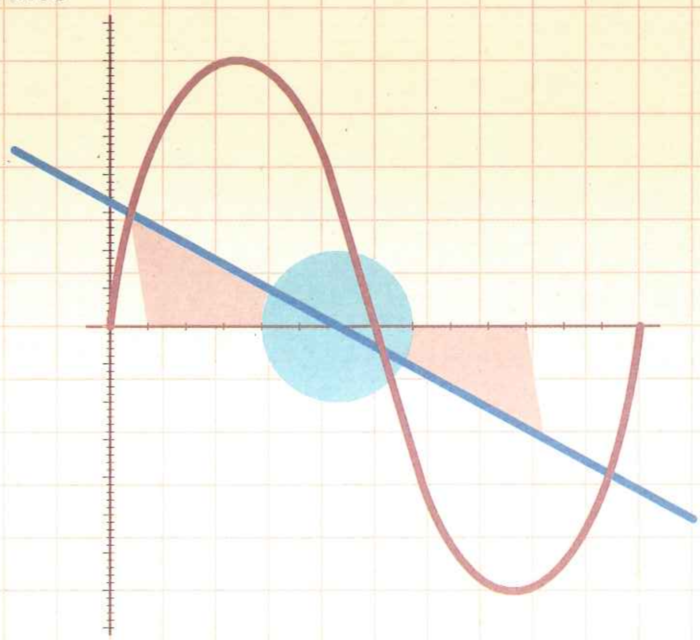
MATEMÁTICA

Ministério da Educação
Departamento do **Ensino Secundário**

Funções

10º ano de escolaridade

Paula Teixeira
Adelina Precatado
Carlos Albuquerque
Conceição Antunes
Suzana Nápoles



Ministério da Educação
prodep
Programa de Desenvolvimento Educativo para Portugal

Índice

INTRODUÇÃO

Dados os aspectos inovadores do Ajustamento do Programa de Matemática a entrar em vigor no ano lectivo de 1997/98, o Departamento do Ensino Secundário, promoveu a realização de um conjunto de acções, destinadas a apoiar os professores na implentação prática das novas orientações, onde se inclui esta brochura que diz respeito ao tema “Funções” para o 10º ano de escolaridade.

Este trabalho pretende:

- ser uma ajuda aos professores na interpretação do programa;
- disponibilizar um suporte teórico dos conteúdos a leccionar;
- propor um conjunto de actividades comentadas possíveis de utilizar com os alunos;
- sugerir instrumentos de avaliação e de recursos diversificados;

Ao longo dos últimos anos a forma de ensinar e aprender a fazer o estudo de uma função mudou consideravelmente. As mudanças introduzidas prendem-se, entre outros factores, com a introdução da tecnologia, nomeadamente a calculadora e o computador.

No programa em vigor nos últimos 4 anos os alunos já faziam o estudo de uma função procurando os seus pontos notáveis sem que tivessem conhecimento de limites nem de derivadas. Esse estudo, e o esboço do gráfico, era feito recorrendo ao domínio, tabelas e estudo de alguns pontos relevantes. O programa agora ajustado, reforça esta ideia e actualiza-a, dando-lhe mais força com a introdução obrigatória da utilização da tecnologia gráfica. Pela enorme mudança que a tecnologia impõe em termos de ensino e de aprendizagem nas várias disciplinas, justifica-se que a ela seja feita uma referência especial. A calculadora gráfica em particular, pelas suas potencialidades, mas também acessibilidade, traz para primeiro plano a representação gráfica no estudo de uma função.

Na perspectiva deste programa, colocar a representação gráfica em primeiro plano é valorizar uma visão global da função fazendo com que o aluno compreenda conceitos matemáticos importantes e sinta a necessidade de fazer em muitos casos o seu estudo analítico. É desejável que o trabalho do aluno seja o de pensar, investigar, experimentar e não somente o de ouvir e copiar. Neste contexto faz sentido o estudo das funções polinomiais de grau n a partir do 10º ano.

Dado que uma das grandes novidades do Ajustamento é a utilização obrigatória das calculadoras gráficas, deu-se um especial destaque à sua utilização no estudo das funções. No entanto é importante salientar que a introdução da calculadora gráfica só por si não irá conduzir a uma melhoria significativa na aprendizagem da Matemática no ensino secundário. A introdução da tecnologia poderá ser um factor importante se for integrada numa transformação geral da abordagem feita, neste caso ao estudo das funções, em que:

- se dá ênfase às múltiplas representações das funções (tabelas, gráfico, expressão analítica) e à sua interpretação em problemas concretos ligados a várias situações da realidade e de outras Ciências;
- se valoriza estratégias de exploração e descoberta por parte do aluno;
- se dá tempo ao aluno para que possa fazer as suas próprias descobertas;
- se reconhece a necessidade de ensinar e educar no uso da máquina, desenvolvendo o espírito crítico;
- se utiliza a máquina como um instrumento de trabalho flexível ao longo de todo o ano e em todos os momentos de trabalho dos alunos.

Os exercícios de cálculo devem ser efectuados num contexto de resolução de problemas. Enquanto algum cálculo pode ser efectuado pela calculadora, cresce a importância do desenvolvimento de capacidades para fazer uma boa utilização desta tecnologia e aumenta a oportunidade de se poderem realizar actividades de um nível superior de exigência tais como resolver problemas, fazer conjecturas, investigar, etc..

Para que o programa seja exequível, pelo menos no que diz respeito ao tema Funções, é indispensável que as escolas disponham de condições mínimas de modo que seja possível utilizar sem dificuldade calculadoras gráficas e/ou computadores com todos os alunos na aula de Matemática.

Esta brochura pretende ser um instrumento de trabalho. Os condicicionalismos com que foi elaborada, nomeadamente o tempo de elaboração e a ausência de um suporte editorial e gráfico profissionais fazem com que não possa ser apresentada com a forma que gostaríamos que tivesse.

A presente brochura está dividida em 4 partes:

- Fundamentação Teórica
- Actividades para a sala de aula
- Recursos
- Avaliação

Fundamentação Teórica

Trata-se de um texto dirigido aos professores, onde os aspectos teóricos mais relevantes para o tema em estudo são abordados com rigor, incluindo-se alguns desenvolvimentos para além do programa estrito do 10º ano. Embora os assuntos tratados sejam clássicos e estejam abordados em diversos manuais para o ensino superior, é por vezes trabalhosa a sua consulta. Além disso nem todos os professores têm um fácil acesso a uma bibliografia alargada. Assim, considerou-se oportuna a inclusão desta parte teórica. Todos os conceitos estão exemplificados, sendo incluídas algumas notas históricas e exemplos de actividades com possibilidade de apresentação na sala de aula.

Actividades para a sala de aula

Apresenta-se um conjunto diversificado de actividades que podem ser adequadas a um leque variado de professores e alunos. De notar que está previsto que este capítulo seja leccionado durante o 2º período com 36 aulas e por isso só haverá tempo para desenvolver algumas actividades. Cabe ao professor escolher, de acordo com o seu gosto pessoal, e as turmas que lecciona, a forma de encadear os vários conteúdos. Algumas actividades poderão ser mais acessíveis a uns alunos e outras serão mais adequadas para outros.

Com os comentários pretendem-se dar algumas sugestões de abordagem metodológica quer na forma de as trabalhar na turma quer na utilização da tecnologia, nomeadamente as calculadoras gráficas.

Recursos

É indicado um conjunto de programas de computador que seleccionámos tendo em conta as orientações do programa, a sua adequação ao 10º ano e a sua acessibilidade. Para ilustrar a utilização apresentam-se exemplos de actividades resolvidas.

Nota: Era intenção dos autores incluir uma disquete com ficheiros correspondentes a algumas das actividades propostas (ficheiros de Word, Cabri II, Excel, Geometer's Sketchpad, Modellus). Por razões técnicas tal não foi possível. Os professores interessados em possuir essas disquetes podem enviar duas disquetes de alta densidade e um envelope selado e endereçado ao próprio para uma das moradas indicadas na parte final desta brochura.

Avaliação

Dada a complexidade do tema "Avaliação" são apresentadas apenas algumas sugestões que não pretendem ser exaustivas, mas que dão ênfase aos aspectos inovadores deste Ajustamento dos Programas.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Breve Nota Histórica

A noção de função resultou de um longo desenvolvimento do pensamento matemático. Desde a Antiguidade até à Idade Média, os matemáticos tinham um conceito bastante vago de função. Foi Nicolau de Oresme (~1323-1382) quem primeiro usou um gráfico, para representar numa direcção o tempo e na outra a velocidade de um móvel. Oresme chamava às coordenadas latitude e longitude, mas o seu sistema pode ser considerado precursor da representação gráfica de funções. É possível que Oresme não tenha ido mais longe neste método das coordenadas por causa do pouco desenvolvimento das técnicas algébricas e geométricas na sua época. Havia ainda que esperar por Viéte, Descartes e Fermat.

Nos finais do século XVI, princípios do século XVII, com os trabalhos de Kepler sobre o movimento dos planetas e os de Galileu sobre a queda de graves, a matemática começou a ser aplicada com êxito ao estudo dos movimentos. Sendo as leis dos fenómenos expressas por funções, são os conceitos matemáticos de variável e de função que permitem a interpretação do movimento e, de um modo geral, dos fenómenos naturais.

Fermat (1601-1665) e Descartes (1596-1650) introduziram o método analítico de definir funções. Descartes, para além das curvas algébricas (que chamava curvas geométricas), estuda as chamadas «curvas mecânicas», que para a sua definição dependiam da noção de movimento. Por esta altura o pensamento funcional tornou-se predominante no trabalho criativo dos matemáticos.

O desenvolvimento do cálculo na parte final do século XVII tornou necessário dar um conceito preciso de função. A palavra «função» parece ter sido introduzida por Leibniz

(1646-1716). O matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), foi o primeiro a adoptar a expressão $\boldsymbol{f(x)}$ para o valor da função.

A evolução do conceito de função foi paralela à evolução do conceito de curva, que é o seu correspondente geométrico: dizia-se que uma curva era «geométrica» ou «arbitrária» consoante se sabia ou não representá-la analiticamente, isto é, dar a expressão da função a que ela corresponde. Foi a operação de passagem ao limite que, ao alargar imenso as possibilidades de representação analítica, obrigou a modificar tal critério.

Alguns problemas práticos, como o estudo das vibrações das cordas dos instrumentos musicais, levaram matemáticos como Dirichlet (1805-1859) a definir função como uma correspondência arbitrária entre os valores de duas variáveis, tal como hoje é definida.
O desenvolvimento da matemática no século XX e a sua intervenção cada vez maior nas outras ciências levaram a generalizar o conceito de função ao caso de variáveis cujos valores pertencem a um conjunto qualquer de objectos. Assim, quando se diz que o preço por metro de um tecido é função da sua qualidade, a variável «qualidade» não tem por valores números ou grandezas de qualquer espécie. Segundo S. Silva [Compêndio de Álgebra], foi esta generalização do conceito de função que levou à criação da Análise Moderna, que compreende ramos como a lógica, a teoria dos conjuntos, a álgebra abstracta e a topologia geral, entre outros.

Conceito de Função

Na era «Leibniz-Bernoulli-Euler» as funções reais eram principalmente entendidas como compostas de funções elementares:

«Chamamos aqui função de uma magnitude variável à quantidade que é composta de qualquer modo possível desta variável e de constantes.»
(Johann Bernoulli, 1718, Opera, vol. 2)

«Consequentemente, se $f\left(\frac{x}{a}+c\right)$ *designa uma função arbitrária…»*

(Euler, 1734, Opera, vol. XXII)

No século XIX o estudo de Dirichlet sobre as séries de Fourier trouxe uma noção mais geral de função:

Considera-se usualmente a seguinte definição de função [1]que é essencialmente a mesma que foi dada em 1837 por Dirichlet:

Uma função $\boldsymbol{f : A \to B}$ *consiste em dois conjuntos, o domínio* $\boldsymbol{A}$ *, o conjunto de chegada* ***B****, e uma regra que associa a cada elemento* $\boldsymbol{x}$ *de* $\boldsymbol{A}$ *(objecto) um só elemento* $\boldsymbol{y}$ *de* $\boldsymbol{B}$ *(imagem). Diz-se neste caso que a função está definida em* ***A*** *com valores em* $\boldsymbol{B}$*. Chama-se contradomínio de* $\boldsymbol{f}$ *ao subconjunto de* $\boldsymbol{B}$ *formado pelas imagens. Quando o contradomínio de* $\boldsymbol{f}$ *coincide com o conjunto de chegada, a função diz-se sobrejectiva.*

A maioria das funções a estudar ao nível do 10º ano são funções definidas em subconjuntos de $\mathfrak{R}$ (números reais) e com conjunto de chegada $\mathfrak{R}$; neste caso, ao escrever-se $y = f(x)$ pretende-se dizer que a cada número real x do domínio de f (variável independente) se associa um só número real y (variável dependente) e a função f diz-se então uma **função real de variável real**.

Uma vez que as funções reais de variável real têm por conjunto de chegada o conjunto dos números reais, duas funções reais de variável real, f e g, são iguais, se têm por domínio o mesmo subconjunto X de $\mathfrak{R}$, e se para todo o elemento x de X se tem $f(x) = g(x)$.

Embora muitas das funções estudadas a um nível elementar tenham por domínio intervalos ou reuniões de intervalos, deve-se ter presente que o domínio de uma função real de variável real pode ser qualquer subconjunto de $\mathfrak{R}$**.** Assim, uma sucessão de termo geral u_n é uma função real de variável real, que a cada número natural $\boldsymbol{n}$ faz corresponder u_n **.** Habitualmente, relativamente a uma sucessão, dizemos que se trata de uma função real de variável natural.

---

[1] Formalmente, a definição de função é a seguinte: Uma função f: A $\to$ B é um subconjunto F do produto cartesiano A $\times$ B, que verifica a seguinte propriedade: para todo o x $\in$ A, existe um único y$\in$B tal que (x, y) $\in$ F.

Neste texto consideram-se apenas funções reais de variável real.

Chama-se ***expressão analítica*** de uma função a uma expressão que traduza a regra que associa os objectos e as respectivas imagens.

Por exemplo:
O comprimento de uma circunferência é função do seu raio. Esta função exprime-se por $C(r)=2\pi r$ (mais simplesmente, $C=2\pi r$) .

A área de um círculo é função do seu raio. Esta função exprime-se por $A(r)=\pi r^2$ (mais simplesmente $A=\pi r^2$).

Assim $C(r)=2\pi r$ e $A(r)=\pi r^2$ constituem as ***expressões analíticas*** das funções consideradas.

Quando nada se refere em contrário, convenciona-se que o domínio de uma função consiste no maior conjunto de valores para os quais a sua expressão analítica tem sentido. Nesses casos pode-se omitir a referência concreta ao domínio: escreve-se, por exemplo,

$$f(x)=\frac{x-1}{x-3}$$

sem explicitar o domínio de *f*.

Há no entanto situações em que é necessária a indicação do domínio da função e outras em que o domínio resulta da leitura da situação. Suponha-se, por exemplo, que se considera a função ***h*** que relaciona a temperatura em graus Celsius com a temperatura em graus Fahrenheit. A função ***h*** é definida por

$$h(x)=\frac{9}{5}x+32$$

sendo o seu domínio constituído pelos números x maiores ou iguais a -273,15 (zero absoluto). O domínio de ***h*** é neste caso determinado pela situação em estudo, apesar de a função ***f*** definida por

$$f(x)=\frac{9}{5}x+32$$

estar definida para todo o ***x*** real.

Também nos casos do comprimento da circunferência e da área do círculo, as funções só estão definidas para $r \geq 0$, sendo portanto o seu domínio $[0,+\infty[$.

Frequentemente, as funções a estudar estão definidas por diferentes ramos, isto é, apresentam expressões analíticas diferentes em subconjuntos diferentes do domínio.

Por exemplo, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$.

As funções definidas por ramos devem ser objecto de uma análise cuidada, pois têm muitas vezes descontinuidades (a função $\boldsymbol{f}$ é descontínua no ponto $x = 0$) ou pontos angulosos, isto é, tais que as semi-tangentes ao gráfico da função à direita e à esquerda desse ponto não se situam sobre uma mesma recta.

Tal como foi referido na nota histórica, existe uma ligação muito estreita entre os fenómenos naturais e o conceito de função. Com efeito, muitos fenómenos consistem na variação de uma grandeza com outra grandeza, como se uma delas fosse função da outra. Ao dizer-se que em qualquer movimento o espaço é uma função do tempo, está a usar-se o termo «função» de uma forma empírica. As funções usadas para descrever as leis dos fenómenos são apenas aproximações. Sabe-se, por exemplo, que não existe nenhum gás que siga rigorosamente a lei dos gases perfeitos (relativa à variação do volume de um gás com a pressão e a temperatura). Nenhum fenómeno natural segue exactamente uma lei quantitativa. Em muitas situações da realidade um conjunto de observações pode conduzir a várias funções diferentes.

Representação Gráfica de Funções

O gráfico de uma função é um conceito puramente matemático: para cada $\boldsymbol{x}$ pertencente ao domínio da função, determina-se o correspondente valor de $\boldsymbol{y}$ ($y = f(x)$). O conjunto de todos os pontos ($\boldsymbol{x, y}$) obtidos por este processo é o ***gráfico*** da função $\boldsymbol{f}$**.** Na prática interessa-nos frequentemente uma ***representação*** deste gráfico. Esta representação tanto pode ser um esboço em papel ou num quadro, como uma representação mais precisa em papel milimétrico, uma imagem num ecrã de uma calculadora ou computador ou uma impressão de alta resolução. As representações gráficas dependem quer dos meios físicos que as suportam quer dos métodos e convenções usados para as construir.

A representação do gráfico de uma função pode ser feita de uma forma rigorosa, marcando as escalas horizontal e vertical e procurando localizar tão rigorosamente quanto possível os pontos, ou pode ser feita de uma forma qualitativa, sem dar grande importância aos aspectos métricos, mas tendo sobretudo cuidado com os aspectos qualitativos. Estes aspectos podem ser, por exemplo, a localização relativa dos zeros da função ou os intervalos de monotonia.

O traçado de um gráfico de forma rigorosa envolve normalmente a determinação de um certo número de pontos do gráfico e a sua posterior união por linhas. Este método de traçado não assegura, só por si, que o gráfico assim obtido reproduza todos os comportamentos da função considerados importantes. Isto deve-se ao facto de, na prática, a única informação utilizada ser o valor da função num número finito de pontos.
Um modo de complementar o método anterior é fazer o estudo analítico da função e assim determinar zeros, intervalos de monotonia, extremos relativos, pontos de inflexão, etc.

Como, para além da limitação referida, até há pouco tempo o cálculo numérico tinha que ser feito à mão ou recorrendo a instrumentos não muito rápidos, a marcação directa de pontos no gráfico era reduzida ao mínimo. Assim privilegiavam-se os esboços qualitativos dos gráficos, com referência a alguns pontos mais importantes (zeros, máximos, mínimos, etc.).

Nesta situação o gráfico da função era mais uma síntese final do conhecimento adquirido sobre a função por via analítica.

Paralelamente a esta situação na Matemática pura, nas aplicações da Matemática (incluindo a Estatística) a outras ciências foi-se tornando habitual a representação gráfica de dados numéricos para, a partir daí, obter novas informações que não era fácil obter só com base em tabelas numéricas.

A utilização generalizada de gráficos para interpretar dados numéricos torna mais importante o estudo das características de uma função a partir do seu gráfico.
Actualmente, com o uso generalizado de calculadoras e computadores, tornou-se também possível iniciar o estudo de uma função através de gráficos de marcação de pontos.

Apresentam-se em seguida representações sugestivas da função de Dirichlet,

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x \text{ racional}\\ 1 & \text{se } x \text{ irracional}\end{cases}$$

e da função de natureza análoga definida por

$$g(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x \text{ irracional}\\ 1/q & \text{se } x=p/q \ \ (p \text{ e } q \text{ primos entre si})\end{cases}.$$

Estas representações (ver "Analysis by Its History", E. Hairer e G.Warner p. 202) podem ajudar a melhor compreender o comportamento destas funções.

Gráfico de ***f*** :

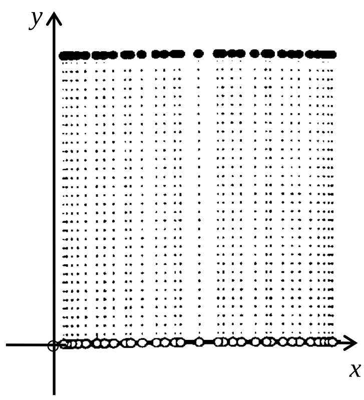
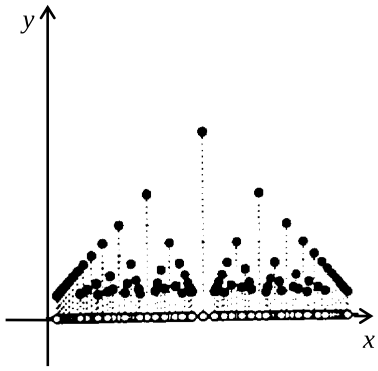


Gráfico de ***g*** :



Para a mesma função podem-se ter várias representações gráficas; basta por exemplo variar as escalas dos eixos. Por outro lado a funções diferentes é possível fazer corresponder a mesma representação gráfica. Há funções para as quais é difícil encontrar uma representação gráfica adequada sendo necessário fazer o estudo por partes, recorrendo a diversas representações.

Usa-se correntemente a designação "**gráfico**" para referir uma sua representação.

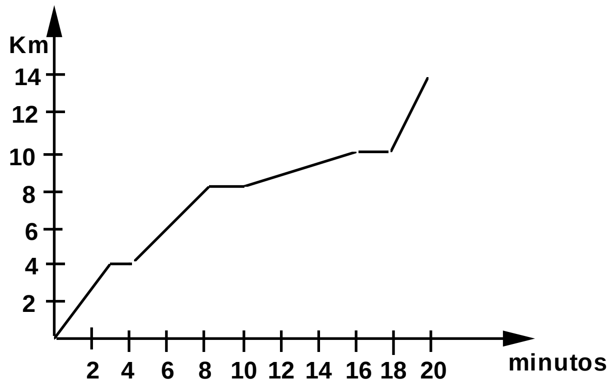
O gráfico de uma função é utilizado muitas vezes para obter uma informação rápida do seu comportamento. Assim, o médico ao ler o gráfico das temperaturas de um doente, tem uma ideia da evolução da doença. Todos os dias se é confrontado nos meios de comunicação social com gráficos de audiência aos programas de televisão, gráficos traduzindo taxas de desemprego, gráficos traduzindo as oscilações de popularidade dos políticos, etc..

Nas actividades seguintes, pode-se solicitar aos alunos que façam um texto descrevendo em linguagem corrente a informação contida nos gráficos.

Os alunos devem ser encorajados a analisar os dados apresentados sob a forma de gráfico, tabela ou descrição da situação e a relacioná-los.

O Comboio

O gráfico representado a seguir relaciona a distância percorrida (em km) com o tempo (em minutos) gasto por um comboio que percorre toda uma certa linha .



- Quantos quilómetros percorreu o comboio desde a origem até ao destino?
- Quanto tempo demorou a percorrer os primeiros 14 Km?
- Quantos quilómetros tinha percorrido o comboio ao fim de 10 minutos?
- O comboio deslocou-se sempre à mesma velocidade?
- Sabemos que o comboio só parou nas estações. Quantas estações existem nesta linha? Qual a distância entre as estações?
- Demorou o mesmo tempo em todas as paragens? Tenta encontrar uma justificação para este facto.

As funções descrevem fenómenos

Analisa as quatro situações e associa a cada uma o gráfico (g_1, g_2, g_3 ,g_4) que pensas que melhor a descreve.

Assinala em cada eixo a variável representada e marca alguns números que te permitam tornar mais evidente a relação entre o gráfico e a situação descrita na tabela ou em texto.

SITUAÇÕES

Situação1: Arrefecimento do café:

Tempo (minutos)	0	5	10	15	20	25	30
Temperatura (ºC)	90	79	70	62	55	49	44

Situação 2: Subida de um projéctil:

Tempo (segundos)	0	2	4	6	8	10
altura (metros)	0	75	140	195	240	275

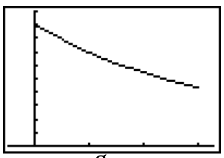
Situação 3:Temperatura durante dois dias do mês de Janeiro:

horas	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48
temperatura	1	-2	-1	5	13	14	12	7	2	0	1	5	10	13	9	7	2

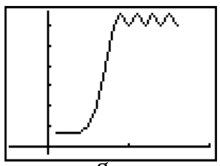
Situação 4: A temperatura de um forno eléctrico em função do tempo:

Tempo (minutos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
temperatura (graus)	20	20,5	22	40	80	120	100	120	100

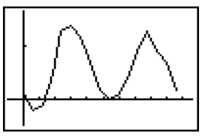
GRÁFICOS



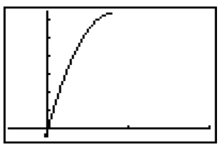
g_1



g_2



g_3



g_4

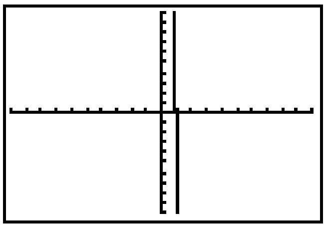
Podem, também, imaginar-se funções em abstracto, isto é, sem a pretensão de lhes atribuir qualquer significado que não seja puramente matemático. Como obter os gráficos de tais funções?

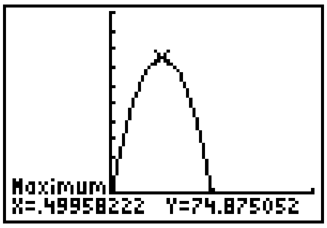
Para representar uma função no plano há que fixar um referencial. Usa-se normalmente um *referencial cartesiano ortonormal*, isto é, formado por dois eixos (um eixo horizontal e um eixo vertical, designados respectivamente por *eixo das abcissas*, vulgarmente designado por eixo dos ***xx*** e *eixo das ordenadas*, vulgarmente designado por eixo dos ***yy***) que se intersectam perpendicularmente num ponto *O*. [A palavra «cartesiano» deriva de «Cartesius», nome latino do matemático e filósofo francês Descartes (1596-1650). Foi Descartes quem introduziu este método de representação, fundando a geometria analítica.]

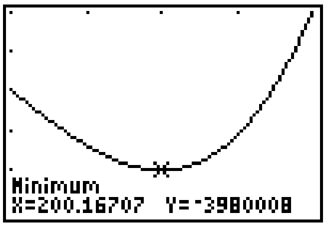
Observe-se que, para fazer uma representação do tipo descrito, não é necessário supor que os eixos sejam perpendiculares; essa é, contudo, a forma mais usual e mais prática. É por vezes de grande utilidade considerar unidades de comprimento diferentes nos dois eixos, conforme se ilustra na questão seguinte:

Como representar graficamente a função polinomial do terceiro grau que tem raízes $x = 0$, $x = 1$ e $x = 300$, em que o coeficiente do termo de grau 3 é igual a 1?

Depois de se verificar que, atendendo ao intervalo muito grande existente entre as raízes, não é possível visualizar uma representação gráfica que dê a ideia do comportamento global da função, é necessário recorrer a vários rectângulos de visualização, estudando a função por partes. A ideia global do gráfico pode ser obtida recorrendo a uma representação deformada, com papel e lápis, utilizando escalas
diferentes em diferentes intervalos dos eixos quer dos ***xx***, quer dos ***yy***.



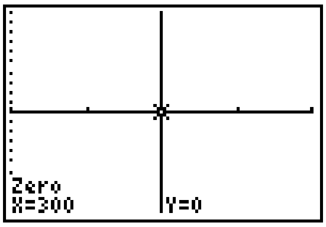




$[-10,10]\times[-10,10]$

$[-1,2]\times[-10,100]$

$[100,300]\times[-5\text{x}10^6,-4\text{x}10^4]$



$[280,320]\times[-10,10]$

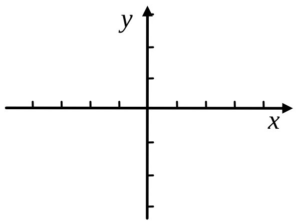
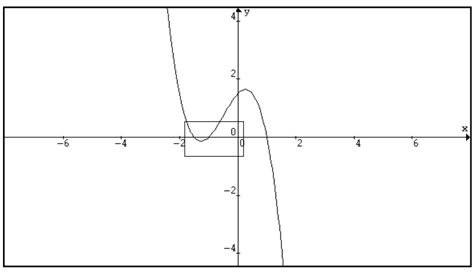


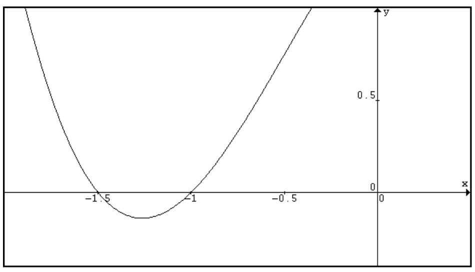
gráfico feito à mão

Quando se diz que o **rectângulo de visualização** é $[-10, 10] \times [-12, 15]$, pretende-se dizer que x varia no intervalo $[-10, 10]$ e y varia no intervalo $[-12,15]$.

Em muitos casos, para um estudo mais completo da função onde se procuram pontos notáveis ou comportamentos "escondidos", são necessárias várias representações gráficas (usando diversos rectângulos de visualização).

Apresentam-se em seguida duas representações gráficas da mesma função:





A segunda é uma ampliação de uma zona da primeira, de modo a poder observar-se melhor o comportamento da função na região indicada.

Analise-se a seguinte questão:

> Que dimensões deve ter uma lata cilíndrica com tampa e com 300 ml de capacidade para que seja mínima a quantidade de folha metálica necessária para a construir ? (dimensões a menos de 1 centésima)

Um cilindro pode ser caracterizado pelo raio da base (***r***) e pela altura (***h***). Nesse caso o seu volume é dado pelo produto da área da base pela altura,

$$V = \pi r^2 h$$

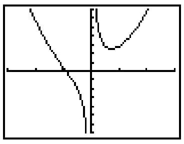
enquanto a área da sua superfície (quantidade de folha metálica necessária) é dada por

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Exprimindo os comprimentos em cm e notando que o cm^3 equivale ao mililitro, pretende-se minimizar a área com a condição $V = 300 = \pi r^2 h$, pelo que $h = \dfrac{300}{\pi r^2}$.

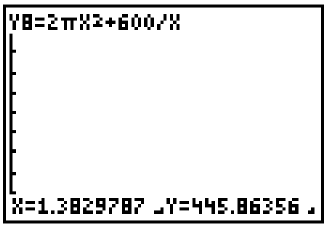
Então a área é dada em função do raio por $A = 2\pi r^2 + 2\pi r \dfrac{300}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \dfrac{600}{r}$

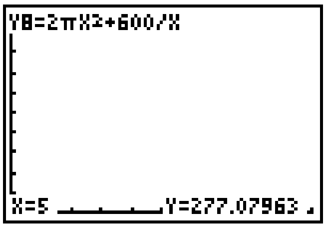
Para o estudo das dimensões da lata só interessa considerar ***r* > 0**. Assim não faz sentido considerar o gráfico (A). Se o raio for muito pequeno, a parcela **600/*r*** cresce muito. Por outro lado, se o raio for muito grande, a parcela $2\pi r^2$ torna-se também muito grande.

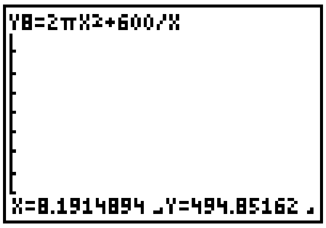


(A)

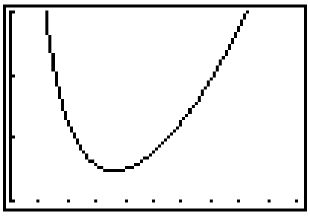
Pode-se esboçar um gráfico inicial para valores de ***r*** entre 0 e 10. Definindo as coordenadas verticais da janela de visualização entre 0 e 10 nada se vê no gráfico, mas pode-se usar o TRACE para se ter uma ideia da ordem de grandeza dos valores da função no intervalo [0,10]:



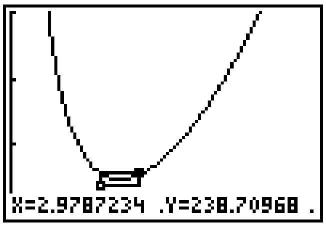


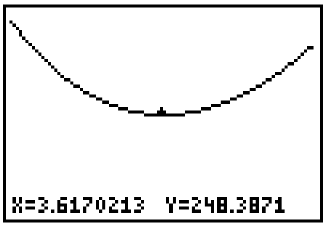


Desenhe-se novamente o gráfico, desta vez com $y \in [200, 500]$. Convém também colocar as marcações verticais do gráfico de 100 em 100. Fica-se então com o gráfico seguinte:

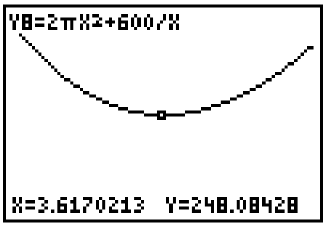


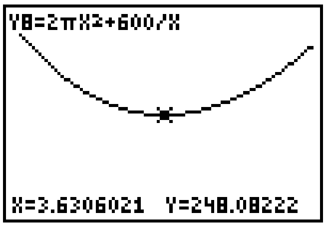
Localiza-se um mínimo entre 3 e 4. Usando o ZOOM BOX e o TRACE tenta-se determinar este mínimo com um erro inferior a uma centésima.

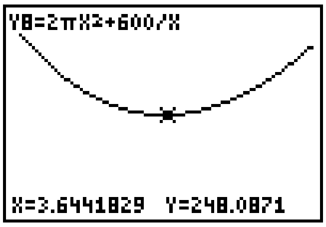




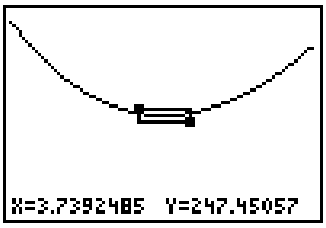
Usando o TRACE e observando o valor de y pode enquadrar-se o mínimo



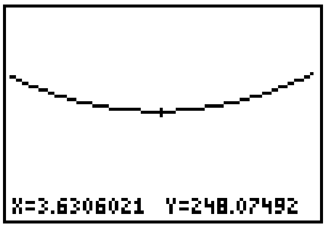




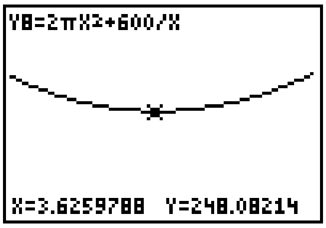
entre 3,617 e 3,645 mas isto não é ainda suficiente. Fazendo mais um ZOOM BOX

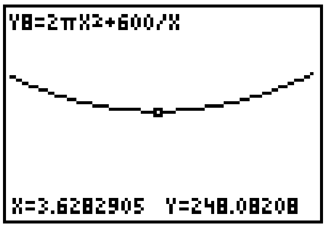


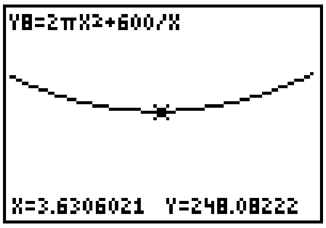
obtem-se



Voltando a usar o TRACE







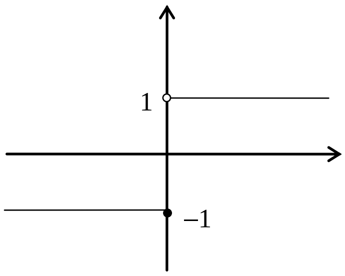
O mínimo pode agora ser enquadrado entre 3,6259 e 3,6307 (note-se que, só com base nestes dados, não se pode ter a certeza que o mínimo esteja à esquerda de 3,6306 , pois poderia ainda localizar-se entre 3,6306 e 3,6306021). Como 3,63 está a menos de uma centésima de 3,6259 e de 3,6307 , pode garantir-se que o valor de r =3,63 aproxima o mínimo com um erro inferior a 0,01. O valor da altura correspondente a este raio seria então de 7,24699… que pode ser aproximado com erro inferior a uma centésima por h =7,25.

A rigor, na resolução anterior, era necessário verificar se a aproximação do raio que foi obtida era suficientemente boa para que o erro propagado pela fórmula da altura fosse ainda inferior a uma centésima, mesmo depois dos arredondamentos, mas este tipo de análise excede o programa actual do Ensino Secundário.

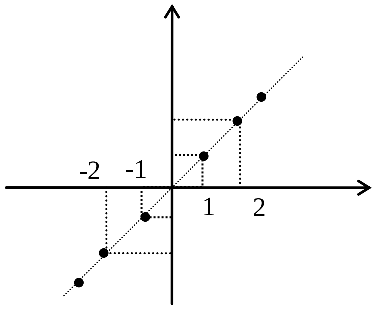
É importante observar que o gráfico de uma função nem sempre é uma só linha, podendo ser formado por várias linhas separadas, ou mesmo por um conjunto de pontos sem qualquer continuidade.

Por exemplo, o gráfico da função definida por

$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$ é constituído por duas semi-rectas,

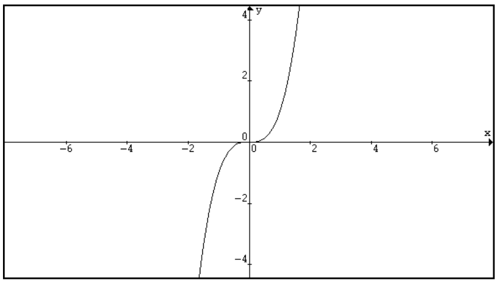


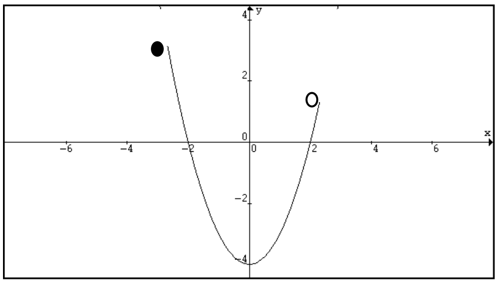
e a função ***g*** definida em $\mathbb{Z}$ (conjunto dos números inteiros), por $g(x) = x$ tem o gráfico constituído por uma infinidade de pontos situados sobre a recta $y = x$ (bissectriz dos quadrantes ímpares).



Para se obterem informações correctas sobre o comportamento de uma função através da observação do seu gráfico, é preciso ter em conta as convenções relativas à leitura gráfica, que se ilustram em seguida. As convenções nem sempre são as mesmas para todos os autores e por isso os alunos devem ser alertados para este facto.

Nos gráficos seguintes apresentam-se duas situações: a primeira diz respeito a uma função cujo domínio é $\mathfrak{R}$ e a segunda a uma função definida num intervalo de $\mathfrak{R}$.

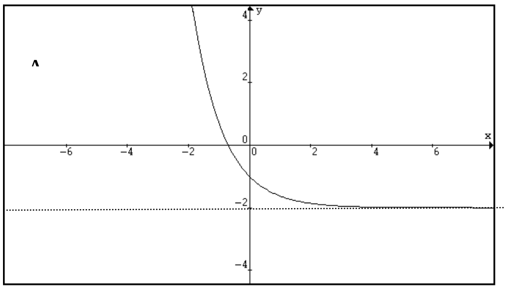


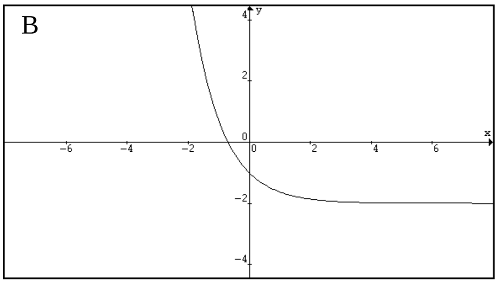


Perante gráficos deste tipo e desconhecendo a lei de formação ou a situação que os originou, porque é que em geral se considera que, no primeiro gráfico, o domínio é $\mathfrak{R}$? Porque se convencionou que se considera que o gráfico continua desde que não haja indicação em contrário. Como é que, no segundo gráfico, se reconhece que o domínio é um intervalo fechado no extremo esquerdo e aberto no extremo direito ? Através dos sinais bola fechada ou bola aberta.

Embora o conceito de ***assímptota*** não faça parte do programa do 10º ano convém ir familiarizando os alunos com as convenções usuais que permitem reconhecer a presença de assímptotas nos gráficos de funções.

Observem-se os gráficos **A** e **B** seguintes:





No gráfico **A** pretende-se indicar que a função tende para **–2** quando x tende para **+∞**. No caso do gráfico **B** não está claro que a função tende para **–2** quando x tende para **+∞** pelo que, sem mais informações, não se deve tirar esta conclusão.

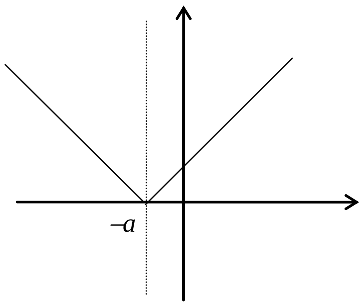
Observação: De um modo geral, nem as calculadoras gráficas, nem o software para gráficos em computador, desenham as assímptotas ou assinalam os domínios com as convenções indicadas. É necessário ir chamando a atenção dos alunos para a forma como devem registar no papel os gráficos que visualizam nos ecrans, introduzindo as necessárias correcções.

É de referir que, em alguns casos, torna-se útil "somar" ou subtrair "gráficos". Atendendo à definição de soma e de diferença de funções definidas num mesmo domínio, se se pretende traçar o gráfico de $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$ ou $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}$ num certo conjunto **A**, basta somar ou subtrair as ordenadas da imagem por $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ de cada ponto x de **A**.

As ***simetrias*** e as ***translações*** constituem preciosos auxiliares para o traçado de gráficos de funções. No que respeita às simetrias, recorde-se que uma função $\boldsymbol{f}$ é *par* num subconjunto A do seu domínio se $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$ para todo o x e $-x$ em **A**; graficamente este facto traduz-se pela simetria relativa ao eixo das ordenadas (exemplo: $f(x) = |x|$, $f(x) = x^2$). Uma função $\boldsymbol{g}$ é *ímpar* num subconjunto **B** do seu domínio se $\boldsymbol{g(-x) = -g(x)}$ para todo o x e $-x$ em **B**; graficamente este facto traduz-se pela simetria relativa à origem das coordenadas (exemplo: $f(x) = x$, $f(x) = x^3$).

Retomando a família de funções $f(x) = |x + a|$ com $a \in \Re$, é de realçar o facto de apenas no caso $a = 0$ se ter simetria relativamente ao eixo das ordenadas.

Observe-se que cada função $f(x) = |x + a|$ com $a \in \Re$ é simétrica em relação à recta $x = -a$, isto é, $f(-a + x) = f(-a - x)$ para qualquer $x \in \Re$.



Dado que são patentes as dificuldades apresentadas pelos alunos quando têm de trabalhar a função módulo, com o auxílio da calculadora gráfica podem ser introduzidas questões do tipo:

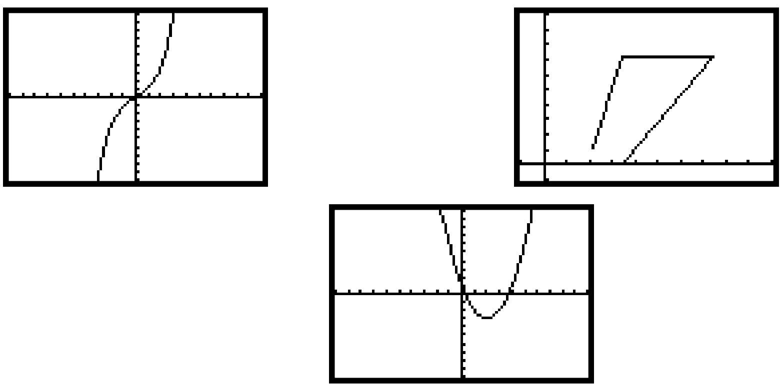
- Traçar os gráficos das funções $f(x) = x^2 - 1$ e de $|f|(x) = |f(x)| = |x^2 - 1|$; são ambas funções pares. Será que se *f* é par $|f|$ é sempre par ? Porquê ?

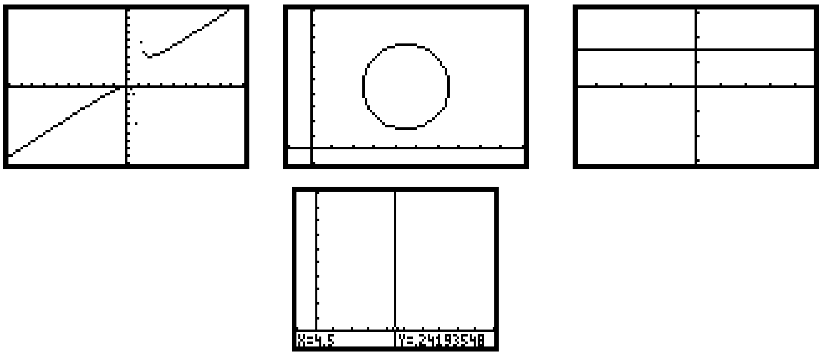
Traçar os gráficos de $f(x) = x^3$ e de $|f|(x) = |x^3|$; f é uma função ímpar e $|f|$ é par. Será que se *f* é ímpar $|f|$ pode ser ímpar? Porquê?

Depois do estudo de algumas funções e suas representações gráficas há alguma tendência por parte dos alunos em considerar função tudo o que se representou num referencial, nomeadamente rectas verticais e circunferências, sendo portanto vantajoso confrontá-los com situações como as que se indicam a seguir.

Funções

Dos gráficos que se seguem indica quais os que podem representar funções?





Gráficos obtidos com Computadores e Calculadoras Gráficas

Até ao século XVIII a vida corrente não colocava problemas numéricos muito sofisticados à maioria das pessoas. Só grupos especializados (astrónomos, comerciantes, banqueiros, cobradores de impostos, etc.) tinham uma maior necessidade de calcular.

Enquanto os matemáticos e astrónomos na Europa, desde a introdução da numeração indo-árabe, usavam o cálculo escrito, os outros grupos usavam mesas de cálculo (com marcações) sobre as quais dispunham fichas.

No oriente estava até há pouco tempo generalizado o uso de ábacos como instrumentos auxiliares de cálculo. O uso destes instrumentos era (e ainda é) ensinado nas escolas primárias.

Os precursores das máquinas de calcular mecânicas foram Wilhelm Schickard (1592-1635) e Blaise Pascal (1623-1662).

Schickard construiu a primeira máquina mecânica de somar e subtrair em 1623, mas a máquina não conheceu qualquer difusão. Pascal obteve em 1645 uma máquina de somar e subtrair que funcionava, após diversas tentativas de concepção e construção de máquinas do género. Os objectivos de Pascal eram práticos (ajudar o pai, que trabalhava nos impostos) e construiu diversos exemplares da sua máquina, que chegou mesmo a vender (vendeu 30 exemplares).

O facto de estas máquinas só permitirem a multiplicação por adições sucessivas e a divisão por subtracções sucessivas limitava o seu interesse prático.

A primeira máquina capaz de multiplicar foi construída por Gottfried Leibniz (1646-1716). Leibniz introduziu uma série de inovações que mais tarde foram aproveitadas nas máquinas de calcular mecânicas produzidas industrialmente. Contudo a sua época não estava ainda pronta para a generalização das máquinas mecânicas de cálculo pois a tecnologia mecânica tinha ainda que evoluir. Só em 1810 viria a ser construída a primeira máquina de calcular comercial.

Em 1812, Charles Babbage (1792-1871), professor na Universidade de Cambridge, concebeu uma "máquina de diferenças" (*difference engine*) para calcular automaticamente tabelas de funções trigonométricas e logarítmicas. Babbage concebeu depois uma "máquina analítica" (*analytical engine*) que poderia executar uma sequência arbitrária de operações e disporia de armazenamento interno de dados.

A máquina analítica incluía cinco características comuns aos modernos computadores

- dispositivo de entrada;
- zona de armazenamento ou memória;

- processador ou calculador numérico;
- unidade de controle;
- dispositivo de saída.

Nenhuma das máquinas de Babbage chegou a ser concluída, em grande parte pela falta de ferramentas de precisão que ainda não existiam.

Uma importante colaboradora e financiadora de Babbage foi Augusta Ada Byron (1815-1852, filha de Lord Byron e depois condessa de Lovelace). Ada ajudou a desenvolver as instruções para a máquina analítica e é por vezes considerada a primeira programadora de computador do mundo.

Nos finais do século XIX as máquinas de calcular comerciais generalizaram-se, sendo famosa a máquina que o estatístico americano Herman Hollerith (1860-1929) construíu para tratar os dados do censo de 1890 nos Estados Unidos.

Até 1930 as aplicações do cálculo mecânico ao domínio científico foram um pouco negligenciadas. Contudo, o desenvolvimento das diversas ciências e a sua aplicação a sectores cada vez mais numerosos da actividade humana exigiam cálculos cada vez mais complexos.

Foi por altura de Segunda Guerra Mundial que se desenvolveram as primeiros computadores baseados em dispositivos electrónicos em vez de dispositivos mecânicos.
Embora baseado em trabalhos e experiências anteriores, o primeiro computador completamente electrónico foi o ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Calculator), construído nos Estados Unidos, na Univ. da Pennsylvania, em 1946. O ENIAC tinha uma memória para armazenar 20 números de 10 dígitos cada um e pesava cerca de 30 toneladas.

O primeiro computador comercialmente disponível, o UNIVAC, apareceu em 1951 e baseava-se no ENIAC. Estes computadores da primeira geração baseavam-se em válvulas electrónicas e eram inicialmente programados directamente em linguagem máquina.

A necessidade de facilitar a programação levou ao aparecimento das primeiras linguagens de alto nível: o FORTRAN (1954) e o COBOL (1959).

A segunda geração de computadores (1959-1964) surgiu com o transístor. Os computadores tornaram-se menos dispendiosos e começaram a aparecer nas grandes organizações (universidades, governos, grandes empresas).

A terceira geração (1965-1970) é marcada pelos circuitos integrados, enquanto que a quarta geração (1971-presente) se caracteriza pelo aparecimento do microprocessador.

As calculadoras electrónicas apareceram no início dos anos 60, enquanto no início dos anos 70 surgem modelos miniaturizados, alguns em tamanho de bolso. Enquanto os modelos mais simples só permitem executar as 4 operações aritméticas fundamentais, os modelos mais sofisticados podem mesmo calcular funções matemáticas transcendentes (trigonométricas, logarítmica, exponencial, etc)

As actuais calculadoras programáveis de bolso são verdadeiros computadores já que, para além de dispositivos de entrada (teclado) e saída (ecrã) podem armazenar dados e programas (memória) e contêm no seu interior um microprocessador (cálculo e controle).

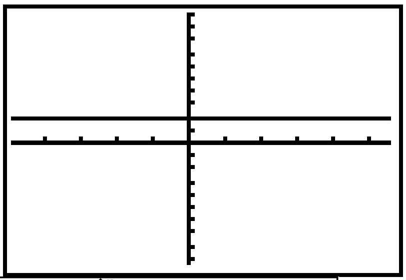
Os computadores e calculadoras constroem, de forma rigorosa, representações aproximadas dos gráficos das funções. Contudo, nem sempre é fácil encontrar uma representação computacional do gráfico da função que permita analisar o comportamento global da função.

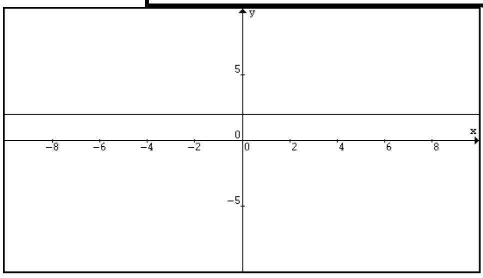
Torna-se por vezes necessário recorrer a representações do gráfico em diferentes rectângulos de visualização e integrar os conhecimentos teóricos disponíveis sobre a mesma função, de modo a que se possa esboçar uma representação qualitativa satisfatória do gráfico da função.

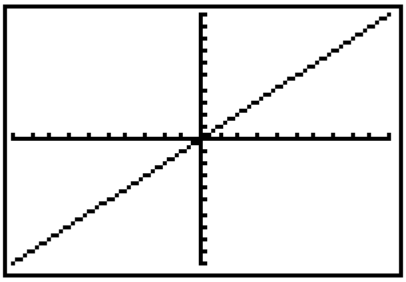
Existem ainda várias situações em que os gráficos em computador ou calculadora podem conduzir a vários enganos, que se exemplificam em seguida.

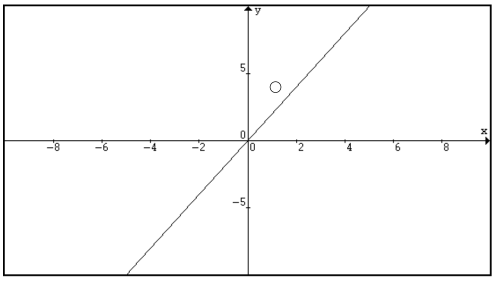
1. O gráfico pode levar a concluir que alguns valores pertencem ao domínio da função quando isso não acontece. É importante que desde o início os alunos sejam confrontados com exemplos que lhes permitam perceber a vantagem da informação dada pela expressão analítica da função. A calculadora apresenta para $y = \frac{2x-4}{x-2}$ um gráfico semelhante ao da função $y = 2$ e para $y = \frac{x^2-2x}{x-2}$ semelhante ao de $y = x$.

Os alunos deverão corrigir as representações fornecidas pela calculadora, introduzindo nomeadamente a bola aberta nos pontos que não pertencem ao domínio.



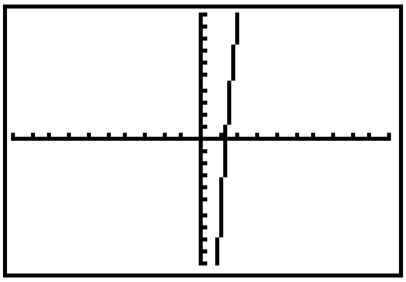






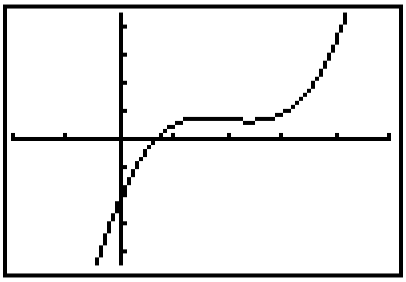
2. O gráfico pode não apresentar alguns troços importantes:

Por exemplo a função $f(x)= x^3 - 12\,x^2 + 46\,x - 42$ tem no rectângulo de visualização $[-10,10] \times [-10,10]$, o aspecto que se segue:



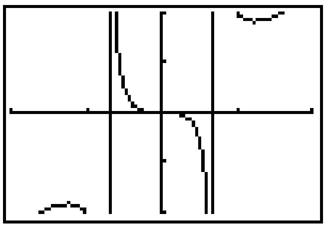
$[-10,10] \times [-10,10]$

É necessário procurar o rectângulo de visualização adequado. Um rectângulo de visualização que permite um melhor conhecimento do comportamento da função é $[-4, 10] \times [-90, 90]$.

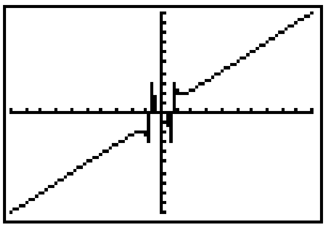


$[-4, 10] \times [-90, 90]$.

3. Como já foi referido na página 20, por vezes, com uma só janela não se consegue ter uma ideia do comportamento de uma função. Tomando como um outro exemplo, $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 0{,}5}$, e observando o que se passa perto da origem ($[-2, 2] \times [-2, 2]$), não se tem a percepção do comportamento da função quando $\boldsymbol{x}$ se afasta de 0; em contrapartida, tomando um rectângulo maior ($[-10, 10] \times [-10, 10]$), o que se passa junto à origem fica pouco claro:



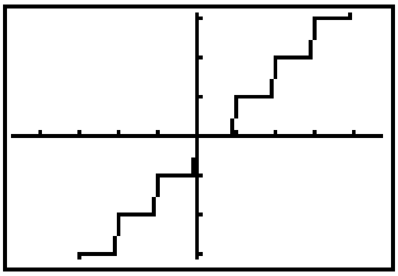
$[-2, 2] \times [-2, 2]$



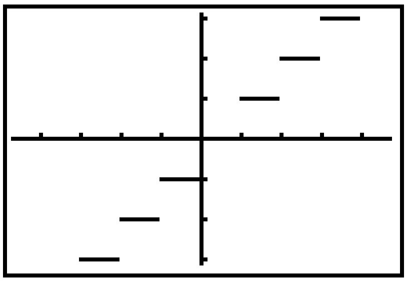
$[-10, 10] \times [-10, 10]$

É necessário procurar os rectângulos de visualização adequados à análise das características gerais da função. Os alunos devem ser incentivados a experimentar diversos rectângulos de visualização e a ter em conta as propriedades conhecidas ou que decorrem da expressão analítica das funções que estão a estudar.

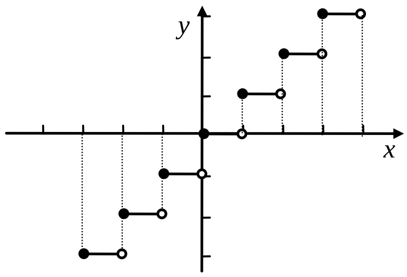
4. A generalidade das calculadoras apresenta a função y **= int(**x**)** (função característica de x**, C(**x**),** que a cada número real x faz corresponder o maior inteiro não superior a x) com este aspecto.



É pois necessário colocar a calculadora em modo "ponto a ponto"e chamar a atenção dos alunos para esta limitação. Obtem-se então a representação



Nenhum destes gráficos representa correctamente a função y = *int(x)* pelo que o aluno deve corrigi-los apresentando um gráfico deste tipo:



5. No gráfico das função $y = \dfrac{3}{x-2}$ é indispensável explicar aos alunos que a recta vertical não faz parte do gráfico da função, nem pretende representar a assímptota vertical que existe para x = **2**. Os alunos poderão também recorrer à tabela para perceberem melhor o que acontece quando x se aproxima de **2** e representarem um gráfico mais correcto.

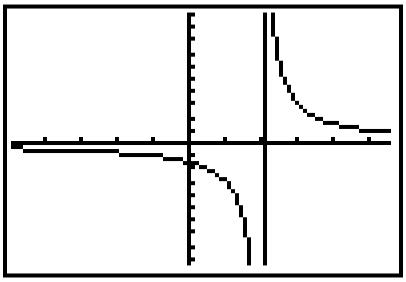


gráfico apresentado pela calculadora

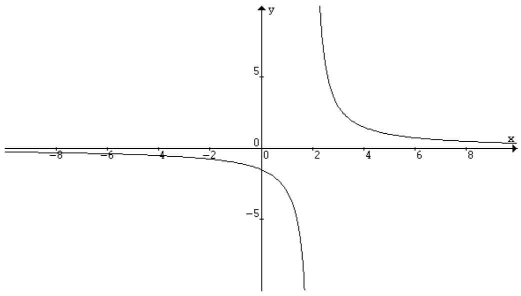
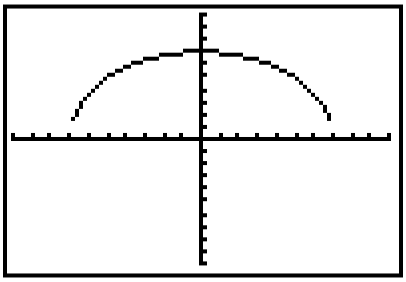
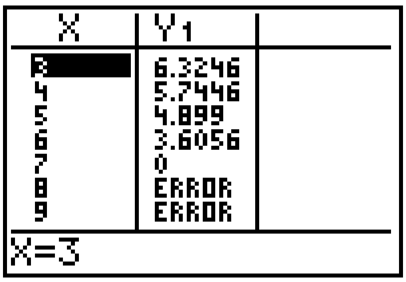


gráfico que os alunos podem registar

6. Um outro exemplo que pode ser apresentado é o da função $y = \sqrt{49 - x^2}$, cuja representação gráfica no ecrã pré definido pela calculadora utilizada, aparece com o aspecto seguinte:

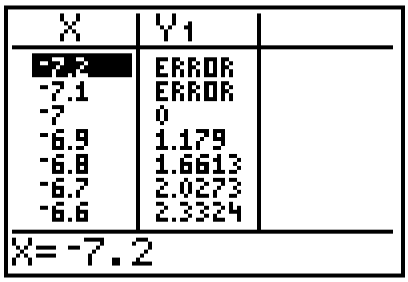


Mais uma vez os alunos têm que questionar o que acontece na proximidade de **-7** e **7** e porque é que os números reais inferiores a **-7** e superiores a **7** não pertencem ao domínio. Neste caso a consulta da tabela será uma boa ajuda para o estudo do domínio da função. Note-se que, para os valores que não pertencem ao domínio, a máquina assinala erro.



X	Y1
3	6.3246
4	5.7446
5	4.899
6	3.6056
7	0
8	ERROR
9	ERROR

X=3



X	Y1
-7.2	ERROR
-7.1	ERROR
-7	0
-6.9	1.179
-6.8	1.6613
-6.7	2.0273
-6.6	2.3324

X=-7.2

Estas observações levam a concluir que os gráficos obtidos através de computadores e calculadoras podem ajudar à compreensão do gráfico de uma função, mas devem ser cuidadosamente interpretados. Não se deve esquecer que um dos triunfos do cálculo é a possibilidade de analisar o gráfico de uma função sem recorrer aos computadores ou calculadoras e sem determinar muitos pontos desse gráfico.

Continuidade

A natureza oferece constantemente exemplos de variações que se produzem umas, de uma maneira contínua, isto é, pela variação gradual (exemplo: o desabrochar de uma flor) e outras, que se produzem de uma maneira descontínua, isto é, pela passagem repentina de um a outro estado (exemplo: a passagem da água em ebulição do estado líquido ao estado gasoso).

As continuidades e descontinuidades, com que as grandezas variam umas em relação às outras, são traduzidas em matemática pelos conceitos rigorosos de função contínua e função descontínua.

Em 1821, Cauchy introduziu o conceito de ***função contínua*** ao exigir que mudanças infinitamente pequenas de $\boldsymbol{x}$ produzam mudanças infinitamente pequenas de $\boldsymbol{y}$

($\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f(x)}$):

"$\boldsymbol{f(x)}$ diz-se uma função contínua se os valores numéricos da diferença $f(x+\alpha)-f(x)$ decrescem indefinidamente com os de α." (Cauchy, 1821, Cours d'Analyse).

Bolzano (1817) e Weierstrass (1874) foram mais precisos ao afirmarem que a diferença $f(x) - f(x_0)$ deve ser arbitrariamente pequena quando a diferença $x - x_0$ é suficientemente pequena:

"Chamamos aqui a uma quantidade $\mathbf{y}$ uma função contínua de $\mathbf{x}$, se depois de escolher uma quantidade $\boldsymbol{\varepsilon}$, a existência de $\boldsymbol{\delta}$ pode ser provada, de forma que, para qualquer valor entre $x_0 -\delta \ldots x_0 +\delta$, o correspondente valor de $\mathbf{y}$ está entre $y_0 -\varepsilon \ldots y_0 +\varepsilon$."
(Weierstrass, 1874)

O conceito usualmente utilizado hoje em dia é o conceito derivado desta concepção de continuidade de Weierstrass, que pode ser enunciado como segue:

Definição: *Seja A um subconjunto de $\Re$ e $x_0 \in A$. A função $f: A \to \Re$ é contínua em x_0 se para qualquer $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo o $x \in A$ tal que $|x-x_0| < \varepsilon$ se tenha $|f(x)-f(x_0)| < \delta$.*

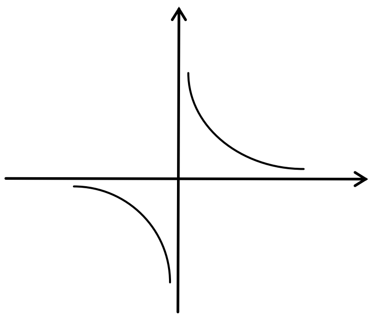
Uma função diz-se contínua em A se for contínua em todos os pontos de A.

Esta definição é equivalente à seguinte, cuja linguagem é mais acessível:

Seja A um subconjunto de $\Re$ *e* $x_0 \in A$*. A função* $f: A \to \Re$ *é contínua em* x_0 *se para qualquer sucessão* (x_n) *de elementos de A com limite* x_0*, a sucessão* $(f(x_n))$ *é convergente para* $f(x_0)$.

Esta formalização, dado o seu grau de abstracção, não é adequada a uma primeira abordagem do conceito de continuidade. Usa-se, por isso, com uma certa «ligeireza» a ideia que uma função é contínua quando é possível traçar o seu gráfico de maneira contínua, isto é, sem levantar o lápis do papel. Este conceito intuitivo «funciona» se a função estiver definida num só intervalo, mas falha se o domínio for, por exemplo, uma união de intervalos disjuntos:

Por exemplo, a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é contínua em todo o seu domínio e não se pode traçar o seu gráfico sem levantar o lápis do papel:



[Recorde-se que a função do tipo $f(x) = \dfrac{k}{x}$ com k constante, traduz que as grandezas x e $f(x)$ $(x \neq 0)$ são inversamente proporcionais.]

Poderá então dizer-se: *uma função é contínua num conjunto **A** que seja uma reunião de intervalos não degenerados (isto é, não reduzidos um ponto) se para quaisquer dois ponto* $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$ *em **A** tais que* $[x, y] \subseteq$ ***A****, é possível traçar o seu gráfico em* $[x, y]$ *sem levantar a ponta do lápis do papel.*

Um exemplo desconcertante de função contínua é, por exemplo, a função $\boldsymbol{f}$ definida no conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ por $f(n) = n$. O gráfico desta função é constituído por pontos isolados, sendo obviamente necessário levantar a ponta do lápis do papel para desenhar o gráfico. [Observe-se que não existe contradição com a definição anterior, já que não é possível considerar $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ em $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ tais que $[x, y] \subseteq \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.]

Como é que $\boldsymbol{f}$ pode ser contínua em qualquer ponto $\boldsymbol{x_0}$ de $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$?

Basta observar que a condição *para qualquer* $\boldsymbol{\delta > 0}$ *existe* $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ *tal que para todo o*

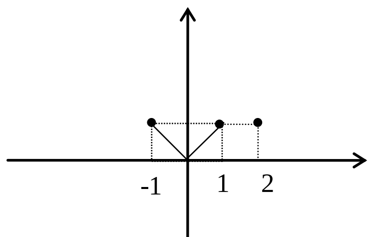
$\boldsymbol{x} \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ *tal que* $|x - x_0| < \varepsilon$ *se tenha* $|f(x) - f(x_0)| < \delta$ é sempre verificada para qualquer ponto $\boldsymbol{x_0}$ de $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. Com efeito, existe $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ (basta tomar $0 < \varepsilon < 1$) de forma a que o único ponto $\boldsymbol{x}$ do conjunto $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ tal que $|x - x_0| < \varepsilon$ é $x = x_0$ e assim $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \delta$, para qualquer $\delta > 0$.

Decorre assim da definição de continuidade que uma função <u>é contínua em todos os pontos isolados do seu domínio</u> (um ponto $\boldsymbol{a}$ é um ponto isolado de $\boldsymbol{A}$ se existir um intervalo aberto $\boldsymbol{I}$ contendo $\boldsymbol{a}$ tal que $A \cap I = \{a\}$). Com efeito, se $\boldsymbol{a}$ é um ponto isolado de $\boldsymbol{A}$, a única sucessão formada por pontos de $\boldsymbol{A}$ e convergente para $\boldsymbol{a}$ é a sucessão constante $u_n = a$ e então $f(u_n) = f(a)$, que converge obviamente para $f(a)$.

Exemplo:

A função definida em $[-1,2]$

por $f(x) = \begin{cases} |x| & se \quad -1 \le x \le 1 \\ 1 & se \quad x = 2 \end{cases}$



é contínua no seu domínio, $X = [-1,1] \cup \{2\}$ e 2 é um ponto isolado de X.

Monotonia

A observação de um gráfico de uma função fornece uma indicação aproximada dos seus zeros, isto é, os pontos onde o seu gráfico intersecta o eixo das abcissas e do seu sentido de variação (crescimento e decrescimento).

Uma função f é *crescente* (*decrescente*) num conjunto A se, sempre que a e b são elementos de A tais que $a < b$, então $f(a) \le f(b)$ ($f(a) \ge f(b)$); uma função é *monótona* num conjunto se é crescente ou decrescente nesse conjunto.

Uma função f é *estritamente crescente* (*estritamente decrescente*) num conjunto A se, sempre que a e b são elementos de A tais que $a < b$, então $f(a) < f(b)$ ($f(a) > f(b)$);

uma função é *estritamente monótona* num conjunto se é estritamente crescente ou estritamente decrescente nesse conjunto.

Exemplos:

- A função constante, $f(x) = k$, é simultaneamente crescente e decrescente em $\Re$.
- A função identidade, $f(x) = x$, é estritamente crescente em $\Re$.
- A função $f(x) = |x|$ é estritamente decrescente em $]-\infty,0]$ e estritamente crescente em $[0,+\infty[$.

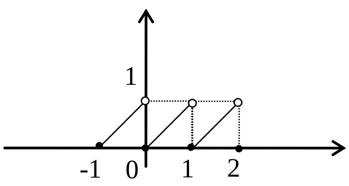
A função característica, $f(x) = [x]$ = C(x),(definida por $f(x) = n$ sempre que $x \in [n, n+1[$, e definida na calculadora por y = int x) é crescente em $\Re$.

No âmbito desta brochura a noção de crescimento e decrescimento de uma função é relativa ao comportamento da função num conjunto. <u>Não é aqui usada a noção de função crescente ou decrescente num ponto, a não ser no caso degenerado, sem qualquer interesse prático, em que o ponto se identifica com o conjunto a ele reduzido.</u> <u>Deve-se assim usar apenas a noção de função crescente (decrescente) num conjunto</u>.

Se o domínio de uma função é uma reunião de intervalos e se a função é crescente (decrescente) no seu domínio, ela é crescente (decrescente) em cada um dos subintervalos que o constitui. A recíproca é <u>falsa:</u> por exemplo, a função definida em $[-1,2]$ por $f(x) = x - [x]$, isto é,

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & se \quad x \in [-1,0[\\ x & se \quad x \in [0,1[\\ x-1 & se \quad x \in [1,2[\\ 0 & se \quad x = 2 \end{cases}$$

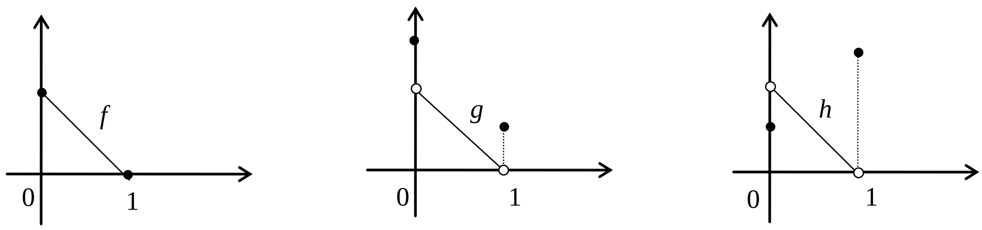
cujo gráfico é



é crescente em todos os intervalos da forma $[n, n+1[$ com $n \in \{-1, 0, 1\}$ mas não é crescente em $[-1,2]$. Mais geralmente, se uma função é crescente (decrescente) em **A** e em **B**, ela não é necessariamente crescente (decrescente) em **A**$\cup$**B**.

Quando se define crescimento e decrescimento num conjunto **A** não se faz qualquer restrição relativamente às características topológicas desse conjunto. Assim uma função pode ser crescente ou decrescente em conjuntos abertos, fechados ou em conjuntos nem abertos nem fechados.

Convém ter em conta situações como as que se seguem:



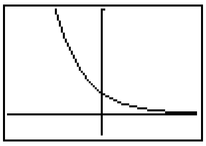
A função $\boldsymbol{f}$ é decrescente em $[0,1]$; a função $\boldsymbol{g}$ não é decrecente em $[0,1]$ mas é decrescente em $[0,1[$; a função $\boldsymbol{h}$ não é decrecente em $[0,1]$ mas é decrescente em $]0,1[$.

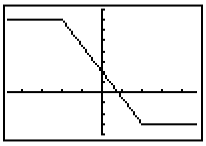
A questão seguinte pretende trabalhar conjuntamente os conceitos de continuidade e de monotonia de funções, propondo algumas situações que contribuem para desenvolver o sentido crítico dos alunos. Será interessante considerar a mesma questão, mas em que a monotonia envolvida é no sentido estrito.

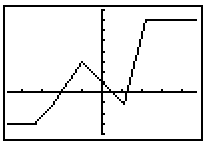
Quando possível, dar exemplos (eventualmente através de gráficos) de funções de domínio $\Re$, satisfazendo as condições seguintes:

- mónotona decrescente e sempre positiva
- com pelo menos uma descontinuidade em $\Re$, mónotona crescente e com contradomínio $[-3, 7]$
- mónotona decrescente de contradomínio $[-3, 7]$
- com três zeros distintos e de contradomínio $[-3, 7]$
- mónotona crescente e com pelo menos dois zeros
- monótona crescente e com dois e só dois zeros
- monótona crescente, com pelo menos uma descontinuidade em $\Re$ e sempre positiva

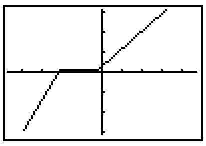
Comentário

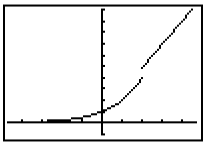






Monótona decrescente *mónotona decrescente* *três zeros distintos*
e positiva *contradomínio [-3,7]*
contradomínio [-3,7]





mónotona crescente *mónotona crescente*
com pelo menos dois zeros *descontínua e sempre positiva*

Funções obedecendo às outras duas condições não existem e os alunos poderão ser incentivados a explicar o motivo de tal impossibilidade. Nos casos em que o professor trabalha indiferentemente com os dois tipos de monotonia (estrita ou não estrita), num exercício deste tipo deve explicitar de que tipo de monotonia se trata.

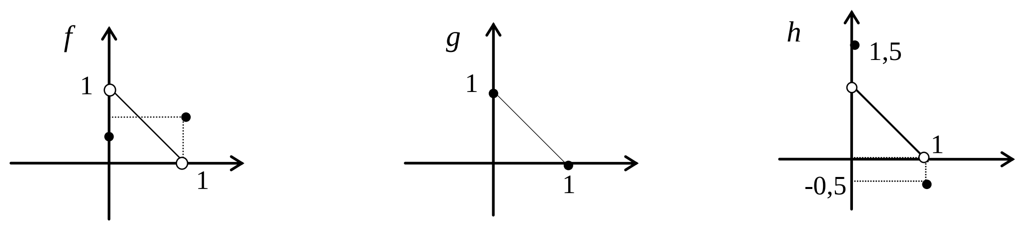
Extremos e Concavidades

Seja f uma função definida num conjunto qualquer A. Designe-se por $f(A)$ o conjunto formado pelas imagens por f dos elementos de **A**, isto é, o contradomínio de f. Chama-se ***máximo absoluto*** (***mínimo absoluto***) de f em A ao ***máximo*** (***mínimo***) de $f(A)$. [Recorde-se que um elemento c de um conjunto C é um máximo (mínimo) de C se c é majorante (minorante) de C.]

Assim, a função f tem um máximo absoluto (mínimo absoluto) em $x = a$ se $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$) para todo o x em A.

A função f tem um ***máximo relativo*** (***mínimo relativo***) em $x = a$ se existe um intervalo aberto I contendo o ponto a tal que $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$) para todo o x em $I \cap A$. Toma-se em geral para I um intervalo aberto da forma $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ com $\varepsilon > 0$. Os intervalos desta forma são designados por ***vizinhanças de raio*** ε de a.

Considerem-se as funções f, g e h representadas nos gráficos seguintes:

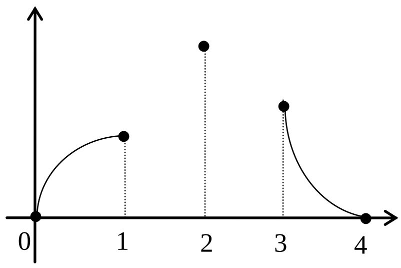


Todas estão definidas num intervalo fechado $[0,1]$, mas ***f*** não tem máximo nem mínimo em $[0,1]$,porque $f([0,1]) =]0,1[$, enquanto ***g*** e ***h*** têm máximo e mínimo em $[0,1]$; mais precisamente, $g([0,1]) = [0,1]$, logo o máximo de ***g*** é **1** e o seu mínimo é **0** e $h([0,1]) =]0,1[\cup \{0,5;1,5\}$, logo o máximo de ***h*** é **1,5** e o seu mínimo é – **0,5**.

Recorde-se que a existência de máximo e mínimo em $[a,b]$ (intervalo limitado e fechado) é garantida se a função é contínua nesse intervalo (Teorema de Weierstrass); trata-se de uma condição suficiente mas não necessária, como se verifica com a função ***h***. O facto de as três funções serem iguais em $]0,1[$ não tem, neste caso, qualquer significado.

Observação: Os pontos isolados do domínio de uma função são simultaneamente máximos e mínimos locais. Com efeito se a é um ponto do domínio A de uma função que é um ponto isolado, existe $\varepsilon > 0$ tal que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A = \{a\}$ logo $f(x) \begin{smallmatrix}\le \\ = \\ \ge\end{smallmatrix} f(a)$ para todo o x em $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A = \{a\}$.

Por exemplo , a função definida em $[0,1] \cup \{2\} \cup [3,4]$ cujo gráfico está representado na figura, tem um máximo absoluto em $x = 2$ que é também um máximo relativo e um mínimo relativo. Esta função tem ainda máximos relativos para $x = 1$ e $x = 3$ e mínimos relativos para $x = 0$ e $x = 4$.



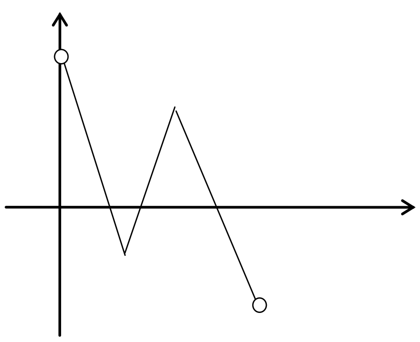
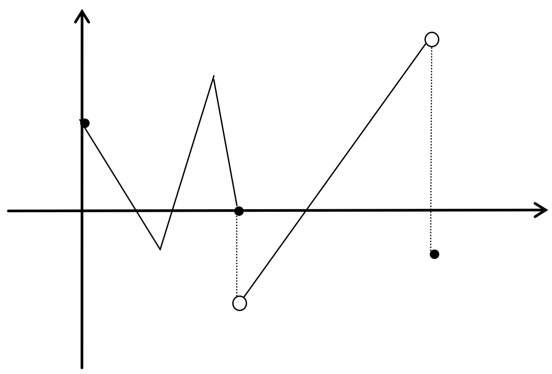
Este tipo de situação não tem qualquer utilidade a nível elementar, não sendo portanto adequado tratá-la com alunos do 10º ano.

Tratam-se em seguida algumas situações que levantam vulgarmente problemas aos alunos quando pretendem classificar os extremos de uma função no seu domínio.

- Que relações se podem encontrar entre o máximo absoluto (ou mínimo absoluto) de uma função no seu domínio e os máximos (ou mínimos relativos) dessa função?

Resulta imediatamente da definição que um extremo absoluto é uma extremo relativo e que, no caso de a função ter máximo absoluto (resp. mínimo absoluto), este coincide com o maior (resp. menor) dos máximos relativos (resp. mínimos relativos). Mas uma função pode ter máximos e mínimos relativos no seu domínio e não ter nem máximo absoluto, nem mínimo absoluto.

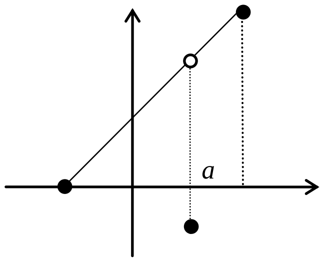
As funções representadas nos gráficos seguintes (a primeira definida num intervalo aberto e a segunda num intervalo fechado) tem máximos e mínimos relativos mas não tem nem máximo absoluto, nem mínimo absoluto.

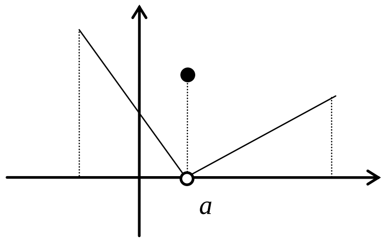



A função definida em $\Re$ por $f(x) = \frac{x}{2} + senx$ tem uma infinidade de máximos relativos não tem máximo absoluto nem mínimo absoluto.

- Que relações existem entre o sentido de variação de uma função e a existência de extremos? Será que para uma função ter um máximo (resp. mínimo) em $x = a$ ela deve crescer (resp. decrescer) à esquerda de $x = a$ e decrescer (resp. crescer) à direita de $x = a$? E, reciprocamente, se a função tem o sentido de variação anterior ela tem um extremo para $x = a$?

A resposta é negativa em ambos os casos, como se ilustra com os exemplos seguintes.





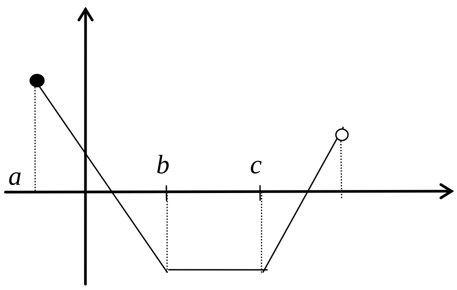
No primeiro caso a função cresce à direita e à esquerda de ***x = a*** e tem um mínimo relativo para ***x = a***. No segundo caso a função decresce à esquerda de ***x = a***, cresce à direita de ***x = a*** e tem um máximo para ***x = a.***

Observe-se que, no caso das funções serem contínuas no seu domínio, se uma função é crescente (decrescente) à esquerda de ***x = a*** e decrescente (crescente) à direita de ***x = a,*** então ela tem um máximo relativo (mínimo relativo) para ***x = a***.

- Quais os extremos relativos de uma função que seja constante numa parte do domínio?

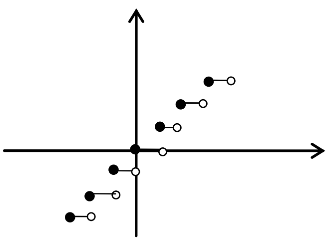
Nestas condições a função tem uma infinidade de máximos e mínimos relativos.
Considere-se a função cujo gráfico se representa em seguida:

A função tem o máximo absoluto para ***x = a***, mínimo absoluto para qualquer ***x*** tal que $x \in [b,c]$ e tem máximo relativo para qualquer ***x*** tal que $x \in]b,c[$.



Analisem-se os extremos da função característica, $f(x) = [x]$:

A função tem máximos relativos para qualquer $x \in \Re$ tal que $x \in [n, n+1]$ com $n \in \mathbb{Z}$ e tem mínimos relativos para qualquer ***x*** tal que $x \in]n, n+1[$ com $n \in \mathbb{Z}$ e não tem nem máximo absoluto nem mínimo absoluto.

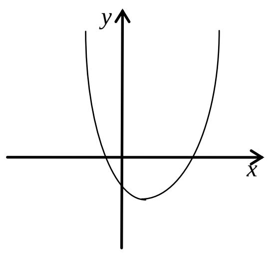


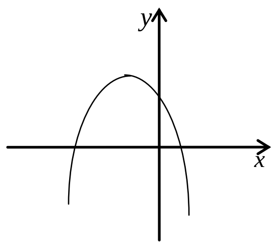
As relações entre a existência de extremo num ponto e o comportamento da *derivada* da função, <u>caso ela exista</u>, na proximidade desse ponto não fazem parte do programa do

10º ano. Observe-se que nos exemplos apresentados se escolheram funções não admitindo derivada nos pontos interiores ao seu domínio que são extremos da função.

Seja f uma função derivável num intervalo $]a,b[$ de $\Re$.

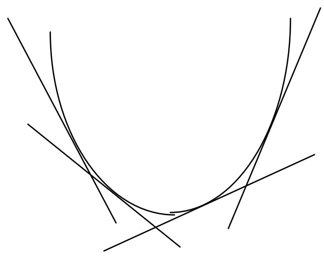
O ***sentido da concavidade*** de f decorre facilmente da observação do seu gráfico. Um aluno não terá dificuldade em aceitar que, dos gráficos apresentados em seguida, o primeiro diz respeito a uma função que tem a concavidade voltada para cima no seu domínio e o segundo diz respeito a uma função que tem a concavidade voltada para baixo no seu domínio:



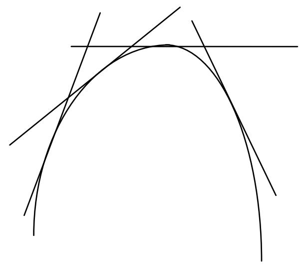


Como definir este conceito de forma sugestiva mas rigorosa ?

Diz-se que uma função tem a concavidade voltada para cima (baixo) em $]a,b[$ *se o seu gráfico se encontrar para cima (baixo) de qualquer tangente, em qualquer um dos seus pontos.*

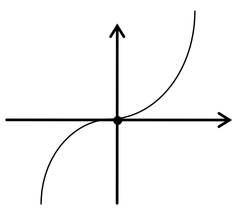


Concavidade voltada para cima



Concavidade voltada para baixo

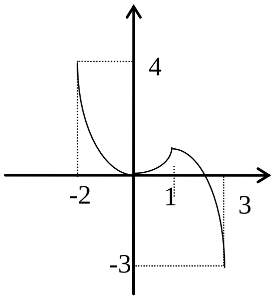
Diz-se que uma função tem uma **inflexão** para $x = a$ se o sentido da concavidade à esquerda de a e à direita de a são diferentes. Por exemplo $f(x) = x^3$ tem uma inflexão para $x = 0$.



Observe-se que no mesmo ponto podem coexistir uma inflexão e um extremo relativo.

Por exemplo, seja ***f*** a função definida em $[-2,\ 3]$ por

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } -2\leq x\leq 1 \\ -x(x-2) & \text{se } 1\leq x\leq 3 \end{cases}$$



A função tem uma <u>inflexão</u> e simultâneamente um <u>máximo relativo</u> para $\boldsymbol{x}$ = **1**.

As Funções Polinomiais

Chama-se ***função polinomial*** a toda a função da forma

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ em que $a_0,a_1,...,a_n$ são constantes arbitrárias.

Se $a_0\neq 0$, a função polinomial é de grau n.

Muitas áreas da Matemática e das suas aplicações usam as funções polinomiais. Estas funções são sempre contínuas e têm sempre primitiva e derivadas de qualquer ordem (que são também funções polinomiais) facilmente calculáveis a partir da expressão analítica da função original.

O valor de uma função polinomial num ponto pode ser calculado usando apenas as operações aritméticas fundamentais (ao contrário, por exemplo das funções transcendentes). Dado que os meios automáticos (calculadoras e computadores) apenas realizam internamente as quatro operações fundamentais, torna-se vantajoso o uso de funções polinomiais para aproximar funções e curvas contínuas. Prova-se em particular que:

Teorema (*Weierstrass): Dada uma função* ***f*** *contínua num intervalo limitado* $[a,b]$ *e dado um número positivo* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *tão pequeno quanto se queira, existe sempre uma função polinomial* $\boldsymbol{P}$ *tal que* $|f(x)-P(x)|<\varepsilon$*, para todo o* $\boldsymbol{x}$ *em* $[a,b]$.

Uma questão importante no estudo das funções polinomiais é a determinação dos seus zeros, isto é, o conjunto de valores de $\boldsymbol{x}$ para os quais

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Para as funções polimomiais de graus 1 e 2 são conhecidas e utilizadas correntemente fórmulas que permitem a determinação dos seus zeros a partir da sua expressão analítica. Para funções polinomiais de graus 3 e 4 existem ainda fórmulas resolventes cuja complexidade as torna muito pouco utilizadas na prática. No parágrafo dedicado às funções cúbicas exemplifica-se o processo utilizado por Tartaglia e Scipione dal Ferro para resolver equações cúbicas. Um método de resolução de equações do quarto grau foi encontrado por Lodovico Ferrara (1522-1565) e publicado por Cardano (1501-1576). A resolução de equações do quinto grau permaneceu envolta em mistério durante muitos anos, até que em 1826, Ruffini (1765-1822) e Abel (1802-1829) provaram a impossibilidade de se obter uma fórmula geral que exprima as soluções das equações de grau superior a 4, em função dos seus coeficientes, por meio das operações aritméticas e de radicais.

Tem-se considerado o problema do cálculo das raízes de um polinómio sem contudo se ter abordado ainda a questão da existência dessas raízes. Note-se que qualquer polinómio de grau n tem quando muito n raízes distintas.
Como se estão apenas a estudar os polinómios com coeficientes reais e procurando-se zeros reais, torna-se útil a seguinte versão do ***Teorema Fundamental da Álgebra*[1]*:***

Teorema*: Todo o polinómio* $P(x)$ *com coeficientes reais pode ser representado como produto do coeficiente do termo de maior grau por polinómios do primeiro grau do tipo* $x-\alpha$ *(em que* α *toma os valores das raízes reais do polinómio) e polinómios de segundo grau do tipo* $x^2 + \mathbf{a}x + \mathbf{b}$ *sem raízes reais.*

Deste teorema resulta imediatamente que todo o polinómio com coeficientes reais e de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real e que qualquer polinómio de grau n tem, quando muito, n raízes distintas.

Retome-se então a questão da determinação das raízes de uma equação de grau n.
Demonstra-se que:

[1] Normalmente chama-se Teorema Fundamental da Álgebra ao seguinte teorema: *Todo o polinómio de coeficientes complexos e grau maior ou igual a 1 tem pelo menos um zero (que pode ser real ou complexo).* Este teorema é mais geral e tem um enunciado mais simples do que a versão apresentada no texto, mas como os complexos ainda não foram introduzidos torna-se necessário apresentar uma versão para polinómios reais.

Proposição: *Seja* ***n*** *um número natural e, para cada* $0 \leq i \leq n$, a_i *um número inteiro, sendo* $a_0 \neq 0$ *e* $a_n \neq 0$. *Seja* ***x*** *um número racional tal que*

$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0.$

Se $x = p/q$ *com* ***p*** *e* ***q*** *primos entre si, então* ***q*** *é divisor de* a_0 *e* ***p*** *é divisor de* a_n.

Assim, os zeros racionais da função $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 12$, caso existam, terão que estar no conjunto $\left\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}\right\}$. Calculando a imagem de cada um dos valores anteriores verifica-se que $x = -\frac{3}{2}$ e, procedendo ao abaixamento de grau usando, por exemplo, a ***regra de Ruffini*** obtem-se uma função polinomial do segundo grau que não tem raízes reais.

A regra de Ruffini dá um processo muito simples e eficiente para a formação do cociente e do resto na divisão algébrica da função polinomial $P(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x + p_n$ por $x - a$. Sendo o divisor $x - a$ do primeiro grau, o resto ***R*** é de grau zero (constante) e o divisor é uma função polinomial de grau ***n* –1**,

$$Q(x) = q_0 x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + \ldots + q_{n-1}, \text{ tendo-se } P(x) = (x-a)\, Q(x) + R.$$

Então,

$$p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = (x-a)\left(q_0 x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + \ldots + q_{n-1}\right) + R$$

de onde resulta que

$$q_0 = p_0,\ q_1 = aq_0 + p_1,\ q_2 = aq_1 + p_2, \ldots,\ q_{n-1} = aq_{n-2} + p_{n-1},\ R = aq_{n-1} + p_n.$$

Estas relações são denominadas fórmulas de Ruffini e determinam os coeficientes do cociente e do resto a partir da constante ***a*** e dos coeficientes do dividendo. Em particular note-se que $R = P(a)$, o que permite, usando um pequeno número de operações aritméticas, calcular $P(a)$. Este processo de calcular $P(a)$ é por vezes designado por "algoritmo de Horner" e corresponde a escrever $P(a) = p_0 a^n + \ldots + p_n$ na forma $P(a) = (((p_0 a + p_1)a + p_2)a + \ldots + p_{n-1})a + p_n$. Tem-se assim a seguinte regra:

Regra de Ruffini

Na divisão por $x-a$ *o primeiro coeficiente do cociente é igual ao primeiro coeficiente do dividendo e cada um dos outros se deduz do precedente multiplicando por* a *e juntando ao produto o coeficiente homólogo do dividendo; o resto obtem-se do mesmo modo como se fosse o último termo do cociente*.

Na prática usa-se o esquema

	p_0	p_1	p_2 .... p_n
a		$a\ q_0$	$a\ q_1$ .... $a\ q_n$
	$q_0 = p_0$	$q_1 = p_1 + a\ q_0$	$q_2 = p_2 + a\ q_1$ .... $R = p_n + a\ q_{n-1}$

Um processo possível para a determinação dos zeros de uma função polinomial consiste na utilização da calculadora gráfica. Põe-se a seguinte questão: <u>será que se consegue arranjar um rectângulo de visualização que contenha todos os zeros da função polinomial ?</u> A resposta a esta questão é afirmativa já que se demonstra que todos os zeros da função polinomial $f(x)=a_0x^n+a_xx^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ se encontram no intervalo $\left[-M-1, M+1\right]$ em que $M=$ máx $\left\{a_0, a_1, \ldots, a_n\right\}$.

Faz-se em seguida uma breve referência às funções polinomiais de grau $\boldsymbol{n} = \mathbf{1}$ (função afim) já estudada e analisam-se, com algum pormenor, as funções polinomiais de graus $n = 2, 3, 4$.

Função afim

Chama-se função afim a toda a função da forma $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$, em que $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ pertencem a $\mathfrak{R}$.

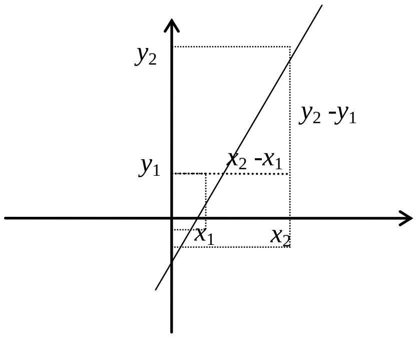
Observação: Alguns autores consideram função afim apenas as funções da forma $f(x) = ax + b$ com $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, o que garante sempre a existência de uma raiz.

O primeiro contacto com a função afim surge no estudo da proporcionalidade directa: se $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são duas grandezas directamente proporcionais, isto é, se $\boldsymbol{y = kx}$ com $\boldsymbol{k} \neq \mathbf{0}$, os pontos $(\boldsymbol{x, y})$ situam-se sobre a recta de equação $\boldsymbol{y = kx}$, que passa pela origem e cuja inclinação depende de $\boldsymbol{k}$.

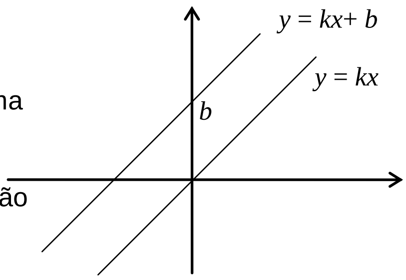
Se $(\boldsymbol{x_1, y_1})$ e $(\boldsymbol{x_2, y_2})$ são quaisquer dois pontos sobre a recta $\boldsymbol{y = kx}$, tem-se

$\boldsymbol{y_1 = kx_1}$ e $\boldsymbol{y_2 = kx_2}$ logo $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

A constante $\boldsymbol{k}$ é o *declive* da recta.



Uma recta qualquer pode sempre ser interpretada como imagem por meio de uma translação de uma recta passando pela origem :
a recta $\boldsymbol{y = kx + b}$ resulta de efectuar a translação associada ao vector (0,b) da recta $\boldsymbol{y = kx}$.

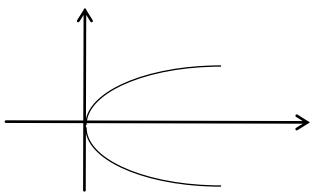


Função quadrática

Chama-se *função quadrática* a toda a função polinomial de grau $\boldsymbol{n} = \mathbf{2}$, isto é, da forma $\boldsymbol{f(x) = a\,x^2 + b\,x + c}$, em que $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são constantes e $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$.

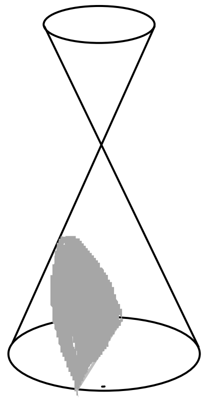
O gráfico de uma função quadrática é uma ***parábola*** de directriz paralela ao eixo das abcissas. O gráfico da função $\boldsymbol{f}$ é usualmente designada por parábola de equação $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$. Observe-se que qualquer parábola tem um eixo de simetria, mas só é gráfico de uma função par se o vértice está sobre o eixo das ordenadas.

Nem todas as parábolas são gráficos de funções : as parábolas de directriz paralela ao eixo das ordenadas não são funções.



Chama-se ***parábola***, em matemática, à curva resultante da secção de uma superfície cÓnica recta por um plano paralelo a uma sua geratriz.

Esta curva parece ter sido concebida por Menaechmus (350 A.C), mas a designação «parábola» é atribuída a Apollonius(220 A.C), a quem se deve o estudo de muitas das propriedades das parábolas e das secções cónicas em geral. As secções cónicas podem ser definidas como o lugar geométrico dos pontos do plano tais que a razão entre a sua distância a um ponto fixo, chamado ***foco***, e a uma recta fixa, chamada ***directriz***, É uma constante positiva ***e***, chamada ***excentricidade***.



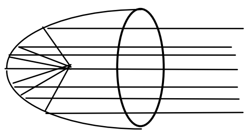
Se $e < 1$, a curva resultante da secção é uma elipse;

se $e > 1$, a curva resultante da secção é uma hipérbole; se $e = 1$, a curva resultante da secção é uma parábola. Assim, a parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes do foco e da directriz. A parábola com foco $F\ (p,\ 0)$ e directriz $x = -p$ tem por equação $y^2 = 4px$.

A parábola é provavelmente mais conhecida como a trajectória de um projéctil que é lançado com uma dada velocidade inicial, num meio que não oferece qualquer resistência, sujeito a uma aceleração constante. A resistência do ar, entre outras causas, faz com que um projéctil lançado nas condições anteriores percorra uma trajectória que não é uma parábola, mas que pode ser por ela aproximada, no caso de a resistência do ar não ser muito grande.

Demonstra-se que todas estas definições de parábola são equivalentes.

As ***superfícies parabólicas*** (isto É, gerada pela rotação de uma parábola em torno do seu eixo) são muito utilizadas em instrumentos ópticos.



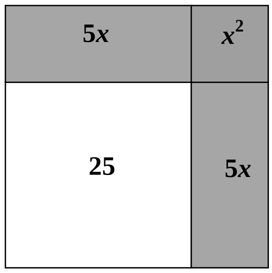
Com efeito, os espelhos parabólicos gozam da propriedade de transformarem um feixe de raios paralelos ao seu eixo num feixe formado por raios que passam pelo foco, e vice-versa.

A primeira transformação é aproveitada em certas objectivas de telescópio e antenas parabólicas. A transformação inversa é aproveitada nos projectores, em particular nos faróis dos automóveis, pois uma lâmpada colocada no foco de um espelho parabólico reflecte um feixe de raios paralelos ao eixo do espelho.

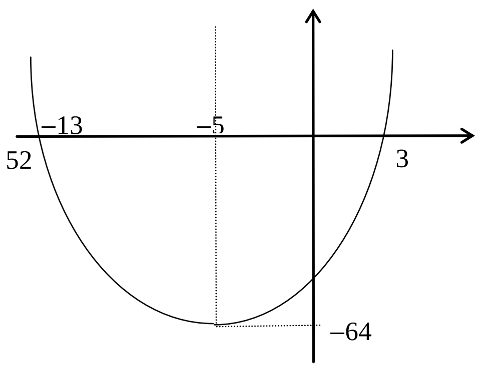
Outra aplicação das propriedades reflectoras das superfícies parabólicas encontra-se nas antenas parabólicas, por exemplo, para captar sinais de televisão muito fracos com origem em satélites.
A determinação dos zeros de uma função quadrática com recurso à fórmula resolvente É assunto já conhecido dos alunos do 10º ano.

Em 1795**,** Lagrange escreve:
ã Enquanto a Álgebra e a Geometria estiveram separadas, o seu progresso foi lento e o seu uso limitado; mas uma vez que estas ciências se uniram, elas deram-se suporte mútuo e juntas avançaram rapidamente a caminho da perfeição. Devemos a Descartes a aplicação da Álgebra à Geometria; isso tornou-se a chave das grandes descobertas em todos os campos da matemática. (*Oeuvres*, vol. 7, p. 271)

O exemplo seguinte evidencia a inter-ajuda entre a álgebra e a geometria, a propósito da resolução de uma equação do segundo grau sem utilizar a fórmula resolvente.
Problema: Determinar as raízes da equação $x^2 + 10x = 39$.
Veja-se como Al-Khowârizmó (780-850) determinou uma raiz desta equação:
Al-Khowârizmó desenhou um quadrado de lado $\boldsymbol{x}$
para representar $\boldsymbol{x^2}$ e dois rectângulos de lados **5** e
$\boldsymbol{x}$ para representar **10** $\boldsymbol{x}$.



De acordo com a equação $x^2 + 10x = 39$, a área a tracejado na figura é igual a **39**.
Então, a área total do quadrado É **39 + 25 = 64** e, consequentemente, $5 + x = 8$; uma solução da equação proposta é pois $\boldsymbol{x = 3}$. Qual será a outra raiz da equação?
As raízes da equação $x^2 + 10x = 39$ são os pontos de intersecção da parábola de equação $y = x^2 + 10x - 39$ com o eixo das abcissas. Atendendo a que $y = x^2 + 10x - 39 = x^2 + 10x + 25 - 64 = (x+5)^2 - 64$, o eixo da parábola é a recta $\boldsymbol{x = -5}$. Como uma das raízes é $\boldsymbol{x = 3}$, e sendo a parábola simétrica em relação ao seu eixo, a outra raiz É $\boldsymbol{x = -13}$.
Represente-se graficamente a



parábola $y = (x+5)^2 - 64$,
usando unidades convenientes
nos dois eixos (atenda-se a que
o vértice é o ponto **(– 5, – 64)**).

A questão seguinte constitui um problema interessante e simples, e pode ser desenvolvida na sala de aula como introdução ao estudo da funç„o quadrática.

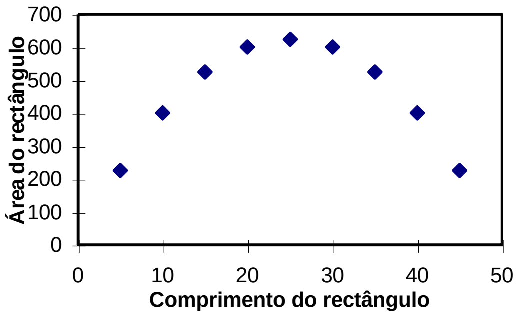
Qual o rectângulo de maior área que podes construir com um cordel de 1 metro?

A resolução pode-se processar por etapas:
construir uma tabela em que figurem, para algumas dimensões possíveis do rectângulo, as correspondentes áreas.

Comprimento	5	10	15	20	25	30	35	40	45
largura	45	40	35	30	25	20	15	10	5
área	225	400	525	600	625	600	525	400	225

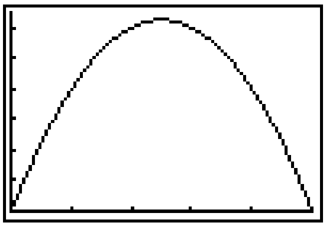
- fazer uma representação gráfica com papel e lápis
- traduzir o problema por uma expressão analítica
- introduzir na calculadora gráfica a expressão analítica da função
- recorrer por exemplo ao máximo da função ou às coordenadas do vértice da parábola e confirmar o resultado sugerido pela tabela: o quadrado é o rectângulo de área máxima.

Uma possível representação gráfica dos dados da tabela anterior pode ser gerada com uma folha de cálculo:

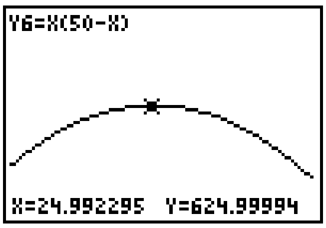


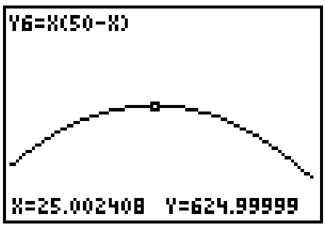
Usa-se, no que se segue, o centímetro como unidade de comprimento. Um rectângulo tem um comprimento ***c*** e uma largura ***l*.** Como o perímetro é sempre de 100 cm, sabe-se que **2*c* + 2*l* = 100**. A área é dada por ***A* = *cl***, pelo que o objectivo é maximizar a área com a restrição de o perímetro ser constante. Pode escrever-se a largura em função do comprimento, ***l* = 50** – ***c***, e então procura-se o máximo de ***A* = *c* (50** – ***c*)** .

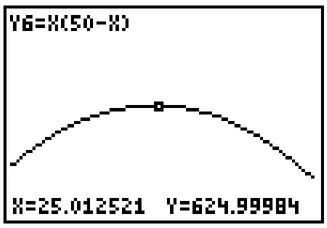
Na calculadora gráfica pretende-se obter o máximo entre 0 e 50 e, com base na tabela, podem enquadrar-se os valores de **y** entre 0 e 650.



Alguns ZOOM's sobre o vértice da parábola sugerem que o máximo é atingido em
***c* = 25:**







Para uma resolução algébrica do problema note-se que ***A* = 0** quando ***c* = 0** ou ***c* = 50**. O máximo da função é atingido na abcissa do vértice da parábola, que é ***c* = 25**. A área é então de **625** cm^2. O rectângulo de maior área com o perímetro de **1** metro é assim o quadrado com **25** cm de lado e área de **625** cm^2.

Apresentam-se em seguida algumas questões que poderão ser tratadas a propósito das funções quadráticas.

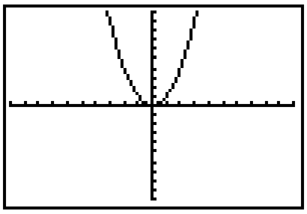
Considerem-se as funções quadráticas seguintes:

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 \qquad g(x) = x^2 - 2 \qquad h(x) = (x - 2)^2 \qquad j(x) = 2x^2}$$

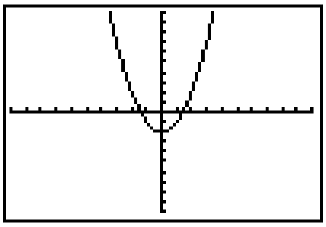
Com o auxílio de uma calculadora gráfica, esboçar os respectivos gráficos. Tomando como modelo o gráfico de $\boldsymbol{f}$, analisar o papel da constante 2 nos gráficos das restantes funções.

Resolução:

A representação gráfica da função $\boldsymbol{f}$ no rectângulo de visualização $[-10,10]\times[-10,10]$ dada pela calculadora é:

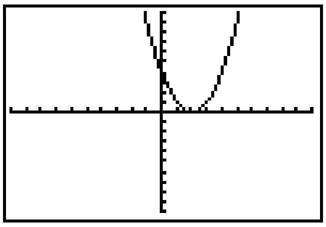


A representação gráfica da função $\boldsymbol{g}$ obtem-se deslocando verticalmente, para baixo, o gráfico de $\boldsymbol{f}$ de duas unidades:



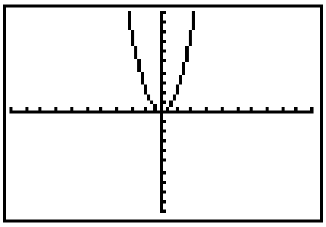
O vértice da parábola definida por $\boldsymbol{f}$ desloca-se para o ponto **(0, –2**).

O gráfico da função $\boldsymbol{h}$ obtem-se deslocando na horizontal, para a direita, o gráfico de $\boldsymbol{f}$ de duas unidades:



O vértice da parábola definida por $\boldsymbol{h}$ desloca-se para o ponto **(2, 0).**

O gráfico da função $\boldsymbol{j}$ tem o mesmo vértice que o da função $\boldsymbol{f}$, mas é mais ìalongadoî:



A análise destes gráficos evidencia que todas as funções da forma $f(x) = a(x - m)^2 + n$ com $a \neq 0$, tÎm como gráficos parábolas com vértices em ***(m, n)***. Caso a função quadrática tenha dois zeros distintos ***a*** e ***b***, o vértice situa-se sobre a recta vertical que passa pelo ponto médio do segmento que une os pontos ***(a, 0)*** e ***(b, 0)***.

… de considerar o estudo da família de funções da forma $f(x) = a(x - m)^2 + n$, começando pelo caso $m = n = 0$. … importante realçar a relação entre o sinal de ***a*** e o tipo de extremo que a função tem no vértice (se $a < 0$ a função tem o máximo no vértice e se $a > 0$ a função tem o mínimo no vértice).

A família de parábolas $y = ax^2$ fornece "gráficos tipo" para uma função quadrática, já que o gráfico de uma qualquer função quadrática se pode obter por uma translação de um dos "gráficos tipo" (ver actividade proposta na pág. ??).

Lançamento da bola

Uma bola é lançada verticalmente com uma velocidade inicial de 32m/s.

As funções $h(t) = -4{,}9\,t^2 + 32\,t + 2{,}1$ e $v(t) = -9{,}8\,t + 32$ podem ser utilizadas para prever respectivamente a altura da bola e a velocidade em cada instante.

a) Preenche a tabela seguinte:

Tempo (s)	0	1	2	3	4	5	6	7
Altura(m)								
Velocidade (m/s)								

b) Utilizando uma calculadora gráfica, representa graficamente as duas funções.

c) Qual é a altura máxima que a bola atinge? Em que instante? Qual é a velocidade nesse momento? Que valores toma a velocidade antes desse momento? E depois?

d) Qual é o domínio de cada uma das funções? E o contradomínio?

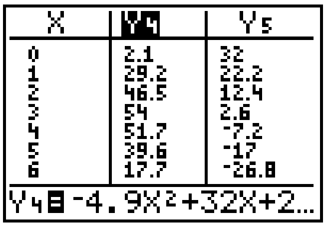
e) Qual é a velocidade da bola no momento em que chega ao solo? Como a determinas?

f) O gráfico da função que relaciona o tempo com a altura da bola é um gráfico simétrico. Assinala o eixo de simetria. Que implicações ou significado tem esta simetria no problema da realidade que estás a estudar?

adaptado de " Advanced Algebra Trough Data Exploration"

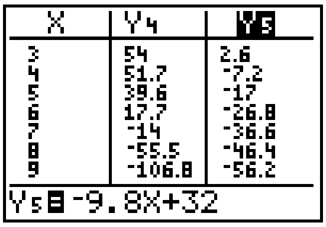
Resolução:

a) Para o preenchimento da tabela podem usar-se as possibilidades que a calculadora oferece para as tabelas.



X	Y4	Y5
0	2.1	32
1	29.2	22.2
2	46.5	12.4
3	54	2.6
4	51.7	-7.2
5	39.6	-17
6	17.7	-26.8

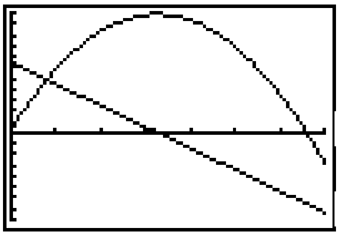
$Y_4 = -4.9X^2+32X+2\ldots$



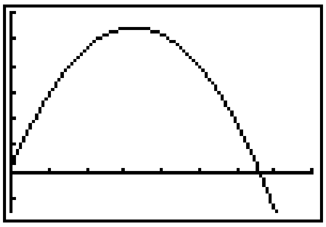
X	Y4	Y5
3	54	2.6
4	51.7	-7.2
5	39.6	-17
6	17.7	-26.8
7	-14	-36.6
8	-55.5	-46.4
9	-106.8	-56.2

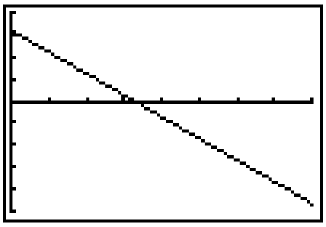
$Y_5 = -9.8X+32$

b) Da análise da tabela pode-se concluir que um rectângulo de visualização aceitável para a representação das funções é por exemplo $[0,7]\times[-40,55]$.



Se se quiser analisar os dois gráficos em separado, para ***h(t)*** um possível rectângulo de visualização é $[0, 8]\times[-15, 60]$ e para ***v(t)*** pode usar-se $[0, 8]\times[-50, 40]$, obtendo-se para ***h*** e ***v***, respectivamente, os seguintes gráficos:





c) Com base nos gráficos e tabelas anteriores, a altura máxima da bola é de aproximadamente **54** m, atingida entre os **3** s e os **4** s.

d) Para domínio das duas funções faz sentido considerar o tempo que decorre entre o lançamento da bola e a sua chegada ao chão. Antes e depois deste intervalo de tempo as funções consideradas não descrevem o movimento da bola.

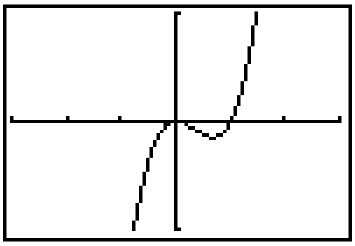
e) A velocidade é calculada conhecendo o instante de chegada ao solo (extremo superior do domínio), e usando a fórmula ou o gráfico.

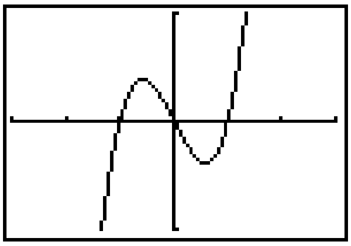
f) O tempo que a bola leva para chegar de uma determinada altura até à altura máxima é igual ao tempo que leva para descer desde a altura máxima até essa altura. Em particula a bola é lançada à altura de **2,1** m e leva tanto tempo a subir como leva a descer até voltar à altura de **2,1** m.

Funções cúbicas

Chama-se ***função cúbica*** a toda a função da forma ***f(x)= a x³ + b x² + c x + d***, em que ***a**, **b**, **c*** e ***d*** são constantes e ***a ≠ 0***.
Uma vez que se pressupõem, neste momento, apenas conceitos básicos sobre funções e seus gráficos, o estudo das funções cúbicas fica substancialmente limitado e poderá ser feito com recurso a exemplos. Observe-se que as funções cúbicas têm sempre um zero (porque são funções contínuas que quando o coeficiente do termo em x^3 é positivo, tendem para **+**∞ quando x tende para **+**∞ e tendem para **-**∞ quando x tende para **-**∞; quando o coeficiente do termo em x^3 é negativo, tendem para **+**∞ quando x tende para – ∞ e tendem para – ∞ quando x tende para + ∞), mas podem ter até três zeros distintos.

Analisem-se, por exemplo, os gráficos das funções $f(x)=x^2(x-1)$ e $g(x)=x(x^2-1)$; enquanto a primeira tem dois zeros distintos, a segunda tem três zeros distintos.
Com o auxílio de uma calculadora gráfica, obtêm-se as seguintes representações gráficas:





O conhecimento dos zeros de uma função polinomial de um determinado grau (em particular de uma função cúbica) e da repectiva multiplicidade não determinam univocamente essa função, mas sim uma família de funções. Por exemplo, a família de funções cúbicas que têm como zeros, $\boldsymbol{x_0 = 0{,}2}$, $\boldsymbol{x_1 = -1{,}05}$ e $\boldsymbol{x_3 = 3}$ é dada por

$$f(x) = a(x-0{,}2)(x+1{,}05)(x-3) \text{ com } a \in \Re$$

O problema da determinação exacta dos zeros de uma função cúbica é equivalente à determinação das raízes de uma equação do terceiro grau.

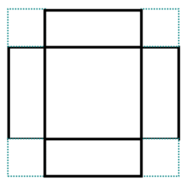
Nicolo Tartaglia (1499) e Scipione dal Ferro (1465-1526) encontraram um método para resolver a equação $x^3 + 6x = 20$ mas, com receio da competição, mantiveram o resultado obtido em segredo. Em 1530, Tartaglia escreve

ìEu descobri a regra geral, mas de momento quero guardá-la em segredo por vários motivosî (M. Cantor 1891, vol. II, p.485)

Sujeito a várias pressões e iludido por falsas promessas, Tartaglia revela a sua regra a Gerlamano Cardano (1501-1576) que a publica em 1545 na sua obra intitulada ìArs Magnaî.

O problema seguinte fornece um exemplo de uma função cúbica, e pode ser resolvido com o auxílio de uma calculadora gráfica:

Pretende-se construir uma caixa de um quadrado de cartão com 20 cm de lado, cortando nos cantos quadrados, conforme se ilustra na figura. Quais devem ser as dimensões da caixa, construida pelo processo descrito, de forma que ela encerre um volume máximo?



Resolução:

Supondo que se cortam quadrados de lados sucessivamente **1** cm, **2** cm, **3** cm, **4** cm, **5** cm, o lado da base da caixa vai tendo, sucessivamente, os valores **18** cm, **16** cm, **14** cm, **12** cm, **10** cm e as alturas **1**cm, **2** cm, **3** cm, **4** cm, **5** cm. Os volumes das caixas são então, sucessivamente, **324** cm^3, **512** cm^3 , **588** cm^3, **576**, cm^3, **500** cm^3.

Os pontos obtidos são manifestamente insuficientes para representar graficamente a função que traduz a variação do volume da caixa com o lado do quadrado retirado, mas a análise dos valores obtidos leva a concluir que o valor máximo do volume será obtido quando os lados dos quadrados a retirar estiverem entre **3** cm e **4** cm.

Como calcular com maior precisão o volume máximo ?

Designe-se por x o lado do quadrado que é retirado dos quatro cantos do cartão. O volume da caixa é dado, em função de x, por $V(x) = x(20 - 2x)(20 - 2x)$, que se pode escrever na forma $V(x) = 4x^3 - 80x^2 + 400x$; a função que traduz o volume da caixa em função da dimensão do lado dos quadrados retirados, é uma função cúbica. Com o auxílio de uma calculadora gráfica, e tendo em conta que o domínio da função em questão se reduz a $[0, 10]$, verifica-se que o valor máximo de V é, aproximadamente, **592** cm^3. A determinação exacta do volume máximo envolve o estudo dos extremos da função, tema que não faz parte do programa do 10∫ ano.

Com base nos valores determinados, começamos por traçar o gráfico da função $V(x)$ no rectângulo de visualização $[0, 10] \times [0, 600]$:

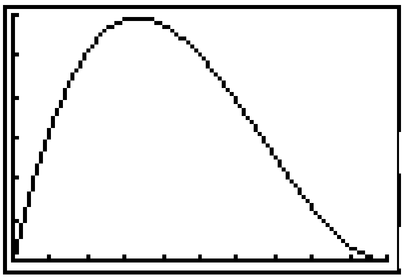


gráfico A

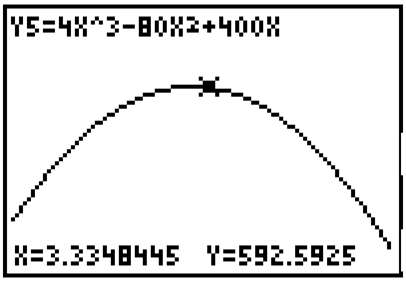


gráfico B

Usando ZOOM BOX e fazendo algumas ampliações sucessivas chegamos ao gráfico A.

Usando TRACE concluímos que o máximo é atingido em aproximadamente x = **3,33** cm sendo o volume máximo de cerca de **592,59** cm^3.

Funções quárticas

Chama-se *função quártica* a toda a função polinomial de grau $n = 4$, isto é, da forma $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, em que a, b, c, d e e são constantes e $a \neq 0$.

Conforme já foi referido quando se faz a abordagem da função cúbica, o estudo das funções quárticas por métodos elementares fica substancialmente limitado. Assim, são dados alguns exemplos, que podem ser explorados com o auxílio de uma calculadora gráfica.

As funções quárticas podem ter de nenhum a quatro zeros.

Seguem-se algumas questões simples envolvendo funções quárticas.

Seja f uma função definida por $f(x) = (x^2 - 4)^2$.

Resolver as questões seguintes, com o auxílio de uma calculadora gráfica, confrontando os resultados obtidos com um estudo algébrico da função :

a) Qual o contradomínio de f ?

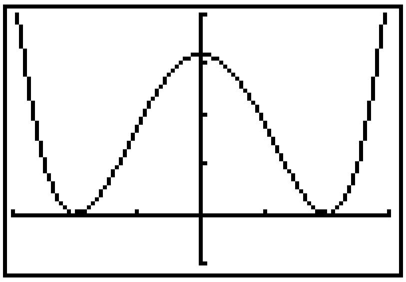
b) Será que a função restringida aos reais não negativos é crescente?

c) A função é mínima para $x = 2$?

Resolução:

A função a estudar constitui um caso simples de uma função quártica.

O gráfico obtido com o auxílio de uma calculadora gráfica no rectângulo $[-3, 3]\times[-1, 4]$ é:



a) Facilmente se reconhece que $f(x) \geq 0$ e que $f(x)$ se torna infinitamente grande para grandes valores de $|x|$; o contradomínio de f é pois $[0, +\infty[$.

b) Basta observar que $f(0) = 16$ e $f(2) = 0$ para concluir que a restrição da função aos reais não negativos não é uma função crescente.

c) A função é mínima para $x = 2$ e $x = -2$, já que $f(-2) = f(2) = 0$.

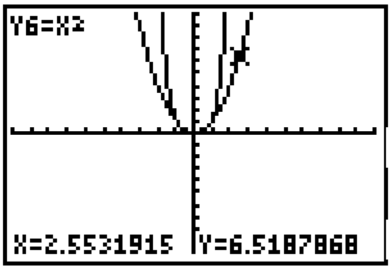
Sejam ***g(x)* = x^2** e ***h(x)* = x^4**. Determinar os valores de ***x*** para os quais se tem:

a) ***g(x)*** = ***h(x)*** **b)** ***g(x)* > *h(x)*** **c)** ***g(x)* < *h(x)***.

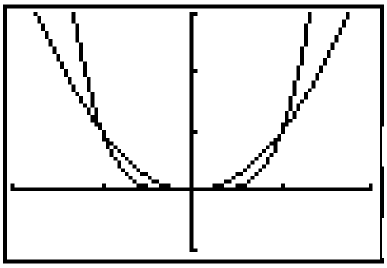
a) A resolução mais simples da equação ***g(x)* = *h(x)*** é algébrica:

$$g(x){=}h(x) \Leftrightarrow x^2 = x^4 \Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow \quad x=0 \quad ou \quad x=1 \quad ou \quad x=-1$$

b) e c) Começamos por traçar os gráficos das duas funções no intervalo $[-10,10]\times[-10,10]$ e identificamos as funções associadas a cada gráfico usando o TRACE e percorrendos os dois gráficos:



Podemos assim constatar que fora do intervalo $[-2, 2]$ os dois gráficos parecem não se intersectar e tem-se que ***h(x)* > *g(x)***. Para termos uma ideia do que se passa no intervalo $[-2, 2]$ passamos a usar o rectângulo de visualização $[-2, 2]\times[-1, 3]$:



Verificamos que entre –1 e 0 se tem ***g(x)* > *h(x)***, o mesmo se verificando entre 0 e 1. Concluímos assim que ***g(x)* > *h(x)*** em $]-1,0[\cup]0,1[$ e que ***g(x)* < *h(x)*** em $]-\infty, -1[\cup]1,+\infty[$.

Algebricamente podemos estudar a diferença ***h(x)*** – ***g(x)***. Os zeros desta função foram já determinados. Fora dos zeros, como se deduz da alínea a), esta diferença tem o sinal da função **1 – x^2**, confirmando os resultados obtidos.

ACTIVIDADES PARA A SALA DE AULA

Apresenta-se de seguida um conjunto de actividades comentadas e/ou resolvidas que podem ser utilizadas directamente na sala de aula com os alunos ou podem servir de modelo ou inspiração para outras actividades. Por uma questão de facilidade de leitura e articulação com o programa mantivemos os títulos do anexo I do programa. No entanto consideramos que cabe ao professor a escolha e organização das actividades a desenvolver com os seus alunos, não devendo ser por isso entendida esta organização com uma proposta de sequência.

Definição de função, gráfico e representação gráfica de uma função

Os alunos que agora iniciam o 10º ano já fizeram uma primeira abordagem ao conceito de função ligada a problemas de proporcionalidade directa no 8º ano e de proporcionalidade inversa durante o 9º ano. Voltando a retomar o tema, para o ir aprofundar durante os três anos do secundário, deve ser recordado o que já estudaram iniciando-o também agora com situações ligadas à realidade. Apesar do programa considerar que a função afim é um pré-requisito para a leccionação deste tema no 10º ano, talvez seja indicado iniciar com uma situação que possa ser descrita por uma função afim. O estudo da função afim não deverá demorar muito tempo visto os alunos terem acabado de fazer o estudo da recta no capítulo anterior.

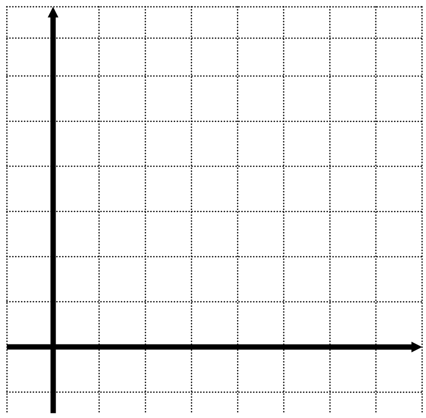
Uma actividade introdutória possível é a que se apresenta na página seguinte, “a chama da vela de aniversário”.

A chama da vela de aniversário

Fixa uma vela, deitando algumas gotas de cera de outra vela num prato e prepara um relógio que te permita medir intervalos de 20 segundos. Acende a vela e mede-a de 20 em 20 segundos, apagando e acendendo de novo. Regista na tabela o tempo em segundos e o comprimento da vela em centímetros. Completa a tabela calculando a porção de vela ardida (desde o início) no fim de cada período de 20 segundos.

Representa graficamente a função que relaciona o tempo (**x**) com a quantidade de vela ardida ao fim desse tempo (**y**).

Tempo segundos **(x)**	**comprimento da vela** centímetros	**vela ardida** centímetros **(y)**
0		
20		
40		

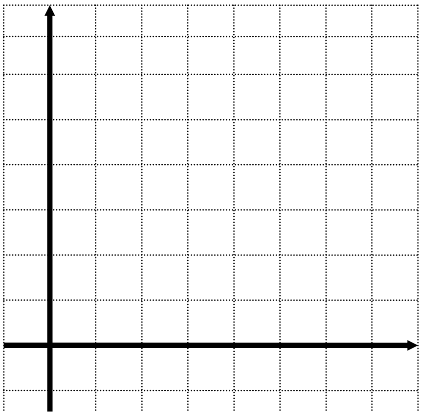


- Ao fim de 3 minutos que porção de vela terá ardido?
- Quanto tempo pode permanecer esta vela acesa?
- Traça uma recta que se ajuste ao conjunto de pontos marcados.
- Indica uma equação desta recta

Comentário

É uma actividade experimental, simples e motivadora. O material necessário para a realização desta experiência (velas de aniversário das mais pequenas, cronómetros ou relógios com contagem de segundos) é de fácil acesso. As velas pequenas de aniversário ardem de forma bastante regular, cerca de 2mm em cada 20 segundos. Os dados que a seguir se apresentam foram recolhidos por um grupo de alunos numa turma do 10º ano onde esta experiência foi já realizada:

Tempo segundos **(x)**	**comprimento da vela** centímetros	**vela ardida** centímetros **(y)**
0		
20		
40		



A discussão da situação com toda a turma permitiu abordar o conceito de função, de domínio, de contradomínio, diversas formas de definir uma função (tabela, gráfico, expressão analítica) e foi ainda uma oportunidade para apresentar a função como modelo de uma situação concreta descrevendo-a e fazendo previsões.

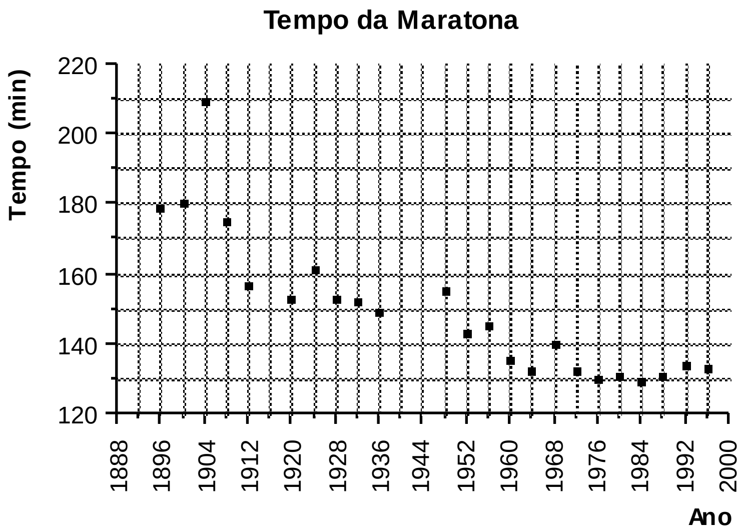
Estudo intuitivo tanto a partir de um gráfico concreto como usando a calculadora gráfica de propriedades das funções e dos seus gráficos

As primeiras três actividades que se apresentam: “Jogos Olímpicos”, “Temperatura ambiente” e “O Baile” permitem o estudo das funções ligando-o a realidades conhecidas dos alunos. Esta ligação deverá ser feita ao longo de todo o ciclo de modo a que os alunos em casos concretos percebam qual o significado das situações que vão estudando. Com elas é possível sensibilizar para a utilização crescente da Matemática na vida quotidiana e para o seu poder de representar e comunicar ideias de forma concisa.

Este tipo de questões permite mostrar a enorme quantidade de informação que os gráficos nos podem fornecer, através de leitura directa ou do levantamento de questões posteriormente resolvidas recorrendo a outras fontes.

Jogos Olímpicos

O gráfico que se segue dá-nos informação sobre os tempos gastos (arredondados aos minutos) na maratona dos Jogos Olímpicos da era moderna. Os Jogos Olímpicos da era moderna tiveram início em 1896.



- De quantos em quantos anos é que se realizam os Jogos Olímpicos?
- O que aconteceu em 1916? E em 1940? E em 1944?
- Em que anos o tempo gasto na prova foi de 2 horas e 20 minutos?
- Qual é o actual record olímpico da Maratona?
- Ao longo dos anos como foram evoluindo os tempos gastos nas provas desta modalidade?

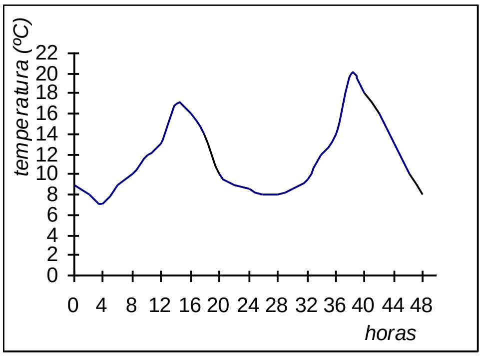
Comentário

Nesta actividade as questões colocadas conduzem-nos até às Guerras Mundiais. Os jogos de 1916, previstos para Berlim, não se realizaram devido à I Guerra e os de 1940 e 1944 foram também cancelados em resultado da II Guerra Mundial. Os alunos podem recolher informação sobre os Jogos Olímpicos, por exemplo, em *Jogos Olímpicos - Um Século de Glória* (Público, 1996) ou noutra fonte disponível na Biblioteca da escola e perceber como um simples gráfico de resultados da maratona os pode conduzir a uma viagem pela História.

É importante, nesta como nas outras actividades que se seguem, solicitar aos alunos que façam um texto descrevendo em linguagem corrente a informação contida no gráfico. Neste exemplo, a linguagem corrente pode ser substituída com alguma vantagem por uma tabela que relaciona o tempo gasto (na maratona) com o ano em que tal ocorreu.

Temperatura Ambiente

No gráfico estão registadas as temperaturas ambiente durante um período de 48 horas de dois dias de Outono.



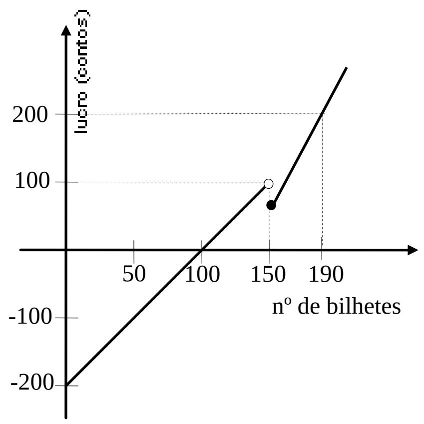
- Que variáveis estão relacionadas através desta função?
- Qual é o domínio? E o contradomínio?
- A que horas se fez sentir a temperatura máxima em cada um dos dias? E a mínima?
- Qual foi a temperatura máxima durante este período?
- Em que altura do dia subiu mais rapidamente a temperatura? Porque terá sido?
- E quando desceu mais bruscamente?
- Elabora um pequeno relatório que inclua as principais características desta função e o seu significado relativamente à situação da realidade que está a ser estudada.

Comentário

A situação das temperaturas, apesar de familiar, pode trazer algumas surpresas nomeadamente na relação da velocidade de aumento da temperatura com o nascer ou o pôr do sol. No caso de haver na escola um CBL [1](com sensor de temperatura) será interessante que possam ser os alunos a recolher estes dados para posterior tratamento com a calculadora. Esta situação facilita a abordagem dos conceitos de máximo e mínimo de uma função.

O baile

Os alunos do 10º ano decidiram organizar um baile na escola.
A comissão constituída para o organizar, depois de várias investigações, apresentou aos colegas o seguinte gráfico:



- Quantos bilhetes terão que vender para não terem prejuízo?
- Os lucros do baile destinam-se à organização de uma viagem que está orçamentada em 200 contos. Qual o número mínimo de bilhetes que será necessário vender para cobrir o custo da viagem?
- Qual é o prejuízo no caso de não se vender nenhum bilhete?
- Qual é a situação mais vantajosa, vender 145 bilhetes ou 150? Que explicação podes encontrar para esta situação?

Comentário

No caso do "Baile", as explicações encontradas pelos alunos para as questões colocadas podem ser diversas, por exemplo: o prejuízo inicial pode ser provocado por um pagamento já realizado a um conjunto musical quando foi decidido anular o baile e a

[1] CBL - Aparelho que permite a recolha de dados através de sensores (temperatura, luminosidade, ph, etc.).

descontinuidade pode ser justificada pela necessidade de reforçar a segurança no caso do número de pessoas ser superior a 150 ou pelo tipo de sala e respectivo aluguer, etc. Esta situação permite uma abordagem intuitiva do conceito de continuidade de uma função. Pode ser pedida aos alunos a expressão analítica da função, assunto já tratado em geometria. Se considerarmos que o número de bilhetes não ultrapassa os 250 a função poderá ser definida assim:

$$l(n) = \begin{cases} 2n - 200, & 0 \leq n < 150 \\ 3n - 370, & 150 \leq n \leq 250 \end{cases}$$

Apesar do número de bilhetes ser sempre um número inteiro é habitual em muitas situações da realidade os gráficos serem apresentados com linhas contínuas em vez de pontos. Esta questão pode ser discutida com os alunos e verificado que o domínio é um conjunto de números inteiros $\{0,1,2,3, \ldots 250\}$.

Este tipo de actividades bem como outras já apresentadas no capítulo anterior como sejam "o comboio" ou "as funções descrevem fenómenos" possibilitam a discussão e a comunicação, um dos aspectos referidos no programa como de grande importância (pág. 13). Com elas os alunos podem aperceber-se do poder das funções na descrição de situações da realidade e também que uma mesma função (ou o mesmo gráfico) pode representar situações diversas.

Questões de leitura de gráficos

Um conjunto de situações que em geral levanta dificuldades é o que diz respeito a viagens e distâncias a um ponto fixo. Num enunciado do tipo: "O gráfico abaixo relaciona a distância a que um distribuidor de publicidade está do supermercado durante um dia. Indica quanto tempo esteve parado", não se poderá responder exactamente a esta situação pois poderá acontecer que em determinada altura ele circule à volta do supermercado sensivelmente à mesma distância, aparecendo portanto segmentos horizontais que não correspondem a paragens.

Na disciplina de Física, em geral, o que se costuma pedir é o gráfico de posição e não o de distância a um ponto fixo por isso esta questão não se coloca.

Os dados podem posteriormente ser tratados com uma calculadora gráfica.

Os gráficos em que se consideram “distâncias a”, por exemplo distância a casa, também não nos informam sobre o espaço percorrido, dado que a distância entre dois pontos é dada pela medida do comprimento do segmento que une esses pontos e o trajecto (espaço percorrido) dificilmente será em linha recta.

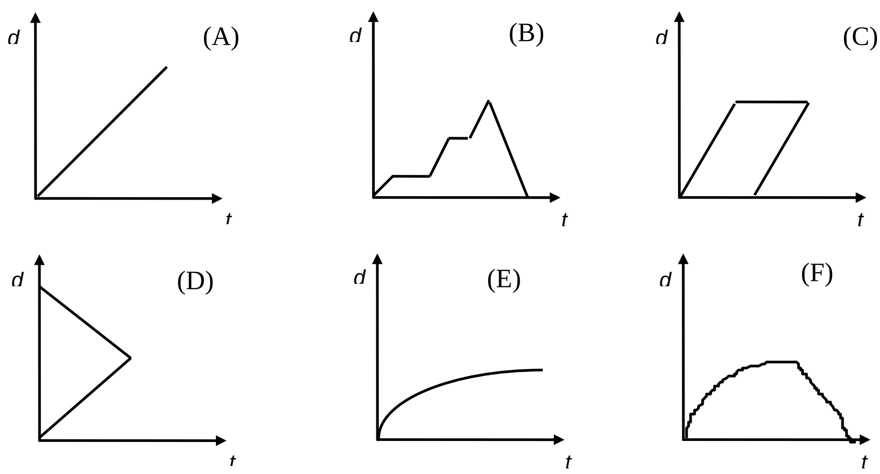
Analisemos as seguintes situações:

Viagens

Quais dos gráficos que se seguem podem representar viagens?

Em todos oa gráficos *d* é a distância relativa um ponto de partida e *t* o tempo.

Fundamenta a tua resposta.



<u>Comentário</u>

Os gráficos (C) e (D) não podem representar viagens todos os outros podem.

Partimos do princípio que estamos a considerar, em cada caso, a distância a casa em função do tempo, trata-se por isso de uma correspondência unívoca.

Distância a casa

Faz corresponder a cada situação o gráfico que melhor se lhe ajusta. Todos os gráficos representam a distância a casa.

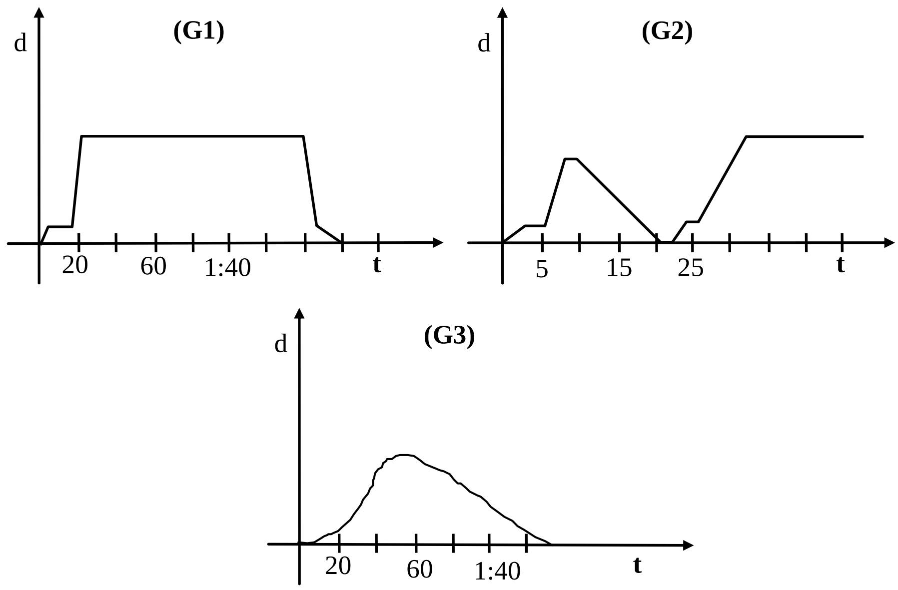
SITUAÇÕES

(S1) O António resolveu ir correr durante duas horas para se preparar para o corta-mato da escola. Saiu de casa e regressou para tomar banho.

(S2) No dia seguinte o António voltou a ir treinar, mas desta vez para um circuito de atletismo. Saiu de casa, apanhou o autocarro até ao local onde iria treinar, correu durante duas horas e voltou a casa de autocarro.

(S3) No terceiro dia o António resolveu voltar a ir para o estádio de autocarro. A meio da viagem reparou que se tinha esquecido do equipamento para treinar. Saiu do autocarro, regresou a casa a pé, voltou a apanhar um autocarro e lá foi ele para o seu treino de duas horas.

GRÁFICOS



<u>Comentário</u>

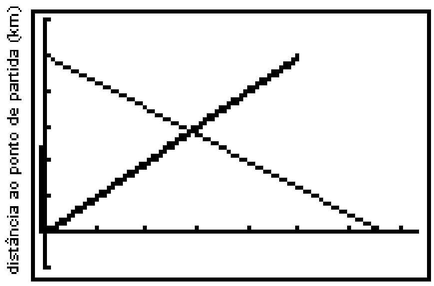
Solução: (S1) $\rightarrow$ (G3); (S2)$\rightarrow$ (G1); (S3)$\rightarrow$(G2)

Nesta última situação os gráficos não representam o percurso feito pelo António, mas sim a distância em que em cada momento ele se encontrava de casa. Os segmentos horizontais podem não representar momentos de paragem na corrida, mas sim momentos em que o António se encontrava a correr sensivelmente à mesma distância de sua casa.

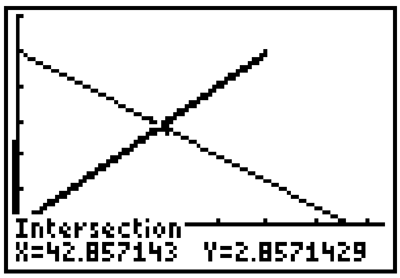
Horário de visita ao Castelo

O Fernando e a irmã vivem à beira de uma estrada que conduz a um castelo situado a 5 km de distância. Ambos trabalham no Castelo, ela no período da manhã e ele no período da tarde. Cruzam-se sempre no caminho para que ela lhe possa entregar a chave do Castelo. Ele sai da casa às 12 horas e demora 15 minutos a fazer cada quilómetro. À mesma hora a sua irmã sai do Castelo e dirige-se para casa demorando 20 minutos para percorrer cada quilómetro.
A que horas se cruzam?
Quando se cruzam, a que distância está o Fernando do Castelo?
Qual te parece ser o horário de visita do Castelo?

<u>**Comentário**</u>



Este é um problema que é interessante que seja resolvido graficamente. É uma oportunidade para voltar a fazer a ligação ao estudo da recta, chamando a atenção para que muitos dos problemas de tráfego (comboios, tempos de abertura de semáforos, fluxos de trânsito) são resolvidos recorrendo ao processo gráfico.



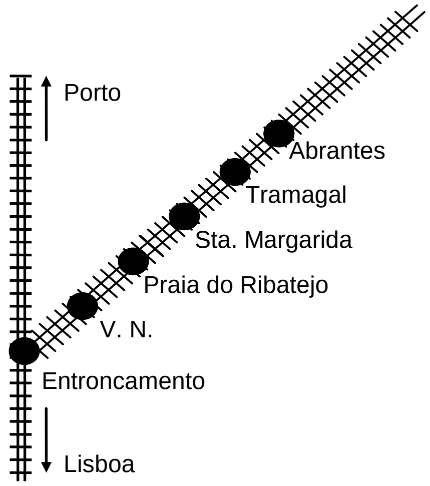
A intersecção das duas rectas pode ser obtida utilizando a calculadora, mas será de todo o interesse que a intersecção também seja obtida recorrendo à resolução analítica do sistema.

Outros problemas que podem ser resolvidos graficamente são os seguintes:

As cidades do Porto e Lisboa estão a **300km** de distância e são servidas por uma linha de caminho de ferro. À mesma hora partem dois comboios directos (não param em nenhuma estação), um de Lisboa com destino ao Porto e outro do Porto com destino a Lisboa. O comboio que se dirige para Lisboa tem uma velocidade constante de **100** km/h. O que se dirige para o Porto tem uma velocidade constante de **80** hm/h. Quanto tempo depois de partirem é que os comboios se encontram?

Entroncamento e **Abrantes** são duas cidades que estão a **40** km de distância e são servidas por uma linha de caminho de ferro, a linha do leste. Um comboio que vai com velocidade constante de **100** km/h passa no Entroncamento no mesmo instante em que um outro, que vai à velocidade de **80** km/h passa em Abrantes. **Ambos vão no sentido Entroncamento - Abrantes**.

Quanto tempo vão levar a encontrar-se desde que cada um passou no Entroncamento e Abrantes respectivamente?

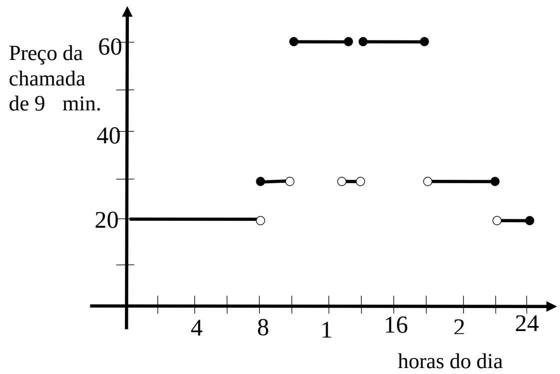


<u>Comentário</u>

O processo de resolução é o mesmo utilizado anteriormente no problema do castelo; no entanto é preciso frisar muito bem que no caso do segundo problema os comboios vão no mesmo sentido.

A chamada telefónica

O custo de uma chamada telefónica varia com a distância para onde se deseja telefonar e com as horas do dia a que essa ligação é feita. Suponhamos que o preço de cada impulso é de 20$00 (preço do impulso de um posto público) e que o tempo que demora este telefonema é de 9 minutos.



O gráfico acima traduz o preço da chamada em função das horas do dia.
Descreve a forma como posso calcular o preço da chamada de 9 minutos em função das horas do dia. Esta função é contínua?

<u>Comentário</u>

Através da análise do gráfico poderemos construir a tabela que nos dá a relação preço/hora do dia de uma chamada telefónica local com a duração de 9 minutos, realizada de um posto público:

Horas do dia	$0 \leq h < 8$	$8 \leq h < 10$	$10 \leq h \leq 13$	$13 < h < 14$	$14 \leq h \leq 18$	$18 < h \leq 22$	$22 < h \leq 24$
Custo de 9 m (em escudos)	20	30	60	30	60	30	20

A partir destes dados podemos concluir que em função das horas do dia os impulsos têm durações de 9, 6 e 3 minutos (ver tabela do problema seguinte).

Neste problema a distância não é considerada. No entanto é importante que os alunos se habituem em cada caso a seleccionar os dados relevantes para a resolução do problema.

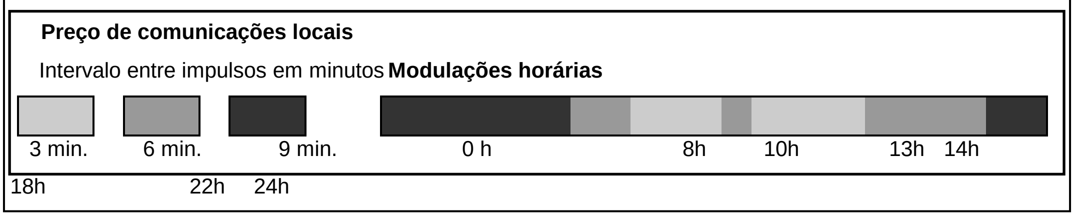
Esta função não é contínua no seu domínio.
Um aspecto interessante será reparar que nos pontos de descontinuidade o critério utilizado não é sempre o mesmo, beneficiando a empresa de comunicações. Por exemplo uma chamada que se inicie exactamente às 10 horas custará 60$00 por impulso, mas uma que tem início às 18 horas custará também 60$00 quando deveria custar 30$00 se fosse seguido o mesmo critério.

Os alunos podem ser incentivados a descobrir outras funções do mesmo tipo existentes no seu dia a dia (Exemplo: preço de envio de uma carta em função de peso; preço do transporte de mercadoria em função do volume ocupado; preço de um produto em promoção "leve 3 pague dois" em função do número de unidades compradas; custo do do estacionamento de um automóvel, em diveros parques, em função do tempo.

Os custos das chamadas telefónicas deverão ser actualizados na altura em que se realizar esta actividade com os alunos.

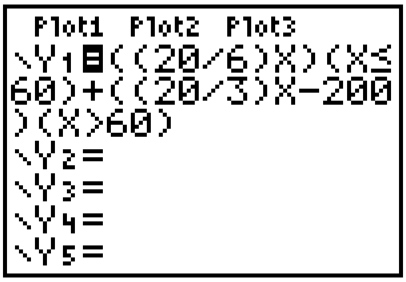
Ainda um problema de telefones

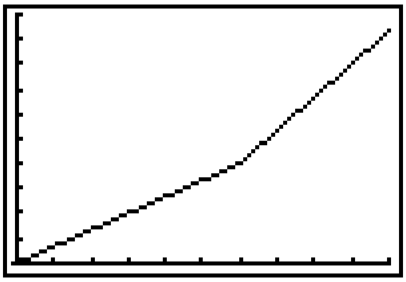
Depois de consultares a tabela faz o gráfico de uma função que relaciona o custo de uma chamada telefónica iniciada às 13 horas, em função do tempo que demora. Num posto público o custo de cada impulso é 20$00.



Comentário

É uma boa oportunidade para se chamar a atenção do crescimento mais rápido ou mais lento que uma função pode ter em partes diferentes do seu domínio. Esta função ao contrário da anterior é contínua e pode ter a representação gráfica que se segue desde que a chamada não se prolongue para além das 18h.





A expressão ((20/6) x) (x ≤ 60) + ((20/3)x – 200)) (x > 60) tal como é introduzida na calculadora, utilizando o sinal + entre os dois ramos corresponde à seguinte função:

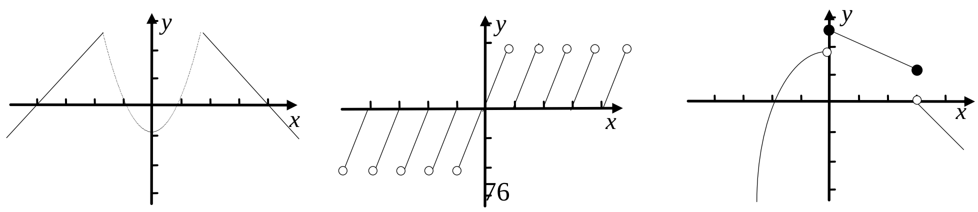
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{20}{6}x, & x \leq 60 \\ \dfrac{20}{3}x - 200, & x > 60 \end{cases}$$

Para a calculadora a expressão x ≤ 60 toma o valor 1 e para x > 60 assume o valor 0.

Observar gráficos

Observa os gráficos das funções que se seguem e indica para cada uma delas

- domínio
- contradomínio
- zeros
- os intervalos em que a função é positiva
- os intervalos em que a função é negativa



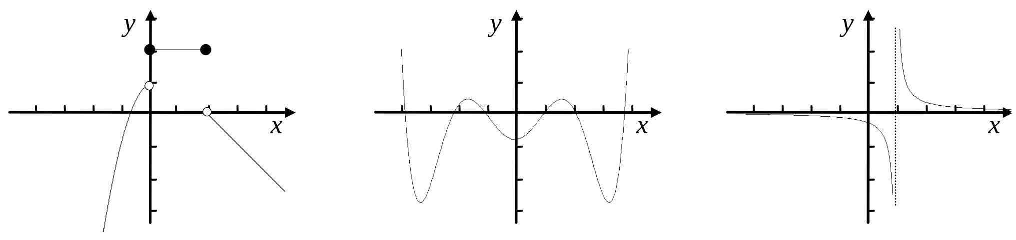
Comentário

Alguns dos gráficos apresentados foram obtidos através de uma calculadora gráfica. No caso de serem apresentados aos alunos gráficos deste tipo, que nem sempre apresentam uma leitura única, é de prever que eles possam dar respostas diferentes embora coerentes. Se nesta situação, no terceiro gráfico, o aluno indicar como zero da função -2, deverá dizer que a função é negativa em $]-\infty,-2[$, mas se indicar como zero $-1,8$ então o intervalo onde a função é negativa será em $]-\infty, -1,8[$. O mesmo procedimento deve ser observado na parte positiva do domínio.

Observar mais gráficos

Observa os gráficos das funções que se seguem e indica para cada uma delas

- domínio
- contradomínio
- zeros
- intervalos em que a função é crescente
- intervalos em que a função é decrescente
- intervalos em que a função é constante



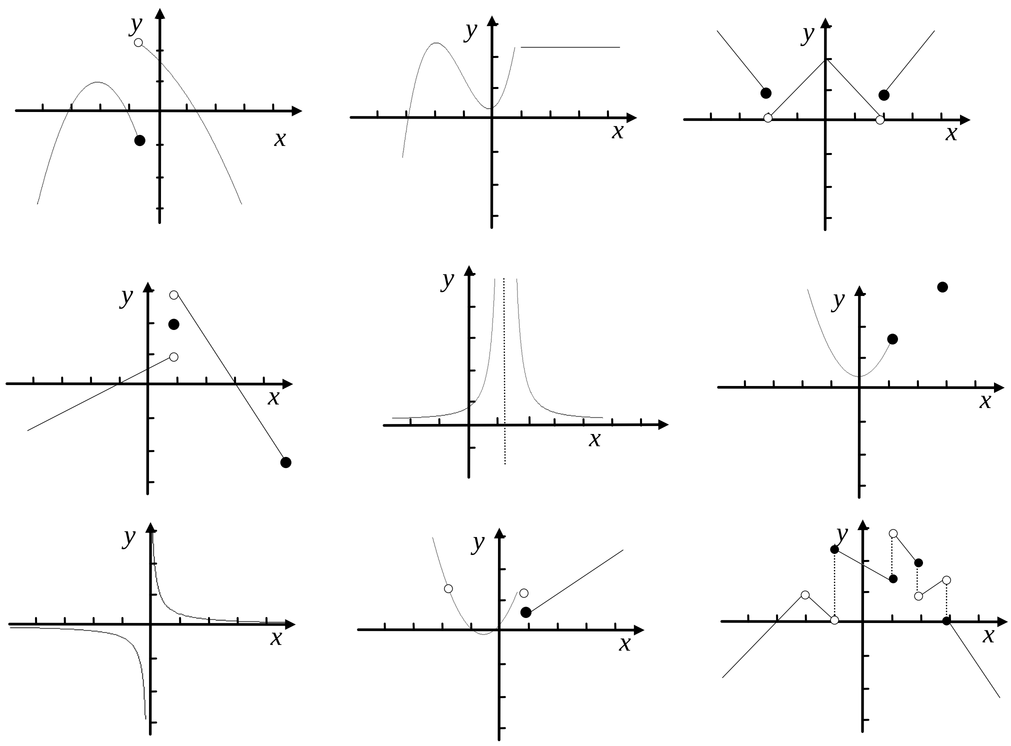
Comentário

As respostas apresentadas pelos alunos a esta questão variam com a definição utilizada de crescimento e decrescimento de uma função. Por exemplo no primeiro caso se utilizarmos a definição de crescimento e decrescimento em sentido estrito a função é crescente em $]-\infty, 0[$, constante em $[0, 2]$ e decrescente em $]2, +\infty[$; se utilizarmos a definição em sentido lato a função é crescente em $]-\infty, 2]$ e decrescente em $[0, +\infty[$.

O importante é que o aluno perceba e responda às questões de forma coerente.

Observa os gráficos das funções que se seguem e indica:

- Os extremos relativos e absolutos, caso existam.
- Qual o comportamento da função quando **x** tende para **+** ∞ ? E para **-** ∞ ?
- Quais destas funções não são contínuas e quais os pontos de descontinuidade.
- Como é o crescimento ou decrescimento de cada uma das funções? Para uma mesma função dá exemplo de crescimentos diferentes. Dá exemplos de crescimentos do mesmo tipo.



Comentário

É de todo o interesse que seja feita em primeiro lugar uma abordagem gráfica sobre aspectos relevantes das funções. O programa do 10º ano prevê um estudo intuitivo das propriedades das funções a partir de gráficos produzidos ou não por uma calculadora gráfica (pág. 20). Algumas destas propriedades só serão mesmo tratadas do ponto de vista gráfico como é o caso dos extremos, continuidade e monotonia. À medida que forem estudadas funções através das suas expressões analíticas vão-se relacionando as informações por elas fornecidas com as suas representações gráficas.

1. Faz o esboço do gráfico de uma função que satisfaça as seguintes condições:

a) domínio: IR; contradomínio: $]5, +\infty[$

b) domínio: $[0, +\infty[$; contradomínio: $]-\infty, 0[$

c) crescente em $]-\infty, 1[$; f(2) =2; contradomínio: $]-\infty, 3[$

d) positiva em $]-3, 7[$; f(0) =2; contradomínio: $]-\infty, 3[$

e) tenda para infinito quando x se aproxima de 4; se aproxime de - 2 quando x toma valores muito grandes; seja descontínua para $x = 7$.

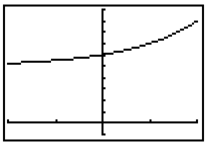
2. Junta-te com um colega. Escolhe uma das representações gráficas que fizeste e tenta transmitir-lhe, oralmente, o gráfico que escolheste de modo que ele consiga registar um gráfico semelhante ao teu.

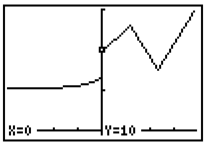
3. Compara os outros gráficos com os do teu colega. Todos os gráficos estão de acordo com as condições exigidas?

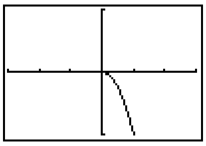
Comentário

Com este tipo de exercícios os alunos vão desenvolvendo a comunicação, vão sendo confrontados com respostas diferentes para um mesmo enunciado e assim confirmando o facto de que muitas vezes existem várias soluções possíveis. É também muito importante que os alunos aprendam a dar exemplos de entidades matemáticas que respondam a condições impostas.

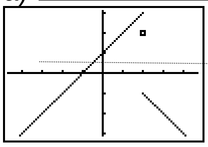
Exemplos de soluções possíveis:

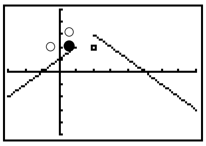
a) 

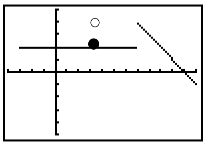


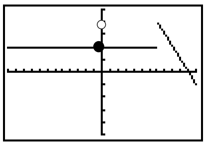
b) 

c)

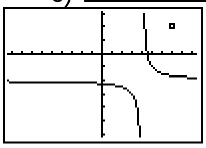


c) 

d) 



e)



Traçar gráficos com a calculadora

Utiliza a calculadora gráfica para estudar as funções seguintes:

a) $y = x$ b) $y = x^2$ c) $y = x^3$ d) $y = x^4$

e) $y = \sqrt{x}$ f) $y = \dfrac{1}{x}$ g) $y = \dfrac{1}{x^2}$ h) $y = |x|$

i) $y = \text{int}(x)$ j) $y = \dfrac{3}{x-2}$

Para cada uma das funções regista:

- o gráfico
- domínio e contradomínio
- intervalos de monotonia
- extremos
- continuidade
- simetrias relativamente à origem e ao eixo dos yy
- o que acontece quando x tende para infinito ($-\infty$ ou $+\infty$)
- o que acontece na proximidade dos pontos que não pertencem ao domínio.

Comentário

Com esta actividade os alunos têm oportunidade de explorar um conjunto diversificado de gráficos de funções, de observar as suas características e de as relacionar com as expressões analíticas correspondentes. Tal como se referiu na página 33 é indispensável explicar aos alunos que a recta vertical que aparece na calculadora não faz parte do gráfico da função definida por $y = \dfrac{3}{x-2}$.

Relativamente à função $\boldsymbol{y = \text{int}(x)}$ que designamos normalmente por função característica, ver as considerações já feitas na página 33.

Simetrias

Utiliza a calculadora para representar o gráfico da cada uma das funções indicadas.

$y_1 = x$	$y_2 = 2x$	$y_3 = x + 2$	$y_4 = x^2$
$y_5 = -2x^2$	$y_6 = (x - 3)^2$	$y_7 = 0.5x^2 - 3$	$y_8 = x^3$
$y_9 = 4x^3$	$y_{10} = (x - 3)^3$	$y_{11} = x^3 + 1$	$y_{12} = x^4$

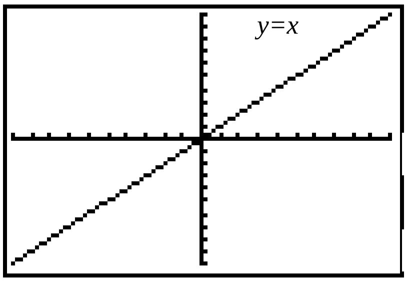
Para cada uma das funções regista simetrias encontradas em relação:

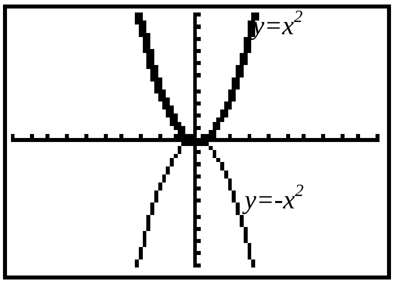
- ao eixo das ordenadas
- à origem do referêncial
- a uma outra recta.

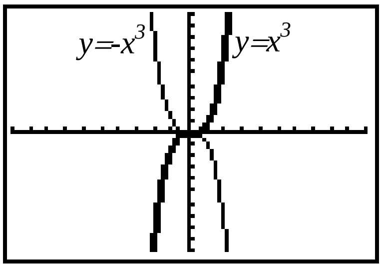
Dá exemplos de outras funções que tenham eixos de simetria ou que sejam simétricas relativamente à origem do referencial.

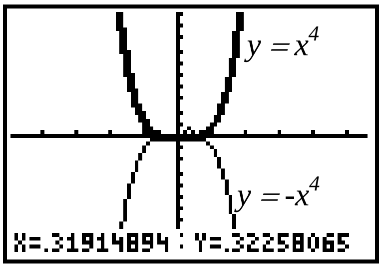
Comentário

Esta questão permite abordar as simetrias relativamente à origem ($y = x$, $y = 2x$, $y = x^3$ e $y = 4x^3$) e relativamente ao eixo dos yy ($y = x^2$, $y = -2x^2$, $y = 0,5\,x^2 - 3$ e $y = x^4$) ou seja as funções ímpares e pares. Permite ainda tratar o caso de funções simétricas relativamente a um eixo diferente dos eixos coordenados ($y = (x - 3)^2$ tem como eixo de simetria a recta $x = 3$) e que não são pares nem ímpares.

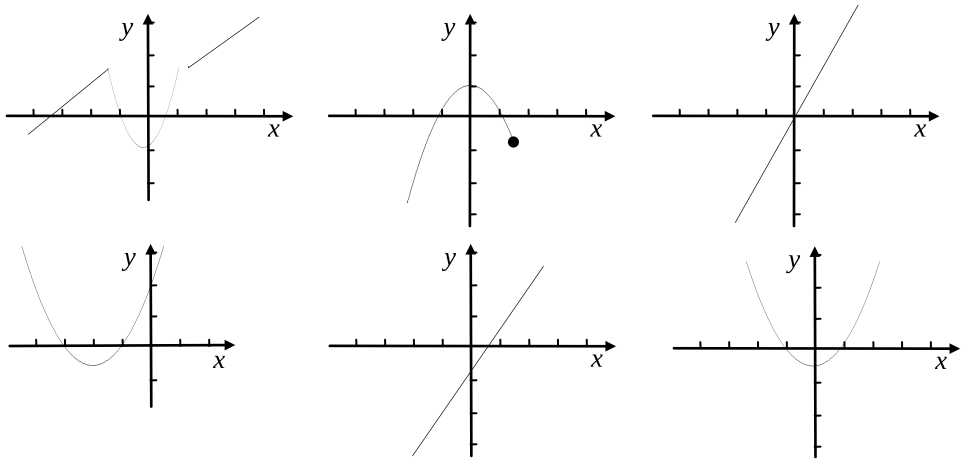




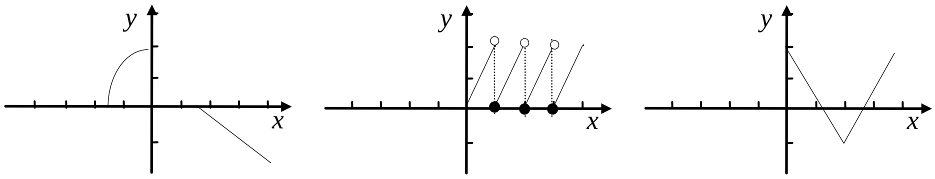




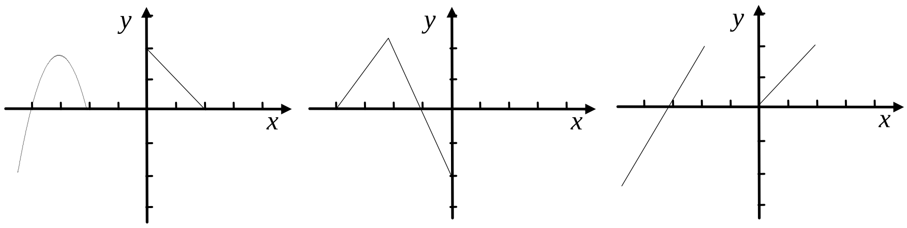
Observa os gráficos das funções que se seguem e indica quais são as funções pares e quais as ímpares (algumas destas funções não são pares nem ímpares).



Em cada um dos referenciais que se seguem está representada uma parte do gráfico de uma função que tem por domínio **R**. Em cada caso completa o gráfico da função sabendo que todas as funções são pares.



Em cada um dos referenciais que se seguem está representada uma parte do gráfico de uma função que tem por domínio **R**. Em cada caso completa o gráfico da função sabendo que todas as funções são ímpares.



Comentário

Os exercícios de gráficos de funções envolvendo funções pares e ímpares desenvolvem, entre outras, as capacidades de visualização. Muitos alunos não têm qualquer dificuldade em trabalhar graficamente com funções pares, mas o mesmo já não acontece para o caso das ímpares.

Diz qual é o valor lógico das afirmações seguintes. Em cada caso explica porquê. Nas que forem falsas podes apresentar um contra-exemplo.

a) Uma função diz-se par quando o seu gráfico tem um eixo de simetria

b) O gráfico de uma função ímpar passa sempre pela origem do referencial.

c) Se **f** é uma função polinomial de grau par, então **f** é uma função par.

d) Se **f** é uma função polinomial de grau par, então **f** pode ser uma função ímpar.

Comentário

Indicar o valor lógico de várias afirmações ajuda a clarificar os conceitos, desenvolve o poder de argumentação dos alunos e os alunos começam a perceber que para provar que uma afirmação é falsa basta dar um contra-exemplo, mas para provar que ela é verdadeira não basta dar um exemplo para o qual a proposição se verifica.

Famílias de funções

Uma característica importante das calculadoras gráficas (ou programas de gráficos para computador) é possibilitarem a visualização simultânea de gráficos. A sua utilização no estudo das famílias de funções permite que seja o aluno a experimentar e a descobrir as propriedades das famílias de funções e o efeito da alteração dos parâmetros. O aluno deve ser incentivado a fazer registos cuidadosos, a procurar justificações para o que observa e a relacionar em cada momento a representação gráfica com a expressão analítica das funções que está a estudar.

Apresenta-se na página seguinte uma ficha que possibilita o estudo da função quadrática. De forma semelhante podem ser estudadas outras famílias de funções, nomedamente a função módulo.

Convém iniciar o estudo de uma família com situações ou outras famílias mais simples, por exemplo, no caso da função módulo podem ser estudadas $y = |x| + k$; $y = a|x|$;

$y = |x+h|$ para finalmente sistematizar o estudo de uma família do tipo $y = a|bx+h|+k$.

Os alunos devem ainda estudar outras famílias de funções polinomiais, realizando pequenas investigações ou estudos mais completos (ver ficha "Uma investigação com funções cúbicas na parte de Avaliação).

Em geral, para fazer o estudo de uma família de funções (do tipo estudado no 10º ano) os alunos devem considerar: o aspecto geral do gráfico, se passa ou não pela origem, as simetrias, o que acontece quando tende para $+\infty$ ou $-\infty$; as semelhanças e diferenças entre os diversos gráficos; os efeitos dos parâmetros nas características das funções e dos seus gráficos, nomeadamente nos domínios e contradomínios, máximos e mínimos, zeros, etc...

A actividade que se segue possibilita o estudo da função quadrática quando apresentada na forma $y = a(x - h)^2 + k$. Após este estudo o aluno deve reconhecer que pode obter o gráfico de $y = (x - 3)^2 + 5$ a partir do gráfico de $y = x^2$ efectuando sobre este uma translação associada ao vector (3, 5).
Devem também ser estudados os efeitos dos parâmetros quando a função é dada na forma $y = ax^2 + bx + c$ ou ainda na forma $y = k(x - \alpha)(x - \beta)$ e discutidas as informações imediatas que cada uma delas fornece. No caso da função ser dada na forma $y = ax^2 + bx + c$, que é o mais vulgar, poderemos ficar a conhecer imediatamente o sentido da concavidade da curva através do valor de **a** e a ordenada do ponto de intersecção do gráfico com o eixo dos yy, através do valor de **c**; tendo em conta **a** o sinal de **b** indicará se a abcissa do vértice é positiva ou negativa.

Função Quadrática

1. Utilizando a calculadora gráfica representa graficamente as funções $y = x^2$; $y = 2x^2$; $y = \frac{1}{3}x^2$; $y = -x^2$; $y = -2x^2$; $y = -\frac{1}{3}x^2$.

2. Analisa os gráficos e regista as tuas conclusões. Indica nomeadamente, para cada função:

- o domínio
- o contradomínio
- a existência de eixo de simetria
- a existência e o número de zeros
- intervalos de monotonia
- sentido da concavidade
- coordenadas do vértice da parábola

3. No caso geral como se relaciona o gráfico da função $\boldsymbol{y = ax^2}$ com o de $\boldsymbol{y = x^2}$? Como é que o parâmetro $\boldsymbol{a}$ influencia o gráfico da função?

4. Faz um estudo semelhante para as funções do tipo $\boldsymbol{y = ax^2 + k}$;

$$\boldsymbol{y = a(x + h)^2} \quad e \quad \boldsymbol{y = a(x + h)^2 + k}.$$

Explicita os efeitos dos parâmetros $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{h}$ e $\boldsymbol{k}$ relativamente aos gráficos das funções.

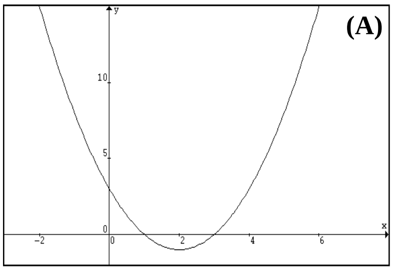
5. Elabora um relatório com o registo dos gráficos e as conclusões a que chegaste.

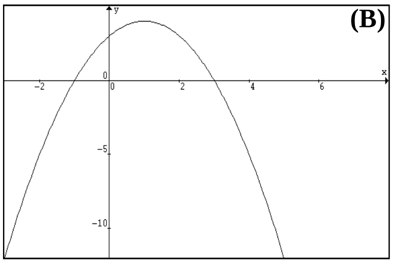
6. Tendo em conta o que aprendeste, descreve como podes obter o gráfico de cada uma das funções a partir do gráfico de $\boldsymbol{f(x) = x^2}$:

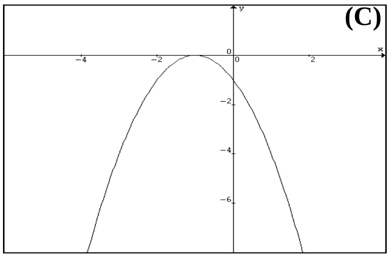
$$\boldsymbol{y = -3x^2} \qquad \boldsymbol{y = (x + 4)^2} \qquad \boldsymbol{y = 2(x - 5)^2 + 0{,}7}$$

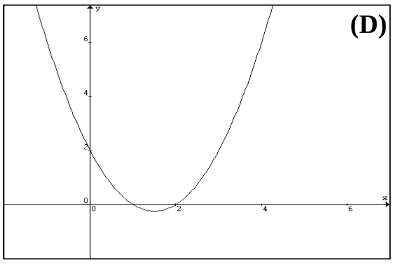
Mais funções quadráticas

- Representa graficamente a função $y = (x-1)\ (x+5)$.
- Observa o gráfico. Qual o significado de 1 e 5 relativamente ao gráfico?
- Investiga os gráficos das funções da família $y = (x+a)(x+b)$. Atribui vários valores, positivos, negativos e zero a **a** e a **b**; experimenta também o caso em que **a = b**.
- Qual é o significado de **a** e **b** relativamente ao gráfico?
- Define, através das suas expressões analíticas, funções que correspondam aos seguintes gráficos. Testa as expressões que encontraste com a calculadora gráfica.









Comentário

Mais uma vez poderão ser os alunos a descobrir que os zeros são informações imediatas quando a função está na forma $\boldsymbol{y = k(x - \alpha)(x - \beta)}$

soluções possíveis:

$y = (x-1)(x-3) \rightarrow$ (A) ; $y = -(x+1)(x-3) \rightarrow$ (B); $y = -(x+1)^2 \rightarrow$ (C);

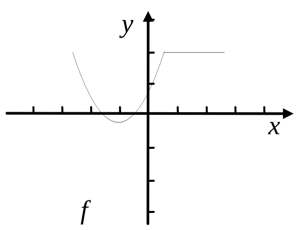
$y = (x-1)(x-2) \rightarrow$(D).

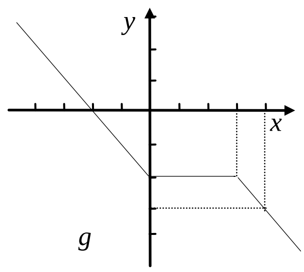
No caso de não haver dúvidas sobre as coordenadas do ponto de intersecção com o eixo das ordenadas, estas soluções são únicas.

Funções definidas por ramos

Foram já definidas anteriormante funções definidas por ramos por exemplo o “Baile” (página 68) e as “Chamadas telefónicas” (página 74). Nos casos citados as funções não são contínuas. Para que não fiquem dúvidas sobre o facto de não haver qualquer relação entre funções definidas por ramos e descontinuidades devem ser apresentados outros exemplos.

Este assunto pode ser aproveitado para pedir a expressão analítica de funções como as aqui representadas.





Resolução de problemas envolvendo a expressão de uma variável em função de outra, ou recorrendo a uma representação gráfica.

O programa (pag. 20) prevê que seja dada particular importância à resolução de situações problemáticas, situações de modelação matemática, exemplos ligados com as outras disciplinas (Física, Química, Geografia, etc.) e ainda exemplos relacionados com a Geometria. As funções que relacionam elementos de uma figura geométrica são sempre uma boa oportunidade para retomar assuntos já estudados. As actividades que a seguir se apresentam pretendem contemplar este objectivo que é fundamental na educação matemática dos alunos. Não será certamente possível realizar todas estas actividades, cabendo ao professor seleccioná-las. Este trabalho pode ser mais enriquecedor se os alunos trabalharem em pequenos grupos, sendo muito importante que elaborem pequenos relatórios sobre a forma como foram abordando as várias questões, justifiquem as suas opções e registem as conclusões obtidas. Os alunos devem perceber que, mais importante que a apresentação dos cálculos, são os processos pelos quais optaram na resolução de uma questão e a respectiva justificação.

Estuda a função que relaciona o lado e o perímetro de um quadrado. Que tipo de função é esta?

solução: P = 4L ou L = P/4

Pensa em todos os triângulos com dois lados iguais e um diferente, com perímetro **50 cm**.

- Encontra a função que relaciona o lado diferente com qualquer dos outros lados. Representa essa função graficamente.
- Entre que valores pode variar o lado diferente? E os dois lados iguais?
- Representa o gráfico da função que nos dá a área de cada um dos triângulos em função de um dos lados iguais.
- Quais as dimensões do triângulo que tem área máxima?

solução: *y = 50–2x* ; o lado diferente entre 0 e 25; os lados iguais entre 12,5 e 25;

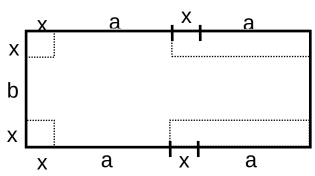
$y = \frac{(50-2x)\sqrt{-625+50x}}{2}$; triângulo equilátero.

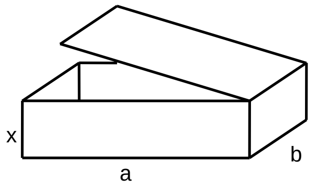
Escreve a expressão que permite relacionar a área de um triângulo equilátero com o seu lado.
Qual o domínio desta função?
Representa o gráfico da função e indica o contradomínio.

solução: $y = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$; o domínio e contradomínio [0, +∝ [

A propósito de caixas

Dispomos de um rectângulo de cartolina de **50 cm** × **20 cm** e queremos fazer uma caixa com tampa.





Indica possíveis dimensões para **a**, **b** e **x** para que a caixa possa ser feita. Em cada caso determina o volume da caixa.

Representa graficamente a função que nos dá os vários volumes em função de **x**.

Que dimensões deve ter a caixa para que o volume seja máximo? (indica as medidas com aproximação ao milímetro)

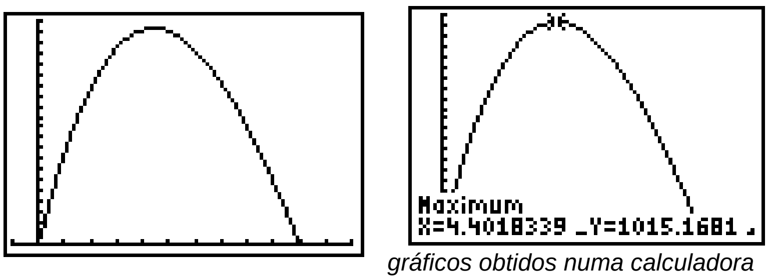
Adaptado de "M. Guzmán - Bachillerato 1 "

Comentário :

Sabemos que $\mathbf{V_{caixa} = abx}$.

Como $2a + 2x = 50 \Leftrightarrow \mathbf{a = 25 - x}$; $b + 2x = 20 \Leftrightarrow \mathbf{b = 20 - 2x}$

então, $\mathbf{V_{caixa} = (25 - x)(20 - 2x)\,x}$



gráficos obtidos numa calculadora

Apesar do gráfico da expressão analítica da função não ser o representado acima, neste problema o domínio só tem significado entre **[0, 10],** pelo que não faz sentido representar um gráfico num domínio diferente. Só com o auxílio da calculadora é que os alunos conseguirão chegar a um valor máximo para o volume.

Como o valor encontrado não é um valor exacto devemos sempre referir com que aproximação é que se desejam os resultados. As dimensões da caixa para o volume máximo seriam: Altura (**x**) = **44 mm**, comprimento (**a**) = **206 mm** e largura (**b**) = **112mm,** para uma aproximação a menos de uma unidade.

Decomposição de uma substância

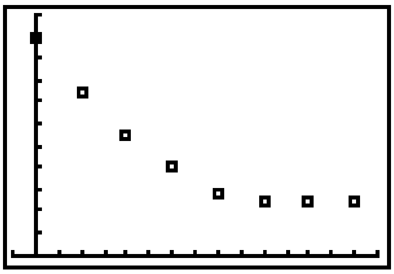
Mediu-se a massa de uma determinada substância **A** que se estava a decompor segundo uma certa reacção química e obtiveram-se os seguintes valores:

Tempo de reacção (minutos)	**Massa de A** (gramas)
0	200
2	150
4	110
6	80
8	55
10	50
12	50
14	50

- Faz uma representação gráfica dos dados da tabela.
- Descreve como varia a velocidade da reação ao longo do tempo ou seja diz onde é que o decrescimento é mais ou menos acentuado.
- Em que momento é que a substância deixou de perder massa?
- Determina a velocidade média de decomposição de **A** no intervalo de tempo de 2 a 6 minutos.

Comentário

Utilizando o modo estatístico da calculadora é possível representar graficamente os dados da tabela.



A partir do gráfico é mais fácil os alunos verificarem que no início o decrescimento foi mais acentuado e foi ficando cada vez menos acentuado à medida que o tempo ia passando, deixando a subtância de perder massa ao fim de 10 minutos. Isto significa que a velocidade de reacção foi diminuindo ao longo do tempo. Podemos determinar a velocidade média de reacção no intervalo de 2 a 6 minutos calculando $\frac{80-150}{4}=-17,5$ e discutir com os alunos o significado do resultado ter dado negativo.

Tempo de reacção de um condutor

Um condutor de automóvel avistou um perigo na estrada. Então iniciou uma travagem. Sabe-se que quando um condutor decide travar passa um certo tempo até que carregue de facto no travão (tempo de reacção). Esse tempo, dá origem a que o carro ainda percorra um determinado espaço. Depois de carregar no travão, o carro não pára logo. Percorre ainda uma certa distância que depende da sua velocidade. Conclusão, desde que o condutor se apercebe do perigo, até que o carro para, percorre uma certa distância (*y*), que é tanto maior quando maior for a velocidade (*x*).

Experimentalmente obtiveram-se os seguintes valores:

Velocidade do automóvel (km/h)	**Distância percorrida** (por tempo de reacção, em metros) (1)	**Distância percorrida** (depois da travagem, em metros) (2)	**Distância total percorrida** (1) + (2)
10	2	1	3
20	4	3	7
30	6,5	6,5	13
40	8,5	12	20,5
50	10,5	18,5	29
60	12,5	26,5	39
70	14,5	36	50,5
80	17	47	64
90	19	60	79
100	21	74	95

- Sabendo que o nosso condutor ia a uma velocidade de 80 km/h, que distância percorreu desde que se apercebeu do perigo até o carro parar?

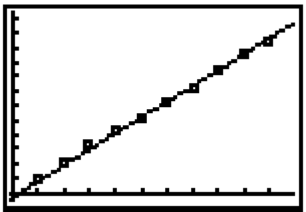
- Constrói os gráficos correspondentes a cada uma destas situações.

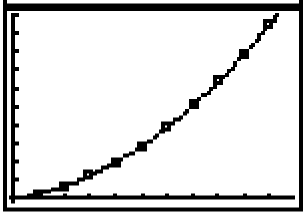
- Tenta encontrar a função que melhor se adapte a cada uma das situações:
    - distância percorrida por tempo de reacção;
    - distância percorrida depois de se iniciar a travagem;
    - distância total percorrida desde que se decide travar até à paragem do automóvel.

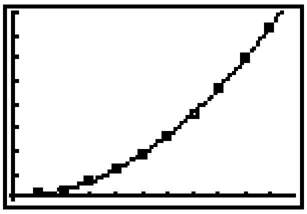
Adapatado de "Matematicas, Bachillerato 1, M. de Guzmánî

Comentário

Podemos utilizar o modo estatístico da calculadora para representar cada um dos conjuntos de pontos dados pela tabela e depois procurar, utilizando as regressões que a calculadora disponibiliza, uma função que se ajuste a cada uma das situações.





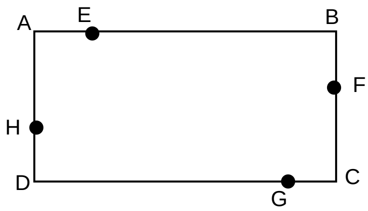


y = *0.22x – 2/3* *y* = 0.0075*x*² – 0.16 *x* + 3/8 *y* = 0.0075*x*² + 0.06 *x* -7/24

A área do quadrilátero

O rectângulo **ABCD** da figura tem por dimensões **6** e **4**.

Sobre os lados marcam-se os pontos **E**, **F**, **G** e **H** tais que **AE = BF = CG = DH = x** .



Seja **A** a função que a cada **x** faz corresponder a área do quadrilátero **EFGH**.

1.Verifica que:

- $\mathbf{A(x) = 2x^2 - 10x + 24}$ e que $\mathbf{0 \leq x \leq 4}$.
- para todos os valores de **x**, $\mathbf{A(x) \geq 11{,}5}$.

2. Representa graficamente a função **A** e verifica que:

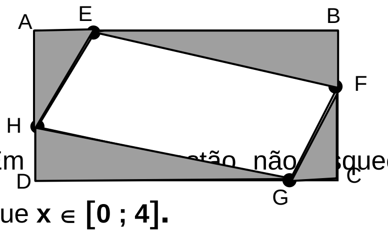
- é crescente em **[2,5 ; 4]** e decrescente em **[0 ; 2,5]**.
- **11,5** é o mínimo.
- existem dois valores de **x**, correspondentes a dois quadriláteros diferentes, para os quais a área é **16**. (considera o centímetro para unidade e desenha-os em verdadeira grandeza).
- para se obterem quadriláteros de área superior a **20,5** o **x** tem que pertencer ao intervalo **[0 ; 0,5]**.

3. Determina o perímetro do quadrilátero que tem área mínima.

Comentário

Na resolução será conveniente exprimir **AH**, **BE**, **DG** e **CF** em função de **x**.

Para obter **A(x)** poder-se-á usar a diferença entre a área do rectângulo **ABCD** e a soma das quatro áreas dos triângulos a sombreado (2 a 2 iguais).

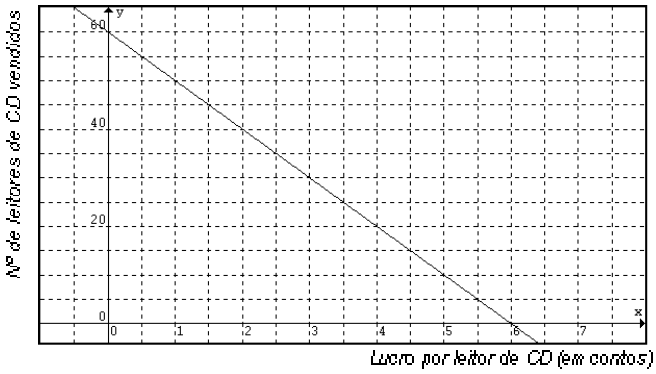


Em [illegible] não esquecer que $\mathbf{x} \in \mathbf{[0\,;\,4]}$.

Leitores de CD

O director de marketing de uma empresa, decidiu colocar à venda leitores de CD's. Depois de alguns estudos, verificou que se colocasse à venda ao preço de custo, conseguiria vender 60 por semana, mas não teria qualquer lucro. Se aumentasse o preço conseguiria ter lucro, mas o número de aparelhos vendidos diminuia. Quanto maior for o preço menos aparelhos vende, e se este for de 6000$00 superior ao preço de custo já não consegue vender aparelho nenhum.

Para analisar melhor esta situação e tendo por base os resultados do estudo que efectuou, o director de marketing elaborou o seguinte gráfico:



Com que margem de lucro deve ele vender cada leitor para que o lucro total seja máximo?

1. Utiliza o gráfico para completares a tabela:

Lucro por leitor de CD	0	1	2	3	4	5	6
Número de Leitores de CD vendidos	60						0
Lucro total das vendas							

2. Indica qual a margem de lucro por leitor de CD´s que o director deve escolher.

3. Supõe agora que o lucro por cada Leitor de CD's é ***L***.Escreve uma expressão analítica para cada uma das funções que relacionam:

- o número de aparelhos vendidos por semana em função de ***L*** (que corresponde à recta do gráfico dado).
- o lucro total (***T***)em função de ***L***

Comentário

Para resolver o problema é necessário analisar com cuidado o gráfico apresentado que resulta do estudo de mercado efectuado.

Depois de preencher a tabela:

Lucro por leitor de CD (L)	0	1	2	3	4	5	6
Número de Leitores de CD vendidos (N)	60	50	40	30	20	10	0
Lucro total das vendas (T)	0	50	80	90	80	50	0

O lucro máximo é de leitura imediata: 90 contos.

A função que traduz o número de leitores vendidos por semana é $N(L)$ = 60-10L e a do lucro total é $T(L) = L(60\text{-}10\,L)$.

O Concerto Rock

O lucro **(L)** em contos, de um concerto com uma banda rock, organizado por uma associação de estudantes, é função do preço (**p**) dos bilhetes vendidos também em contos, e é dado por: $\boldsymbol{L(p) = -125p^2 + 1250p - 2625}$.

Para facilitar a elaboração deste modelo apenas foram tidos em conta os seguintes aspectos: encargos fixos com a banda, preço dos bilhetes e o número de bilhetes vendidos (que é função do preço). Nota que quanto mais caros forem os bilhetes menos bilhetes se vendem e vice-versa.

1. Com auxílio da calculadora faz uma representação gráfica da função.

2. Lê o gráfico e regista todas as informações que ele te fornece acerca da situação.

3. Mostra, algebricamente, que são equivalentes as seguintes expressões:

(A) $-125p^2 + 1250p - 2625$ (B) $p(-125p + 1250) - 2625$

(C) $-125(p - 5)^2 + 500$ (D) $-125(p - 3)(p - 7)$

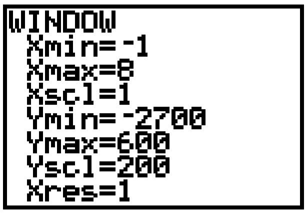
- Qual das expressões anteriores te dá uma ideia mais clara do preço aconselhado para os bilhetes?
- Qual a expressão que mostra qual deve ser o preço mínimo do bilhete para que não haja prejuízo?
- Qual mostra mais claramente o custo fixo com a banda?
- O que significa a expressão $p(-125p+1250)$ na situação do concerto? E a expressão $-125p+1250$?

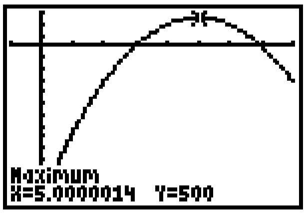
Quantos bilhetes é previsto vender se o preço de cada bilhete for 2 contos? E se for 5 contos?

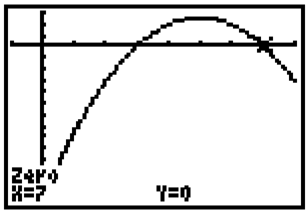
Adaptado de "Algebra in a Tecnological World"

Comentário

Uma representação gráfica possível, no rectângulo de visualização a seguir sugerido é a seguinte:







Nesta situação os alunos podem ter perspectivas diferentes relativamente à relação entre lucro e número de alunos que assistem ao concerto e isso poderá levá-los a considerar valores diferentes para o domínio da função. São de aceitar como domínios possíveis $[0,5]$, $[0,7]$ ou $[0, k]$ sendo **k** um preço aceitável para o bilhete.

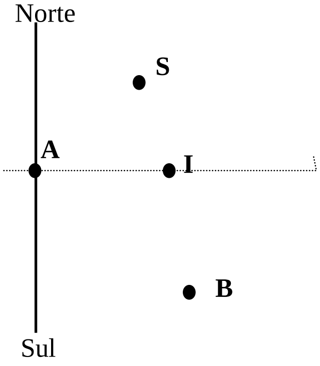
Com a questão 3 pretende-se que os alunos efectuem o cálculo algébrico, percebam a equivalência entre as várias expressões, mas também que sejam capazes de lhes dar significado no contexto do problema. Assim a expressão que dá a ideia mais clara para o preço aconselhado dos bilhetes é (C), ao indicar a ordenada do vértice da parábola que nos dá o lucro máximo. A expressão (D) mostra o preço mínimo do bilhete para que não haja prejuízo (primeiro zero da função). Quer a expressão (A) quer a (B) informam de imediato o custo fixo com a banda (**2625 contos**). A expressão **p(-125p+1250)**, quando comparada com (B), indica-nos o dinheiro recebido com a venda dos bilhetes; sendo **p** o preço de um bilhete **-125p+1250** representará o número de bilhetes vendidos.

Se a expressão **-125p+1250** indica o número de bilhetes vendidos em função do preço, então se cada bilhete for a **2** contos é previsto vender **1000** bilhetes e se for a **5** contos é previsto vender **625** bilhetes.

Dos problemas apresentados este é aquele que provavelmente apresentará mais dificuldade para um maior número de alunos sendo indispensável uma apresentação e discussão final com toda a turma.

Referência à parábola, às suas principais propriedades e à sua importância histórica.

O esquema representa uma ilha, um ponto **A** situado em terra sobre a linha Norte-Sul e um submarino **S**. O ponto **A** e a ilha **I** estão na mesma perpendicular à linha Norte Sul. Ao submarino foi ordenado que se deslocasse até **B**, passando entre **A** e a **ilha** mas de forma a manter-se sempre à mesma distância da ilha e da linha Norte-Sul. Que trajectória descreveu o submarino?



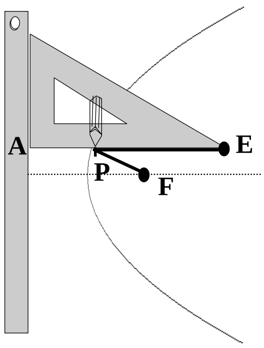
adaptado de "Algebra a Graphing Aproach"

Comentário

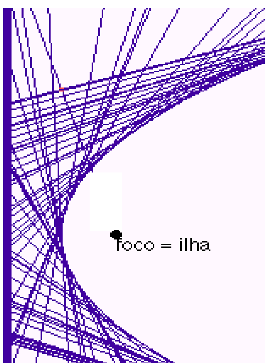
Um problema como este permite introduzir a parábola como lugar geométrico dos pontos equidistantes de uma recta (a directriz) e de um ponto fixo (o foco). Os alunos poderão procurar a trajectória do submarino utilizando um dos processos a seguir indicados:

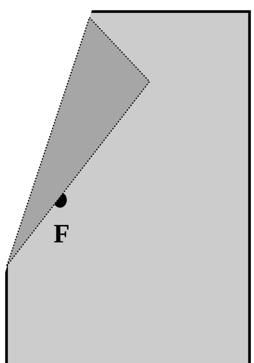
1. Parábola com régua e esquadro:

Fixar um cordel de comprimento **AE** no ponto **F** (foco da parábola) de um cartão e na extremidade **E** do esquadro. Colocar a régua sobre a directriz da parábola. Deslizar o esquadro sobre a régua mantendo o cordel esticado com a ponta do lápis e traçar a parábola. É fácil verificar que $\overline{PF} + \overline{PE} = \overline{PA} + \overline{PE}$, dada a forma como foi colocado o cordel, e que portanto $\overline{PF} = \overline{PA}$.



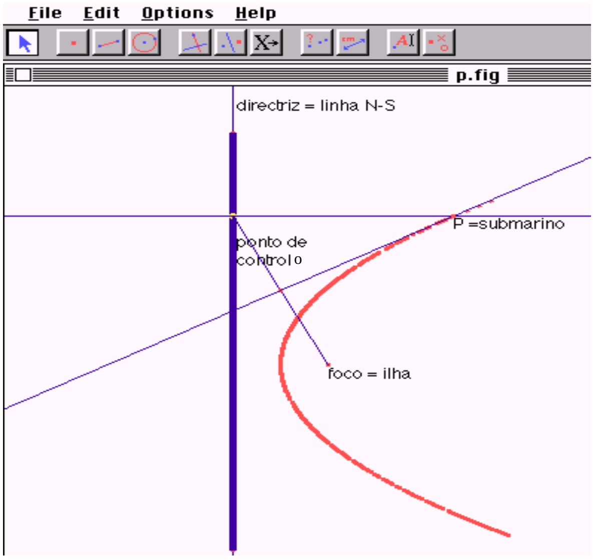
2. Parábola com dobragens:





Fazer dobragens sucessivas de uma folha de papel tal como indicam as figuras, vincando fortemente. Com paciência ver--se-á aparecer a parábola. Sobre este assunto pode-se sugerir aos alunos que leiam o artigo "O fascínio das cónicas", de Eduardo Veloso, publicado na revista do jornal Público de 3 de Dezembro de 1995.

3. Com o programa Cabri II



Se os alunos já utilizaram antes este programa poderão ser eles a construir o ficheiro caso contrário poderão utilizar o ficheiro já construído, verificarem que o ponto P se encontra equidistante da recta e do foco e descobrirem o lugar geométrico por arrastamento do ponto de controlo
. Poderá também ser o professor a mostrar com um datashow. (em disquete)

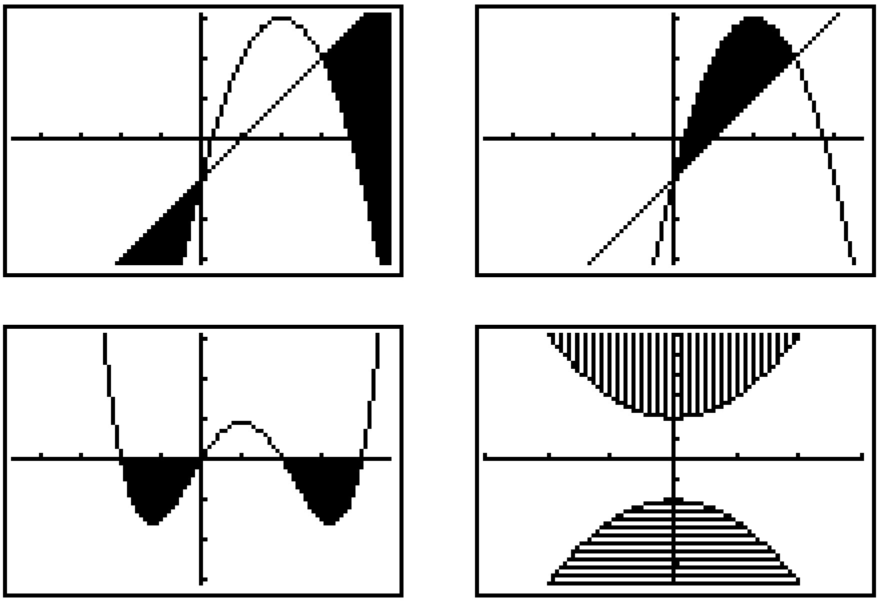
Construção da parábola no cabri II
1.directriz - **Line**
2. foco (F) - **Point**
3.ponto de controlo (C) na directriz - **Point**
4.segmento que une F com C. - **Segment**
5.perpendicular á directriz por C (r) - **Perpendicular Line**
6.mediatriz do segmento CF (s) - **Perpendicular Bissector**
7.ponto de intersecção de r com s (P) - **Intersection Point**
8.deslocar o ponto de control - **Trace On / Off; Click** em **P** e deslocar o ponto de control sobre a directriz.

Equações e inequações do 2º grau; inequações com um módulo. Estudo gráfico de inequações envolvendo polinómios com recurso à calculadora gráfica

Com o auxílio de uma calculadora encontra gráficos semelhantes aos representados em baixo.

Regista as respectivas equações.

Define por uma condição cada uma das regiões sombreadas.



Comentário

É possível que os alunos tenham tido oportunidade de trabalhar, no capítulo da Geometria, com as propriedades da conjunção e da disjunção. Quer isso tenha acontecido quer não, os alunos têm agora oportunidade de estudar de forma necessariamente muito breve, as propriedades da conjunção e da disjunção com vista a facilitar a utilização de uma linguagem rigorosa. Para cada uma das situações do exercício anterior, os alunos começam por encontrar a expressão analítica das funções cujos gráficos se assemelhem aos representados. É preciso estar atento porque as respostas podem ser muito variadas; tudo depende das escalas assumidas. Depois definem através da conjunção e/ou disjunção de condições as regiões sombreadas.

Monotonia e sinal

f é uma função quadrática. Indica os intervalos de monotonia e o sinal da função f em cada uma das situações seguintes

1. O vértice da parábola que representa f tem de coordenadas **(5,5 ; 4)** e f**(1,5) = 0**.

2. $f(-0,5) = f(1,5)$; $f(1,5) > 0$ e $f(2) = 0$.

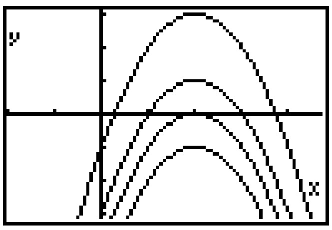
3. $f(-1) < f(2)$ e o eixo de simetria da parábola que a representa é a recta $x = 2$.

4. $f(-1/3) = f(5) = 0$ e a concavidade do gráfico é voltada para cima.

Comentário

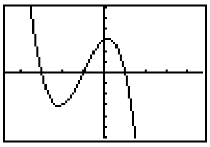
Na resolução de qualquer das questões é conveniente recorrer ao gráfico de f, não esquecendo o seu eixo de simetria.

Na questão **3.** há infinitas parábolas que verificam as condições dadas pelo que se devem considerar algumas delas. Todas as funções são crescentes em $]-\infty, 2]$ e decrescentes em $[2, +\infty[$. Quanto ao sinal deve ter-se em conta o facto de o gráfico intersectar o eixo dos **XX** em dois pontos **(** $x = a$, $x = b$ **)**, ou num só ponto **(** $x = 2$**)** ou não intersectar.



Inequações de grau superior a 2

1. Seja f a função polinomial de grau **3**, cuja representação gráfica se apresenta na figura junta.



1.1 Indica um intervalo onde:

a) f é positiva e crescente.

b) f é negativa.

1.2 Determina, recorrendo a intervalos, o conjunto solução das condições:

a) $f(x) \geq 0$ **b)** $f(x)(4 - x^2) \leq 0$

Para resolveres a alínea b) recorre à sobreposição dos gráficos das funções $f(x)$ e $y = 4 - x^2$.

1.3 Uma das expressões define $f(x)$. Verifica que **a), b)** e **d)** não definem $f(x)$.

a) $(- x + 3)(x - 1)(x + 1)$

b) $x^3 + 3x^2 - x - 3$

c) $(x + 3)(1 - x^2)$

d) $- x^3 - 3x^2 + x + 1$

1.4 Representa na tua calculadora o gráfico de f e procura no intervalo $[0, \ 1]$ dois valores diferentes de x para os quais $f(x) > 3$.

1.5 Indica para que valores de **k**,

a) a função $g(x) = f(x - k)$ tem dois zeros positivos e um negativo.

b) a função $h(x) = f(x) + k$ tem um único zero.

<u>Comentário</u>

Nas questões **1.1**, **1.2** e **1.3** o aluno não deve recorrer à calculadora.

Para encontrar o conjunto solução da questão **1.2 b)** basta ler no gráfico que resulta da sobreposição, os intervalos onde as funções têm sinais contrários e os valores de x onde pelo menos uma delas é nula e concluir que

$$f(x)\,(4 - x^2) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -3\right] \cup \left[-2, \ -1\right] \cup \{1, \ 2\}$$

Na questão **1.4** o professor pode encontrar os valores pedidos, ($x \in$ **]0, 0.3028[**) e portanto facilmente irá corrigindo valores encontrados pelos alunos quando estes experimentam valores próximos de zero usando a calculadora.

Estudo gráfico de inequações envolvendo polinómios a partir de uma decomposição em factores do polinómio

Sejam f e g funções reais cuja variação de sinal se apresenta no quadro seguinte:

x	$-\infty$	-2		1		3	$+\infty$
sinal de $f(x)$	–	0	–	–	–	0	+
sinal de $g(x)$	+	0	–	0	+	+	+

1. Indica o conjunto solução das condições:

a) $f(x) \cdot g(x) < 0$

b) $f(x) \cdot g(x) \geq 0$

c) $f(x+2) \cdot g(x-1) = 0$

2. Justifica que f e g não são pares.

3. Sabendo que f e g são funções polinomiais, respectivamente de grau 3 e grau 2 cujo coeficiente de maior grau é 2 para as duas funções define f e g na forma de produto de factores do 1º grau.

Considera uma função ***f*****,** polinomial de grau 3, definida em **R**, cuja variação de sinal se apresenta no quadro que se segue:

x	$-\infty$	-3		0		3	$+\infty$
sinal de $f(x)$	+	0	–	0	+	0	–

1. Resolve as condições:

a) $(x-5)\cdot f(x)=0$

b) $(x^2-4)\cdot f(x)\leq 0$

c) $-f(x)>0$

d) $f(x+4)\leq 0$

2. Indica os valores reais de x que dão significado a cada uma das expressões

a) $\dfrac{x-2}{f(x)}$ **b)** $\dfrac{x}{f(x-1)}$

3. Mostra que existem muitas funções f que verificam o quadro de sinais apresentado. Desenha gráficos dessas funções e apresenta uma expressão designatória, na forma de produto de factores do 1º grau, que as represente a todas.

4. Considera a função f que tem o coeficiente de x^3 igual a -1 e representa o polinómio que define a sua expressão designatória.

Comentário

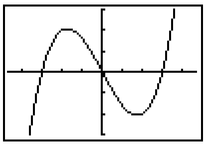
Para a resolução desta questão basta recorrer ao sinal das respectivas funções.

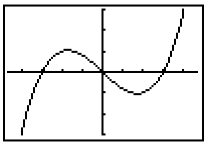
Para a alínea **d)** será interessante que seja o aluno a descobrir os zeros de $f(x+4)$ e construir o quadro de variação de sinal.

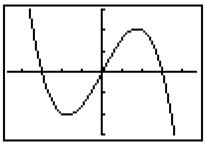
x	$-\infty$	-7		-4		-1	$+\infty$
sinal de $f(x+4)$	+	0	–	0	+	0	–

$$f(x+4)\leq 0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-7\right]\cup\left[-4,\ -1\right]$$

Relativamente à questão **3**, como sabemos que ***f*** é uma função polinomial do 3º grau e são apresentados os três zeros de ***f***, então: $\boldsymbol{f(x) = ax\,(x + 3)(\,x - 3),\quad a \neq 0}$







Estudo de transformações simples de funções (tanto usando papel e lápis como calculadora gráfica)

Considera a função *f* de domínio **[-1, 2]** definida por $\boldsymbol{f(x) = |\,x\,|}$.

Recorrendo à calculadora gráfica representa o gráfico das funções:

a) $f(x)$ **b)** $f(\,x + 1)$ **c)** $f(x - 2)$

Em cada caso indica o domínio, contradomínio e zeros da função.

Faz as experiências que considerares necessárias e indica o domínio, contradomínio e zeros da função $\boldsymbol{f(\,x + h)}$.

<u>Comentário</u>

Para que o gráfico apresentado pela calculadora gráfica apareça sem os segmentos de recta que unem os extremos dos segmentos (**fig.1**) ao eixo dos **xx** é necessário introduzir a expressão na forma indicada (**fig. 2**):

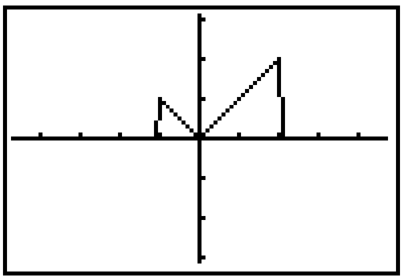


fig.1

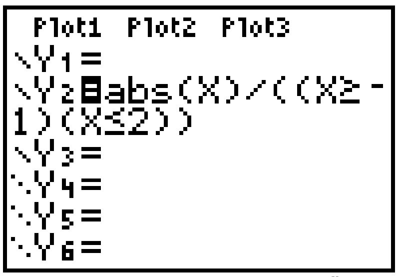


fig.2

Ao colocarmos na calculadora a expressão **abs(** x **) / ((** x **≥-1)(** x **≤ 2))**, o que ela faz para cada valor de ***x*** é testar se ele pertence ou não ao intervalo considerado, indicado pela expressão ($x \geq -1$)($x \leq 2$)); se pertence atribui à expressão o valor **1,** se não pertence atribui o valor **0.** Sendo assim passa a dividir por zero quando $\boldsymbol{x}$ pertence a **]** $- \infty, -1[\cup]2, +\infty[$ e por isso o gráfico não é representado nesse intervalo.

Para representarmos o gráfico das transformações pedidas (**fig.4**) basta-nos substituir na expressão inicial a variável $\boldsymbol{x}$ por $\boldsymbol{x}$ **+1** ou no caso da calculadora que utilizámos escrever $\boldsymbol{Y_3 = Y_2(x+1)}$ (**fig.3**).

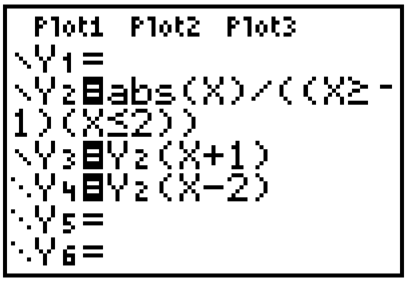


fig.3

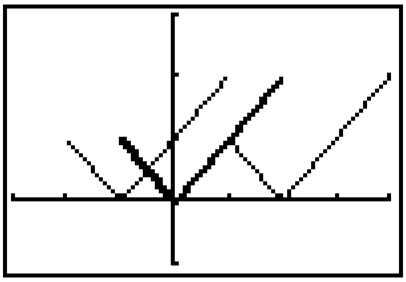
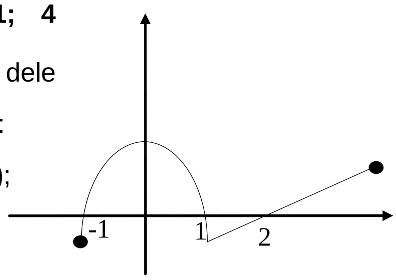


fig.4

Depois de várias experiências os alunos devem concluir que o domínio da função $\boldsymbol{f(x+h)}$ é $[-1+h, \quad 2+h]$ e que o zero da função será $\boldsymbol{x = -h}$.

Observa o gráfico da função $\boldsymbol{f}$ de domínio $[\,-1{,}1;\ 4\,]$ e contradomínio $[-\,0{,}2\ ;\ 1]$ e a partir dele representa graficamente as funções definidas por:

$\boldsymbol{f(x)+1}$; $\boldsymbol{3\,f(x)}$; $\boldsymbol{0{,}5\,f(x)}$; $\boldsymbol{f(2x)}$; $\boldsymbol{f(0{,}5x)}$; $\boldsymbol{|f(x)|}$ e $\boldsymbol{f(|x|)}$.



- Regista para cada uma das funções o domínio, contradomínio e zeros.
- Faz um gráfico, escolhe três transformações e pede a um teu colega fazer as representações gráficas correspondentes.

Nota: se tiveres dificuldades começa por fazer experiências com a calculadora gráfica e com funções tuas conhecidas.

Considera a função $\boldsymbol{f}$ de domínio **IR** e de contradomínio $[a\ ,\ b\ [$, com a, b $\in$ I**R**.

Indica, justificando, os contradomínio das seguintes funções:

a) $f(x) - 3$ **c)** $f(x - 3)$

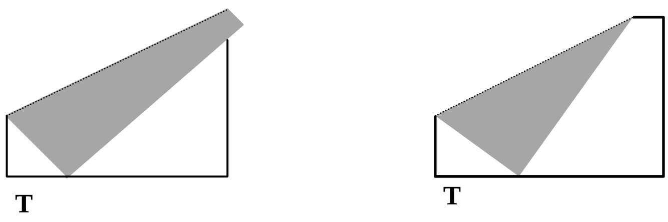
b) $-3.f(x)$ **d)** $|\ f(x)\ |$ sabendo que a < 0 e que b < 0

Estudo intuitivo de curvas que se ajustem a um conjunto de pontos dados.

Este é um dos itens assinalado no programa com * e que portanto pode ou não ser leccionado.

Qual é o tri,ngulo de maior área?

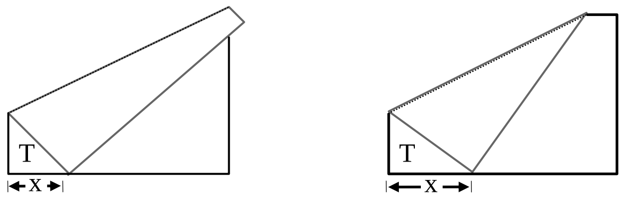
Dobra uma folha de papel de modo que o canto superior esquerdo toque o lado inferior da folha, tal como mostra a figura. Qual é o tri,ngulo (T) de maior área formado no canto inferior esquerdo da folha por efeito desta dobragem?



Investiga e faz um relatório da tua investigação explicando em pormenor a estratégia que utilizaste para resolver o problema.

Comentário

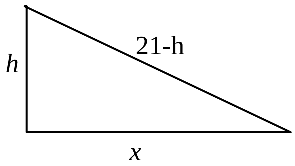
Esta actividade assim apresentada de forma aberta pode ser resolvida pelos alunos utilizando diversas estratégias. Deve ser apresentada como uma actividade de investigação e os alunos serem encorajados a experimentar.



As dimensões da folha não têm import,ncia para o problema podendo ser os alunos a escolher a folha a estudar. Neste caso escolhemos uma folha de **29** × **21** cm.

Uma função que traduz a situação é definida por um polinómio do 3º grau. Utilizando o teorema de Pitágoras para escrever a altura **h** em função de ***x***, temos

$h^2 + x^2 = (21 - h)^2$ ou seja $\mathrm{h} = \dfrac{441 - x^2}{42}$.



A área do tri,ngulo é então

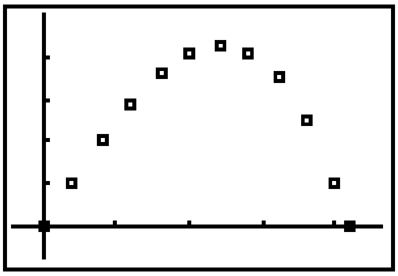
$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}x\frac{441 - x^2}{42} \text{ ou } \mathrm{A} = \frac{\mathrm{x}(21 - \mathrm{x})(21 + \mathrm{x})}{84}$$

A área máxima é aproximadamente igual a **42,44** para ***x*** ≈ **12.12**.

No entanto, o mais natural será que os alunos comecem por experimentar com a folha de papel fazendo medições com uma régua ou utilizando o teorema de Pitágoras. Uma exploração possível seria o registo dos dados recolhidos numa tabela, a realização de um gráfico e a procura com a calculadora de uma função que se ajuste ao conjunto de pontos marcados.

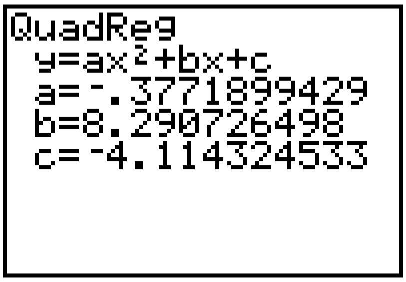
x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	21
¡rea	0	10,4	20,2	28,8	36	40,5	42,6	40,6	35,2	25,2	10	0

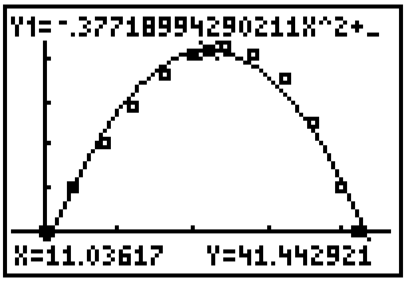
Uma primeira análise do gráfico e o facto de se tratar de uma área poderá levar os

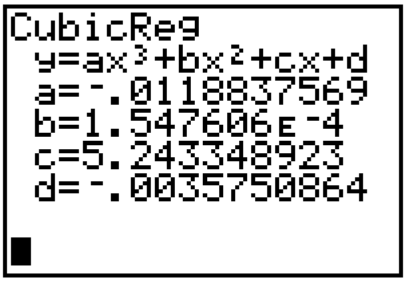


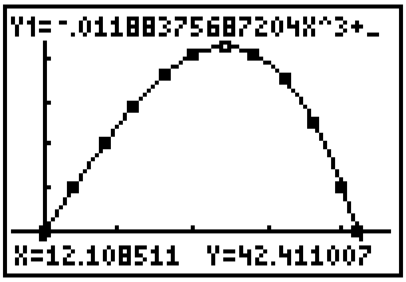
alunos a pensar numa função quadrática será pois uma certa surpresa descobrir que
afinal se trata de uma função do terceiro grau.

No entanto mesmo sem encontrar a expressão analítica da função alguns alunos poderão chegar a esta conclusão se repararem que o máximo não se encontra em x **= 10,5**, abcissa do vértice da suposta parábola e se experimentarem as regressões quadrática e c˙bica e verificam que o ajuste da curva ao gráfico é melhor no caso da segunda.









A discussão dos trabalhos na aula dará oportunidade para debater estes aspectos, as várias estratégias utilizadas e chamar a atenção para o facto de neste caso ser possível e relativamente fácil encontrar a função que melhor descreve a situação apresentada.
Uma ampliação na zona do máximo possibilita um valor com melhor aproximação para o máximo procurado, permite-nos encontrar um valor aproximado de **42,44** cm^2 para x **= 12.11.**

Fotocópias

Uma loja de fotocópias tem afixada a seguinte tabela de preços:

Nº de fotocópias	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Preço (escudos)	20	35	50	60	70	80	85	90	95	100

Procura a recta que melhor se ajuste a esta situação.

Compara a tua solução com a solução encontrada pelos restantes elementos do teu grupo. Provavelmente cada um dos elementos do grupo chegou a uma solução. Como decidir qual a melhor solução? Para resolverem esta questão cada um dos elementos deve preencher a tabela que se segue com os dados da função que descobriu.

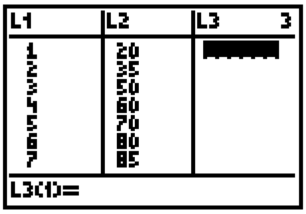
Nº de fotocópias	**Preço** (escudos) (**A**)	***f(x)* =** (**B**)	**A - B** **(C)**
1	20	$f(1) =$	$f(1) - 20 =$
2	35	$f(2) =$	$f(2) - 35 =$
3	50	$f(3) =$	$f(3) - 50 =$
4	60	$f(4) =$	$f(4) - 60 =$
5	70	$f(5) =$	$f(5) - 70 =$
6	80	$f(6) =$	$f(6) - 80 =$
7	85	$f(7) =$	$f(7) - 85 =$
8	90	$f(8) =$	$f(8) - 90 =$
9	95	$f(9) =$	$f(9) - 95 =$
10	100	$f(10) =$	$f(10) - 100 =$

- Adiciona todos os valores da coluna **C**. Qual dos elementos do grupo que apresenta a menor soma? Será que é esse aluno que tem a melhor função?
- Volta a preencher a coluna **C** mas agora considerando as diferenças em módulo. Adiciona novamente todos os valores de **C**. Quem é que agora tem a menor soma?
- Repete o mesmo procedimento, mas agora eleva cada uma das diferenças da coluna **C** ao quadrado.
- Depois de teres efectuado estes três procedimentos qual o que te parece mais adequado para resolver a situação.

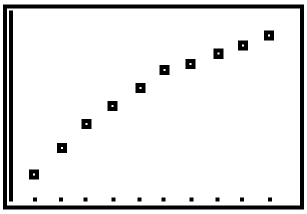
Faz um relatório que inclua as várias fases do trabalho e as conclusões a que iam chegando.

Comentário

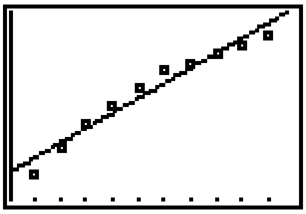
O primeiro exemplo que aparece sobre o método da soma dos desvios ou do quadro dos desvios, deve ser feito com papel e lápis para que o aluno perceba o que está em causa. Em exemplos futuros devem os alunos ser encorajados a efectuar todos os procedimentos utilizando a calculadora e percorrendo as seguintes etapas:



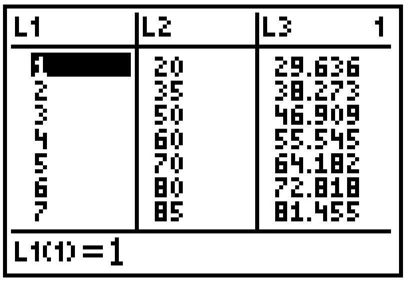
Introduzir os dados na calculadora



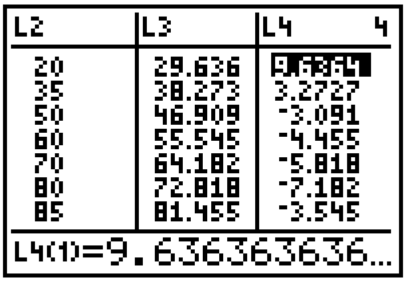
Representar a nuvem de pontos correspondentes aos dados



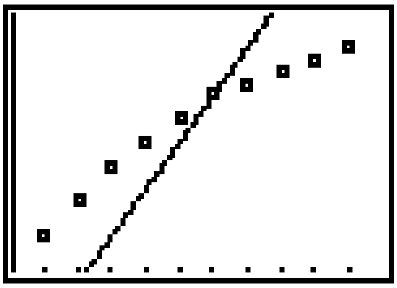
Encontrar uma função que se ajuste de forma aceitável à nuvem de pontos.



Admitindo que a função encontrada está em y_1, introduzir L3 = y_1(L1)

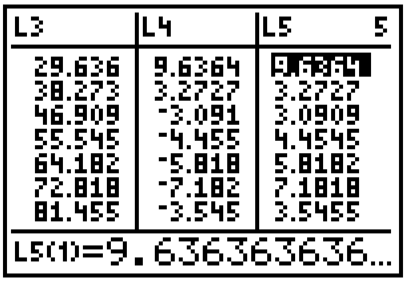


Calcular os desvios fazendo L4 = L3 - L2

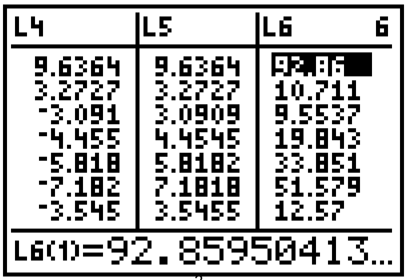


Reparar que mesmo que os desvios sejam muito grandes, como uns são negativos e outros positivos a sua soma será “próxima” de zero. Mesma que a recta não se ajuste nada ao conjunto de pontos (ver figura ao lado), se tiver tantos pontos acima como abaixo dela, a soma dos desvios continua a ser próxima de zero. … por isso que a soma dos desvios não nos dá nenhuma indicação sobre a qualidade do ajuste da recta.

Para calcularmos agora a soma dos módulos dos desvios ou a soma dos quadrados dos desvios, procederemos da forma a seguir indicada.



L5 = | L3 - L2 |
Soma de L5 = 48.182



$L6 = (L3 - L2)^2$
Soma de L6 = 299.09

Observar que o elevar os desvios ao quadrado penaliza os grandes desvios e torna irrevelantes os pequenos desvios.

Neste problema é necessário combinar previamente qual o critério que se vai estabelecer para aceitar qual a melhor solução, se aquela que apresenta a menor soma utilizando o processo de elevar os desvios ao quadrado, se a soma do valor absoluto dos desvios.

Pode-se fazer um problema idêntico procurando não um modelo linear, mas sim uma expressão do segundo grau. Neste caso o ajuste da curva ao conjunto de pontos será bastante melhor, porque desde que o conjunto de pontos não estejam sobre a mesma recta conseguimos sempre encontrar uma função do 2º grau que se ajusta melhor que a recta.

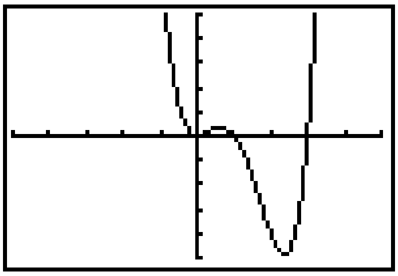
Funções polinomiais de grau superior ao segundo

Representa graficamente a função $y = x^4 - 4x^3 + 3x^2$.   Decompõe o polinómio em factores do menor grau possível.

Comentário

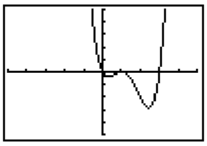
Quando utiliza uma calculadora gráfica o aluno deve transpor para o papel o gráfico assinalando pontos relevantes, nomeadamente zeros, máximos e mínimos. Na maioria dos casos esses valores serão valores aproximados e por isso quando se pretender que os pontos notáveis sejam dados com determinada aproximação essa informação deve ser pedida.

Como sabemos que uma função polinomial do 4º grau tem no máximo 4 raízes e que tratando-se de um polinómio com coeficientes inteiros, todas as raízes estarão no intervalo [–M–1, M+1], sendo M o máximo dos valores absolutos dos coeficientes do polinómio. Então podemos concluir que neste caso todas as raízes estão no intervalo [–5, 5] e portanto esta função só tem três zeros. É fácil concluir que os zeros são 0, 1 e 3.

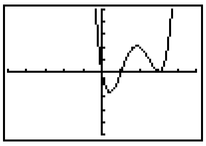


Os exercícios iniciais de decomposição devem ser exercícios que os alunos consigam resolver analiticamente para poderem ir controlando o que visualizam na calculadora e poderem fazer o paralelo entre o processo analítico e o gráfico. Para decompor o polinómio os alunos dispõem de vários processos. Um deles seria pôr x^2 em evidência, fazer $y = x^2(x^2 - 4x + 3)$ e a seguir utilizar a fórmula resolvente para determinar os zeros de $y = x^2 - 4x + 3$. Um outro consiste em utilizar duas vezes a regra de Ruffini dividindo o polinómio sucessivamente por $(x - 1)$ e $(x - 3)$ e concluir que $y = x^2(x - 1)(x - 3)$. Outro processo resulta do facto dos alunos poderem ser informados do Teorema Fundamental da Álgebra (ver pág. 47).

Sendo assim, visto conhecermos todas as raízes do polinómio, fica-se a saber que $y = x^4 - 4x^3 + 3x^2$ se decompõe ou na forma $y = x^2(x - 1)(x - 3)$, ou na forma $y = x(x - 1)^2(x - 3)$, ou na forma $y = x(x - 1)(x - 3)^2$. Fazendo a representação gráfica das três funções e comparando com a representação gráfica inicial conclui-se de imediato qual a decomposição da função.



$y = x(x - 1)^2(x - 3)$,



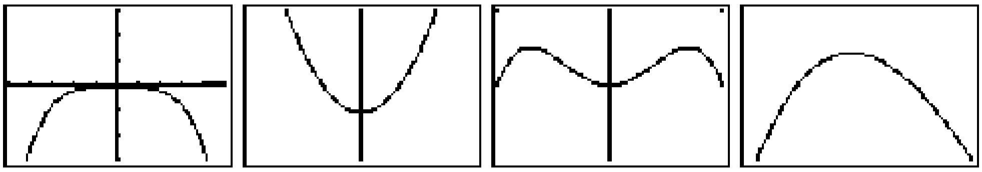
$y = x(x - 1)(x - 3)^2$

Quando um polinómio se decompõe na forma $y = (x - a)(x - b)^2$, dizemos que **a** é uma raiz simples e **b** é uma raiz dupla. Analisando os três gráficos, evidenciamos o facto de no caso da raiz simples o gráfico atravessar o eixo das abcissas e no caso da raiz dupla o gráfico tocar o eixo sem o atravessar.

Gráficos de uma função

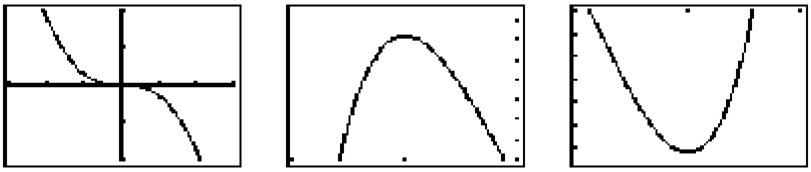
Considera a função $y = x^2 (1 - x^2) - 12$

1. Escolhe para cada caso o rectângulo de visualização adequado de modo a conseguires que no visor da tua calculadora apareçam as seguintes representações gráficas da função dada.



2. Discute as vantagens das diversas representações.

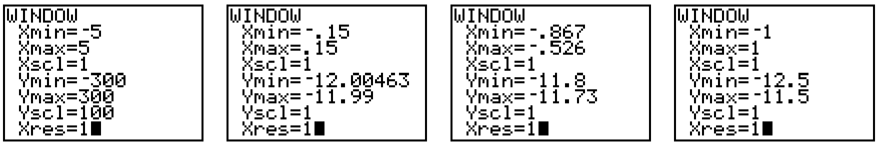
3. O mesmo exercício, mas agora para o caso da função $y = x^5 - 15x^3$



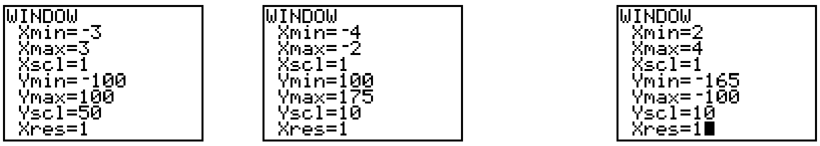
<u>Comentário</u>

Soluções possíveis:

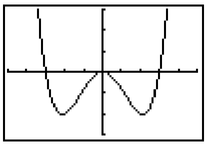
- para $y = x^2 (1 - x^2) - 12$

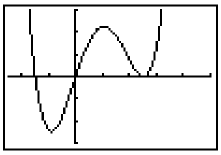


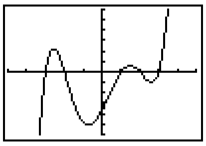
- para $y = x^5 - 15x^3$

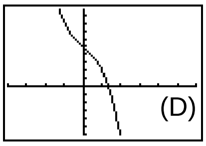


As seguintes representações gráficas correspondem a funções polinomiais de grau inferior a **6** cujos coeficientes são todos números inteiros. Descobre uma expressão analítica de uma função que possa corresponder a cada um deles.


(A)


(B)


(C)


(D)

Comentário

Soluções possíveis: (A) $y = x^2\,(x-3)\,(x+3)$ (B) $y = x\,(x+3)\,(x-5)^2$

(C) $y = (x+3)\,(x+2)\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)$ (D) $y = -x^3 - 2x + 5$

Diz qual é o valor lógico das afirmações seguintes. Em cada caso explica porquê. Nas que forem falsas podes apresentar um contra-exemplo.

a) Se um polinómio admite apenas três raízes reais então é do 3º grau.

b) Se um polinómio P tem mais raízes do que um polinómio Q, então o grau do polinómio P é maior do que o grau do polinómio Q.

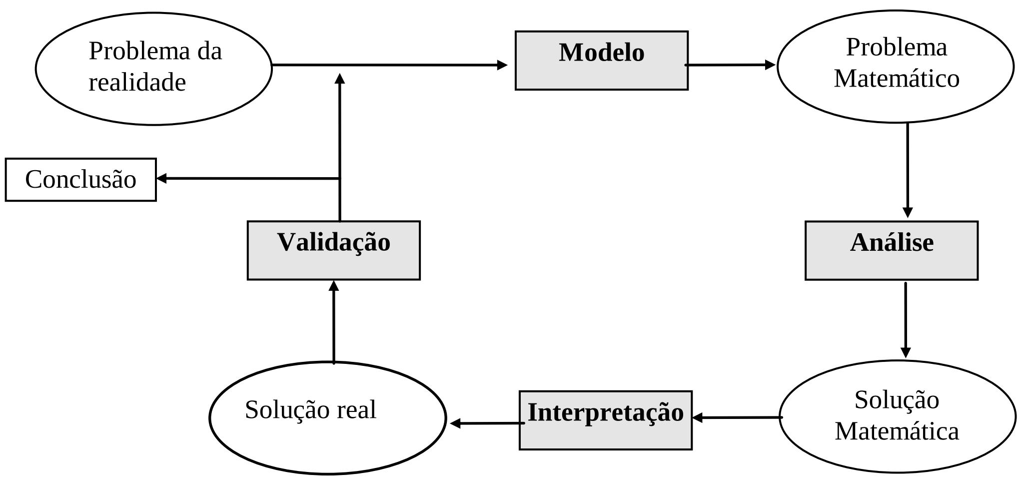
c) Qualquer polinómio de grau superior ao primeiro admite sempre, pelo menos, uma raiz real.

Modelação

O programa do ensino secundário enfatiza a importância de se resolverem problemas da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua resolução (pag. 8), considerando a Modelação Matemática como uma das *estratégias que, constituindo uma base de apoio que os alunos utilizam na sua actividade matemática independentemente do tema, atravessa o programa transversalmente* (pag. 5). Alunos que só resolvem exercícios e se treinam para exames, têm dificuldade em fazer relação entre o conhecimento adquirido e o conhecimento necessário para resolver um problema da realidade ou de outra disciplina. Em todos os níveis de escolaridade os alunos devem ter oportunidade de fazer discussões, realizar trabalho prático, fazer investigação, resolver problemas e aplicar a matemática em situações da vida real.

O processo de modelação

O processo de modelação pode ser representado pelo seguinte esquema:



<u>Modelo</u> - Define o problema da realidade.

A fase de organização do modelo está no cerne de todo o processo de modelação matemática.

É importante fazer escolhas simplificadas que preservem as caracterísiticas essenciais da situação real, evitando um modelo desnecessariamente complicado. Há duas fases fundamentais na organização do modelo:

- decidir quais são as variáveis relevantes mantendo a lista de variáveis o mais curta possível;
- procurar relações que liguem as variáveis escolhidas.

Análise - Resolve o problema matemático.

Interpretação - Interpreta a solução em termos da realidade.
Quando fazemos modelação de "problemas reais" é importante lembrar que as respostas pretendidas são as"reais". Se se está a tentar fazer uma estimativa da despesa anual com um carro uma resposta como 100 000$00 é o que se pretende e não uma fórmula algébrica.

Validação - Compara a solução com a realidade. Se a solução não for compatível com a a realidade, então deve-se voltar ao início, reformulando o modelo.
A solidez de um modelo depende da adequação com que ele representa a realidade no contexto do problema que se pretende resolver.

Normalmente um modelo precisa de ser melhorado. Terá de se iniciar o processo as vezes que forem necessárias para que o modelo seja considerado suficientemente bom.

No trabalho com os alunos os modelos encontrados são necessariamente simples. À medida que vão avançando no seu percurso escolar os modelos poderão ser cada vez mais sofisticados. È importante que os alunos ganhem consciência das limitações dos modelos com que trabalham.

Muitas vezes o processo de modelação não é completo sendo o modelo sugerido e os alunos percorrem as outras três fases.

No problema que se segue " Um negócio de revistas" podem ser identificadas as várias etapas do processo de modelação. Este problema pode ter várias formulações de acordo com os objectivos, as características da turma, o tempo disponível.

Um Negócio de Revistas

Um grupo de amigos pretende ganhar algum dinheiro fazendo e vendendo uma revista. Um professor simpático ofereceu-se para lhes arranjar material e papel grátis, pelo menos para os primeiros números.

1. Faz uma lista de todas as decisões importantes que devem ser tomadas.

2. Investiga quantos compradores potenciais há na escola.

3. A que preço deve ser vendida a revista para que o lucro seja máximo?

(Baseado em "The Language os Functions and Graphs", Shell Centre for Mathematical Education)

Modelo

Para definir quais as variáveis que queremos ter em conta e procurar relações entre elas é necessário começar por fazer uma lista completa dos factores que podem influenciar a solução:

- Qual deve ser o tamanho da revista? (**n** páginas)
- Quantos redactores serão precisos? (**r** redactores)
- Quanto tempo demorará escrevê-la (**t** horas)
- A quem se dirige a revista? (aos colegas da escola?)
- Que assuntos deve tratar? (desporto, notícias, humor...?)
- Quantas pessoas a comprarão? (**c** compradores)
- Que preço se deve fixar? (**p** escudos)
- Que lucro se obterá? (**x** escudos)
- Quanto se poderia gastar em publicidade? (**a** escudos).

Algumas das questões da lista dependem de outras. Por exemplo, para um número fixo de redactores, quanto maior for a revista, mais se demora a escrevê-la.
É necessário encontrar outras relações que se pensem dever ser consideradas.
Efectuar um inquérito a uma amostra em que se pergunta, por exemplo, que quantia estão dispostos a pagar por uma revista.

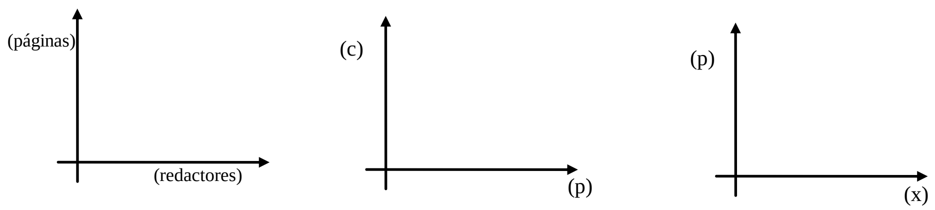
O modelo encontrado depende das opções que forem tomadas.

Se tivermos por objectivo isolar o aspecto da comercialização da revista podemos optar por considerar apenas as variáveis ***c*, *p*** e ***x*** e tentar relacioná-las.

Vamos então imaginar que optámos por relacionar **c** com **p** e **p** com **x**.

É necessário descobrir as fórmulas que estabelecem as relações anteriores; para isso os alunos podem:

- tratar os dados do inquérito.
- representar graficamente as relações escolhidas;



Análise

Trata-se agora de resolver matematicamente o problema de saber a que preço deve ser vendida a revista para que o lucro seja máximo. De acordo com o modelo escolhido, usar os gráficos e as fórmulas para descobrir o preço de venda que faz com que o lucro seja máximo.

Interpretação

Comparar os valores encontrados a partir do modelo com os resultados do inquérito.

Validação

Fazer uma revista experimental, vendê-la ao preço indicado pelo modelo e confrontar os resultados.

Eventualmente reformular o modelo e repetir o processo.

AVALIAÇÃO

É hoje consensual que a avaliação deve fazer parte integrante da aprendizagem e deve estar de acordo com o modo como se aprende.

No programa é indicado (pag. 14) que *o professor deve prever, desde o início do ano, momentos para o desenvolvimento de trabalhos individuais, trabalhos de grupo, trabalhos de projecto e actividades investigativas*. Devem então ser criadas condições para que ao longo da sua aprendizagem os alunos tenham oportunidade de desenvolver formas de trabalhar e de aprender diversificadas e utilizar várias ferramentas matemáticas. É natural que a avaliação recaia sobre tudo aquilo que o aluno faz ao longo do seu percurso. Há ainda competências transversais que não são do domínio restrito da disciplina de Matemática (escrever, ler, expor, argumentar, cooperar com os colegas, etc.), mas que devem ser tidas em conta na avaliação.

O programa que agora entra em vigor refere (pag.13) *que o professor não deve reduzir as suas formas de avaliação aos testes escritos, antes deve diversificar as formas de avaliação de modo a que cerca de metade seja feita usando outros instrumentos que não os testes clássicos.* É referido que *as indicações sobre avaliação devem ser procuradas não tanto no pequeno texto sob este título, mas mais no corpo do programa, nos diversos elementos de trabalho sugeridos* (pag. 2). No programa, podemos ainda ler (pag. 17) *que as indicações metodológicas, ao sugerir actividades e preocupações a ter, acabam por sugerir diversificação de tipos de instrumentos de avaliação das aprendizagens.*

Assim, no que se refere às funções do 10º ano, seleccionámos a seguinte referência (pag 21): *Um aluno deverá registar por escrito as observações que fizer ao usar a calculadora gráfica ou outro material, descrevendo com cuidado as propriedades constatadas e justificando devidamente as suas conclusões relativamente aos resultados* *esperados (para desenvolver o espírito crítico e a capacidade de comunicação matemática).*

Os exemplos que a seguir apresentamos pretendem exemplificar tipos variados de instrumentos de avaliação a ser utilizados, recordando que os testes apenas devem valer cerca de metade. É vulgar os professores manifestarem algumas preocupações pelo facto dos alunos estarem sujeitos a provas globais e exames que são formas de avaliação com determinadas características (escritas, individuais, com tempo limitado) idênticas às dos tradicionais testes escritos. No entanto estas provas ou exames valem 25% ou 30%. Por serem provas de determinado tipo, a classificação obtida nessas provas não deve nem pode ser comparada com a da avaliação contínua. Ao considerar-se a necessidade de utilizar diversos instrumentos de avaliação pressupõe-se que vão ser avaliados aspectos diferentes da aprendizagem.

Exemplos de tipos de instrumentos de avaliação

O programa (pag 13) recomenda *fortemente que em cada período um dos elementos de avaliação seja obrigatoriamente uma redacção matemática que reforce a importante componente da comunicação matemática*.

Qualquer relatório sobre a resolução de um problema, comentário, opinião, projecto, actividade de investigação, etc. desenvolve a comunicação matemática. Pode ter uma vertente escrita e outra oral ou só uma delas. As dificuldades que muitas vezes se colocam referem-se à forma de avaliar este tipo de trabalho. Os parâmetros de avaliação têm que ser adaptados a cada trabalho, mas genericamente devemos ter em conta os seguintes aspectos:

<u>Aspectos a ter em conta na apresentação de um trabalho oral</u>

- Correcção e clareza da linguagem
- Correcção e clareza dos raciocínios
- Organização
- Criatividade na apresentação
- Correcção dos conceitos matemáticos envolvidos
- Descrição e justificação dos procedimentos utilizados

- Adequação da exposição às características dos conceitos matemáticos envolvidos

Aspectos a ter em conta na apresentação de um trabalho escrito:

Todos os aspectos referidos na apresentação de um trabalho oral e ainda o aspecto gráfico e a ligação dos elementos gráficos ao texto.

Trabalhos individuais

Para além dos tradicionais testes escritos devem ser pedidos aos alunos relatórios sobre algumas das actividades desenvolvidas individualmente ou em grupo. Essas actividades podem ser mais ou menos prolongadas no tempo. Para além da maioria dos problemas que são apresentados no capítulo "Actividades para a sala de aula" podemos sugerir a título de exemplo os seguintes: Jogos Olímpicos (pág.5); Leitores de CD (pág.39); Gráficos de uma função (pág.67); Decomposição de uma substância (pág.34).

Questões como as que se seguem podem também ser colocadas em testes, propostas para trabalho de casa ou serem tratadas na aula:

> A recta que passa pelos pontos **A (1, 2)** e **B(- 2, - 2)** corresponde a uma função de proporcionalidade directa?

> Todas as rectas de equação $y = a\,x + a$ passam por um mesmo ponto. Quais as coordenadas desse ponto?
> Como encontrar as coordenadas do ponto recorrendo a um processo algébrico?

Trabalhos de grupo

Investigações rápidas para fazer em grupo e apresentar um comentário

Para que os alunos desenvolvam o poder de argumentação, a capacidade de comunicação e o espírito de colaboração é fundamental que tenham oportunidade de trabalhar muitas vezes em grupo (grupos de 4/5 elementos ou pares). Também do ponto de vista da aprendizagem dos conceitos matemáticos há uma grande vantagem em os alunos poderem confrontar o seu trabalho com o dos colegas percebendo que muitas vezes encontram caminhos diferentes para resolver um problema ou mesmo soluções diferentes para a questão colocada. É ainda importante perceber que os contributos individuais são decisivos para encontrar uma solução mais geral.

Indicam-se a seguir algumas questões que têm vantagem em ser trabalhadas em grupo:

Seja f uma função polinomial. Em que condições é que se pode garantir que:

a) f é uma função par?

b) f é uma função ímpar?

Indicar a expressão analítica e fazer o esboço do gráfico de uma função:

a) do **1º grau** que não tenha nenhum zero.

b) do **1º grau** que admita como zero x **= 0,773.**

c) do **2º grau** que não tenha zeros.

d) do **2º grau** que admita como zero x **= 0,773.**

e) do **2º grau** que admita dois zeros.

f) do **2º grau** que admita como zero x **= 0,5** e seja crescente de -4 a -2.

g) do **3º grau** que admita como único zero x **= 0,773.**

h) do **3º grau** que admita somente dois zeros.

i) do **3º grau** que admita como zero x **= 0,5** e seja decrescente de -1 a 1.

j) do **4º grau** que não tenha zeros.

l) do **4º grau** que admita somente um zero.

m) do **4º grau** que admita dois zeros.

Quantos zeros pode ter uma função polinomial do

- 1º grau? - 2º grau? - 3º grau? - de grau n?

Trabalhos de projecto

Estes trabalhos são trabalhos de investigação mais prolongados no tempo que os alunos poderão fazer um por período. Alguns destes trabalhos podem ter ligação à Àrea Escola ou a outras disciplinas como por exemplo a Física ou a Economia.

Os trabalhos de projecto são preferencialmente feitos em grupo, podendo uma parte ser feita dentro da sala de aula e outra fora da aula desde que haja na escola condições mínimas para que os alunos se possam reunir.

No início deste tipo de trabalho é natural que os alunos apresentem dificuldades devendo por isso serem orientados. Em todos os trabalhos deve ser elaborado um relatório final, individual ou em grupo ou com uma parte individual e outra em grupo.
Em qualquer caso deve ser fornecido aos alunos um guião de elaboração do relatório. Este guião, em conjunto com os aspectos referidos para a avaliação de qualquer trabalho escrito ou oral, servirá de base para definir os parâmetros de avaliação do trabalho. Um guião possível a ser entregue aos alunos é o seguinte:

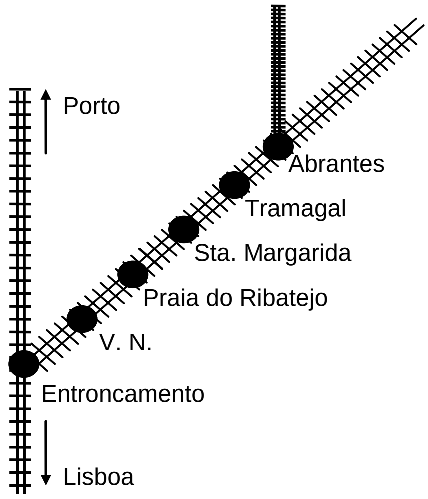
Guião para elaboração de relatório final

Na elaboração do relatório deves contemplar, entre outros, os seguintes aspectos:

- título
- objectivo do trabalho
- materiais utilizados
- descrição do processo, das tentativas realizadas e das dificuldades
- conclusões
- comentários
- bibliografia

Apresentam-se a seguir um conjunto de actividades que podem ser realizados pelos alunos, na perspectiva que indicámos.

UM PROBLEMA FERROVIÁRIO



Duas cidades, Entroncamento e Abrantes, estão a 40 Km de distância e são servidas por uma linha de caminho de ferro.

Às nove horas, vindo de Lisboa, parte do Entroncamento o rápido intercidades com destino à Beira Baixa, o qual circula, sem paragens, até Abrantes, à velocidade de 100Km/h.

Às nove horas e cinco minutos parte também do Entroncamento o regional para a linha do Leste à velocidade de 80 Km/h, com paragens de 2 minutos nas estações de Vila Nova da Barquinha (Km 8), Praia do Ribatejo (Km 16), Santa Margarida (Km 24) e Tramagal (Km 30).

Um terceiro comboio de mercadorias, o "Carvoeiro", que circula no sentido Beira Baixa/Lisboa à velocidade de 60 Km/h, recebe ordem de partida da estação de Abrantes às nove horas.

Acontece que na linha do Entroncamento/Abrantes, por ser de via única, os comboios só poderão cruzar-se nas estações acima indicadas.

Nos cruzamentos é dada prioridade absoluta aos comboios de passageiros, isto é, em caso algum os comboios de passageiros deverão esperar numa estação pela chegada, em sentido contrário, dos comboios de mercadorias.

Por razões técnicas um comboio não pode partir de uma estação antes de passado um minuto após a chegada ou a partida de outro comboio.

- Qual será a hora prevista para a chegada do "Carvoeiro" ao Entroncamento?

Sugestão: Resolve o problema graficamente, utilizando uma folha de papel milimétrico.

(problema proposto por António Graça Pereira)

Flutuar dentro de um avião!

Lê com atenção a notícia publicada no Público de 30/4/94 “ Às cambalhotas num avião” e observa o gráfico que descreve a trajectória do avião. Considera, para facilitar a leitura, o ponto I como origem de contagem do tempo.

1. Entre que instantes é produzido o fenómeno da microgravidade?

2. Em que instante se iniciou o voo parabólico? E em que instante atingiu o avião a altura máxima? Qual foi essa altura?

3. Designa por f a função que te permite descrever a trajectória do avião no período de microgravidade. Qual o valor de $f(20)$, de $f(35)$ e de $f(25)$?

4. Indica as coordenadas do vértice da parábola.

5. Tenta descobrir a expressão analítica da função f.

6. Confirma os valores que indicaste em 3.

7. A função f tem zeros? Quais? Terão algum significado neste problema?

8. Imagina-te nesta viagem e escreve uma carta a um amigo relatando-lhe o acontecimento. Descreve a tua emoção mas não esqueças também o fenómeno científico.

Artigo:

Relativamente a este trabalho consultar a revista “*Educação e Matemática”* nº 35.

DEPÓSITOS BANCÁRIOS E TAXAS DE JURO

Um banco publicou este anúncio nos jornais diários.

Compara os valores da tabela com os do quadro.

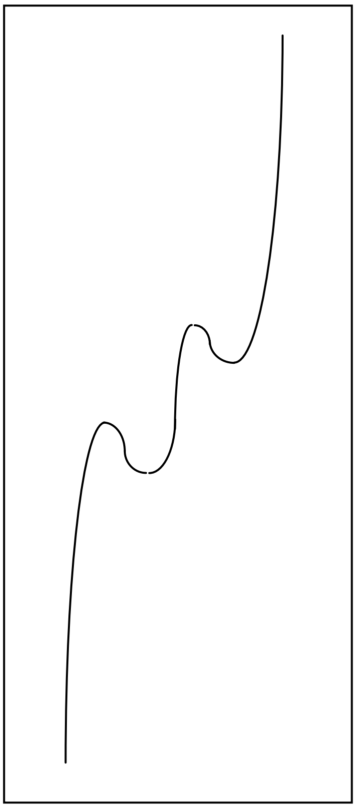
Mostra porque é que "os números não mentem", ou seja:

- Como foi calculada a Taxa Nominal Bruta Anual? Exemplifica para os casos em que o saldo é 200, 300, 500 e 1000 contos.
- Se depositares 1500 contos qual é a Taxa Nominal Bruta Anual que o banco te vai pagar?
- Se não mexeres na conta, quanto terás ao fim de 1 ano? E de 2?
- Se os juros se forem acumulando, quantos anos serão precisos para a tua conta duplicar? E triplicar? Explica o teu raciocínio.

Comentário

Uma folha de cálculo é um recurso bastante adequado à resolução deste problema.

Uma investigação com funções cúbicas
e a calculadora gráfica



Este pode ser o gráfico de uma função quadrática?
E cúbica?
Porquê?
Investiga e elabora um relatório o mais completo possível da tua investigação.

Sugestão:

Faz um estudo da função cúbica

$y = \mathbf{a}\, x^3 + \mathbf{b}\, x^2 + \mathbf{c}\, x + \mathbf{d}$. Para isso:

- estuda $y = x^3$ e $y = -x^3$, verifica nomeadamente número de zeros, monotonia, domínio, contradomínio, continuidade, etc..,
- estuda $y = (x - 2)^3$ e $y = x^3 + 2$
- experimenta depois $y = x^3 - 3x^2 + 2x$, nos rectângulos de visualização

[-10 , 10] x [-10 , 10] e

[-3 , 3] x [-2 , 2]

- tenta fazer conjecturas sobre os possíveis aspectos do gráfico de uma função definida por um polinómio do 3º grau.
- faz um estudo mais organizado fazendo variar cada um dos coeficientes **a**, **b**, **c** e **d** separadamente. Atribui valores positivos e negativos, inteiros e fraccionários, valores grandes e próximos de zero, etc.
- regista de forma cuidada os esboços dos gráficos, as tuas conjecturas, as tuas conclusões.
- Compara o teu estudo com os dos teus colegas.

adaptada de "Algebra in a Technological World"

Comentário

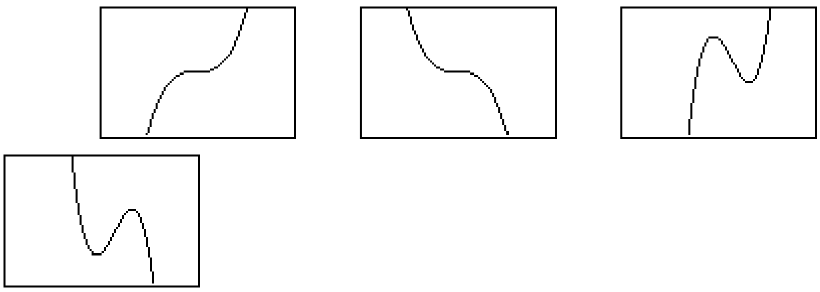
Esta actividade deve ser realizada depois do estudo da família de funções

$y = ax^2 + bx + c$.

Este pode ser um trabalho de investigação a iniciar na aula e terminar em casa.

Os alunos podem apresentar à turma de forma sucinta as suas conclusões.

Provavelmente os alunos chegarão à conclusão de que os gráficos das funções polinomiais de grau 3 têm um aspecto do tipo indicado a seguir (tipo "nadador"). No entanto na altura da apresentação dos trabalhos o professor deve aproveitar para fazer alguns comentários sobre as conclusões desta investigação e nomeadamente chamar a atenção para o facto de o gráfico de qualquer função cúbica apresentar um dos aspectos abaixo.



Para a avaliação deste trabalho, para além dos aspectos já referidos e que se aplicam de forma genérica a todos os trabalhos, deve ser considerado:

- se o aluno atribuiu aos parâmetros valores positivos, negativos, zero, inteiros e não inteiros, valores próximos de zero e valores muito grandes...
- se as conjecturas efectuadas são coerentes com as experiências realizadas.

RECURSOS

O programa ajustado que agora entra em vigor pressupõe a possibilidade de uso de materiais e equipamentos diversificados (ver págs. 10 e 11). Dá-se destaque aos equipamentos tecnológicos, referindo nomeadamente: " *É considerado indispensável o uso de calculadoras gráficas que desempenham uma parte das funções antes apenas possíveis num computador (...) um computador ligado a um "data-show" para demonstrações, simulações ou trabalho na sala de aula com todos os alunos ao mesmo tempo".*

É ainda referido nestas páginas não ser possível atingir alguns objectivos gerais da disciplina de Matemática "*sem recurso à dimensão gráfica e essa dimensão só é plenamente atingida quando os alunos traçam uma grande variedade de gráficos com apoio de tecnologia adequada (calculadoras gráficas e computadores*)".

O tema II - Funções do 10º ano prevê um tratamento intuitivo com base no estudo numérico e gráfico, dando grande ênfase à ligação entre as fórmulas e as representações geométricas (ver pág.20).

Partimos pois do pressuposto que neste tema os alunos vão dispor permanentemente de tecnologia gráfica. Não é possível tratar o tema **Funções,** de acordo com as orientações do programa, se pelo menos os alunos não dispuserem todos de uma calculadora gráfica e o professor de uma cálculadora gráfica com view-screen para projecção.

Neste sentido a maioria das actividades que propomos ao longo desta brochura contam com a utilização da calculadora gráfica. Considerámos a calculadora gráfica ferramenta permanentemente na mão dos alunos, fazendo parte integrante do processo de ensino-aprendizagem, daí as referências que a ela são feitas ao longo de toda a brochura. Nesta secção iremos referir-nos apenas a outro tipo de recursos tecnológicos os computadores e os programas disponíveis que poderão com vantagem ser utilizados no tratamento deste tema. O facto de apresentarmos diversos programas não significa que os alunos os tenham que utilizar todos. Pretende-se dar uma perspectiva do que existe e apresentar as suas potencialidades no tratamento deste tema. Caberá ao professor seleccionar de acordo com as suas preferências, disponibilidade de equipamento, características das turmas, qual o software a utilizar. Na página 11 do programa são referidos um conjunto de programas de computador que podem ser utilizados no tema funções (no 10º ou nos outros anos). Optámos por apresentar um exemplo de um *"problema"* tratado com cada um dos programas que nos pareceram de mais fácil acesso aos professores e até aos alunos. Escolhemos:

- a folha de cálculo por ser um programa de uso corrente, com muitas potencialidades e que muitos alunos poderão utilizar também em casa ou na disciplina de ITI.
- um programa de gráficos (o Graphmatica) que tem um funcionamento muito simples e esta disponível na Internet (Math Archives).
- o Cabri II e o Geometer's Sketchpad porque embora sendo programas de geometria interactiva facilitam a ligação entre a geometria e as funções.
- o Modellus por ser um programa de modelação, português, de distribuição livre.

Folha de cálculo

Família de funções

Vamos estudar uma família de funções com a folha de cálculo.

comentário:

Em geral recorre-se à calculadora gráfica ou a um programa de gráficos para o estudo das famílias de funções; no entanto muitos alunos têm acesso a um computador em casa ou na escola (nas aulas de ITI, de Informática ou no Centro de Recursos) e a uma folha de cálculo onde até já sabem trabalhar. Será vantajoso que aprendam a construir uma folha de cálculo, que lhes permita analisar o efeito da mudança de parâmetros e também o comportamento em diversas regiões do domínio de uma função. Apresentamos a seguir o exemplo de uma folha de cálculo que permite o estudo de

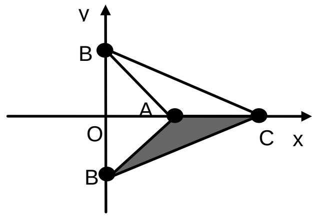
Cabri II e Geometer's Sketchpad

Num referencial o. n. do plano marcam-se os pontos A, B e C tais que:

C (0, 4) ; **A** $\in$ **[OC] ;** $\overline{\mathbf{OA}} = \overline{\mathbf{OB}}$ e **B** é um ponto do eixo das ordenadas.

Determina as coordenadas dos pontos de **A** e **B** de modo que a área do triângulo ABC seja

- máxima
- igual a 1 (na unidade de área considerada)



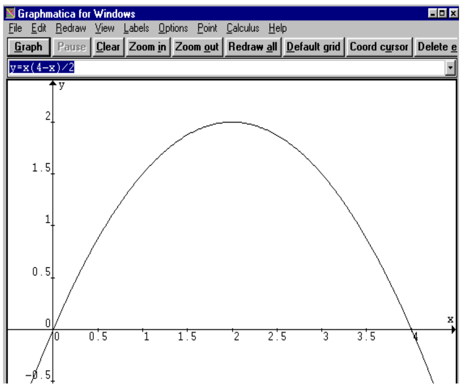
Comentário

Este problema pode ser resolvido de diversas formas, mas com o Cabri II é possível construir o triângulo nas condições indicadas e pedir a medida da área. Deslocando o ponto A faz-se variar a área até descobrir as coordenadas de A que a tornam máxima. Podemos generalizar o problema fazendo variar C e descobrindo que a área será máxima quando A for o ponto médio do segmento AC. (diquete).

A área do rectângulo

Esta figura corresponde ao problema que consiste em saber qual o rectângulo de maior área que se pode construir com um cordel de 1metro. Com o Geometer´s Skechpad é possível visualizar os diversos rectângulos de perímetro fixo ao mesmo tempo que os valores da área e ainda os gráficos das funções área e perímetro (disquete).

Graphmatica



O problema " O triângulo de área máxima" resolvido anteriormente com o *CabriII*, também pode ser resolvido com a calculadora ou com um programa de funções. Para isso, descoberta a expressão da área $A = \dfrac{\overline{OB} \times (4 - \overline{OB})}{2}$ faz-se o gráfico, que neste caso foi obtido com o programa *Graphmatica*.

Deve verificar-se à partida que **B** pode estar situado acima ou abaixo da origem pelo que há duas soluções para o ponto **B** e uma para o ponto **A**.

Modellus

Para a apresentação do programa Modellus escolhemos o problema "Lançamento da bola" que se encontra na pág.56.

Com este programa é possível representar graficamente as funções velocidade e altura num mesmo gráfico ou em gráficos separados e visualizar uma tabela. Este programa tem uma página no seguinte endereço da Internet: **http://www.sce.fct.unl.pt/modellus**.

O Modellus foi especialmente desenvolvido a pensar no ensino da Matemática e da Física.

O programa inclui um conjunto de ficheiros que podem ser utilizados directamente na sala de aula e permite também fazer animações.

Bibliografia comentada

Estes são títulos de fácil acesso, em língua portuguesa, que podem ser consultados e devem estar disponíveis em todas as escolas.

Matos, J. (1995). *Modelação Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

" ... é feita uma introdução à modelação matemática, focando-se os aspectos mais relevantes no que respeita à fundamentação do processo; é descrito e analisado o processo de modelação de situações reais; apresenta-se uma visão alargada da ideia de modelação e sugerem-se pistas de trabalho em torno das quais é possível desenvolver trabalho independente"

Silva, J. (1995). *Análise Matemática I; guia de estudo*. Lisboa: Universidade Aberta

Este guia foi elaborado para apoiar os alunos que frequentam o curso de Análise I da Universidade Aberta. Este guia tem um resumo de alguns dos conceitos abordados a nível do secundário, mas aconselhamos especialmente a leitura dos seguintes textos históricos:

- A utilidade da Matemática (pag. 28)
- A noção de limite (pag. 75)
- História da noção de função contínua (pag. 28)
- Relações entre a Matemática e Física (pag. 115)
- Matemática e Mundo Real (pag. 116)
- Relações da Matemática com a Física (pag. 117)
- Que matemática para a ano 2000?

APM E IIE (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação Escolar*. Lisboa: APM e IIE. Tradução de Curriculum and evaluation standards for school mathematics.

" As Normas constituem um documento destinado a estabelecer um quadro amplo de orientações para a reforma da matemática escolar na próxima década. Nele fica expressa uma visão do que o currículo de Matemática deve incluir em termos de prioridade e importância dos conteúdos. O desafio que colocamos a todos os interessados na qualidade da matemática escolar é o de trabalharem em colaboração, usando estas normas para o currículo e a avaliação como fundamento para a mudança, de modo que o ensino e a aprendizagem da matemática nas nossas escolas seja melhorado."

• Abrantes, P., Leal, L., *e* Ponte, J. *(organizado por). (1996). Investigar para Aprender Matemática.* (Lisboa: Matemática para Todos e Associação de Professores de Matemática)

" As tendências curriculares mais recentes para o ensino da Matemática têm insistido na necessidade de colocar no primeiro plano as capacidades de "ordem superior, isto é, aquelas que estão ligadas à identificação e resolução de problemas, ao pensamento crítico e ao uso de estratégias de natureza metacognivita. (...) estas tedências são (...) reconhecidas pelo novos programas de Matemática. (...) Os novos objectivos requerem uma modificação significativa da natureza das actividades de aprendizagem que têm sido tradicionalmente dominantes na sala de aula. (...) Uma valorização das actividades de exploração e de investigação no currículo e nas aulas surge, assim, como uma ideia central na renovação do ensino da Matemática (...) tem emergido a necessidade de aprofundar a reflexão sobre um certo número de questões centrais: O que é afinal uma investigação Que se sabe a respeito da integração de investigações nos currículos e na sala de aula? E a respeito do desempenho dos alunos em tarefas de natureza investigativa? Que lições podemos aprender a partir das experiências que se têm realizado?

(...) esta publicação pretende contribuir para o aprofundamento desta reflexão (...) por isso, fez-se uma selecção e uma organização de diversos textos com o critério de procurar dar alguma resposta às grandes questões atrás enunciadas."

Bibliografia utilizada na elaboração da brochura

Albuquerque, C., Calculadoras gráficas - alguns contra-exemplos, Boletim da SPM, n.º 34, 1996, pp. 3-13.

Capron, H. L. e Perron, J. D. (1993*). Computers & Information Systems - Tools for an Information Age*. Redwood City: The Benjamin/Cummings Publishing Company, 3.ª ed.

Concise Columbia Enciclopedia, Microsoft Bookshelf 1994, CD.

Davis, G. B. (1977). *Introduction to Computers*. Tokyo:McGraw-Hill Kogakusha, 3.ª ed.

Ellis, R. e Gulick, D. (1994). *Calculus with Analytic Geometry*. Saunders College Publishing.

Enciclopédia Cambridge da Ciência, Medidas e Computadores, Verbo, Lisboa, 1987.

Eves, H. (1969). *An Introduction to the History of Mathematics*. New York: Holt Rinehart and Winston, 3.ª ed.

Ferreira, J. (1985). Introdução à Análise Matemática. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Fiolhais, C., Valadares, J., Silva, L., & Teodoro, V. (1994). *Física 10º ano - Manual de Actividades*. Lisboa: Didáctica Editora.

Galuzzi, M., Funções, in Enciclopédia Einaudi, vol. 4 - Local/Global, Imprensa Nacional-Casa da Moeda, Lisboa, 1985.

Gonçalves, J. V. (1953). *Curso de Álgebra Superior*. Lisboa.

Guerreiro, J. S. (1986). *Curso de Análise Matemática*. Lisboa: Escolar Editora.

Guzmán, M., Colera, J., & Salvador, A. (1987). *Matemáticas - Bachillerato1 e 2*. Madrid: ANAYA.

Hairer, E. e Wanner, G. (1995). *Analysis by its History*. Springer.

Haydock, R. (1995). *Problem Solving.* Cambrige:Cambrige Umiversity Press

Heid, M.K. (1995).*Algebra in a Technological World.* Reston:NCTM

Kahaner, D., Moler, C. e Nash, S. (1989).*Numerical Methods ans Software*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Kurosh, A. (1973).*Cours d'Algébre Supérieure*. Moscou: Éditions Mir.

El lenguaje de funciones y gráficas. (1990). Servicio Editorial Universidad Del Pais Vasco. Tradução de *The Language of Functions and Graphs*. Shell Centre for Mathematical Education.

Machado, Armando, Consultório Matemático, Boletim da SPM, n.º 36, 1997, pp. 61-64.

Murdock, J., Kamischke, E. e Kamischke, E.(1997). *Advanced Algebra Through data Exploration*. California: Key Curriculum Press.

Musser, G. L. e Burger, W. F.(1997). *Mathematics for Elementary Teachers*. Prentice-Hall.

Nápoles, S. e Sequeira, L., Gráficos de Funções, Notas do seminário apresentado na FCUL, 1995.

Pina, Heitor.(1995). *Métodos Numéricos*. Lisboa: McGraw-Hill.

Sebastião e Silva, J. e Paulo, J. D. S. (1970). *Compêndio de Álgebra - Tomo 1 - 6.º Ano.* Braga: Livraria Cruz, 2.ª Ed.

Silva, J. (1994). *Princípios de Análise Matemática Aplicada*. Lisboa: MCGrawHill.

Silva, J. C., Calculadoras gráficas: mais um elo na evolução da tecnologia educativa, Internet.

Taton, R. e Flad, J.-P. (1963). *Le Calcul Mécanique*. Paris: Presses Universitaires de France, 2.ª ed.

The American Heritage Dictionary of the English Language, Microsoft Bookshelf 1994.

Varberg, D. & Varberg, T. (1996). *Algebra and Trigonometry - A Graphing Approach*. New Jersey: Prentice-Hall,Inc.

Veloso, E., Matemáticos que odiavam fazer contas, Histórias da Matemática, Público Magazine, 1994.

Veloso, E., O fascínio das cónicas, Histórias da Matemática, Público Magazine, 1995.

Locais da Internet

ENSINO DA MATEMÁTICA: **http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/**

MATH FORUM: **http://forum.swarthmore.edu/special.html**

MATH ARCHIVES: **http://archives.math.utk.edu/**

Conteúdo da disquete e como pode ser solicitada:

Ficheiros de *Excel 5* - Familia e Csete

Cabri II - Tria e Ilha

Geometer's Skectchpad - Rect

Modellus - Bola

Ficheiro de Word com o índice

Moradas para onde pode ser solicitada a disquete:

albuquer@flmc.fc.ul.pt

napoles@flmc.fc.ul.pt

Adelina Precatado
Rua Trindade Coelho, 17, R/C, Dt. Buraca. 2720 AMADORA

Paula Teixeira
Avenida António Sérgio, 3, 1º B. Reboleira. 2720 AMADORA

Moradas:

APM - ESE de Lisboa, Rua Carolina Michaellis de Vasconcelos, 1500 Lisboa

SPM - Avenida da República, 37, 4º, 1050 Lisboa.

Universidade Aberta - Palácio Ceia - Rua da escola Politécnica, 147, 1250 Lisboa.