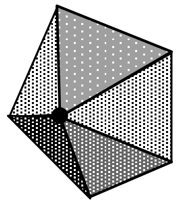


O icosaedro tem **20 faces** (ico = vinte).

Cada face tem 3 vértices $20 \times 3 = 60$



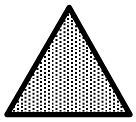
Cada vértice é comum a 5 faces $60 : 5 = 12$

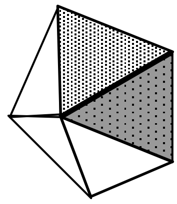


Concluímos que o icosaedro tem **12 vértices**.

O número de arestas pode ser calculado da mesma maneira:

Cada face tem 3 arestas $20 \times 3 = 60$





Cada aresta é comum a 2 faces $60 : 2 = 30$

Concluímos que o icosaedro tem **30 arestas**.

Este processo de contagem aplica-se a qualquer poliedro regular pelo facto das faces terem todas o mesmo número de lado e por concorrerem sempre o mesmo número arestas e o mesmo número de faces em cada vértice.

Vem a propósito recordar a relação que existe entre os números destes três elementos:

Nº de faces + nº de vértices = nº de arestas + 2

para o icosaedro: $20 + 12 = 30 + 2$

Esta igualdade é conhecida como a **relação de Euler** e é válida para qualquer poliedro convexo. Descartes já a conhecia, embora a tenha formulado de um modo diferente.

Quantas diagonais tem um icosaedro?

Ninguém se atreveria a fazer esta contagem um a um.

Uma forma de contar as diagonais de um poliedro é fazer o cálculo do número total de segmentos definidos pelos seus vértices, que sabemos serem pontos não colineares três a três. Esse número é igual à soma dos números de arestas, diagonais faciais e diagonais espaciais, isto é, todos os segmentos que são definidos pelos vértices.

No caso do icosaedro, como há 12 vértices, cada um deles define segmentos com os outros 11. Portanto são $12 \times 11 = 132$ segmentos. Cada segmento foi contado duas vezes, logo são $132 : 2 = 66$ segmentos.

66 = 30 arestas + 0 diagonais faciais + 36 diagonais espaciais

Problemas de representação

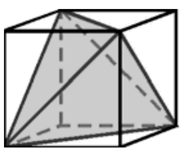
Na geometria do espaço trabalhamos com objectos a três dimensões. Podemos ter acesso a modelos dos objectos, mas também precisamos de saber lidar com o modelo representado no papel. Há várias formas de representar um objecto do espaço no papel: em perspectiva, por vistas, em referencial, por coordenadas, planificado.

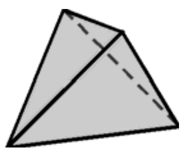
Desenhar a planificação permite a visualização ou o conhecimento de possibilidades que, no modelo ou na representação em perspectiva, podem não ser perceptíveis. Estes problemas permitem o recurso a diversas planificações do mesmo modelo e a opção da planificação mais favorável.

Desenha em perspectiva cavaleira um tetraedro e um octaedro. Quais são os elementos que ficaram representados em verdadeira grandeza?

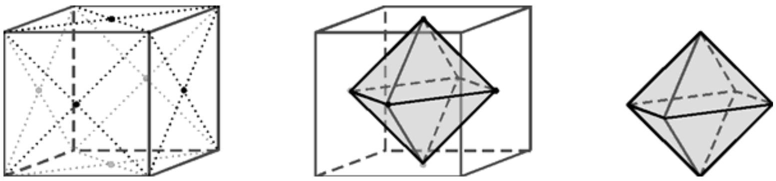
O desenho em perspectiva cavaleira obedece a determinadas regras que fazem com que os poliedros mais fáceis de desenhar sejam os paralelepípedos. As faces de frente para o observador ficam em verdadeira grandeza e as arestas paralelas são representadas por segmentos paralelos.

Neste caso interessa-nos desenhar o tetraedro e o octaedro a partir de um desenho em perspectiva de um cubo, visto que este é o sólido mais fácil de desenhar em perspectiva, e do qual nos é mais familiar este tipo de representação. E para isso vamos recorrer à construção do tetraedro a partir das diagonais faciais do cubo e à dualidade cubo/octaedro. As posições relativas de elementos do tetraedro e do octaedro em relação ao cubo, permitem-nos saber quais desses elementos ficam representados em verdadeira grandeza.





Nesta representação do tetraedro não há faces em verdadeira grandeza, porque nenhuma delas é paralela às faces de frente do cubo. Há duas arestas, as que estão contidas nas faces de frente do cubo, que estão em verdadeira grandeza.



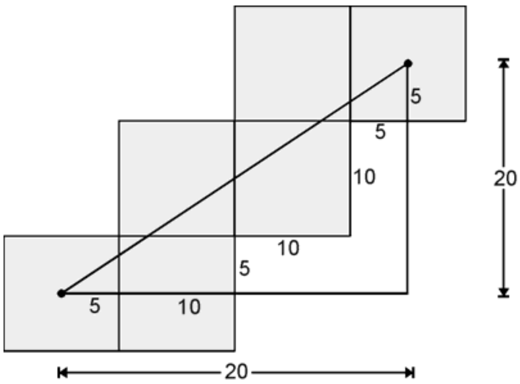
Nesta representação do octaedro, há quatro arestas que são paralelas às faces de frente do cubo, por isso estão representadas em verdadeira grandeza. Nenhuma das faces está de frente, por isso nenhuma está representada por um triângulo equilátero.

Uma formiga está no centro de uma face de um cubo que tem 10 cm de aresta. A certa altura decide mudar-se para o centro de outra face, passando por todas as outras faces. Contudo, a formiga tem receio dos vértices e por isso nunca passa a menos de um centímetro deles. Qual é o trajecto mais curto que a formiga consegue fazer?

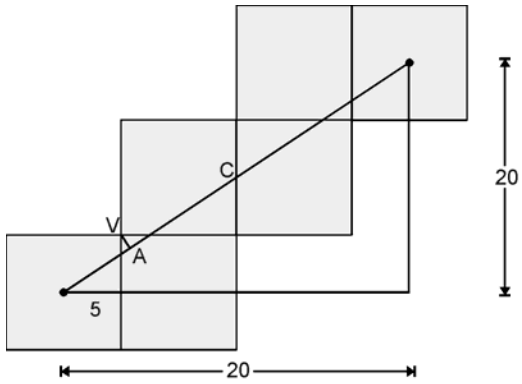
Educação & Matemática, nº41 - O problema deste número

A maneira mais eficaz de responder à questão é transformar o problema num problema do plano porque sabemos que o caminho mais curto entre os dois pontos é um segmento de recta. Neste caso é interessante para os alunos planificar o cubo de maneiras diferentes e, em cada uma, representar possíveis caminhos da formiga e comparar os comprimentos dos vários trajectos obtidos.

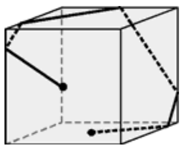
A planificação que nos dá a solução óptima do problema é aquela em que podemos representar o trajecto por um segmento de recta que passa por todas as faces.



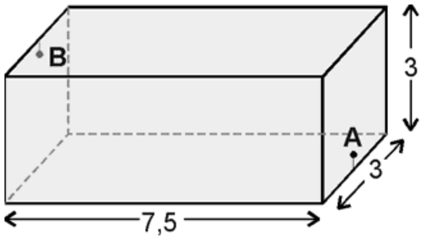
Mas será que esta solução verifica a condição de passar a menos de 1 cm dos vértices? Identificando uma simetria central (centro em C) no percurso obtido, basta-nos calcular a distância ao primeiro vértice, $\overline{VA}$. Por semelhança de triângulos chegamos à conclusão que $\overline{VA} \approx 1,3$ cm.



Agora é interessante reconstituir o cubo para melhor visualizar o caminho da formiga. Esta visualização torna-se mais fácil se for feita com o modelo.



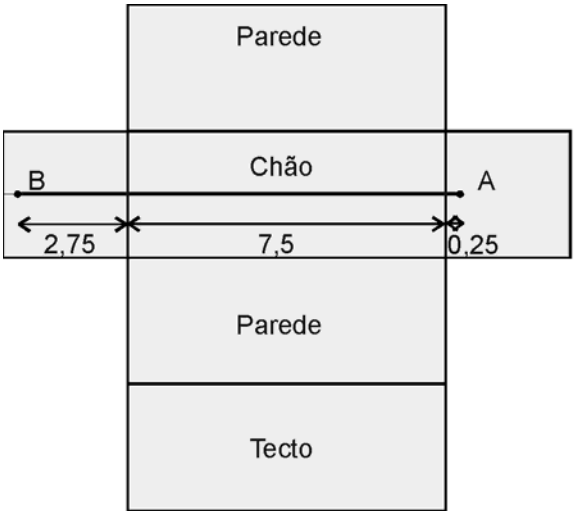
Uma sala tem a forma de um prisma quadrangular recto com as dimensões, em metros, indicadas na figura. A meio de uma das paredes menores e a 25 cm do chão está uma tomada de corrente (ponto A). Na parede oposta, também a meio, mas a 25 cm do tecto, está uma lâmpada (ponto B).



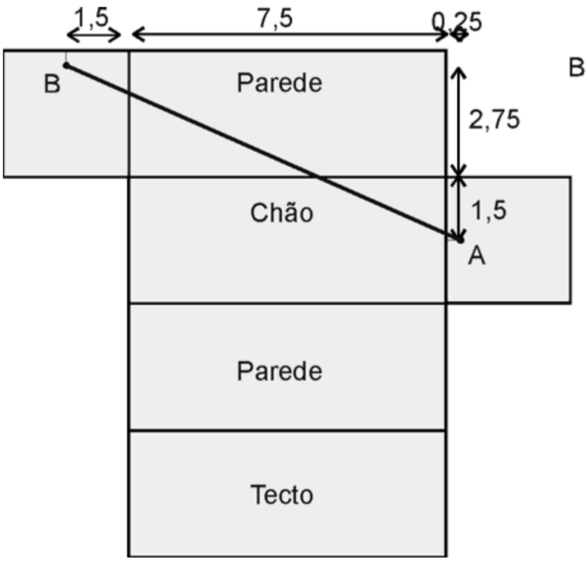
Dispomos de 10 m de fio para ligar a lâmpada à tomada e não queremos que o fio fique suspenso. Por onde deverá passar o fio?

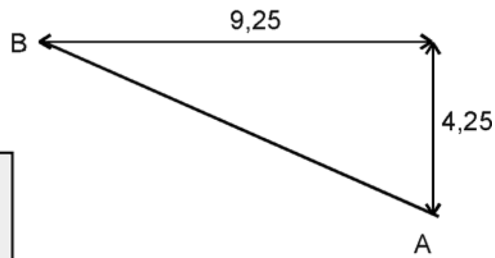
Adaptado de Mini-Olimpíadas da Matemática 1981/82

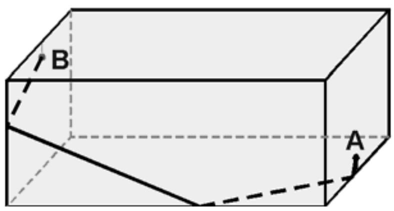
Este problema, embora sendo análogo ao anterior, vai trazer-nos outras dificuldades.



$$0{,}25 + 7{,}5 + 2{,}75 = 10{,}5 \text{ m}$$

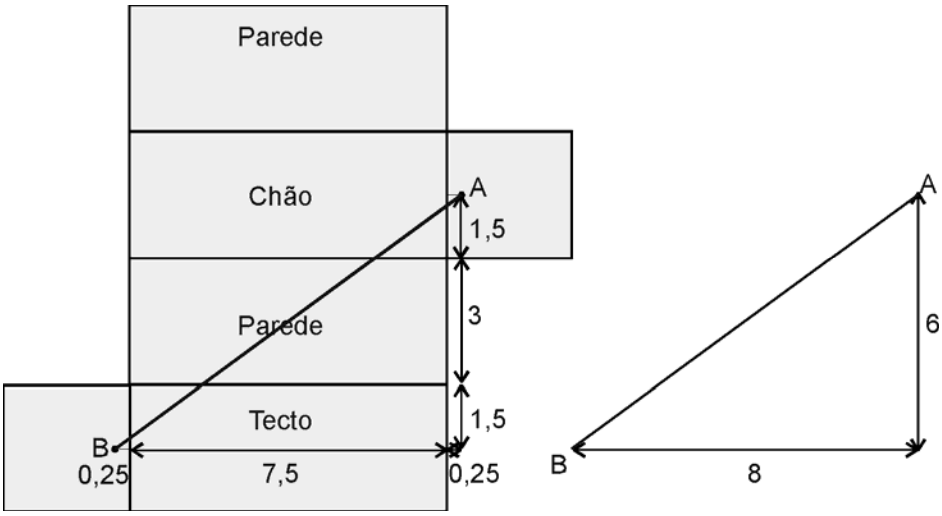






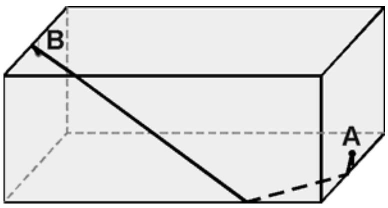
$$AB^2 = 9{,}25^2 + 4{,}25^2$$

$$AB \approx 10{,}18$$



$$AB^2 = 8^2 + 6^2$$
$$AB = 10$$

Como podemos verificar, só esta última planificação nos permitiu obter a solução do problema. Vimos mais uma vez que a escolha da planificação pode não ser indiferente para resolver um problema.



Por incrível que pareça, o fio tem que passar pelo chão, pelo tecto e por 3 paredes para poder ser o mais curto possível.

Escolhe três referenciais diferentes para representar um cubo. Para cada um determina as coordenadas dos vértices do cubo.

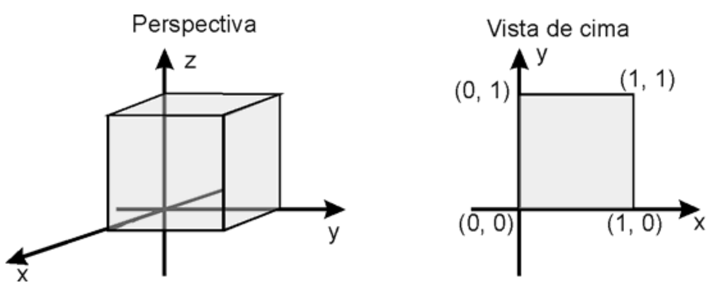
"*(Se quero saber a classe a que pertence esta curva) escolho uma recta como AB, à qual refiro todos os seus pontos, e em AB escolho um ponto A no qual vou começar a investigação. Digo 'escolho isto e aquilo' pois somos livres de escolher o quisermos porque, embora seja necessário escolher com cuidado de modo a tornar a equação tão curta e simples quanto possível, apesar disso, qualquer que seja a recta que eu escolha em vez de AB, a curva resultará sempre da mesma classe, um facto facilmente demonstrável.*"

(Descartes, 1637, *La Géometrie*, citado em Educação e Matemática nº41)

A escolha de um referencial exige alguns conhecimento das propriedades das figuras e permite aprofundá-los. Além disso, aos aspectos em jogo nessa escolha podem ser dados os carácteres de desafio, utilidade, decisão e argumentação. Descobrir todos os referenciais possíveis e escolher o mais vantajoso para resolver um problema é uma proposta muito mais rica do que simplesmente receber o objecto já colocado no referencial, e muitas vezes duma forma que só complica a situação!

Numa proposta em que aluno tem que conhecer as propriedades da figura mas também tem que tomar uma decisão em função duma determinada utilidade e argumentar a sua escolha, são operacionalizados e desenvolvidos esquemas de raciocínio importantes, como iremos ver. Tal não acontece quando essa decisão não está em jogo.

O que interessa é escolher um referencial que aproveite as potencialidades da figura – posições relativas, relações métricas, simetrias – de modo a facilitar a determinação das coordenadas. Escolher um referencial é também escolher uma unidade de comprimento e esta escolha deve ser feita tendo em conta as características da figura e a posição relativa do referencial: comprimento de um lado, de uma diagonal, de um raio, etc. Este tipo de questões deve começar no plano, escolher referenciais para polígonos conhecidos, e só depois passar ao espaço, visto que as escolhas no espaço acabam por se reduzir a escolhas no plano.

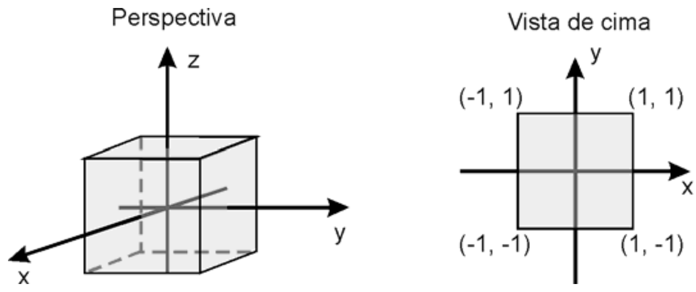


Neste caso, o referencial facilita porque podemos tomar como unidade a aresta do cubo e as coordenadas decorrem imediatamente, sem necessidade de cálculos.

(0, 0, **0**)	(1, 0, **0**)	(1, 1, **0**)	(0, 1, **0**)
(0, 0, **1**)	(1, 0, **1**)	(1, 1, **1**)	(0, 1, **1**)

Se compararmos estas com as coordenadas de um quadrado num referencial do plano, a vista de cima, reparamos que elas foram obtidas mantendo a abcissa e a ordenada e acrescentando a cota 0 para os vértices da face que fica no plano xOy e cota 1 para os vértices da face oposta.

Nesta escolha tivémos em conta que as faces do cubo são quadrados e as suas posições relativas. Só precisámos do utilizar um octante.

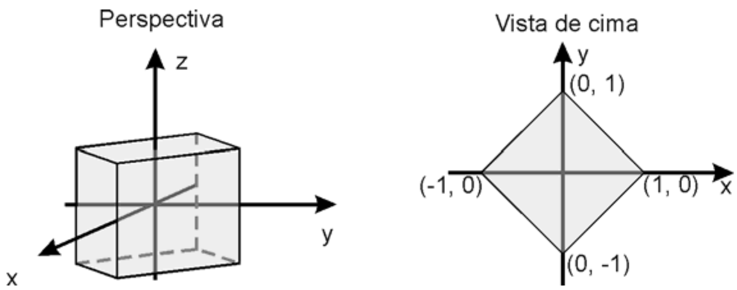


Neste caso, a determinação das coordenadas ficará mais fácil se tomarmos como unidade metade da aresta do cubo. Novamente sem necessidade de cálculos, e recorrendo às coordenadas do quadrado num referencial do plano, as coordenadas são:

(1, 1, **1**)	(-1, 1, **1**)	(-1, -1, **1**)	(1, -1, **1**)
(1, 1, **-1**)	(-1, 1, **-1**)	(-1, -1, **-1**)	(1, -1, **-1**)

Também aqui recorremos ao facto de o cubo ter três planos de simetria, perpendiculares dois a dois, sendo cada um deles paralelo a duas faces opostas. Uma das vantagens deste referencial é relacionar simetrias do cubo com simetrias de coordenadas.

Precisamos ainda de encontrar um terceiro referencial. Fazendo uma rotação de 45º segundo o eixo Oz, do último referencial, obtemos uma outra posição favorável do cubo.

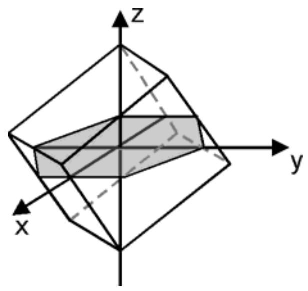


Esta adaptação foi possível porque as diagonais do quadrado são perpendiculares, e o facto de serem também eixos de simetria facilita a determinação das coordenadas. Neste caso, há que decidir qual a unidade mais conveniente: metade da aresta ou metade da diagonal facial.

O facto de termos aproveitado as diagonais do quadrado para eixos do referencial no plano conduz-nos agora à questão: haverá um referencial ortonormado cujos eixos são diagonais espaciais do cubo?

Quaisquer duas diagonais espaciais do cubo são concorrentes, e portanto complanares, mas não são perpendiculares. Por isso não existe um referencial ortonormado que contenha mais do que uma diagonal espacial.

Se escolhermos para eixo Oz uma diagonal espacial do cubo, é natural que a origem seja o centro do cubo. Nesse caso, o plano xOy só poderá ser o plano mediador da diagonal, que intersecta o cubo segundo um hexágono regular cujos vértices são pontos médios de arestas. A determinação das coordenadas torna-se assim um problema de cálculo muito elaborado.



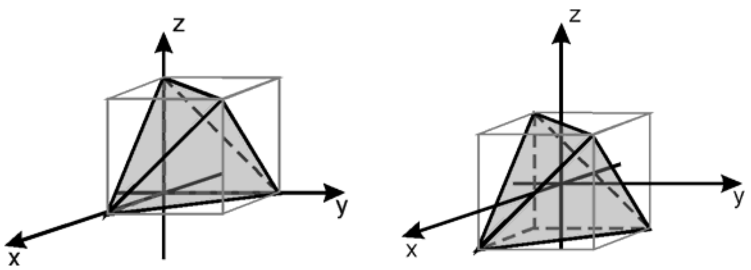
Nesta breve discussão estiveram em jogo as propriedades fundamentais de um quadrado e de um cubo, que nos levam a concluir que de maneira nenhuma interessa colocá-lo num referencial não ortonormado, nem noutras posições que não sejam deste tipo.

A discussão da escolha de um referencial para um paralelepípedo qualquer é uma extensão deste problema, em que surgem novas questões: a escolha da unidade torna-se mais complexa e o facto das diagonais do rectângulo não serem perpendiculares limita-nos a escolha da posição do referencial.

Escolhe um referencial para representar um tetraedro. Determina as coordenadas dos vértices do tetraedro no referencial escolhido.
Escolhe um referencial para representar um octaedro. Determina as coordenadas dos vértices do octaedro no referencial escolhido.

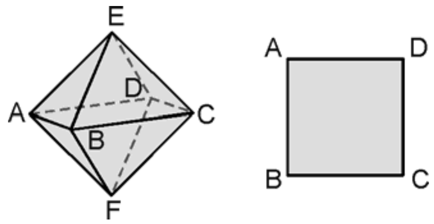
Para um tetraedro poderia, com algumas vantagens evidentes, escolher-se um referencial não ortogonal. Mas isso torna mais complicado o cálculo de distâncias e também só está previsto no programa a utilização de referenciais ortonormados.

Um referencial ortonormado é uma malha cúbica, por isso a relação que já estabelecemos atrás entre o cubo e o tetraedro e os referenciais que escolhemos para o cubo conduzem-nos imediatamente a soluções do problema.

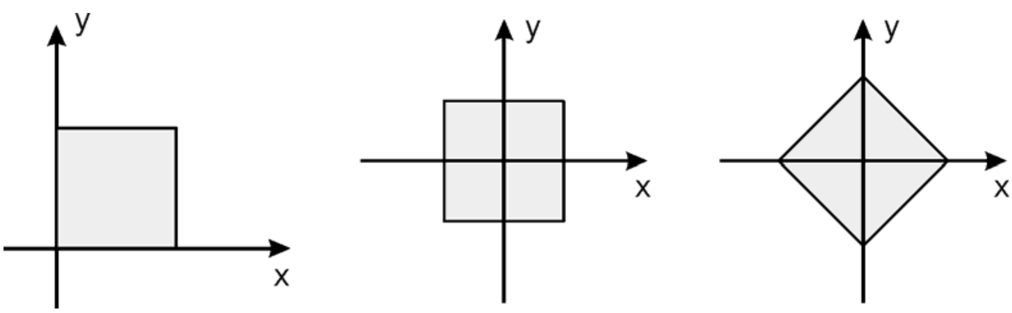


O que sabemos de um octaedro que nos possa ajudar aqui? Não interessa assentar uma face num dos planos coordenados porque não há faces perpendiculares, embora as faces sejam paralelas duas a duas. Há arestas perpendiculares, que apontam para a utilização de um plano que as contenha como plano coordenado.

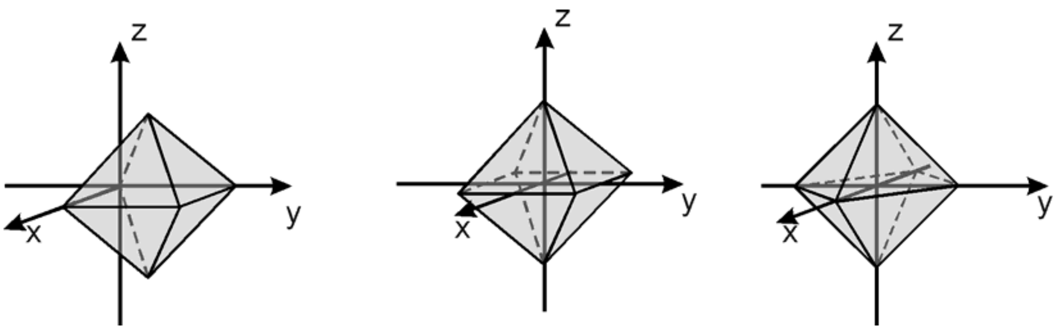
Fazendo um corte no octaedro segundo um plano que contenha duas arestas perpendiculares, obtemos um quadrado.



O problema passa agora por um subproblema no plano, que já abordámos anteriormente.



A escolha do referencial mais favorável para o octaedro vai depender da posição dos outros dois vértices.



Só no terceiro caso não precisamos de fazer cálculos para determinar as coordenadas dos vértices. Se escolhermos para unidade a distância de um vértice ao centro do octaedro, as coordenadas vão ser

(1, 0, 0)	(-1, 0, 0)	(0, 0, 1)
(0, 1, 0)	(0, -1, 0)	(0, 0, -1)

Utilizámos aqui a propriedade de num sólido regular todos os vértices estarem à mesma distância do centro. Podemos apreciar a simetria da solução encontrada que é consistente com a regularidade do sólido.

Também poderíamos ter chegado a estes resultados recorrendo à dualidade entre o octaedo e o cubo.

Problemas de cortes

Fazer um corte num objecto a três dimensões permite a representação e o estudo no plano de uma situação do espaço. Pelos cortes temos acesso a dimensões e propriedades pouco acessíveis em perspectiva ou até no próprio modelo. Por exemplo, o ângulo das diagonais espaciais do cubo.

Por outro lado, há relações que ganham evidências quando passamos ao corte. Por exemplo, a relação entre aresta do octaedro e a aresta do cubo dual. Quando se faz um corte de sólidos ligados é possível estabelecer relações entre os elementos das duas figuras obtidas. Daí o interesse de também estabelecer relações entre elementos de duas figuras no plano.

Algumas destas relações exigem o recurso à trigonometria elementar do triângulo rectângulo por isso constituem uma boa ocasião de ligação de conhecimentos.

Que polígonos é possível obter por corte de um cubo?
Para cada um desses polígonos indica a posição do plano de corte relativamente a algum(s) elemento(s) do cubo.
Tudo o que há num cubo…, Eduardo Veloso, Educação Matemática nº 26

A discussão dos polígonos que é possível obter por corte num cubo e dos planos que originam esses cortes está muito completa e bem feita no artigo referido acima, por isso não achámos necessário desenvolvê-la aqui. No entanto chamamos a atenção para alguns aspectos.

Esta actividade só faz sentido se for realizada pelos alunos com recurso a modelos apropriados, como sejam cubos de acrílico transparente em que se possa colocar um líquido colorido cuja superfície representa as várias secções. Tem a vantagem de ser um material dinâmico que permite, ao manipular, observar um grande número de situações, experimentar, conjecturar, verificar e argumentar.

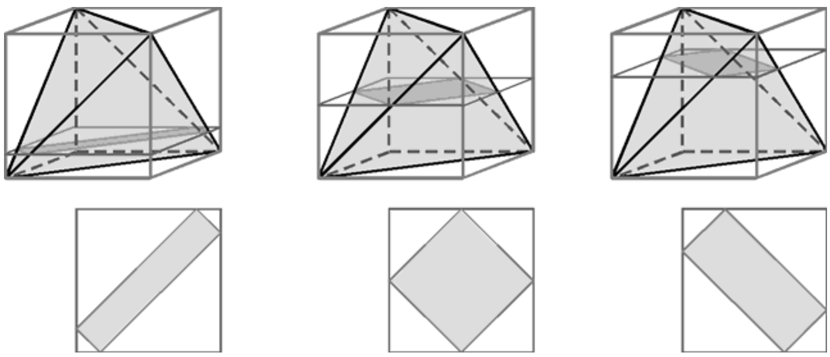
É uma situação em que a investigação dos alunos conduz ao aprofundamento e sistematização de conhecimentos sobre posições relativas no espaço entre rectas e planos e entre planos. Também é uma boa altura para desenvolver capacidades de representação, pedindo aos alunos que desenhem perspectivas e cortes para ilustrar as várias situações, e para rever a classificação de triângulos e quadriláteros. Em alguns casos, é até possível pedir pequenas demonstrações das suas conclusões, como por exemplo: "Não há nenhum corte que seja um pentágono regular" (ver problemas de demonstração, pág. 115), "Não há nenhum corte que seja um polígono com mais de seis lados", etc.

Que polígonos é possível obter por corte de um tetraedro?
Mostra que todos os rectângulos obtidos por corte de um plano paralelo a duas arestas têm o mesmo perímetro.
Algum desses rectângulos é quadrado? Qual é o plano que o determina?

O estudo destes cortes pode ser feito através de uma exploração análoga à que se fez para o cubo, recorrendo a um tetraedro em acrílico transparente. Mas já que conhecemos uma relação "tetraedro dentro do cubo", podemos recorrer a ela para esta investigação. Ao fazê-lo procurando dispensar em alguns casos os modelos estamos a promover capacidades de visualização no espaço.

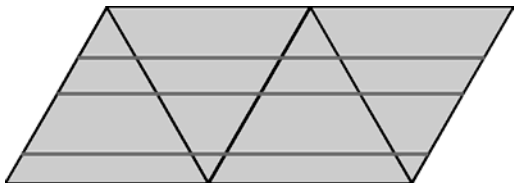
Se o aluno já fez a exploração dos cortes no cubo, poderá concluir e demonstrar que os cortes no tetraedro só podem ser triângulos ou quadriláteros, e para isto nem sequer precisa de recorrer ao modelo. Se o tetraedro tem quatro faces, um plano intersecta no máximo quatro faces, logo o corte pode ter no máximo quatro lados.

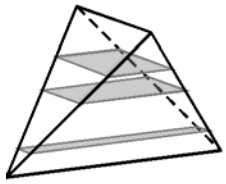
Obtemos quadriláteros quando o plano intersecta as quatro faces, e estes só são rectângulos quando o plano é paralelo a duas das arestas. Se virmos o tetraedro dentro do cubo, estes são os planos paralelos a duas faces opostas do cubo.

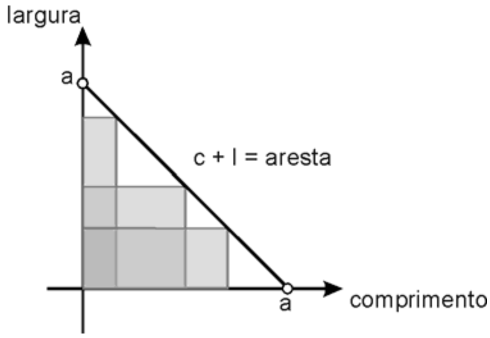


Para provar que estes rectângulos têm todos o mesmo perímetro, o mais fácil é recorrer a uma planificação.

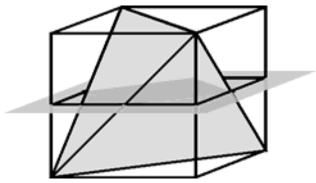
Estes rectângulos vão de um caso limite a outro, e como não há descontinuidades, um deles é quadrado.

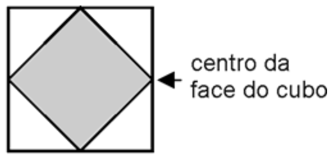






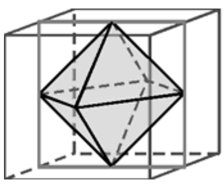
Mas este quadrado também pode ser visto quando fazemos o corte no cubo com o tetraedro por um plano que passa nos pontos médios de quatro arestas do tetraedro.

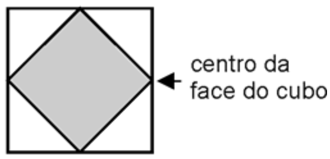




Qual é a razão entre a aresta de um cubo e a do octaedro seu dual?
Qual é a raio da esfera circunscrita num octaedro?

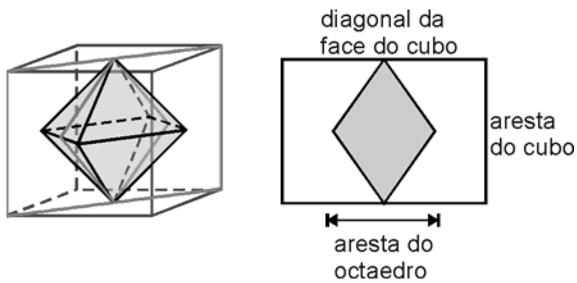
Qualquer destes problemas se transforma num problema do plano se fizermos um corte nos sólidos que contenha as duas dimensões que queremos comparar.





Deste corte, conclui-se imediatamente que a razão entre as arestas dos dois sólidos é $\sqrt{2}$ (ver problemas de proporcionalidade geométrica, pág. 98). Também podemos concluir, uma vez que o centro e quatro vértices do octaedro estão contidos neste plano, que o raio da esfera circunscrita é metade da aresta do cubo.

Quando se fala na esfera circunscrita, apetece logo pensar na esfera inscrita. À primeira vista parece que a esfera inscrita apareceria neste mesmo corte representada pela circunferência inscrita no quadrado, mas isso não se verifica. A esfera inscrita é tangente às faces do octaedro e não às arestas, o corte que conviria utilizar é o que contém os centros de 4 faces do octaedro e é uma circunferência inscrita num losango porque os diedros de um octaedro não são rectos.

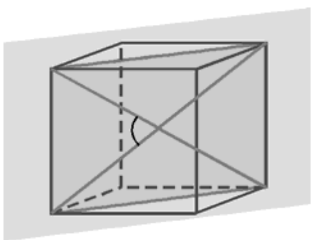


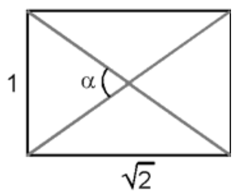
Esta relação não é tão imediata como a anterior, já exige alguns cálculos mais complexos.

Qual é o ângulo de duas diagonais espaciais de um cubo?
Qual é a medida do diedro de um tetraedro?
Qual é a medida do diedro de um octaedro?
Serão uma mera coincidência os valores encontrados?

Qualquer destas questões se resolve muito facilmente recorrendo a cortes adequados no cubo.

Para o ângulo das duas diagonais o plano de corte é definido pelas próprias diagonais.



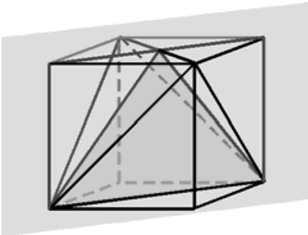


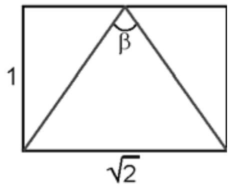
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\frac{\alpha}{2} \approx 35{,}26^{o}$$

$$\alpha \approx 70{,}53^{o}$$

Para o diedro do tetraedro, temos de escolher um plano que seja perpendicular a uma aresta do sólido. O plano que contém duas arestas opostas do cubo facilita o estabelecimento de relações.



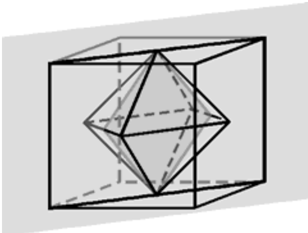


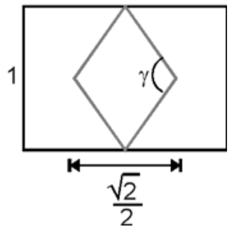
$$\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\beta}{2} \approx 35{,}26^{o}$$

$$\beta \approx 70{,}53^{o}$$

Para o diedro do octaedro o plano de corte pode ser o mesmo porque é perpendicular a uma aresta do octaedro.



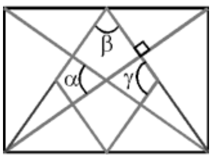


$$\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

$$\frac{\gamma}{2} \approx 54{,}74^{o}$$

$$\gamma \approx 109{,}47^{o}$$

Notamos que os dois primeiros cálculos deram o mesmo valor e o terceiro deu um ângulo suplementar. Isto não é mera coincidência, o plano de corte que utilizámos nos três casos foi o mesmo, cada face do tetraedro é perpendicular a uma diagonal espacial do cubo, e quatro das faces do octaedro estão contidas em faces do tetraedro.



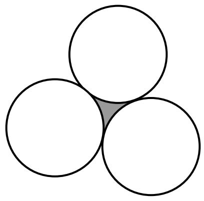
Mas para além destes cortes, é interessante visualisar esta situação no espaço construindo um octaedro dentro de um tetraedro, unindo os pontos médios das arestas deste último com palhinhas e linha ou construindo um tetraedro a partir de um octaedro e 4 tetraedros com polydrons ou cartolina. A este respeito ver os artigos da Educação & Matemática nº26, *Tudo o que há num cubo…*, de Eduardo Veloso, e nº38, *Incentivando a visualização espacial através de propriedades geométricas de tetraedros duais*, de Ana Maria Kaleff e Dulce Monteiro Rei.

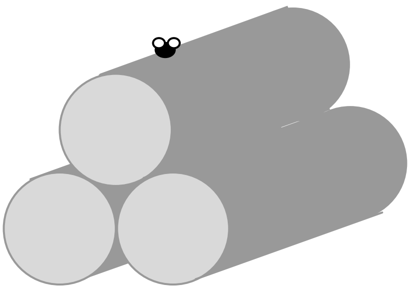
Problemas com aparente falta de dados

A designação que escolhemos fala por si. O que é interessante nestes problemas é que os dados, aparentemente em falta, acabam por estar presentes nas relações geométricas que é possível estabelecer na figura. No caso de problemas no espaço estes reduzem-se muitas vezes a problemas no plano através de cortes.

Embora muitos destes problemas sejam métricos, o importante da sua resolução não é, de modo nenhum, a aplicação de fórmulas de áreas e volumes, mas sim a visualização e a descoberta de outros dados da figura. Porém, são bons problemas para os alunos utilizarem as fórmulas aprendidas, ou não, anteriormente.

Qual é a área da região que fica entre três circunferências tangentes, todas com o mesmo raio?

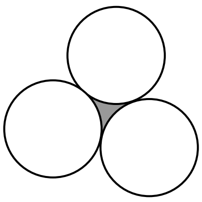


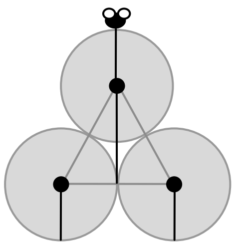


Três troncos cilíndricos, todos com 1 metro de diâmetro, estão empilhados como mostra a figura. Uma mosca pousou sobre o tronco superior. A que altura se encontra a mosca?

Olimpíadas da Matemática

Estes são dois problemas diferentes mas cuja resolução passa pelo estudo da mesma figura, o triângulo equilátero que se obtém unindo os centros das 3 circunferências. No problema do espaço temos que começar por considerar o corte por um plano perpendicular aos troncos.

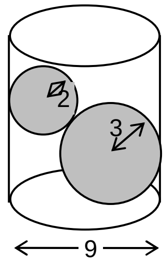




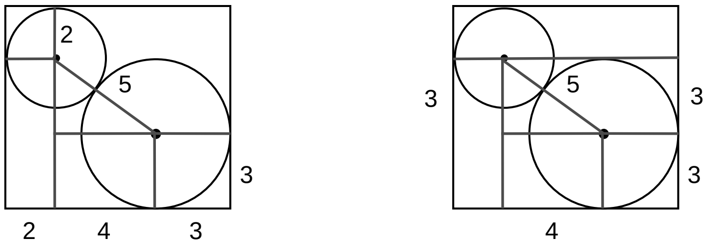
No primeiro caso, depois de feito o esquema, o problema reduz-se ao cálculo da diferença entre a área de um triângulo equilátero de lado *2r* e metade (três sextos) da área de um círculo de raio *r*.

O segundo problema, feito este esquema do corte, reduz-se à determinação da altura de um triângulo equilátero.

Duas esferas estão encaixadas num recipiente cilíndrico com as dimensões indicadas na figura. Qual é o volume de líquido necessário para cobrir totalmente as duas esferas?
Se o líquido cobrir exactamente a esfera maior, que parte da esfera menor fica de fora?



Este é mais um problema que se resolve recorrendo a um corte e à identificação dos elementos que interessa relacionar. Usa-se o teorema de Pitágoras e surgem imediatamente na figura vários dados que estavam escondidos. E é a resposta à última questão que nos mostra como estas esferas encaixam.



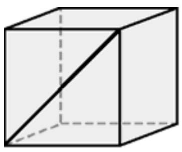
Esta representação de duas circunferências tangentes entre si e ao rectângulo sugere-nos o recurso ao computador (Cabri ou GSP) para estudar a variação dos raios, da largura do rectângulo e da altura do líquido de uma forma dinâmica.

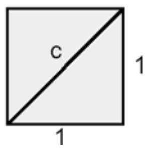
Problemas que dão significado aos números

Historicamente sabemos que muitos problemas geométricos estiveram na génese de novos números. Por outro lado num problema geométrico pode haver sempre uma imagem visual que permite dar um significado aos números. Os números deixam de ser assim uns símbolos que se manipulam de acordo com certas regras, para passarem a ser informações quantitativas e de relação métrica entre elementos de uma ou mais figuras. Por exemplo, posso ver $\sqrt{2}$ como a medida da diagonal de um quadrado de lado 1 ou como a razão entre a diagonal e o lado de um quadrado qualquer. A primeira imagem situa-me $\sqrt{2}$ entre 1 e 2, a segunda ilustra a incomensurabilidade dos dois segmentos.

O facto de estes problemas surgirem de questões métricas não significa que sejam encarados como simples problemas de cálculo, porque eles ajudam a criar imagens que estabelecem conexões e que promovem a operacionalização dos conceitos. Quanto maior for a diversidade de imagens que se tem sobre um conceito e as suas ligações, maior será a destreza com que se opera com esse conceito.

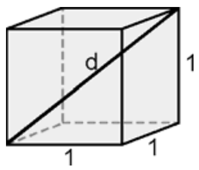
Quais são as medidas das diagonais de um cubo de aresta 1? E de aresta 2? E de aresta 10? E de aresta ***a***?





$c^2 = 1^2 + 1^2$

$c = \sqrt{2}$



$d^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2$

$d = \sqrt{3}$

Num cubo de aresta 2, o cálculo pode fazer-se da mesma maneira:

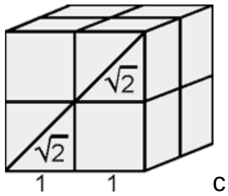
$c^2 = 2^2 + 2^2$

$c = \sqrt{8}$

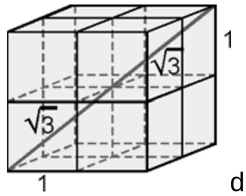
$d^2 = 2^2 + 2^2 + 2^2$

$d = \sqrt{12}$

Mas também se pode pensar que um cubo de aresta 2 é formado por 8 cubos de aresta 1, por isso as diagonais são o dobro das diagonais do primeiro cubo.



$c = 2\sqrt{2}$



$d = 2\sqrt{3}$

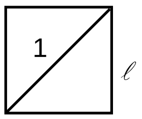
A comparação dos dois resultados para cada diagonal permite concluir que

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Esta pode ser uma forma de dar um significado visual à passagem de um factor para fora, ou para dentro, de um radical.

Qual é a medida do lado de um quadrado de diagonal 1?

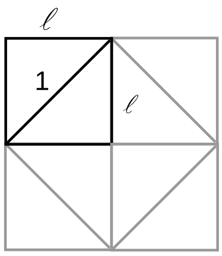
Podemos fazer este cálculo de duas maneira diferentes:



utilizando o teorema de Pitágoras directamente

$$2\,\ell^2 = 1^2$$

$$\ell = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



ou verificando que ℓ é igual a metade da diagonal de um quadrado de lado 1

$$2\,\ell = \sqrt{2}$$

$$\ell = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Embora a racionalização de denominadores deixe de ter a importância que já teve com a utilização da calculadora, há algumas racionalizações que são muito úteis no cálculo mental e na comparação de medidas. Saber que o inverso de $\sqrt{2}$ é metade de $\sqrt{2}$ e associar a esta igualdade uma imagem geométrica pode vir a facilitar o estabelecimento de outras relações.

Um cubo tem volume 1. Qual deve ser a medida da aresta de um outro cubo com o dobro do volume?

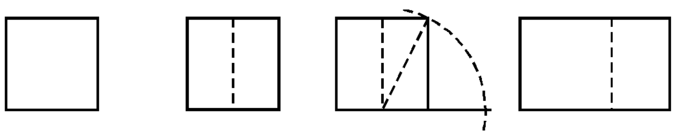
Este é também um problema de proporcionalidade geométrica, mas a sua pertinência aqui tem a ver com a História dos números irracionais.

Desenha um círculo cuja área seja π. Qual é a medida do perímetro?

Desenha um círculo cuja área seja 2π. Qual é a medida do raio?

Este é também um problema de construção e de proporcionalidade geométrica, no entanto pretende-se com este tipo de questões que o aluno construa imagens significativas dos irracionais com que trabalha frequentemente.

As figuras seguintes ilustram uma construção do rectângulo de ouro.



Descreve a sequência de passos utilizada para construir um rectângulo de ouro.

Constrói, o mais rigorosamente possível, um rectângulo de ouro. Depois mede os lados do rectângulo e obtém a razão entre o comprimento do maior lado e o comprimento do menor lado.

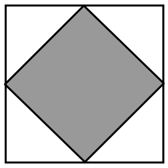
Utilizando agora os teus conhecimentos matemáticos, calcula o valor exacto dessa razão quando o quadrado inicial mede 2. Se partisses de um quadrado com outra medida, a razão seria diferente? Porquê?

Problemas de proporcionalidade geométrica

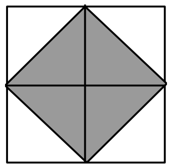
A proporcionalidade tem sido um tema muito explorado desde sempre e ao longo da História da matemática (Tales, Pitágoras, Eudoxo…) e conduziu, como é sabido, ao conceito de incomensurabilidade. Do ponto de vista pedagógico, é interessante estudar agora vários tipos de comparações métricas (comprimentos, áreas e volumes), aproveitando as relações que é possível estabelecer entre elas.

Estes problemas exploram o inesperado das variações métricas quando mudamos de dimensão. Por outro lado ajudam a contrariar o hábito de recorrer primeiro ao que é linear. Alguns destes problemas são questões de aplicação bastante úteis e … desconcertantes.

Qual é a razão entre as áreas dos dois quadrados inscritos um no outro como mostra a figura? E a razão entre os perímetros?



Um aluno que esteja familiarizado com os objectos geométricos, que tenha trabalhado o conceito de área com base na composição/decomposição de figuras, imediatamente se apercebe da razão entre as áreas dos dois quadrados. Naturalmente que estamos a enfatizar a relação medida/comparação deixando para segundo plano a relação medida/cálculo. Tradicionalmente, o trabalho sobre áreas tem sido focalizado na utilização de fórmulas, criando a perspectiva limitada de que medir uma área é fazer um cálculo, perdendo-se até as noções de medida e de unidade de medida.



Para relacionar a razão entre as áreas com a razão entre os lados é necessário ter trabalhado os conceitos de semelhança e proporcionalidade nos aspectos em que estes raciocínios se revelam eficazes. O conceito de semelhança introduz dois raciocínios proporcionais importantes. Um, é o raciocínio de proporcionalidade entre medidas lineares, que está intimamente ligado à trigonometria e à resolução de triângulos, e que praticamente tem sido o único a ser tratado. O outro, é o de proporcionalidade entre medidas não necessariamente lineares (comprimentos, áreas e volumes) e que permite estabelecer outras relações.

Estas têm sido muito ignoradas, apesar do seu poder e eficácia na resolução de problemas.

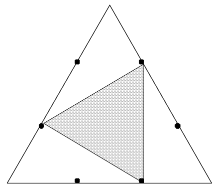
Se $\frac{L}{\ell}$ = r (razão de semelhança) então $\frac{A}{a} = r^2$ e $\frac{V}{v} = r^3$;

se $\frac{A}{a} = c$ então $\frac{L}{\ell} = \sqrt{c}$ e $\frac{V}{v} = (\sqrt{c}\,)^3$

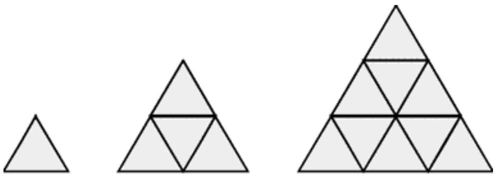
se $\frac{V}{v} = k$ então $\frac{L}{\ell} = \sqrt[3]{k}$ e $\frac{A}{a} = (\sqrt[3]{k}\,)^2$

Se, por outro lado, resolvêssemos este problema utilizando o teorema de Pitágoras, estaríamos a reduzi-lo a um simples exercício de cálculo, que não é necessariamente de mais fácil compreensão que o processo que propusemos. Além disso, este cálculo não iria trazer nada de novo, enquanto o outro abre hipóteses de generalizações a outros polígonos e até a outras dimensões.

Qual é a razão entre os lados dos dois triângulos da figura?



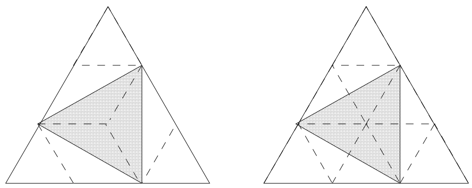
À semelhança do problema anterior, a comparação das áreas é muito mais simples do que a comparação entre os lados, mas para isso interessa escolher uma unidade de área que facilite a comparação, fugindo à tentação de utilizar uma unidade de área quadrada. Esta actividade pode ser precedida por outras de medição de áreas (de triângulos, hexágonos, losangos, etc) em rede triangular, tomando para unidade o triângulo elementar. É interessante fazer notar aos alunos que as fórmulas dependem da unidade escolhida, no caso da unidade de área ser um triângulo a fórmula da área do triângulo será “lado ao quadrado”.



$\ell = 1$ A = 1 $\ell = 2$ A = 4 $\ell = 3$ A = 9

No problema em discussão, um certo vício da nossa parte poderia levar-nos a procurar relações entre lados e ângulos conduzindo à mera aplicação de razões trigonométricas. Esta opção empobreceria o problema retirando-lhe o significado e o carácter geométrico.

Novamente, a combinação de um raciocínio de composição/decomposição de áreas com um raciocínio baseado em semelhanças, abre outras perspectivas.



Esta resolução é mais concreta e não exige o recurso a um raciocínio muito complexo nem a técnicas de cálculo, por isso é mais acessível. E é esta resolução que nos permite relacionar este problema com o anterior, identificando, numa parte dessa resolução, o mesmo tipo de raciocínio.

Qual é a fórmula da área de um círculo de raio r quando se toma para unidade de área um círculo de raio 1?

Esta ideia vem desenvolver a ideia já trabalhada na questão anterior, de que as fórmulas dependem da unidade escolhida mesmo quando esta não pavimenta a figura, como é o caso do círculo.

Como a medida da área é a razão entre a área da figura que se está a medir (πr^2) e a área da unidade (π), podemos concluir que $A = r^2$.

Quais são os polígonos que permitem obter por dobragem, segundo um eixo de simetria, duas figuras semelhantes à inicial? E se a dobragem não for segundo um eixo de simetria?

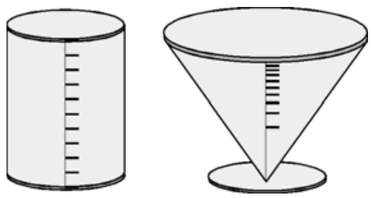
Os únicos polígonos que permitem obter, dobrando segundo uma recta, dois polígonos com o mesmo número de lados são os triângulos e os quadriláteros. Por isso esta investigação fica limitada ao estudo de triângulos e quadriláteros, e vai exigir que se operacionalize todos os conceitos e conhecimentos sobre estes polígonos, nomeadamente eixos de simetria, classificações, propriedades.

Os rectângulos que permitem obter por dobragem, segundo um eixo de simetria, dois rectângulos semelhantes ao original são aqueles em que a razão entre as dimensões é $\sqrt{2}$. É precisamente o que acontece com os formatos de papel normalizados tipos A, B e C da convenção DIN.

Um recipiente cilíndrico tem capacidade para um litro. Como havemos de o graduar em decilitros?
Outro recipiente cónico tem capacidade para um litro. Como havemos de o graduar em decilitros?

Não interessa nada conhecer as dimensões dos sólidos. No cilindro, os espaços entre as marcas vão ser todos iguais porque as secções têm todas a mesma área e portanto os seus volumes vão ser proporcionais à altura. Esta ideia é coerente com a intuição, qualquer pessoa divide a altura do cilindro ao meio para obter um cilindro com metade do volume.

No que respeita ao cone, as coisas complicam-se porque a intuição falha redondamente. É por isso que estes problemas são tão importantes de ser trabalhados. Como os cones de líquido correspondentes a 0,1, 0,2, … litros são todos semelhantes ao cone do recipiente e as razões entre os volumes são 0,1, 0,2 etc, as suas geratrizes terão que estar na razão de $\sqrt[3]{0,1}$ $\sqrt[3]{0,2}$, …, com a geratriz do recipiente.



Pretendemos obter uma colecção de garrafas de água mineral, semelhantes entre si, com capacidades de 0,25, 0,33, 0,5, 1 e 1,5 litros.
A partir das medidas de uma garrafa de 0,33 litros, obtém as medidas de todas as garrafas desta colecção.

Nesta situação, o volume dos objectos é conhecido à partida, portanto não é o cálculo do volume que está em jogo. Por outro lado, não importa a forma da garrafa a estudar, embora seja importante que algumas garrafas estejam à mão. Convém notar que para as marcas disponíveis no mercado as garrafas de água mineral da mesma qualidade não são geralmente semelhantes.

A segunda parte da questão parece envolver muitos e complicados cálculos, devido às formas elaboradas das garrafas, o que poderá fazer pensar que é uma questão difícil. Contudo o problema é independente da forma das garrafas, o que interessa são as razões entre os seus volumes e a relação destas com as razões entre as dimensões lineares e as áreas das bases.

Por exemplo, para a garrafa de 0,25 ℓ

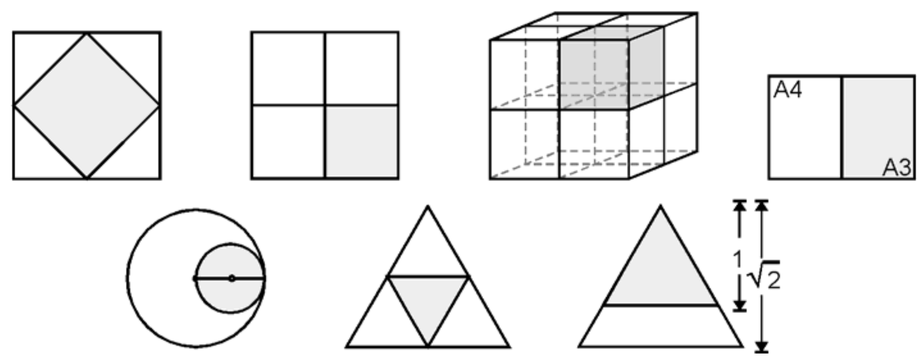
razão entre os volumes = $\frac{}{} = \frac{3}{4}$

razão entre as dimensões lineares = $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

razão entre as áreas = $\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)^2$

Para as outras garrafas o raciocínio seria idêntico. Sugere-nos até o registo dos resultados numa tabela, e o estudo das variações das dimensões lineares em função da capacidade. Enquanto que o volume aumenta proporcionalmente ao cubo da razão de semelhança, a área aumenta proporcionalmente ao quadrado dessa razão.

Em todas as situações está presente a relação “dobro de”.

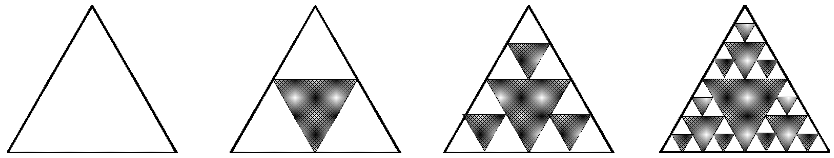


Para cada figura, explicita qual é a relação “dobro de” e identifica outras relações entre medidas das figuras.

Fiz um desenho numa folha de papel A4 e quero ampliá-lo para uma A3. Qual deve ser a percentagem de ampliação? E se eu quiser ampliar para A2? E para A1?

Usando uma folha de papel A4 para a superfície lateral de um cilindro, qual é o maior volume que se consegue obter?
Quais são os volumes que se obtêm com folhas de papel A5, A3 e A2?
Uma pizza circular dá para uma pessoa. Para quantas pessoas dá uma pizza com o dobro do raio?
Um novelo de lã dá para tricotar uma luva. Quantas luvas é possível fazer com um novelo de lã que tem o dobro do diâmetro?

O triângulo de Sierpinsky é um fractal que se constrói da maneira que está ilustrada na figura:



Se a área do primeiro triângulo for 1, quais são as áreas a branco nos outros triângulos? E as áreas a negro?
Se construísses a figura seguinte na sequência, qual seria a área a branco? E a negro?
Se o processo de construção destas figuras continuar indefinidamente, o que achas que vai acontecer à área a branco? E à área a negro?

Estes problemas e actividades ilustram a diversidade de situações em que a proporcionalidade geométrica se aplica. Além disso, como é o caso do triângulo de Sierpinsky, mostram como começar a ampliar esta noção, ligando-a com a teoria dos fractais, e dando significado visual aos conceitos de sucessão, limite e dimensão não inteira.

Algumas destas actividades, por serem abertas ou por serem realísticas, são bons exemplos de propostas de trabalho para avaliação.

Problemas de lugares geométricos

com o recurso a referenciais

A utilização de referenciais permite que se defina e estude uma figura geométrica a partir de coordenadas, trabalhando, portanto, numerica ou algebricamente. Porém, esta vantagem da geometria analítica tem um perigo, o de nos fazer esquecer as figuras de partida e passar a trabalhar com números ou expressões desligados do seu significado. Nos problemas de representação discutimos várias questões ligadas à escolha de referencial, que aqui podemos retomar ligando-as à definição de lugares geométricos através de condições.

O estudo de lugares geométricos foi já iniciado no 8º ano do ponto de vista da sua visualização e representação. Agora vamos ampliar e desenvolver este conceito, fazendo a ligação plano/espaço, trabalhando com distâncias expressas em função de coordenadas, e ligando-o ao conceito de condição.

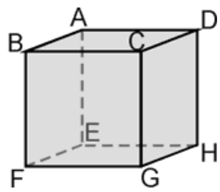
Um dos cuidados a ter no estudo das figuras pelo método cartesiano é conseguir trabalhar uma grande diversidade de figuras sem cair em cálculos fastidiosos e distractivos do essencial. Até porque o excesso de cálculos nada vem acrescentar à visualização da figura e faz cair na mecanização que pretendemos evitar.

Sobre estes aspectos o programa é bem explícito: "*O professor deve incentivar o aluno a fazer em todas as situações uma figura geométrica de modo a tirar proveito da visualização do problema e a desenvolver a sua capacidade de representação não deixando que o aluno se limite à resolução exclusiva de equações ou à utilização de fórmulas. Além do mais o aluno deve descrever com algum detalhe o processo utilizado, justificando adequadamente.*" Matemática - Programas 10º, 11º e 12º (p.19), DES, 1997.

Estes problemas são também um óptimo pretexto para o aluno integrar outros conhecimentos, nomeadamente no que respeita a construções, posições relativas e rigor de linguagem. Apesar de neste tipo de problemas estar implícito o raciocínio lógico, achamos desejável que a sua formalização seja feita mais tarde, no 11º ano, quando os alunos já estiverem familiarizados com a utilização do método cartesiano e integrado no estudo de conjuntos definidos por condições, como aí está previsto. Vem a propósito notar que o programa prevê o Tema Geral - *Lógica e Raciocínio Matemático*, lateralmente ao corpo do programa, para que os seus itens sejam tratados ao longo dos três anos. "*No corpo do programa são feitas algumas sugestões para as oportunidades* *da abordagem destes temas, mas cabe ao professor, consideradas a maturidade dos alunos e as condições das turmas, decidir quando e onde deve fazer a abordagem proposta.*" Matemática - Programas 10º, 11º e 12º (p.36), DES, 1997.

Coloca um quadrado [ABCD] num referencial e obtém equações das mediatrizes de cada um dos lados e de cada uma das diagonais.
Para cada mediatriz indica a posição relativa aos eixos coordenados e a outros elementos do quadrado.

Coloca o cubo da figura num referencial.
Define por uma condição cada um dos planos mediadores das arestas e das diagonais faciais.
Para cada plano indica a posição relativa aos planos coordenados e aos eixos do referencial.



Neste problema, o aluno é confrontado com situações análogas no plano e no espaço e com equações do primeiro grau que definem rectas, no primeiro caso, ou planos, no segundo.

Poderá ser interessante aprofundar a razão porque a mesma equação, $x - y = 0$ por exemplo, representa uma recta no referencial do plano e um plano no referencial do espaço. É como se arrastássemos a recta, mantendo a relação entre a abcissa e a ordenada de cada ponto e fazendo variar as cotas em R. Esta imagem permite facilmente concluir qual é a relação entre a recta e o plano definidos pela equação, a recta é a intersecção desse plano com o plano xOy, e concluir também que esse plano é paralelo ao eixo Oz.

Num referencial do plano a equação $x^2 + y^2 = 1$ define uma circunferência de centro na origem e raio 1. Qual é a figura geométrica que esta equação define num referencial do espaço?

Voltando a utilizar a imagem do "arrastamento", como no comentário anterior, uma circunferência vai descrever uma superfície cilíndrica quando fazemos a cota variar em R. Assim, $x^2 + y^2 = 1$ é a equação duma superfície cilíndrica, ilimitada, em que o eixo de revolução é o eixo Oz. Se quisermos definir um cilindro, basta limitar as cotas. Por exemplo, $x^2 + y^2 = 1 \wedge 0 \leq z \leq 2$, representa um cilindro com raio da base igual a 1 altura igual a 2.

Esta discussão pode ainda ser prolongada tentando interpretar as mesmas equações quando se trocam as variáveis. Por exemplo, $x^2 + z^2 = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$ são também equações de superfícies cilíndricas, mas em que os eixos de revolução passaram a ser Oy e Ox, respectivamente.

Este é mais um contributo para a ideia de que a equação de uma figura, seja ela uma curva ou uma superfície, está relacionada com o referencial escolhido mas é sempre o mesmo tipo de equação ou, como dizia Descartes, "*a curva resultará sempre da mesma classe*" (ver Problemas de representação).

> Considera, num referencial do espaço, uma esfera de centro na origem e raio *r*. Define o conjunto dos pontos da superfície esférica que estão à distância *k* do plano xOy.
> Discute a influência da relação entre *k* e *r* neste conjunto de pontos.

O lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância dada de um plano são dois planos paralelos a ele. Neste caso, os planos de equações $z = k$ e $z = -k$. O que vamos fazer é intersectar a superfície esférica por estes planos e obter as equações dos cortes.

Se $k > r$, os planos não intersectam a superfície esférica e o conjunto de pontos é vazio.

Se $k = r$, os cortes são dois pontos:

$$(0, 0, k) \text{ e } (0, 0, -k)$$

Se $k < r$, os cortes são duas circunferências:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \wedge |z| = k$$

A substituição do z por $\pm k$, na equação da superfície esférica, leva-nos à equação de uma circunferência num referencial do plano, $x^2 + y^2 = r^2 - k^2$. Neste caso, nos planos $z = k$ e $z = -k$, paralelos ao plano xOy.

Esta generalização poderá ser feita com os alunos, mas só depois de estudar vários casos concretos, com dados numéricos.

Problemas de geometria analítica

em que a visualização evita cálculos longos que nada acrescentam

Como temos vindo a referir e a exemplificar, a geometria analítica é um método para resolver problemas de geometria. Como tal, deve ser trabalhado com os alunos como uma ferramenta a acrescentar às que os alunos já conhecem e a utilizar em articulação com elas.

Uma das ideias importantes desta articulação é o conceito de simetria, muito ligado à visualização, e as suas traduções em termos de coordenadas e de equações. Quando existem simetrias numa figura, nomeadamente relativas aos eixos ou aos planos coordenados, então existem simetrias nas coordenadas dos pontos e especificidades nas equações, e reciprocamente, como veremos nos exemplos seguintes.

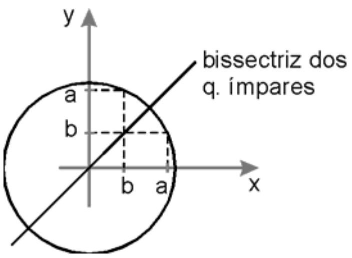
Outra ideia desta articulação, que é nova neste programa, é o conceito de transformação afim e a sua tradução em termos de condições, como veremos para a elipse. Qualquer destes conceitos, simetria e transformação afim, serão também trabalhados no estudo gráfico de famílias de funções ao longo de todo o programa de Matemática do Secundário.

> Mostra que se o ponto A, de coordenadas (a, b), pertence a uma circunferência de centro na origem, o ponto de coordenadas (b, a) também pertence a essa circunferência.
> Indica, pelas suas coordenadas outros três pontos dessa circunferência que, com o ponto A, sejam vértices de um rectângulo.
> Indica as coordenadas de mais alguns pontos dessa circunferência. Com os pontos todos que obtiveste, que outras figuras consegues obter?

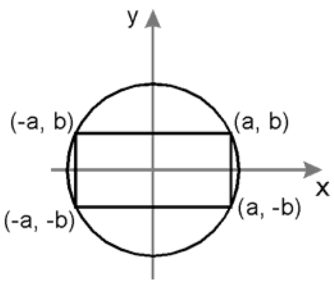
Este problema deve começar por ser um problema numérico, e só depois de estudar uma situação particular, partir para a generalização.

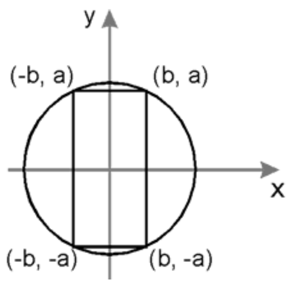
Podemos encarar esta situação como uma simples questão de cálculo, visto que a partir da equação da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, e por mera manipulação algébrica, é possível obter todos os pontos pedidos. No entanto, a segunda parte do problema, em que se pretende que o aluno identifique as figuras definidas por esses pontos, já se torna extremamente complexa e desinteressante, se abordada dessa maneira.

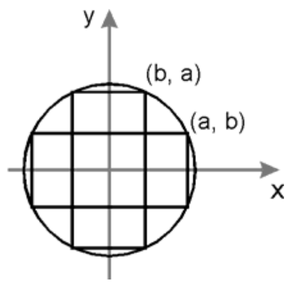
Porém, uma visualização da situação e o recurso às simetrias da circunferência relativamente aos eixos coordenados e às bissectrizes dos quadrantes, dá-nos as coordenadas dos pontos pedidos e permite-nos identificar as figuras por eles definidas.



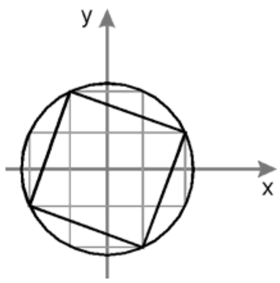
A bissectriz dos quadrantes ímpares é um eixo de simetria da circunferência, o ponto de coordenadas (b, a) é simétrico do ponto (a, b) relativamente a este eixo, logo pertence à mesma circunferência. Outra maneira de resolver esta questão seria reforçar a ideia de lugar geométrico, verificando que os dois pontos estão à mesma distância da origem.



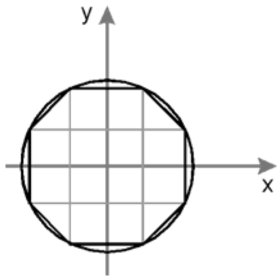




Em cada um dos casos, as coordenadas dos vértices dos rectângulos foram obtidas por simetrias relativamente aos eixos Ox e Oy, que são simultaneamente eixos de simetria da circunferência e dos rectângulos. Ao sobrepormos os dois rectângulos apercebemo-nos de outras figuras. Por exemplo:



– Um quadrado de vértices (a, b), (-b, a), (-a, -b) e (b, -a). A demonstração de que esta figura é um quadrado pode ser feita de várias maneiras. Dependendo da maturidade dos alunos, pode ser feita para um caso particular ou para o caso geral. Uma maneira interessante de fazer esta demonstração é recorrer ao facto de o quadrilátero ser um rectângulo com os lados todos iguais: é um rectângulo porque as diagonais bissectam-se no ponto (0, 0), centro da circunferência, e são iguais porque são diâmetros de uma circunferência; é um quadrado porque os seus lados são todos iguais, a medida do lado é $\sqrt{2a^2 + 2b^2}$.



– Um octógono que cabe investigar se é regular. É interessante investigar qual deve ser a razão entre a e b para que isto aconteça. No entanto, esta verificação exige cálculos que não são acessíveis à maioria dos nossos alunos do 10º ano, mas é um bom problema para os professores.

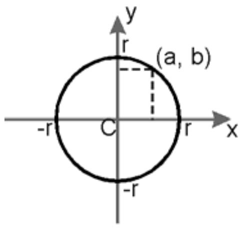
Partindo das coordenadas do ponto A, por permutação e simetrias, obtivémos oito pontos. No espaço, partindo de um ponto (a, b, c) e usando o mesmo tipo de raciocínio, vamos obter 48 pontos. Por isso só uma parte desta discussão pode ser passada para o espaço.

Mostra que se o ponto A, de coordenadas (a, b, c), pertence a uma superfície esférica de centro na origem, os pontos de coordenadas (b, c, a) e (c, a, b) também pertencem a essa superfície esférica.
Indica, pelas suas coordenadas outros três pontos dessa superfície esférica que pertençam ao primeiro octante.
Indica, pelas suas coordenadas outros pontos dessa superfície esférica que, com o ponto A, sejam vértices de um paralelepípedo.
Indica as coordenadas de mais alguns pontos dessa superfície esférica. Entre os pontos que escolheres, agrupa os que pertencem a um mesmo plano paralelo a um dos planos coordenados.

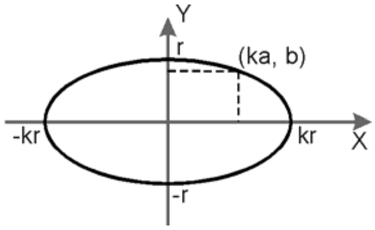
No problema do plano, tínhamos dois rectângulos inscritos na circunferência; no espaço, vamos ter seis paralelepípedos inscritos numa superfície esférica, todos eles com um vértice em cada octante.

Como baseámos toda esta discussão na visualização, a discussão desta situação poderá ter algum desenvolvimento com alunos que tenham mais facilidade em ver no espaço.

Se partirmos de uma circunferência com centro na origem de um referencial, e a "esticarmos" na direcção do eixo Ox, obtemos uma elipse.



Referencial Oxy



Referencial OXY

A partir da equação da circunferência da figura, obtém uma equação para a elipse.

A elipse é um lugar geométrico bastante acessível de visualizar, basta pensar na construção de uma elipse pelo método do jardineiro. No entanto, a dedução da sua equação, baseada numa soma de distâncias constante é extremamente pesada do ponto de vista de cálculo. O programa de Matemática, é bem explícito na forma de obter equações para uma elipse, "*facilmente, a partir da circunferência, por meio de uma mudança afim de uma das coordenadas*". Matemática - Programas 10º, 11º e 12º (p.19), DES, 1997.

Este problema deve ser tratado numericamente, com casos particulares, e só com alunos especialmente interessados, deduzir a equação no caso geral, como aqui vamos fazer.

Sabemos que a equação da circunferência é $x^2 + y^2 = r^2$. A transformação afim das abcissas dos pontos da circunferência traduz-se por

$$Y = y \quad \text{e} \quad X = kx$$

Resolvendo estas equações em ordem a x e y, obtemos

$$y = Y \quad \text{e} \quad x = \frac{X}{k}$$

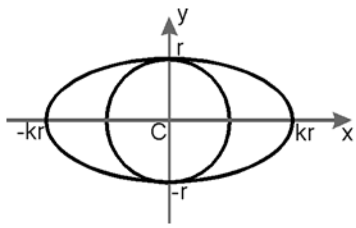
Substituindo x e y na equação da circunferência, obtemos uma equação para a elipse:

$$\left(\frac{X}{k}\right)^2 + Y^2 = r^2$$

Esta equação pode ser transformada noutras equivalentes:

$$\frac{X^2}{k^2} + Y^2 = r^2 \quad \text{ou} \quad X^2 + k^2Y^2 = r^2$$

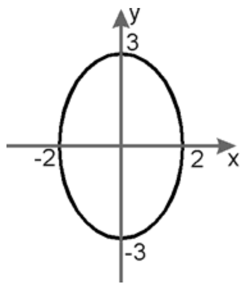
Precisámos aqui de utilizar X e Y para podermos fazer a substituição sem haver perigo de confusão, mas se representarmos as duas figuras no mesmo referencial, teremos



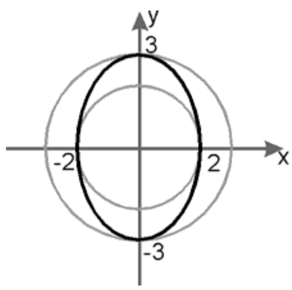
$x^2 + y^2 = r^2$ para a circunferência e $x^2 + k^2y^2 = r^2$ para a elipse.

Uma elipse tanto pode ser feita pelo "alongamento" da circunferência cujo raio coincide com o semi-eixo menor, como pelo "achatamento" da circunferência cujo raio coincide com o semi-eixo maior.

A partir da equação de uma circunferência conveniente, escreve uma equação para a elipse da figura.



Como já vimos há duas circunferências, com centro na origem, que permitem obter a equação da elipse



"Achatamento" da circunferência maior:

- circunferência: $x^2 + y^2 = 9$
- transformação:

$$X = \frac{2}{3}x \quad \text{e} \quad Y = y$$

$$x = \frac{3}{2}X \quad \text{e} \quad y$$

= Y

- substituição:

$$(\frac{3}{2}X)^2 + Y^2 = 9$$

$$9X^2 + 4Y^2 = 36$$

"Alongamento" da circunferência menor:

- circunferência: $x^2 + y^2 = 4$
- transformação:

$$X = x \quad \text{e} \quad Y = \frac{3}{2}y$$

$$x = X \quad \text{e} \quad y = \frac{2}{3}Y$$

- substituição:

$$X^2 + (\frac{2}{3}Y)^2 = 4$$

$$9X^2 + 4Y^2 = 36$$

Como estávamos à espera, obtivémos a mesma equação pelos dois processos.

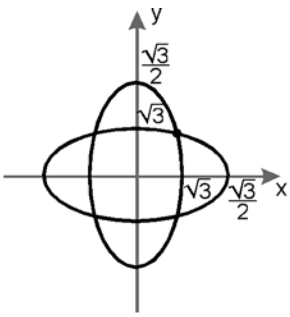
Considera as duas elipses de equações

$$2x^2 + y^2 = 3 \quad \text{e} \quad x^2 + 2y^2 = 3$$

Representa as duas elipses no mesmo referencial indicando as coordenadas dos pontos de intersecção com os eixos.

Obtém as coordenadas dos pontos de intersecção das duas elipses.

A representação das elipses em referencial não obriga a um conhecimento especial dos parâmetros que aparecem nas equações. Basta substituir, nas equações, uma das coordenadas por 0, para obter a outra. Além disso, depois de representarmos uma delas, a outra obtém-se por simetria relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares, uma vez que as duas equações só diferem na troca das coordenadas.



$$2x^2 = 3 \qquad y^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \qquad y = \pm\sqrt{3}$$

A determinação dos pontos de intersecção, sem recorrer à visualização e às simetrias das elipses, daria origem à resolução de um sistema de duas equações do 2º grau a duas incógnitas, mera manipulação algébrica, e que nem é do âmbito deste programa. Recorrendo às simetrias das elipses, facilmente se reconhece que estes pontos estão nas bissectrizes dos quadrantes, e por isso, fazendo x = y, obtém-se

$$2x^2 + x^2 = 3$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$

Dois dos pontos pedidos são (1, 1) e (-1, -1) e os outros dois são os simétricos destes relativamente aos eixos coordenados (1, -1) e (-1, 1).

Considera a superfície esférica de centro na origem do referencial e raio 2.
Que figura se obtém se cortarmos a esfera por um plano?
Em cada caso, caracteriza o corte da superfície esférica pelo plano definido por:

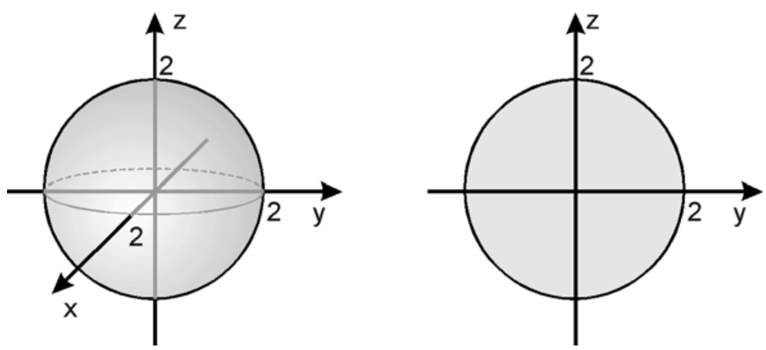
$x = 0$ $\qquad$ $y = 1$ $\qquad$ $z = 3$

Caracteriza, por equações, os planos tangentes à esfera que são paralelos ao plano xOy.

Cortando uma esfera por um plano, obtém-se um círculo ou um ponto. Os círculos que se podem obter têm, no máximo, raio 2, são os círculos máximos.

Se cortarmos a superfície esférica pelo plano x = 0, obtemos uma circunferência de raio 2, uma vez que o plano contém o centro da esfera. Como a equação da superfície esférica é $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, a sua intersecção com o plano x = 0 é dada por

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \wedge x = 0$$

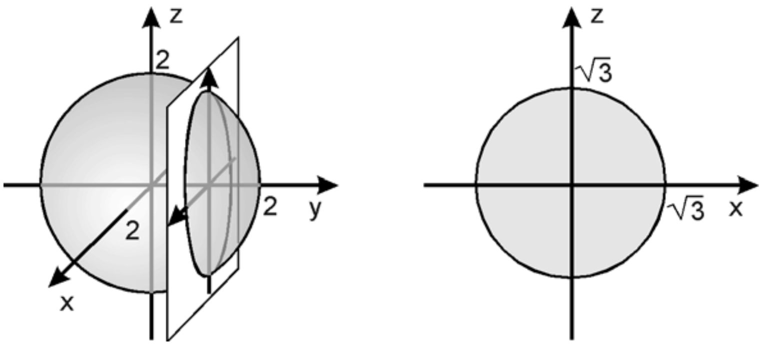


Se substituirmos x por 0 na equação da superfície esférica, obtemos a equação da circunferência do corte, no referencial do plano yOz:

$$y^2 + z^2 = 4.$$

Se cortarmos a superfície esférica pelo plano y = 1, obtemos uma circunferência de raio menor que 2, uma vez que o plano não contém o centro da esfera. Como a equação da superfície esférica é $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, a sua intersecção com o plano y = 1 dada por

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \wedge y = 1$$



Se substituirmos y por 1, obtemos a equação dessa circunferência num referencial xOz do plano y = 1:

$$x^2 + z^2 = 3$$

Concluímos que a circunferência tem raio $\sqrt{3}$.

O plano z = 3 não intersecta a superfície esférica porque a sua cota, 3, excede o maior valor que as cotas dos pontos da superfície esférica podem ter, 2, que é o raio. Aliás, nenhum ponto da esfera tem nenhuma coordenada superior a 2.

Um plano paralelo ao plano xOy é um plano de equação z = k, e é perpendicular ao eixo das cotas. Para que um destes planos seja tangente à superfície esférica, basta que o valor absoluto da sua cota seja igual ao raio. Há por isso dois planos nesta situação, são os planos definidos pelas equações z = 2 e z = -2.

Problemas de demonstração

Este programa de Matemática exclui a abordagem axiomática da geometria (pág. 18), porém a existência de uma axiomática não é condição necessária para que se possam fazer demonstrações. Como está referido no texto “Geometrias e sua História” desta brochura, a demonstração pode ser feita desde que sejam explicitamente enunciadas e admitidas como verdadeiras as proposições utilizadas para as justificações.

Sobre a problemática da demonstração em geometria e o papel que ela pode ter no ensino secundário, aconselhamos a leitura do livro *Ensino da geometria: temas actuais*, da autoria de Eduardo Veloso, a publicar brevemente pelo Instituto de Inovação Educacional.

Os problemas que vamos apresentar dão algumas ideias de como se pode iniciar os alunos na demonstração, recorrendo a instrumentos matemáticos diversificados (conhecimentos da geometria sintética, método cartesiano, vectores) e a tipos de raciocínios diversos.

O recurso ao computador para actividades de investigação em Ambientes Geométricos Dinâmicos (AGD) tem vindo a revelar-se como um poderoso meio de conduzir os alunos a fazer conjecturas e a sentir a necessidade da sua justificação. Nesta perspectiva, o computador é um meio de experimentação que não demonstra mas que conduz à necessidade de demonstrar. Para um aprofundamento desta problemática deve ser consultado o artigo de Margarida Junqueira referido na bibliografia.

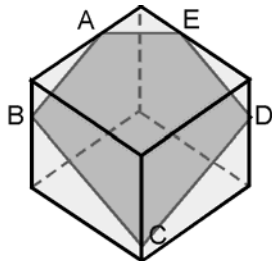
Não é demais reforçar que uma demonstração nunca é a única possível e que por isso os alunos devem ser estimulados a formular as suas demonstrações, cabendo ao professor ajudá-los a melhorar a forma de as exprimir.

Prova que por corte de um cubo não é possível obter um pentágono regular.

Começamos por admitir que é possível obter pentágonos por corte num cubo, o que não é fácil de demonstrar, mas também não é necessário a este nível, pela evidência que os materiais manipuláveis nos permitem obter. Basta usar um cubo de acrílico com líquido colorido e ver a superfície do líquido intersectar cinco faces do cubo.

O que se pretende aqui demonstrar é que não é possível obter um pentágono regular, para o que não basta fazer algumas observações e dizer que: “não é possível obter nenhum pentágono regular porque não conseguimos colocar o líquido de maneira a ver um”.

Como o plano de corte intersecta cinco faces do cubo, quatro delas são paralelas duas a duas. Por isso, qualquer pentágono terá sempre dois pares de lados paralelos visto que um plano corta planos paralelos segundo rectas paralelas.



AB // CD
BC // ED

Um pentágono regular não tem lados paralelos, logo não é possível obter um pentágono regular por corte de um cubo.

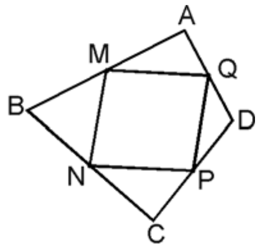
Unindo os pontos médios de lados consecutivos de um quadrilátero qualquer, obtém-se um novo quadrilátero.
Que características tem o quadrilátero obtido?

Recorrendo a um Ambiente Geométrico Dinâmico, a experiência vai conduzir à conjectura de que este quadrilátero é sempre um paralelogramo. Sem recorrer a esse auxiliar pode propor-se logo ao aluno que demonstre esta proposição, o que nunca terá o mesmo efeito do que se for o aluno a descobrir e enunciar as características desse quadrilátero.

Para fazer esta demonstração há pelo menos dois processos bastante simples e acessíveis a estes alunos: utilizando vectores, sem referencial, ou recorrendo à decomposição em triângulos.

Demonstração vectorial:

Partindo do pressuposto que dois pontos definem um segmento de recta e que este define dois vectores simétricos, podemos considerar os vectores definidos pelos lados dos quadriláteros. Aceitamos também como válidas as propriedades da adição de vectores e do produto de um número real por um vector.



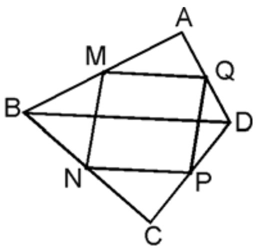
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Concluímos que os segmentos orientados [MN] e [QP] representam o mesmo vector, logo são paralelos e com o mesmo comprimento. O mesmo se poderia concluir para os segmentos orientados [MQ] e [NP]. Um quadrilátero com os lados paralelos dois a dois é um paralelogramo.

Demonstração por decomposição em triângulos:

Aceitamos como pressuposto que num triângulo o segmento de recta que une os pontos médios de dois lados é paralelo ao terceiro lado e que duas rectas paralelas a uma terceira são paralelas entre si.



No triângulo [ABD], [MQ] é o segmento definido pelos pontos médios dos lados [AB] e [AD], logo é paralelo ao lado [BD].

No triângulo [BCD], [NP] é o segmento definido pelos pontos médios dos lados [BC] e [CD], logo é paralelo ao lado [BD].

Como [MQ] e [NP] são paralelos ao mesmo segmento, [BD], são paralelos entre si. Do mesmo modo se demonstra que [MN] é paralelo a [QP]. Um quadrilátero com os lados paralelos dois a dois é um paralelogramo.

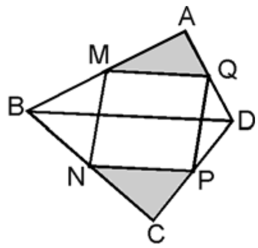
Esta situação pode levar-nos a colocar mais algumas questões sobre as relações entre os dois quadriláteros.

No quadrilátero [ABCD] os pontos médios dos lados são M, N, P e Q.
Qual é a razão entre a área do paralelogramo [MNPQ] e a área do quadrilátero [ABCD]?

Provar que há uma relação entre os elementos de duas figuras, que é independente de particularidades das figuras, também é uma demonstração.

Neste caso, a exploração em computador conduz os alunos à conjectura de que a área do paralelogramo [MNPQ] é metade da área do quadrilátero [ABCD], mas não serve para demonstrar o caso geral.

Esta demonstração pode fazer-se recorrendo à decomposição em triângulos e à razão entre as áreas dos triângulos semelhantes.



O triângulo [AMQ] é semelhante ao triângulo [ABD], a razão de semelhança é $\frac{1}{2}$ logo a razão entre as áreas é $\frac{1}{4}$. O triângulo [CPN] é semelhante ao triângulo [CDB], a razão de semelhança é $\frac{1}{2}$ logo a razão entre as áreas é $\frac{1}{4}$.

$$\text{área } [AMQ] + \text{área } [CPN] = \frac{1}{4} \text{ área } [ABD] + \frac{1}{4} \text{ área } [CDB]$$
$$= \frac{1}{4} \text{ área } [ABCD]$$

Do mesmo modo se prova que

$$\text{área } [BNM] + \text{área } [DQP] = \frac{1}{4} \text{ área } [ABCD]$$

Conclui-se assim que a soma das áreas dos quatro triângulos é metade da área do quadrilátero [ABCD], e portanto a área do paralelogramo [MNPQ] também é metade da área deste quadrilátero.

A que condições tem que obedecer o quadrilátero [ABCD] para que o paralelogramo que se obtém unindo os pontos médios dos seus lados seja:

- um rectângulo;
- um losango;
- um quadrado.

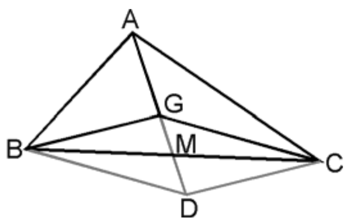
É interessante notar que a partir de uma situação se foram fazendo conjecturas de natureza diferente que conduzem a demonstrações com características também diferentes.

O baricentro de um triângulo [ABC] é o ponto de encontro das suas medianas. O baricentro G define com os vértices do triângulo três vectores $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ e $\overrightarrow{GC}$, tais que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

Mostra que num triângulo o baricentro divide cada mediana em dois segmentos tais que o comprimento de um é o dobro do comprimento do outro.

Vamos fazer esta demonstração recorrendo à definição vectorial de baricentro, às propriedades da adição de vectores e ao facto de as diagonais de um paralelogramo se bissectarem.



$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$
$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA}$$
$$\overrightarrow{GD} = -\overrightarrow{GA}$$

Assim, podemos concluir que os pontos A, G, M e D são colineares e que os segmentos [GA] e [GD] têm o mesmo comprimento.

Por outro lado, [GD] e [GC] são diagonais de um paralelogramo e, por isso, bissectam-se.

Assim, podemos concluir que $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GD}$. Então $\overline{GM} = \frac{1}{2}\overline{GD} = \frac{1}{2}\overline{GA}$.

Isto significa que o baricentro divide uma mediana em dois segmentos cujos comprimentos estão entre si na razão de 1 para 2.

Problemas que conduzem ao estudo de funções

Uma das potencialidades das figuras geométricas é o estabelecimento de relações entre elementos da figura ou entre figuras. Estas relações podem ser estudadas de forma dinâmica, recorrendo ao software ou aos materiais já mencionados, e em paralelo com uma abordagem gráfica e analítica.

Por outro lado, muitos conceitos sobre funções podem ser introduzidos a partir de representações geométricas. As vantagens são várias:

– a visualização do problema;

– a visualização e interpretação de elementos críticos (domínio, contradomínio, zeros, máximos, mínimos) e de situações limite;

– a utilização de conhecimentos anteriores e a articulação de ideias de natureza diferente;

– a abertura para o estudo computacional.

Com o apoio das novas tecnologias, calculadoras gráficas e software, que vieram revolucionar a lógica de trabalho com funções, podemos estudar com a mesma facilidade uma função linear, como uma quadrática ou outra polinomial, bem como funções irracionais, trigonométricas, etc. Por isso não há razões para não estudar todo o tipo de funções que recorrem maioritariamente a relações entre dados de uma figura, ou a relações entre figuras no plano e no espaço. Muitas destas relações baseiam-se em medidas, nomeadamente perímetro, área e volume.

A lista de problemas e investigações em geometria que conduzem ao estudo de funções é vastíssima. Vamos dar uma lista de alguns problemas, sem comentar, remetendo para a leitura da brochura sobre Funções. A nossa perspectiva de exploração destes problemas é iniciá-los sempre recorrendo à visualização e aos conhecimentos de geometria inerentes, e só passar ao estudo gráfico e analítico posteriormente.

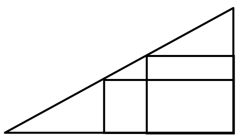
Alguns destes problemas levam ao estabelecimento de fórmulas que podem ser obtidas fora do âmbito das funções e serem retomadas mais tarde para introduzir ou consolidar conceitos como variável, função, etc.

Vamos propor algumas actividades que não comentaremos, deixando ao critério do professor a sua exploração no tema Geometria e no tema Funções.

Pequenas investigações sobre polígonos:

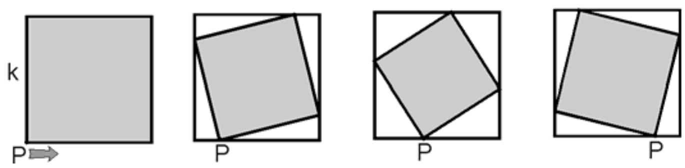
- Número de diagonais em função do número de lados.
- Soma dos ângulos internos em função do número de lados.
- Medida do ângulo interno de um polígono regular em função do número de lados.
- Medida do ângulo externo de um polígono regular em função do número de lados.
- Perímetro de um polígono regular em função do lado.
- Relação entre as duas dimensões de rectângulos equivalentes.
- Área do quadrado em função da diagonal.
- Área de rectângulos isoperimétricos em função de um dos lados.

Qual é o rectângulo de maior área que se pode inscrever num triângulo rectângulo



- dadas as medidas dos dois catetos.
- dadas as medidas de um cateto e de um ângulo agudo.

Dado um quadrado de lado k, considera-se um ponto P, que se desloca ao longo de um dos lados e que vai gerando quadrados inscritos no quadrado dado.



Entre que valores pode variar o deslocamento?

Observando as figuras, e sem fazer cálculos, faz um esboço de um gráfico que traduza a variação da área em função do deslocamento de P.

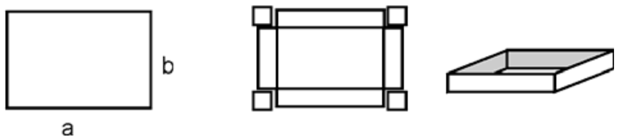
Define analiticamente a função e confirma o gráfico que esboçaste.

Quando é que a área é mínima? Quando é que é máxima? Qual é o contradomínio?

Há deslocamentos diferentes que dêem origem a quadrados com áreas iguais?

Estudar a variação da área de um rectângulo inscrito num círculo, em função da altura.

De um rectângulo com medidas *a* e *b* vamos cortar quatro quadrados nos cantos, para obter a planificação de uma caixa aberta em forma de paralelepípedo.

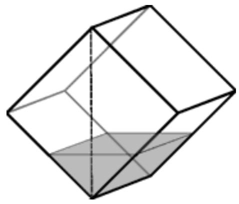


Entre que valores pode variar o lado do quadrado cortado?

Define analiticamente o volume da caixa como função do lado do quadrado cortado.

Qual é a medida do lado do quadrado cortado para que o volume da caixa seja máximo?

Um cubo de acrílico transparente está assente sobre uma aresta, num plano horizontal, de modo que a diagonal facial representada fique vertical. Quando o enchemos de líquido, o perímetro das secções definidas pela superfície de líquido vai variando.



Entre que valores pode variar a altura de líquido?

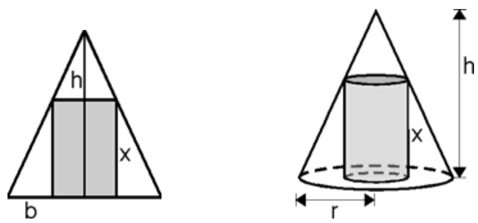
Que polígonos são essas secções? Para quanto tende o perímetro quando a altura de líquido tende para zero? Entre que valores pode variar o perímetro?

Como é o gráfico do perímetro em função da altura de líquido?

Define analiticamente a variação do perímetro da secção em função da altura de líquido e faz um estudo completo da função.

Estudar a variação da área de um rectângulo inscrito num triângulo isósceles de base **b** e altura **h**, em função da altura do rectângulo.

Estudar a variação do volume de um cilindro inscrito num cone com base de raio **r** e altura **h**, em função da altura do cilindro.



Bibliografia comentada

Livros

- Abbot, Edwin A.. *Flatland - O país plano*. Gradiva. Lisboa, 1993.

Uma aventura, com muito humor, sobre a visualização e os espaços de outra dimensão.

- Coxford, Arthur F. Jr. & al.. *Geometria a partir de múltiplas perspectivas*, tradução portuguesa da Addenda Series 9 - 12 do NCTM. APM. Lisboa, 1993.

Uma extensa lista de actividades comentadas em que a geometria é tratada sob múltiplas perspectivas, reflectindo as novas metodologias que apoiam os novos objectivos curriculares.

- Cundy, H.M. e Rollett, A.P.. *Mathematical Models*. Tarquin Publications. Great Britain, 1989.

Um livro muito completo sobre a utilização de modelos no ensino da geometria. No que respeita aos poliedros apresenta um registo muito exaustivo e ilustrado de características de várias famílias de poliedros (platónicos, arquimedianos, estrelados).

- Lindquist, Mary Montgomery ed. *Learning and Teaching Geometry, K-12.*, 1987 Yearbook. NCTM. Reston, 1987.

Como todos os *yearbooks* do NCTM apresenta artigos teóricos e muitas sugestões de actividades e problemas para trabalhar com os alunos.

- Maletsky, Evan M., Peitgen, Heinz & al.. *Fractals for the Classroom*, Volumes 1 e 2. Springer -Verlag/NCTM. New York, 1992.

Um conjunto extenso de propostas de trabalho que ajudam a compreender a Teoria dos Fractais, e como alguns dos seus conceitos podem ser trabalhados de forma acessível com alunos do Ensino Secundário.

- Serra, Michael. *Discovering Geometry*. Key Curriculum Press. Berkeley, California, 1997.

Uma abordagem indutiva da geometria no plano e no espaço, que integra propostas para trabalhar com software dinâmico e apresenta muitas situações de exploração de conexões.

- Soler, Gregoria Guillen e Galvéz, Angel Salar. *Poliedros*. Editorial Sintesis. Madrid, 1990.

Tudo, ou quase tudo, sobre poliedros.

- Veloso, Eduardo. *Ensino da Geometria: Temas Actuais*" (título provisório). A publicar por IIE. Lisboa, 1997.

Um livro que trata de forma muito completa e estimulante os temas mais actuais e decisivos para o futuro do ensino da geometria. Desde a perspectiva histórica, aos aspectos de ordem didáctica, passando por actividades exemplares, este livro responde a muitas, se não todas, as questões que se podem colocar sobre o ensino da geometria no secundário.

Artigos

- Junqueira, Margarida. *Conjecturas, provas, Geometria e computadores: como interligar?* Actas Profmat 95, APM, 1995.

- Silveira, Branca e Maia, Jorge. *A utilização das macros do Cabri-Géomètre*. Actas Profmat 93, APM, 1993.

Revistas

Educação e Matemática, revista da Associação de Professores de Matemática.
Esta revista tem vindo a divulgar, desde o seu primeiro número, muitos artigos sobre o ensino da geometria. Assim, apresentamos uma lista dos números desta revista com artigos sobre este tema.

Nº 4
- *Fractais na Escola Secundária*, Daniela Gori Giorgi
- *A curva do Dragão*, Maria João Peres Costa
  Uma iniciação ao conceito de fractal.
- *A Geometria dos Cristais*, Francis Michel
  Ideias interessantes sobre características de alguns poliedros.

Nº 6
- *Para um reforço do ensino da Geometria*, A. J. Franco de Oliveira
- *Um exemplo de Didáctica da Geometria*, José Manuel Matos
  Uma perspectiva bastante completa sobre a Teoria de van Hiele.
- *Triângulos dourados*, Henrique Guimarães e Paulo Abrantes
  A resolução de um problema pode levar-nos a outras ideias matemáticas.
- *A Bola - volume e área de uma esfera*, José João Henriques
- *Seccionando sólidos de plasticina*, William M. Carrol
  Algumas ideias sobre cortes em sólidos geométricos.
- *Construções com cubos*
  Materiais para a aula de Matemática.

Nº 10
- *As mais belas rectas do mundo*, Fernando Bensabat
  Alguns desafios interessantes no final do artigo.
- *Vicissitudes de uma investigação bem sucedida*, Cristina Loureiro
  Um problema de geometria com várias resoluções numéricas.

Nº 11
- *Uma corda à volta da Terra*, José Paulo Viana
  Um problema com uma solução inesperada.

Nº 12

- *Vamos resolver problemas da vida real*, Graça Mota e Pedro Pimentel
  A geometria também é útil para resolver problemas do dia-a-dia.

Nº 13
- *Geometria do espaço e materiais no 7º ano*, Leonor Cunha Leal e Eduardo Veloso
  Ideias interessantes na exploração da relação espaço/plano.

Nº 17
- *Funções periódicas na folha de cálculo*, Susana Carreira
  Uma resolução do problema da ampulheta que é um problema de proporcionalidade geométrica.

Nº 19/20
- *As folhas de papel e as semelhanças*, João Janeiro
  Materiais para a aula de Matemática.
- *O número de ouro e as suas propriedades: uma actividade com alunos*, Gracinda Lima Gaspar

Nº 21
- *Raciocínio visual, Parente pobre do raciocínio matemático?*, Manuel Saraiva
  Algumas ideias fundamentais sobre o papel do raciocínio visual.
- *Sobre um problema de Geometria*, J. S. Cabral
  Discussão de um problema das Olimpíadas de matemática.

Nº 24
- *Paradoxos geométricos, a sucessão de Fibonacci e o que mais se verá*, Paulo Oliveira

Nº 25
- *Simetrias axiais*, Teresa Colaço
  Materiais para a aula de Matemática.

Nº 26 (Número dedicado à Geometria)
- *Perseguindo polígonos, simetrias e números*, Helena Paradinha
- *Eixos de simetria em polígonos irregulares*, Helena Paradinha
  Materiais para a aula de Matemática.
- *Visualização espacial: algumas actividades*, José Manuel Matos e Mª de Fátima Gordo
- *A Geometria torna-se Álgebra*, José Orlando de Freitas
- *Tudo o que há num cubo*, Eduardo Veloso
  Um monte de ideias para explorar com os alunos.
- *Um número no triângulo*, José Paulo Viana
  O problema do trimestre.

Nº 27
- *Que concepções epistemológicas da demonstração? Para que aprendizagens? (I)*, Evelyne Barbin
  No entanto muitos alunos consideram que a demonstração marca o início do seu insucesso na disciplina.
- *Um mínimo no triângulo*, José Paulo Viana
  O problema do trimestre.

Nº 28
- *Que concepções epistemológicas da demonstração? Para que aprendizagens? (II)*, Evelyne Barbin

Nº 29
- *Sobre o problema dos castelos*, José Paulo Viana
  O problema do trimestre.

Nº 30

- *Geometria no 10º ano: o fracasso que era previsível ...*, Eduardo Veloso

Nº 32
- *Renovação do ensino da Geometria: contributos ...*, Alexandra Pinheiro e Eduardo Veloso
  Potencialidades de alguns problemas de geometria e as opções da sua utilização.
- *Dividir um rectângulo ao meio ...* Rita Bastos e Cristina Loureiro
  Materiais para a aula de Matemática.

Nº 33
- *Quadratura do círculo: uma solução não ortodoxa ...*, Eduardo Veloso

Nº 34
- *Novas tecnologias na aula de matemática*, João Pedro Ponte
  Entre outros, o Cabri faz parte dos desafios irrecusáveis à actividade educativa, palavras do autor do artigo.
- *O "quê", o "porquê" e o "como" em Matemática*, John Mason
  Um artigo onde também se fala da utilização do Cabri no ensino da geometria.
- *Ponto de Fermat de um triângulo*
  Actividade prevista para ser utilizada com o Cabri. Adaptada de Worksheet 3 do artigo *An alternative introduction to proof in dynamic geometry*, de Michael de Villiers, in Micromath, vol 11.

Nº 35
- *O professor tem sempre razão, nunca se engana e raramente tem dúvidas?*, Ana Vieira
  Respostas dos alunos a algumas actividades e reflexões da professora.
- *Investigações com espelhos*, Projecto Matemática para todos
  Materiais para a aula de Matemática.

Nº 37
- *A minha experiência com o Cabri*, Vidal Minga
  Sobre a utilização do computador para trabalhar geometria.

Nº 38
- *Incentivando a visualização espacial através das propriedades geométricas de tetraedros duais*, Ana Maria Kaleff e Dulce Monteiro Rei
  Artigo já referido no texto com ideias para construir materiais.

Nº 41
- *Descartes, geómetra acidental*, A. J. Franco de Oliveira
- *Descartes,que actualidade?* Ana Páscoa, Lurdes Geada e Rosa Barbosa
- *A curva de Koch:…*, Maria Guilhermina Nogueira
  Materiais para a aula de Matemática.

Nº 42
- *A propósito do Teorema de Pitágoras*, Ângela Coimbra
- *As notações em Geometria*, Eduardo Veloso

Boletim da SPM, revista da Sociedade Portuguesa de Matemática.
Embora não sendo uma revista especialmente dedicada ao ensino, esta revista tem divulgado muitos artigos sobre o ensino da geometria. Assim, apresentamos uma lista dos números desta revista com artigos sobre este tema.

Nº 15, Janeiro/Fevereiro de 1990
- *A elipse de um ponto de vista elementar*, Ana Isabel Rosendo

Nº 29, Setembro 1994

- *El Retorno de la Geometria*, Claudi Alsina
  Razões para desenvolver o ensino da geometria.

Nº 30, Dezembro 1994

- *Três exemplos de aplicações da Geometria*, Rémi Langevin
  Aplicações interessantes, embora não estejam ao alcance dos alunos do s secundário.

Nº 32, Agosto 1995

- *Modelos de geometrias planas*, A. M. d'Azevedo Breda

Nº 34, Maio 1996

- *Números e Figuras*, Nuno C. Freire

Nº 35, Outubro 1996

- *O plano mediador de um segmento no programa de 10º ano de escolaridade*, António Pereira Rosa.