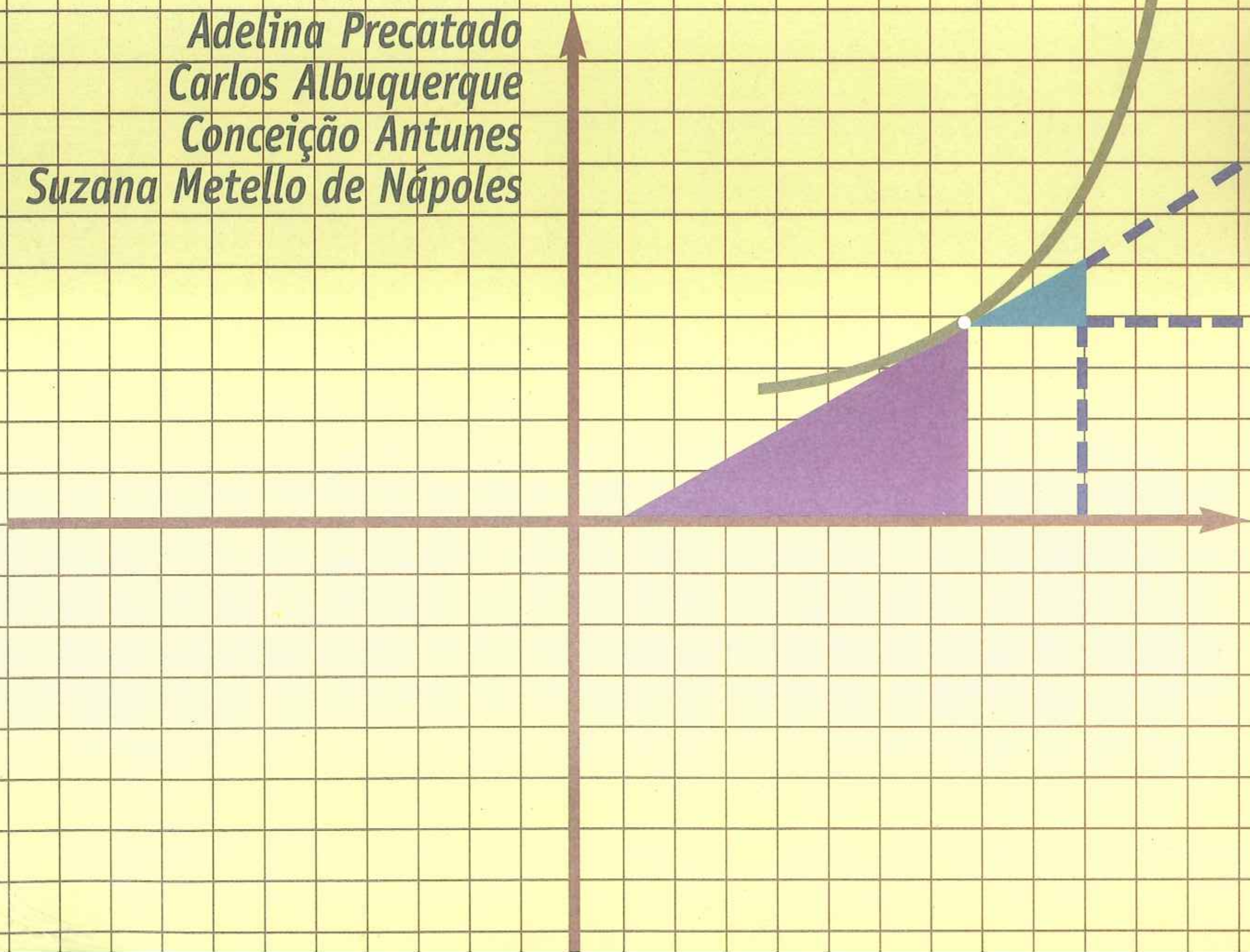
MATEMÁTICA

Ministério da Educação
Departamento do Ensino Secundário

Funções

12º ano de escolaridade

Paula Teixeira
Adelina Precatado
Carlos Albuquerque
Conceição Antunes
Suzana Metello de Nápoles



Índice

Introdução.. **7**

Fundamentação teórica **11**

Limite e continuidade **12**

Complementos sobre derivação **29**

Aplicações das derivadas ao estudo do sentido da concavidade e dos pontos de inflexão de uma função **38**

Função exponencial **48**

Função logarítmica **60**

Relação do sentido de variação da função com o sinal da derivada. Aplicação ao estudo dos extremos **53**

Alguns modelos matemáticos **70**

Actividades para a sala de aula **97**

Função exponencial e crescimento exponencial **97**

Função logarítmica **115**

Limites, assimptotas e continuidade **121**

Teorema de Bolzano-Cauchy e aplicações numéricas **124**

Funções deriváveis, problemas, modelação matemática... .... **126**

Estudo de funções **149**

Bibliografia **153**

INTRODUÇÃO

Esta é a terceira de uma série de brochuras dedicadas ao tema "Funções" com as quais se pretendeu contribuir para uma leitura das novas orientações do programa de Matemática do ensino secundário.

Segundo o texto do programa no 12º são *estudados de forma mais rigorosa conceitos já utilizados de forma intuitiva: limite, continuidade e derivada*. Por todos estes assuntos já terem sido abordados nos 10º e 11º anos, é desejável que a leitura desta brochura seja feita ligando-a às anteriores.

A fundamentação teórica apresentada constitui um complemento de informação para os professores relativo aos conceitos em estudo.

À semelhança das brochuras anteriores, propõe-se um conjunto de tarefas passíveis de serem utilizadas directamente com os alunos.

Atendendo ao facto de no 12º ano se manterem as orientações metodológicas dos anos anteriores: análise de situações da vida real, relevância do raciocínio dedutivo e da comunicação, formas de trabalho e de avaliação diversificadas, utilização obrigatória da calculadora, utilização do computador, etc., optou-se este ano por não separar as actividades relativas a avaliação e recursos. Muitas das actividades podem ser utilizadas na avaliação e algumas delas constituem propostas de projectos a apresentar aos alunos. A título de exemplo indicam-se: "*Régua de cálculo*" (pág. 69), "*Os sismos na Interne*t" (pág. 137), "*Matemática e música*" (pág. 140), "*O compasso de Descartes e a curva logarítmica*" (pág. 146).

Com vantagem, algumas das actividades são resolvidas com recurso a tecnologia já apresentada nas brochuras anteriores. Refere-se neste caso a utilização de sensores (*Arrefecimento do café*, *Matemática e música*), Internet (*Sismos na Internet*) e Geometer's Sketchpad (*O compasso de Descartes e a curva logarítmica*). O programa Modellus pode ser utilizado na resolução de diversas actividades nomeadamente as que envolvem o estudo de famílias de funções, por exemplo "*O arrefecimento do café*" (pág. 102), "*Remédios para dormir*" (pág. 105) e "*Gripe asiática*" (pág. 108)

O estudo das funções deve continuar a ser feito a partir de abordagens gráficas e numéricas, relacionando de forma sistemática os aspectos gráficos, numéricos e analíticos. Este estudo deve ter por base contextos de resolução de problemas e de aplicações da Matemática.

O processo de modelação matemática é um dos itens do tema geral do programa que foi abordado em pormenor na brochura do 10º ano e retomado na do 11º. No 12º ano os alunos dispõem de novas ferramentas (o cálculo diferencial) e de novas funções (exponencial e logarítmica) que podem usar na modelação. Com as funções exponencial e logarítmica podem ser abordados uma vasta gama de problemas com aplicação prática. Os exemplos apresentados estão longe de esgotar todos os exemplos interessantes e elementares.

A demonstração é outro dos itens do tema geral "Lógica e raciocínio matemático" pelo que se teve a preocupação de, para além das demonstrações que fazem parte do programa, apresentar outras (pág. 37 e 119) que eventualmente podem ser propostas aos alunos.

A brochura apresenta a seguinte estrutura:

- Fundamentação teórica
- Actividades para a sala de aula

Fundamentação Teórica

O Cálculo Diferencial, é tratado com maior detalhe, sendo feito um estudo que ultrapassa o âmbito do programa. Mais uma vez se salienta que este texto se destina aos professores, facultando uma informação alargada sobre os temas a abordar.

Actividades para a sala de aula

Propõe-se um conjunto diversificado de actividades que podem ser utilizadas de acordo com as opções e as preferências do professor. Continuam-se a apresentar alguns comentários que pretendem ser sugestões de abordagem metodológica ou propostas de resolução. Não se sentiu a necessidade de comentar com tanto pormenor cada uma delas atendendo a que as orientações metodológicas não sofreram alterações relativamente aos anos anteriores.

Continua-se a disponibilizar um conjunto de ficheiros com algumas das actividades propostas. Esses ficheiros serão colocados na página do Acompanhamento de Matemática cujo endereço se encontra no final desta brochura.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O presente texto destina-se a constituir um complemento de informação para os professores sobre temas constantes do actual programa do 12º ano de Matemática. Na sua elaboração prestou-se especial atenção à formalização dos conceitos de limite, continuidade e derivada, parte integrante do programa de 12º ano. O conhecimento intuitivo destes conceitos data de anos anteriores e já foi abordado nas brochuras "Funções" para os 10º e 11º anos.

Relativamente ao conceito de limite de uma função num ponto a optou-se por referir e comentar duas definições: a definição utilizada em alguns manuais do ensino superior, em que para definir limite de uma função quando x tende para a se considera que x pode assumir o valor a, e a definição utilizada nos livros de texto do ensino secundário, em que se consideram para x apenas os valores diferentes de a. A escolha de uma ou outra definição tem várias implicações que são ilustradas com exemplos. A partir da "Nota final" (pág. 17) passou-se a usar unicamente a definição escolhida pelos manuais escolares e a utilizar o símbolo "lim" que, até então, tinha sido evitado.

A inclusão destas reflexões sobre o conceito de limite destina-se a alertar para a situação, frequente em matemática, de se obterem desenvolvimentos diferentes com definições cujas diferenças podem passar despercebidas aos leitores menos atentos.

Nos "Complementos sobre derivação" são feitas as demonstrações consideradas obrigatórias no âmbito deste programa (regras de derivação da soma e do produto) e ainda as que são expressamente sugeridas no programa como facultativas. Algumas destas demonstrações podem ser apresentadas a alunos que se mostrem mais motivados para estas questões.

Apresenta-se ainda informação complementar sobre temas relacionados com a derivação.

Os novos programa prevêem, como um tema transversal, o estudo do processo de modelação matemática referindo nomeadamente que "*deve ser discutido com os alunos o processo de modelação matemática e a sua importância no mundo actual. Este tema deverá ser abordado o mais tardar a propósito dos problemas de optimização no 12º ano".* O processo de modelação matemática foi tratado genericamente na brochura "Funções" para o 10º ano. Em "Alguns modelos matemáticos" pretende-se apresentar um suporte teórico que permita aos professores tratar na sala de aula alguns exemplos, dando-se especial ênfase ao estudo das funções exponenciais e logarítmicas num contexto de aplicações variadas.

Limite e continuidade

As abordagens intuitivas dos conceitos de limite e continuidade foram oportunamente comentadas nas brochuras sobre "Funções" para os 10º e 11º anos.
O texto seguinte inclui algumas reflexões sobre a formalização destes conceitos, além do tratamento de tópicos com eles relacionados e que são referidos no programa do 12º ano.

1. Noções de limite

O programa do 12º ano indica que se deve adoptar a noção de limite de uma função f num ponto a segundo Heine, mas não refere se são de considerar apenas sucessões de pontos do domínio de f diferentes de a ou se são também de considerar as sucessões com termos iguais a a. Este facto conduz a dois conceitos diferentes de limite segundo Heine, o que origina por vezes soluções contraditórias em exercícios simples relativos à existência de limite, como se procura evidenciar neste parágrafo.

Seja f uma função definida num subconjunto X de IR e a um ponto aderente a X (isto é, não exterior a X).

Diz-se que $b \in IR$ é limite de f no ponto $a \in IR$ ou quando x tende para a se, para cada número $\delta > 0$, existe um número $\varepsilon > 0$ tal que se tem $|f(x) - b| < \delta$, para todos os $x \in X$ tais que $|x - a| < \varepsilon$.

Esta formalização deixa de ter sentido quando a e (ou) b são infinitos.

Atendendo à noção de vizinhança de um ponto, $V_\varepsilon(a) =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ se $a \in IR$, $V_\varepsilon(+\infty) = \left\{x \in IR : x > \frac{1}{\varepsilon}\right\}$, $V_\varepsilon(-\infty) = \left\{x \in IR :\ x < -\frac{1}{\varepsilon}\right\}$ escreve-se então:

Definição 1 (Cauchy)

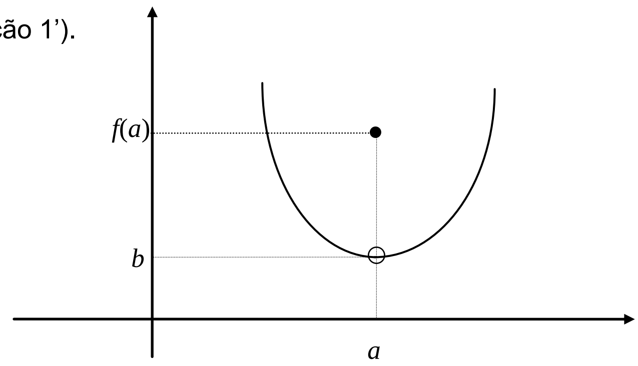
Diz-se que b é limite de f no ponto a ou quando x tende para a se, para cada número $\delta > 0$, existe um número $\varepsilon > 0$ tal que se tem $f(x) \in V_\delta(b)$, sempre que $x \in X \cap V_\varepsilon(a)$.

Tem-se a seguinte definição equivalente:

Definição 1' (Heine)

Diz-se que b é limite de f no ponto a ou quando x tende para a se, para qualquer sucessão (x_n) de elementos de X tal que $x_n \to a$ ((x_n) converge para a), se tem $f(x_n) \to b$ ($f(x_n)$ converge para b).

No gráfico seguinte ilustra-se um caso em que não existe o limite da função f no ponto a, de acordo com a definição 1 (definição 1').



Se a é ponto de acumulação de X tem sentido a seguinte definição:

Definição 2 (Cauchy, por valores diferentes**)**
Diz-se que b é limite de f no ponto a ou quando x tende para a se, para cada número $\delta > 0$, existe um número $\varepsilon > 0$ tal que se tem $f(x) \in V_{\delta}(b)$, sempre que $x \in \left(X \setminus \{a\}\right) \cap V_{\varepsilon}(a)$.

Esta definição é equivalente à seguinte:

Definição 2' (Heine, por valores diferentes**)**
Diz-se que b é limite de f no ponto a ou quando x tende para a se, para qualquer sucessão (x_n) de elementos de X, distintos de a, tal que $x_n \to a$, se tem $f(x_n) \to b$.

De acordo com esta definição, a função do exemplo anterior tem limite b no ponto a, sendo b diferente de $f(a)$.

Observações:

1. Para não sobrecarregar o texto, a designação "definição 1" abrange as versões equivalentes e analogamente para a designação "definição 2".

2. No caso em que o ponto a não pertence a X tem-se $X \setminus \{a\} = X$ e as definições 1 e 2 (limite por valores diferentes) coincidem. Recorde-se que um ponto aderente que não pertence a um conjunto é necessariamente um ponto de acumulação desse conjunto.

3. Embora a definição 1 (definição 1') se aplique em todos os casos em que a definição 2 é aplicável, uma vez que todos os pontos de acumulação de um conjunto são pontos aderentes a esse conjunto, ela não é mais geral que a definição 2. São definições diferentes, conforme se ilustra no exemplo anterior: o ponto considerado é um ponto de acumulação, não existe limite de acordo com a definição 1 e existe limite de acordo com a definição 2 (limite por valores diferentes).

4. De acordo com a definição 1(definição 1'), se existe o limite de f num ponto $a \in X$, esse limite é igual a $f(a)$.

5. De acordo com a definição 2 não faz sentido falar em limite de uma função num ponto que seja ponto isolado.

6. De acordo com a definição 1, o limite da função num ponto isolado $a \in X$ é igual a $f(a)$.

7. Observe-se que no caso em que a é infinito as definições 1' e 2' (limite por valores diferentes) coincidem. Assim, no caso das sucessões (que são funções de variável natural) não há lugar a dois conceitos de limite, uma vez que se trata do caso $a = +\infty$, o que legitima a expressão "sucessão que tende para ..." .

A definição 1 permite demonstrar uma proposição relativa ao limite da função composta. Esta proposição deixa de ser verdadeira se se optar pela definição 2 (limite por valores diferentes). Mais precisamente, usando o conceito de limite da definição 1, demonstra-se que:

Proposição: (Limite da função composta com a definição 1)
Sejam $\varphi : T \subseteq IR \to IR$ tal que $\varphi(T) \subseteq X$ e $f : X \to IR$.
Se $\varphi(t)$ tem limite x_0 quando t tende para t_0 (não exterior a *T*) e $f(x)$ tem limite b quando x tende para x_0, então a função composta $(f \circ \varphi)(t)$ tem limite b quando t tende para t_0.

Será que o resultado se mantém verdadeiro no caso de se considerarem limites usando o conceito de limite da definição 2 (definição 2') (limite por valores diferentes)?
A resposta é <u>não</u>.

Com efeito, sejam φ e f definidas em IR por

$$\varphi(t)=\begin{cases}0 & \text{se} \quad t\neq 1\\ 1 & \text{se} \quad t=1\end{cases} \quad \text{e} \quad f(x)=\begin{cases}1 & \text{se} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{se} \quad x=0\end{cases} \quad : \quad \text{tem-se} \quad (f\circ\varphi)(t)=\begin{cases}0 & \text{se} \quad t\neq 1\\ 1 & \text{se} \quad t=1\end{cases}$$

De acordo com a definição 2 (limite por valores diferentes), tem-se que o limite da função φ quando $t\to 1$ é $x_0=0$, o limite de f quando $x\to 0$ é $b=1$ e o limite da função composta $f\circ\varphi$ quando $t\to 1$ é igual a zero, sendo portanto diferente de b.

Caso se opte pela definição 2 (limite por valores diferentes) para se garantir que a função composta $(f\circ\varphi)(t)$ tem limite b quando t tende para t_0, é necessária uma hipótese adicional, tendo-se a seguinte proposição:

Proposição: (Limite da função composta com a definição 2)
Sejam $\varphi: T\subseteq IR\to IR$ tal que $\varphi(T)\subseteq X$ e $f: X\to IR$.
Se $\varphi(t)$ tem limite x_0 quando t tende para t_0, $f(x)$ tem limite b quando x tende para x_0 e $f(x_0)=b$, então a função composta $(f\circ\varphi)(t)$ tem limite b quando t tende para t_0.

Existem outras versões deste teorema com hipóteses ligeiramente diferentes (ver bibliografia).

Para os limites segundo as definições 1 e 2 são válidas as seguintes propriedades, que se podem demonstrar facilmente utilizando as propriedades das sucessões convergentes (isto é, com limite finito):

Sejam f e g funções definidas em subconjuntos X e Y de IR tais que $X\cap Y\neq\emptyset$ e a um ponto de acumulação de $X\cap Y$. Se f tem limite $A\in IR$ no ponto a e g tem limite $B\in IR$ no ponto a, tem-se:

(i) Existe o limite de $f\pm g$ no ponto a, igual a $A\pm B$.

(ii) Existe o limite de $f\,g$ no ponto a, igual a AB.

(iii) Se $B \neq 0$, a função $f\ /\ g$ tem limite no ponto a, igual a $A\,/\,B$.

Estas propriedades mantêm-se verdadeiras quando A e (ou) B são infinitos, exceptuando-se os casos de indeterminação : $\infty - \infty,\ 0\,/\,0, \infty\,/\,\infty, 0.\infty$.

Exemplo

As funções definidas em IR por $f(x) = x^4\left(2+\sqrt[3]{x}\right)$ e $g(x) = 3x - x^3$ têm limite igual a zero no ponto zero, o que conduz a uma indeterminação do tipo 0/0 para o quociente $f\,/\,g$, definido em $IR \setminus \left\{\ 0, \pm\sqrt{3}\right\}$.

Como $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^4\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{3x-x^3} = \dfrac{x^4\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{x\left(3-x^2\right)} = \dfrac{x^3\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{3-x^2}$, o quociente $f\,/\,g$ tem limite zero no ponto a.

Nota final

Autores de textos de Análise usam as definições 1 e 1' (por exemplo J. S. Guerreiro, *Curso de Análise Matemática*; J. Dixmier, Cours de *Mathématiques du Premier Cycle*; M. Figueira, **Fundamentos de Análise Infinitesimal**) outros usam as definições 2 e 2' (por exemplo Apostol, *Cálculo*, volume I; Smirnov, *A Course of Higher Mathematics*, volume I; Vicente Gonçalves, *Curso de Álgebra Superior*). Jaime Campos Ferreira adoptou as definições 1 e 1' em 1985 quando redigiu o texto "Introdução à Análise Matemática" contrariamente ao que tinha feito em "Lições de Análise Real" , 1973-1974, IST, onde tinha adaptado as definições 2 e 2' (limite por valores diferentes). A definição correntemente utilizada nos manuais do ensino secundário é, desde a década de 40, a definição 2'. Da análise dos novos manuais disponíveis para o 12º ano, verifica-se que é a definição 2' que continua a ser utilizada. Por isso, nesta brochura será adoptada a definição 2'

2. Limites laterais

Definição: Chama-se limite de f à **esquerda** no ponto a (ou quando x tende para a por valores menores que a), e escreve-se $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, ao limite no ponto a da restrição de f ao conjunto $X_a^- = \{x \in X : x < a\}$.

Chama-se limite de f à **direita** no ponto a (ou quando x tende para a por valores maiores que a), e escreve-se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, ao limite no ponto a da restrição de f ao conjunto $X_a^+ = \{x \in X : x > a\}$.

Os limites de f à direita e à esquerda do ponto a são usualmente referidos **como limites laterais no ponto a**.

Utilizando sucessões tem-se então:

(i) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = A$ se para qualquer sucessão (x_n) de pontos de X menores que a, tal que (x_n) tende para a a sucessão $(f(x_n))$ tende para A.

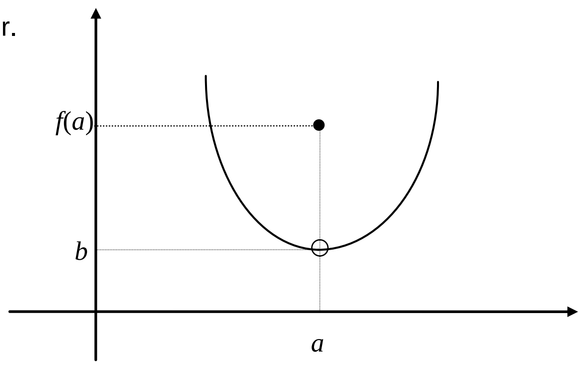
(ii) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = B$ se para qualquer sucessão (x_n) de pontos de X maiores que a, convergente para a a sucessão $(f(x_n))$ converge para B.

Observação

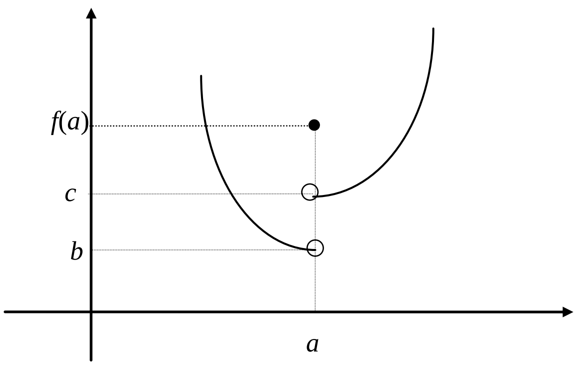
Atendendo a que $X_a^+ \cup X_a^- = X \setminus \{a\}$, se existem limites laterais iguais no ponto a, existe limite no ponto a com o mesmo valor. Reciprocamente se existe limite no ponto a existem os limites laterais com o mesmo valor.

Exemplos:

1. Retome-se o exemplo anterior. Existem neste caso os limites laterais de f no ponto a, ambos iguais a b pelo que existe limite da função no ponto a.



2. Tem-se neste caso que o limite à esquerda de a é b e que o limite à direita de a é c. Não existe limite da função no ponto a.



3. A função definida em $IR \setminus \{0\}$ por $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ não tem limites laterais no ponto $a = 0$. Com efeito, tomando em IR^+ as sucessões $x_n = \frac{1}{n\pi}$ e $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ tem-se que $x_n \to 0$ e $y_n \to 0$, mas $f(x_n) = 0 \to 0$ e $f(y_n) = 1 \to 1$, pelo que não existe limite à direita no ponto $a = 0$. Para verificar que não existe limite à esquerda no ponto $a = 0$ basta tomar as sucessões $u_n = -\frac{1}{n\pi}$ e $v_n = -\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$.

3. Infinitésimos e infinitamente grandes

Conforme se refere em “Notas históricas” no capítulo sobre “Limites de sucessões” do Compêndio de Álgebra (6ºano) de J. S. Silva e J.D., Silva Paulo, já desde a antiguidade que os matemáticos tentaram conceber toda a grandeza contínua positiva como soma de uma infinidade de grandezas infinitamente pequenas. Adoptando uma unidade de comprimento, estas grandezas deveriam ser comprimentos, por um lado positivos, mas por outro lado menores que qualquer submúltiplo da unidade. Tratava-se pois de entes contraditórios, cuja existência era impossível pelo princípio da não contradição. Admitindo a existência destas grandezas infinitamente pequenas ou infinitésimos, os percursores do Cálculo Infinitesimal (com destaque para Cavalieri (1598-1647)), não só chegaram à determinação de áreas e volumes, como também conseguiram resolver vários problemas de mecânica. A utilização dos infinitamente pequenos constituía nesta fase um método empírico. Ainda em finais do século XVIII Lagrange escrevia a propósito da matemática: "*esta ciência é um formigueiro de contradições e se, apesar disso, conduziu a grandes resultados, é porque a infinita clemência de Deus dispôs as coisas de modo que os erros se compensassem uns aos outros*". Trinta anos depois, Cauchy, ao tratar sistematicamente os infinitésimos como variáveis tendentes para zero e dando uma definição lógica rigorosa da noção de limite, conseguiu construir a análise matemática sobre uma base racional.

A ideia de infinito foi durante muito tempo extremamente perturbadora, sendo considerada incompreensível pelos clássicos gregos, o que constituiu um entrave ao progresso científico. O significado etimológico de "infinito" é "não acabado". O que repugnou à mentalidade grega foi a ideia de "infinito actual", isto é, um infinito que se encontra realizado. Consideravam inconcebível a existência de um número infinito de instantes num intervalo de tempo, de uma infinidade de pontos num segmento de recta, etc. Já a ideia de "infinitamente grande" como uma variável que cresce para além de todo o limite, não causou grande desconforto à mentalidade grega. Estava em jogo outro tipo de infinito - o infinito potencial - isto é, que não está ainda completamente realizado. Só no século XIX, com Hilbert (1862-1943), se concluiu não levar a nenhuma contradição o facto de admitir como existente a totalidade dos números reais.

Abordam-se em seguida os conceitos de infinitésimo e de infinitamente grande num ponto, com destaque para a comparação de infinitésimos e de infinitamente grandes, isto é, para a comparação da "velocidade" com que se aproximam de zero ou de infinito. A comparação de infinitésimos e de infinitamente grandes reveste-se de grande importância, não só em questões de análise, mas também na computação.

Definição de infinitésimo e de infinitamente grande num ponto:

Uma função f diz-se um infinitésimo no ponto a, que é ponto de acumulação do seu domínio (ou um infinitésimo com $x - a$), se o limite de f quando x tende para a é nulo.

Uma função g diz-se um infinitamente grande no ponto a (aderente ao seu domínio) se o limite de g quando x tende para a é $+\infty$ ou, de forma equivalente, se $\frac{1}{g}$ é um infinitésimo no ponto a.

Exemplo:

1. As funções definidas em IR por $f(x)=x\left(2+\sqrt[3]{x}\right)$ e $g(x)=3x-x^3$ são infinitésimos no ponto zero. Para o quociente $f\ /\ g$ tem-se

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{3x-x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{x\left(3-x^2\right)}=\frac{2}{3}\neq 0.$$

Diz-se neste caso que f é um **infinitésimo simultâneo** com g no ponto a.

Definição:

Uma função f diz-se um infinitamente grande se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Exemplos:

1. As funções definidas em IR por $f(x)=2x$ e $g(x)=x+3$ são infinitamente grandes. Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=2\neq 0$, diz-se que f e g são **infinitamente grandes da mesma ordem**.

2. Uma função polinomial $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ com $a_0\neq 0$ é um infinitamente grande da mesma ordem que a função polinomial $Q(x)=a_0x^n$**.** Com efeito,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{a_0x^n}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a_1}{a_0x}+\frac{a_1}{a_0x^2}+\ldots+\frac{a_n}{a_0x^n}\right)=1$$

Resulta imediatamente que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}\cdot\frac{b_0x^m}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}\cdot\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{a_0x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}$$

Por exemplo, as funções definidas em IR por $f(x) = 2x+1$ e $g(x) = 3x + x^3$ são infinitamente grandes e $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+3x}{2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2x} = +\infty$. Diz-se neste caso que g é um **infinitamente grande de ordem superior** a *f*. Exprime-se usualmente este facto dizendo que g cresce mais depressa que *f*, sendo esta a linguagem a utilizar com os alunos.

4. Continuidade

Seja *f* uma função definida num subconjunto X de IR e a um ponto pertencente a X.
Na brochura "Funções" para o 10º ano enunciou-se (pág. 35) o conceito que deriva da concepção de continuidade de Weierstrass (1874):
A função f é contínua num ponto a pertencente a X *se para qualquer* $\delta > 0$ *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que para todo o* $x \in X$ *tal que* $|x-a| < \varepsilon$ *se tenha* $|f(x) - f(a)| < \delta$.

Esta formulação do conceito de continuidade abrange todos os elementos de X, quer sejam ou não pontos isolados. Com efeito, se a é ponto isolado, tomando $\varepsilon > 0$ de forma que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap X = \{a\}$, para todo o $x \in X$ tal que $|x-a| < \varepsilon$, tem-se que $|f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \delta$.

O conceito de função contínua no ponto a que seja **ponto de acumulação** pode ser formulado da seguinte forma:

A função f é contínua num ponto a *pertencente a* X *se existe o limite no ponto* a *e é igual a* $f(a)$.

Proposição:
A função *f* é contínua num ponto a interior ao seu domínio se existem os **limites laterais** nesse ponto e são iguais a $f(a)$.

Exemplo:

A função definida em IR por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

não é contínua no ponto $a = 0$. Com efeito, tem-se $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ mas $f(0) = 1$.

A proposição anterior é muito usada nos manuais escolares para definir continuidade em pontos interiores ao domínio de uma função e está em sintonia com a definição de limite utilizada, que só tem sentido em pontos de acumulação.

O que se deve então entender por continuidade ou não continuidade de uma função nos pontos isolados do seu domínio?

A este propósito Armando Machado, Paulo Abrantes, Raul Fernando Carvalho referem em M 12 Matemática 12º ano (1985) que:

"Uma questão que ficou em suspenso foi a de definir o que se deve entender por uma função ser ou não contínua num ponto do domínio que não seja ponto de acumulação, isto é, num ponto isolado do domínio. Embora nesse caso não faça sentido falar de limite da função no ponto, vamos dizer por definição que qualquer aplicação é contínua em todos os pontos isolados do seu domínio. Consegue-se assim que, quer o ponto $a \in X$ seja ou não ponto de acumulação, a continuidade da aplicação $f : X \to IR$ no ponto a seja equivalente ao facto de, qualquer que seja a sucessão x_n de pontos de X distintos de a que verifique $x_n \to a$, se ter $f(x_n) \to f(a)$.

... a continuidade de f no ponto a vai implicar que $f(x_n) \to f(a)$ qualquer que seja a sucessão x_n de elementos do domínio que convirja para a, quer os termos da sucessão sejam ou não todos distintos de a.

Pode-se, portanto, enunciar o seguinte resultado:

(Condição de **Heine** para a continuidade)

Sejam $X \subseteq IR$ e $f: X \to IR$ uma aplicação. Tem-se então que f é contínua no ponto $a \in X$ se, e só se, qualquer que seja a sucessão x_n de pontos de X verificando $x_n \to a$, se tem $f(x_n) \to f(a)$."

A função f diz-se contínua em $A \subseteq X$ quando é contínua em todos os pontos de A.

5. Teorema de Bolzano e aplicações numéricas

Afirmar que uma função f, contínua num intervalo $[a,b]$, assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$ é geometricamente evidente. Este facto foi usado por Euler e Gauss sem hesitações e só Bolzano (1817) entendeu que era necessário estabelecer maior rigor tanto na Álgebra como na Análise.

Conforme se referiu na brochura "Funções" para o 11º ano (ver pág.16), na demonstração do Teorema de Bolzano, tão importante como a continuidade da função é o facto de IR ser um conjunto completo (isto é, qualquer sucessão de Cauchy em IR tem limite em IR). Por exemplo, a função definida em Q (não completo) por $f(x) = x^2 - 2$, é contínua em $[1,2] \cap Q$, é tal que $f(1) = -1 < 0$ e $f(2) = 2 > 0$, e não tem qualquer zero em $[1,2] \cap Q$.

Teorema de Bolzano:

Sejam $a,b \in IR$ tais que $a < b$. Se f é uma função contínua no intervalo $[a,b]$, então f assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$, isto é, qualquer que seja $L \in [\, f(a),\ f(b)\,]$, existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = L$.

Como consequência imediata deste teorema decorre um resultado de grande interesse prático que permite justificar a existência de zeros de funções contínuas em intervalos e localizar esses zeros em intervalos do domínio da função:

Corolário do Teorema de Bolzano: Sejam $a,b \in IR$ tais que $a < b$. Se *f* é uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e $f(a) \times f(b) < 0$, isto é, se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários, a função *f* tem um zero em $]a,b[$.

Exemplo:

1. Justifique-se a existência de uma única solução para a equação $e - x = \ln x$. A função definida em IR^+ por $f(x) = e - x - \ln x$ é contínua em IR^+. Como $f(1) = e - 1 > 0$ e $f(e) = e - e - 1 < 0$, decorre do corolário anterior que a função *f* tem um zero no intervalo $]1,e[$. Como a função *f* é estritamente decrescente em IR^+, esse zero é único.

2. Considere-se a equação $x + e^x = 2$. Para determinar as suas raízes poderia ser usada a função da máquina para a determinação dos zeros da função definida em IR por $f(x) = x + e^x - 2$. Podia-se também observar que se trata de uma função contínua e que $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1{,}718282 > 0$, concluindo-se, pelo Teorema de Bolzano, que existe uma solução desta equação entre 0 e 1. Normalmente a partir daqui o processo de resolução seria gráfico. Contudo, usando o teorema de Bolzano e fazendo uma abordagem sistemática do problema obtém-se o algoritmo apresentado na brochura de funções do 11.º ano (método de bissecção, p. 17). Apresenta-se em seguida uma tabela obtida com o Excel e que exemplifica a aplicação do algoritmo a este problema:

Passo	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$(a+b)/2$	$f((a+b)/2)$	$b-a$
0	0	1	-1	1,718282	0,5	0,148721	1
1	0	0,5	-1	0,148721	0,25	–0,46597	0,5
2	0,25	0,5	–0,46597	0,148721	0,375	–0,17001	0,25
3	0,375	0,5	–0,17001	0,148721	0,4375	–0,01367	0,125
4	0,4375	0,5	–0,01367	0,148721	0,46875	0,066745	0,0625
5	0,4375	0,46875	–0,01367	0,066745	0,453125	0,026346	0,03125
6	0,4375	0,453125	–0,01367	0,026346	0,445313	0,00629	0,015625
7	0,4375	0,445313	–0,01367	0,00629	0,441406	–0,0037	0,007813

Note-se que a raiz vai ficando enquadrada em intervalos $[a, b]$ cada vez mais pequenos. No fim do passo 7 é possível dizer que quer 0,4375 quer 0,445313 são aproximações da solução com um erro inferior a 0,007813 e portanto inferior a 0,01. Indo um pouco mais longe e calculando o ponto médio deste intervalo, que é 0,441406, pode-se dizer que este valor é uma aproximação da solução com um erro inferior a $\frac{0{,}007813}{2}$ = 0,0039065.

Conforme se viu, na brochura do 11.º ano, após o passo n pode-se garantir que a solução se encontra num intervalo de diâmetro $\frac{1}{2^n}|b-a|$. Pode colocar-se aqui a questão de saber quantos passos serão necessários para assegurar que o diâmetro do intervalo obtido seja inferior a uma dada tolerância ε. Depois de introduzidos os logaritmos esta questão poderá então ser resolvida:

$$\frac{1}{2^n}|b-a| < \varepsilon \Leftrightarrow -n\ln 2 + \ln(b-a) < \ln\varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln(b-a)-\ln\varepsilon}{\ln 2}.$$

Neste caso, para chegar a um intervalo com diâmetro inferior a 10^{-3} seria necessário chegar até ao passo

$$n = 10 > \frac{\ln(1-0)-\ln(10^{-3})}{\ln 2} = 9{,}965784285.$$

Usa-se “ln” para designar os logaritmos naturais (de Napier ou de Neper). Contudo note-se que aqui não é relevante qual a base utilizada, desde que ela seja maior que 1 e que se trabalhe sempre com a mesma base.

Apresentam-se em seguida algumas consequências “quase” imediatas do teorema de Bolzano e que são susceptíveis de constituir exercícios com características demonstrativas:

A. Uma função polinomial de grau ímpar tem como contradomínio o conjunto IR .

Com efeito, seja $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots a_{n-1}x + a_n$, com $a_0 \neq 0$ e n ímpar. Se

$a_0 > 0$ tem-se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_0 x^n\left(1+\frac{a_1}{a_0 x}+\ldots+\frac{a_n}{a_0 x^n}\right) = +\infty$ e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-a_0x^n + a_1x^{n-1} - \ldots + a_n\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-a_0x^n\right)\left(1-\frac{a_1}{a_0x}+\frac{a_2}{a_0x^2}-\ldots-\frac{a_n}{a_0x^n}\right) = -\infty.$$

Dado um par de números reais m e M com $m < M$, como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, existe $a \in IR^-$ tal que $f(a) < m$ e, como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, existe $b \in IR^+$ tal que $f(b) > M$. Como f é uma função contínua em $[a,b]$ (pois f é contínua em IR) ela assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$ e, consequentemente, assume todos os valores do intervalo $[m, M]$. Sendo m e M quaisquer, resulta que f assume todos os valores de IR, isto é, o seu contradomínio é IR.

Se $a_0 < 0$ o raciocínio é análogo, tendo-se nesse caso $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Sendo o contradomínio de f o conjunto IR, pode-se concluir que **uma função polinomial de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real**.

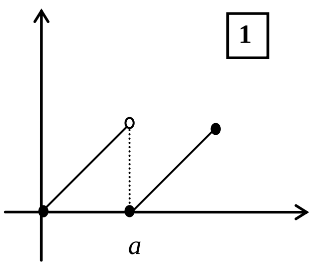
B. Se f é uma função contínua em $[a,b]$ tal que $f(a) < a$ e $f(b) > b$, a função f tem pelo menos um ponto fixo em $]a,b[$, isto é, existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = c$.

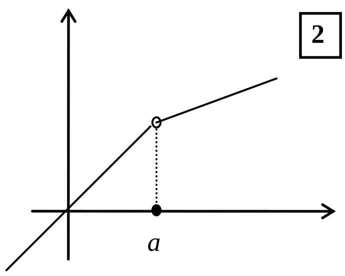
Com efeito, tome-se a função $\varphi(x) = f(x) - x$: trata-se de uma função contínua em $[a,b]$ tal que $\varphi(a) = f(a) - a < 0$ e $\varphi(b) = f(b) - b > 0$. Pelo corolário do teorema de Bolzano, a função φ tem um zero em $]a,b[$, isto é, existe $c \in]a,b[$ tal que $\varphi(c) = f(c) - c = 0$ e assim $f(c) = c$.

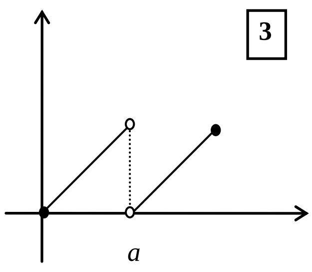
C. Se *f* e *g* são funções contínuas em $[a,b]$ **tais que** $f(a)=g(b)$**,** $f(b)=g(a)$ **e** $f(a)\neq g(a)$ **, os gráficos das duas funções intersectam-se num ponto cuja abcissa pertence ao intervalo** $]a,b[$**.** Com efeito, considere-se a função $\psi(x)=f(x)-g(x)$: trata-se de uma função contínua em $[a,b]$ tal que $\psi(a)=f(a)-g(a)=f(a)-f(b)$ e $\psi(b)=f(b)-g(b)=f(b)-f(a)$. Como $f(a)-f(b)$ e $f(b)-f(a)$ têm sinais contrários, pelo corolário do teorema de Bolzano, existe $c\in]a,b[$ tal que $\psi(c)=0$, isto é, existe $c\in]a,b[$ tal que $f(c)=g(c)$. Os gráficos de *f* e *g* intersectam-se assim no ponto $(c,f(c))=(c,g(c))$.

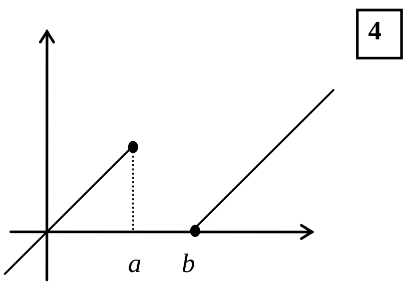
Mais alguns exemplos:

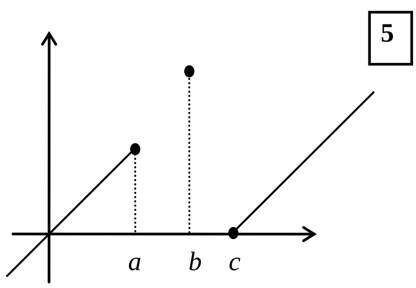
Considerem-se as seguintes representações gráficas de funções, constituídas por segmentos de recta, semi-rectas e por pontos, e analise-se a existência de limite e de continuidade nos pontos assinalados:











Em 1 existem limites laterais diferentes no ponto a, pelo que não existe o limite da função no ponto a. Trata-se, portanto, de uma função descontínua no ponto a.

Em 2 existe o limite da função no ponto a, mas esse limite é diferente do valor da função no ponto a. A função é pois descontínua no ponto a.

As funções representadas em 3, 4,e 5 são contínuas no seu domínio.

Em 3 não existe o limite da função no ponto a.

Em 4 existe o limite da função nos pontos a e b, coincidindo com o valor da função nesses pontos. Observe-se que o limite no ponta a é um limite à esquerda e o limite no ponto b é um limite à direita.

Em 5 existe o limite da função nos pontos a e c, coincidindo com o valor da função nesses pontos. Observe-se que o ponto b é um ponto isolado, pelo que não tem sentido falar em limite nesse ponto (de acordo com a definição adoptada nesta brochura).

Complementos sobre derivação

Na brochura de funções para o 11º ano já se definiu formalmente derivada de uma função num ponto (pág. 30). No contexto do 12º ano o conhecimento mais aprofundado do conceito de limite permite a demonstração de regras de derivação que têm grande aplicação prática.

Sendo o conceito de derivada definido através de um limite e tendo em conta as reflexões feitas sobre os conceitos de limite, o leitor interroga-se certamente sobre qual é a noção de limite a que se faz referência na brochura de funções para o 11º ano. Na verdade o que está em jogo quando se tratam as derivadas é o cálculo de um limite de uma razão incremental $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ quando x tende para x_0, que é um limite por valores diferentes, isto é, trata-se do limite num ponto que não pertence ao domínio da razão incremental. Nessa circunstância, e conforme foi amplamente discutido quando se compararam os conceitos de limite, não há que fazer qualquer distinção.

1. Regras de derivação

Recorde-se que:

Seja f uma função definida num intervalo aberto $I \subseteq IR$ e $x_0 \in I$.

Diz-se que f é **derivável** ou **diferenciável** em x_0 se existe e é finito o limite da razão incremental $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ quando x tende para x_0. Ao valor desse limite chama-se derivada de f no ponto x_0 e nota-se por $f'(x_0)$:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

A função f é diferenciável em I quando é diferenciável em todos os pontos de I. Tem então sentido definir em I a função derivada, que se nota por f', como sendo a função que associa a cada ponto de I o valor da derivada nesse ponto.

Conforme foi referido, a título de informação, na brochura “Funções” para o 11º ano (ver pág. 43), se f é diferenciável em x_0, então f é contínua em x_0 (não sendo a recíproca verdadeira). No contexto do programa de 12º ano esse facto pode ser comprovado facilmente. Pretende-se afinal verificar que, sendo f diferenciável em x_0, se tem $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Como

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x\text{-}x_0), \quad (x \neq x_0).$$

e $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in IR$, resulta que $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$ como se pretendia.

Apresentam-se em seguida as regras elementares de derivação (derivada da soma, do produto, do cociente; da potência de expoente natural) com as respectivas justificações, que decorrem das propriedades dos limites. Analisa-se com especial ênfase a derivação da função composta e da função inversa, e estudam-se consequências destas regras.

Sejam f e g duas funções definidas e deriváveis num intervalo aberto $I \subseteq IR$.

A. Derivada da soma

A função $f+g$ é derivável em I e tem-se $\left(f+g\right)' = f'+g'$.

Com efeito,

$$\begin{aligned}\left(f+g\right)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(f+g\right)(x+h)-\left(f+g\right)(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) = f'(x)+g'(x)\end{aligned}$$

B. Derivada do produto

A função $f\,g$ é derivável em I e tem-se $\left(f\,g\right)' = f'\,g+f\,g'$.

Com efeito,

$$(f\,g)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(f\,g)(x+h)-(f\,g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) = f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$$

A regra de derivação do produto generaliza-se, por indução, para um produto finito de funções. Mais precisamente tem-se

$$\left(f_1 f_2 \cdots f_n\right)' = f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' \cdots f_n + \ldots + f_1 f_2 \cdots f_n'.$$

Em particular, para a potência de expoente natural resulta que $\left(f^n\right)' = nf^{\,n-1}f'$

Resulta imediatamente da regra de derivação do produto que:

se $k \in IR$ a função kf é diferenciável em I e tem-se $(kf)' = kf'$, tendo em conta que a derivada de uma constante é identicamente nula.

C. Derivada do quociente

Se f não se anula e é diferenciável em I a função $\frac{1}{f}$ é diferenciável em I e tem-se

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

Com efeito,

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x+h)-\left(\frac{1}{f}\right)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(x+h)}-\frac{1}{f(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x+h)}{hf(x)f(x+h)} = \lim_{h\to 0}\left(-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\frac{1}{f(x)f(x+h)}\right) = -\frac{f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}$$

De 2 e 3 resulta que

Se a função g não se anula em I, a função f/g é derivável em I e tem-se
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f\,g'}{g^2}$.

D. Derivação da função inversa

Seja f uma função **injectiva** e **contínua** no intervalo aberto I**,** e **com derivada não nula num ponto** $x_0 \in I$**.** Então a função inversa f^{-1} é diferenciável em $y_0 = f(x_0)$ e tem-se $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Demonstração:

Tem-se

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{x - x_0}{y - y_0}}$, atendendo a que f é injectiva e portanto sendo $x \neq x_0$ podemos concluir que $y \neq y_0$.

Como f é contínua em x_0 e f^{-1} é contínua em y_0 (porque a função inversa de uma função injectiva e contínua num intervalo I ainda é contínua), tem-se que

$$x \to x_0 \Leftrightarrow y = f(x) \to f(x_0) = y_0, \text{ e assim}$$

$$f'(x_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{x - x_0}{y - y_0}} = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}}$$

Sendo $f'(x_0) \in IR \setminus \{0\}$, existe $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \lim\limits_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)} \in IR$.

Mais geralmente, tem-se que:

Se a derivada de f não se anula em I , a função inversa f^{-1} é diferenciável em $f(I)$

e tem-se $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$, $\forall y \in f(I)$ ou, formalmente,

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Exemplo:

Determine-se a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ em $]0, +\infty[$.

Tem-se $f^{-1}(y) = y^2$ e assim, $f'(x) = \dfrac{1}{\left(f^{-1}\right)'(y)} = \dfrac{1}{2y} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Mais geralmente, se $g(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in IN \setminus \{1\}$, em $]0, +\infty[$, tem-se $g^{-1}(y) = y^n$ e assim $g'(x) = \dfrac{1}{\left(g^{-1}\right)'(y)} = \dfrac{1}{ny^{n-1}} = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

E. Derivação da função composta:

Sejam I e J intervalos abertos de IR, $\varphi : J \to IR$ e $f : I \to IR$ funções tais que $\varphi(J) \subseteq I$.

Se φ é diferenciável em $t_0 \in J$ e f é diferenciável em $x_0 = \varphi(t_0)$, a função composta $f \circ \varphi$ é diferenciável em t_0 e tem-se $(f \circ \varphi)'(t_0) = f'(x_0)\varphi'(t_0)$.

Demonstração:

Tem-se

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{(f \circ \varphi)(t) - (f \circ \varphi)(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}$$

convencionando-se que para os valores de t para os quais $x = x_0$ a razão incremental $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ toma o valor $f'(x_0)$.

Como φ é contínua em t_0 (porque é derivável em t_0), tem-se que $t \to t_0 \Rightarrow x = \varphi(t) \to \varphi(t_0) = x_0$ e assim

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = f'(x_0)\varphi'(t_0) = f'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0).$$

Mais geralmente, tem-se que:

Se φ é diferenciável em J e f é diferenciável em I, a função composta $f \circ \varphi$ é diferenciável em J e tem-se $(f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t),\ \forall t \in J$ ou, formalmente, $(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi)\varphi'$.

Exemplo :

Determine-se a derivada da função definida em IR por $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$.

A função f é o resultado da composição das funções definidas em IR por $\varphi(x) = x^2 - 1$ e $\psi(u) = \sqrt[3]{u}$, sendo $f(x) = (\psi \circ \varphi)(x)$. Tem-se então $f'(x) = \psi'(\varphi(x))\varphi'(x)$ em que $\varphi'(x) = 2x$ e $\psi'(u) = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}$ e assim, $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}(2x)$.

2. Derivadas de ordem superior à primeira

Seja f uma função definida e diferenciável num intervalo aberto $I \subseteq IR$. Tem sentido definir em I a função derivada de f. Suponha-se que esta nova função f' é diferenciável em $x_0 \in I$, isto é, existe e é finito o limite quando $x \to x_0$ da razão incremental de f' no ponto x_0, $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$. Diz-se então que f é duas vezes diferenciável em x_0 e nota-se a sua segunda derivada no ponto x_0 por $f''(x_0)$ ou $f^{(2)}(x_0)$. Tem-se pois

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

Por convenção, toma-se a derivada de ordem zero de f como sendo a própria função.

Assim, para existir derivada de ordem n no ponto x_0, que se nota por $f^{(n)}(x_0)$ é necessário que a função derivada de ordem n-1, $f^{(n-1)}$ esteja definida num intervalo aberto em I (basta que $f^{(n-1)}$ esteja definida numa vizinhança de x_0), e que exista o limite de $\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$, escrevendo-se então

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

A função f diz-se n vezes diferenciável no intervalo I se estão definidas em I as funções $f',\ f'', \ldots, f^{(n-1)}$ e se $f^{(n-1)}$ é diferenciável em I.

Diz-se que a função f é infinitamente diferenciável no intervalo I se, para todo o $n \in IN$, f é n vezes diferenciável no intervalo I.

Exemplo:

Verifique-se que a função definida em IR por $f(x) = e^{3x}$ é infinitamente diferenciável em IR e calcule-se a expressão da sua derivada de ordem n.

Sendo $\left(e^x\right)' = e^x$ (ver p....) e aplicando a regra de derivação da função composta, tem-se

$f'(x) = 3e^{3x}$. Então, $f''(x) = 3^2 e^{3x}$, $f'''(x) = 3^3 e^{3x}$, ... , $f^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}$.

Esta expressão da derivada de ordem n deverá ser confirmada por indução.

3. Paridade e derivada

Seja f uma função diferenciável num intervalo aberto I centrado na origem. Tem-se que:

(i) Se f é uma função par (isto é, se $f(-x) = f(x), \forall x \in I$) a sua derivada f' é uma função ímpar (isto é, $f'(-x) = -f'(x), \forall x \in I$).

(ii) Se f é uma função ímpar, a sua derivada f' é uma função par.

Com efeito, se $f(-x) = f(x)$ tem-se $\left(f(-x)\right)' = f'(x)$ e, pela regra de derivação da função composta, $\left(f(-x)\right)' = f'(-x)(-1)$. Então, $f'(-x)(-1) = f'(x)$, isto é, $f'(-x) = -f'(x)$, o que demonstra (i).

A verificação de (ii) é análoga.

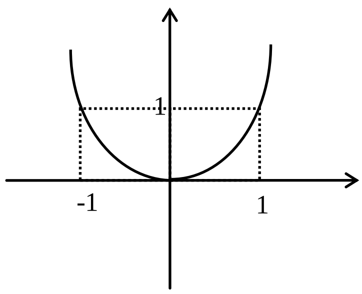
A demontração de (i) e (ii) pode ser feita directamente a partir da definição de derivada. Para verificar (ii) utilizando a noção de derivada tem-se, atendendo a que f é impar,

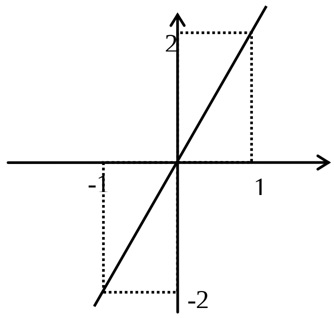
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-f(-(x+h)) + f(-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(-(x+h)) - f(-x)}{-h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f((-x)+(-h)) - f(-x)}{-h} = f'(-x),$$

pelo que f' é par.

Exemplo:

A função definida em IR por $f(x) = x^2$ é uma função par. A função derivada, $f'(x) = 2x$, é uma função impar .





Aplicações das derivadas ao estudo do sentido da concavidade e dos pontos de inflexão de uma função

No parágrafo “Extremos e Concavidades” da brochura “Funções” para o 10º ano fez-se uma breve análise do conceito de sentido da concavidade e dos pontos de inflexão do gráfico de uma função ou, mais simplesmente, do sentido da concavidade e dos pontos de inflexão de uma função (ver pág. 45).

A definição que foi dada tem uma base intuitiva, que se apoia na observação da forma geométrica do gráfico da função e na sua posição relativamente à tangente em qualquer um dos seus pontos: a função tem a concavidade voltada para cima (baixo) em $\left]a,b\right[$ se o seu gráfico se encontrar para cima (baixo) do gráfico de qualquer tangente em qualquer um dos seus pontos. Do significado geométrico da derivada decorre que: se os declives das tangentes crescem quando x cresce em $\left]a,b\right[$, o gráfico tem a concavidade voltada para cima, se os declives decrescem, o gráfico tem a concavidade voltada para baixo.

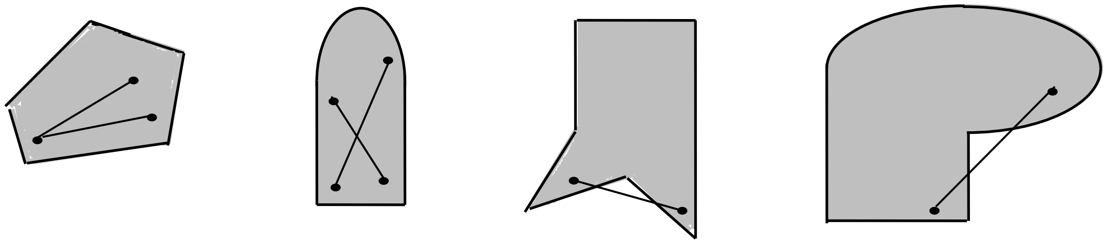
O estudo do sentido da concavidade de uma função insere-se no contexto mais geral do estudo das funções convexas, que constituem a base de um importante domínio da Análise Matemática dos nossos dias, a Análise Convexa.

Sendo o conceito de função convexa muito simples, pareceu adequado introduzir neste parágrafo uma referência muito sucinta a estas funções e enquadrar o estudo do sentido da concavidade de uma função num contexto mais geral. Pretende-se com esta opção disponibilizar aos professores informação complementar ao programa.

1. Conjuntos convexos e funções convexas

A noção de sentido de concavidade de um função f real definida num intervalo I está associada à “forma” do conjunto de pontos do plano $A_f = \{(x,y): x \in I,\ f(x) \leq y\}$.

Diz-se que um subconjunto do plano é um **conjunto convexo** se ele contém o segmento de recta definido por quaisquer dois dos seus pontos.



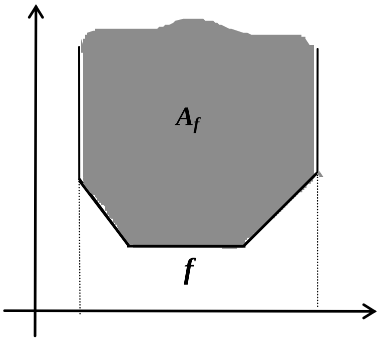
Dos quatro conjuntos representados na figura apenas os dois primeiros são convexos

Seja I um intervalo de IR e $f : I \to IR$.

A função f é **convexa** em I se o conjunto A_f de pontos do plano caracterizado por

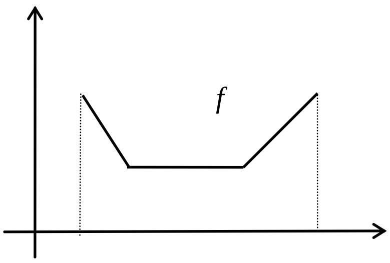
$$A_f = \{(x, y) : x \in I ,\ f(x) \leq y\}$$

é um conjunto convexo.

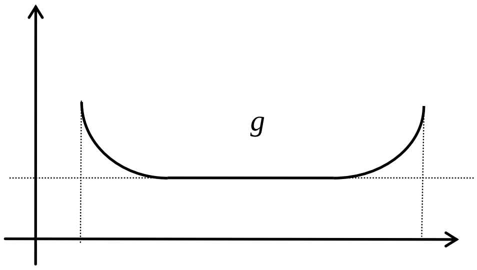


Exemplos:

A função cujo gráfico se apresenta na figura (1) é uma função convexa não derivável e a função cujo gráfico se apresenta na figura (2) é uma função convexa derivável



(1)

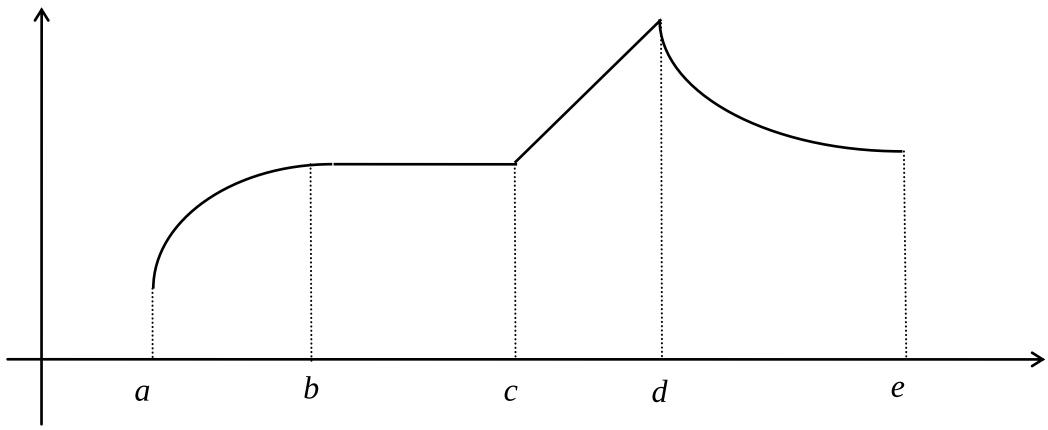


(2)

Recordando que o gráfico de uma função g está abaixo (estritamente abaixo) do gráfico de uma função h num intervalo I se $g(x) \leq h(x)$ ($g(x) < h(x)$) para qualquer x em I, a definição anterior pode ser formulada nos seguintes termos:

Seja I um intervalo de IR e $f : I \to IR$. A função f é *convexa* em I (*estritamente convexa em* I) se, para quaisquer pontos a e b pertencentes a I tais que $a < b$, todo o ponto $(x, f(x))$ com $x \in]a,b[$ está abaixo (estritamente abaixo) do segmento de extremos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

A função representada no gráfico seguinte



é estritamente convexa em $[d,e]$ e convexa no intervalo $[b,d]$.

Observe-se que no gráfico de uma função estritamente convexa não existem três pontos colineares.

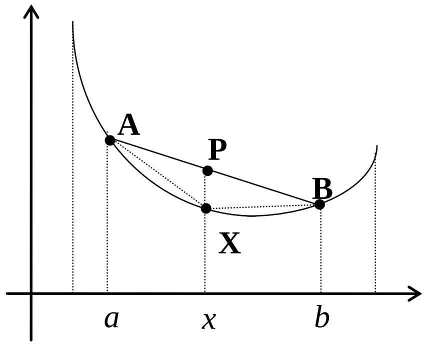
2. Funções convexas deriváveis

Tem-se a seguinte condição necessária e suficiente para que uma função derivável num intervalo seja uma função convexa:

Seja f uma função derivável num intervalo aberto I. A função f é convexa em I se e só se f' é crescente em I.

A demonstração do resultado enunciado recorre apenas a argumentos geométricos e a raciocínios muito simples, envolvendo o conceito de derivada.

Suponha-se que f é convexa em I e sejam $a,b \in I$ tais que $a<b$.



Considerem-se os pontos $\mathrm{A}(a, f(a))$, $\mathrm{B}(b, f(b))$, $\mathrm{X}(x, f(x))$ e P um ponto sobre o segmento $[\mathrm{AB}]$ com abcissa x.

Tem-se:

$$\text{declive } [\mathrm{AX}] \leq \text{declive } [\mathrm{AP}] = \text{declive } [\mathrm{PB}] \leq \text{declive } [\mathrm{XB}],$$

isto é,

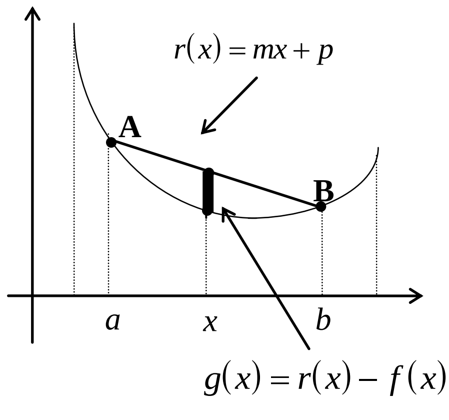
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(b)}{x-b}.$$

Como f é derivável em a e em b, passando ao limite quando $x \to a^+$ e $x \to b^-$, conclui-se que

$$f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b),$$

e assim, $f'(a) \leq f'(b)$.

Reciprocamente, suponha-se que f' é crescente em I, tomem-se dois pontos $a,b \in I$ tais que $a<b$ e verifique-se que o gráfico de f em $[a,b]$ se encontra abaixo do segmento de extremos A$(a, f(a))$ e B$(b, f(b))$.



Seja então $r(x) = mx + p$ a equação do segmento $[\mathrm{AB}]$ e prove-se que, para todo o x em $[a,b]$, se tem $g(x) = r(x) - f(x) \geq 0$.

Como g é derivável em $[a,b]$ e $g(a) = g(b) = 0$, existe $c \in]a,b[$ tal que $g'(c) = 0$ (pelo teorema de Rolle).

Como, por hipótese, f' é crescente em I e $g'(x) = m - f'(x)$, tem-se que g' é decrescente em I.

Assim:

$x \in [a,c] \Rightarrow g'(x) \geq g'(c) = 0 \Rightarrow g$ é crescente em $[a,c] \Rightarrow g(x) \geq g(a) = 0$

$x \in [c,b] \Rightarrow g'(x) \leq g'(c) = 0 \Rightarrow g$ é decrescente em $[c,b] \Rightarrow g(x) \geq g(b) = 0$

Então $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$. Logo $f(x) \leq r(x)$ $\forall x \in [a,b]$.

Tendo em conta a relação entre o crescimento de uma função e o sinal da sua derivada, resulta imediatamente do teorema anterior a caracterização das funções convexas à custa do sinal da segunda derivada, caso esta exista:

Seja f uma função duas vezes derivável num intervalo aberto I. **A função f é convexa em I se e só se $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$.**

Para as funções deriváveis tem-se a seguinte definição equivalente de função convexa:

Seja f uma função derivável num intervalo aberto I. A função f é convexa em I se o gráfico de f se encontra acima do gráfico de qualquer tangente, em qualquer dos seus pontos.

Para justificar a coerência desta definição basta verificar que ela é equivalente à condição demonstrada no início deste parágrafo, relativa ao crescimento do declive da tangente nos sucessivos pontos do gráfico:

Seja então f uma função derivável num intervalo aberto I e suponha-se que ela verifica a definição anterior. Tomem-se dois pontos *a* e *b* em I tais que $a < b$ e sejam t_a e t_b as tangentes ao gráfico de f em a e b, respectivamente: tem-se $t_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ e $t_b(x) = f(b) + f'(b)(x-b)$. Como o gráfico de f está acima do gráfico de qualquer tangente em qualquer ponto tem-se, em particular,

(i) $f(a) \geq t_b(a) = f(b) + f'(b)(a-b)$

(ii) $f(b) \geq t_a(b) = f(a) + f'(a)(b-a)$.

De (i) resulta que $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} \leq f'(b)$ e de (ii) resulta que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq f'(a)$ e assim, $f'(a) \leq f'(b)$.

Reciprocamente, suponha-se agora que a derivada é crescente em I e verifique-se que se c é um ponto qualquer em I e t_c é a equação da tangente ao gráfico de f em c, então,

$$f(x) \geq t_c(x) = f(c) + f'(c)(x-c), \forall x \in I,$$

isto é, estude-se a diferença $f(x) - t_c(x)$ com $x \neq c$;

$$\begin{aligned} f(x) - t_c(x) = f(x) - \big(f(c) + f'(c)(x-c)\big) &= f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) \\ &= f'(d)(x-c) - f'(c)(x-c) \end{aligned}$$

com d entre x e c (pelo teorema de Lagrange).

Assim, atendendo a que $x > c$ ou $x < c$, tem-se :

$$x > c \Rightarrow d > c \Rightarrow f'(d) > f'(c) \Rightarrow f(x) - t_c(x) > 0;$$

$$x < c \Rightarrow d < c \Rightarrow f'(d) < f'(c) \Rightarrow f(x) - t_c(x) > 0.$$

Então, $f(x) \geq t_c(x), \forall x \in I$.

3. Sentido da concavidade do gráfico de uma função

Do anteriormente exposto resulta que as **funções com a concavidade voltada para cima em I**, conforme se definiu na brochura “Funções” para o 10º ano, são as funções convexas deriváveis em I e as **funções com a concavidade voltada par baixo em I** são as simétricas das funções convexas deriváveis em I.

Para as funções **duas vezes deriváveis** em I tem-se então:

Seja f uma função duas vezes derivável num intervalo aberto I. O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em I se e só se $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$. O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em I se e só se $f''(x) \leq 0, \forall x \in I$.

4. Ponto de inflexão

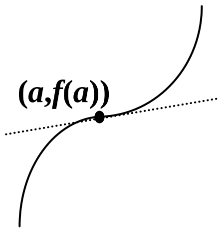
Seja I intervalo aberto, a um ponto de I, e f uma função contínua em I e derivável em $I \setminus \{a\}$.

O conceito geometricamente mais intuitivo de **ponto de inflexão** de uma função é o seguinte:

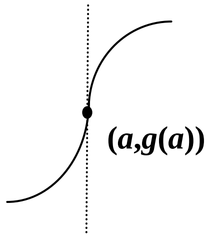
Definição 1:

A função tem um **ponto de inflexão** para $x = a$ se existe $\varepsilon > 0$ tal que o gráfico da função tem a concavidade voltada para cima(voltada para baixo)em $]a-\varepsilon, a[$ e voltada para baixo (voltada para cima) em $]a, a+\varepsilon[$, isto é, se **o sentido da concavidade muda** quando se passa de $]a-\varepsilon, a[$ para $]a, a+\varepsilon[$.

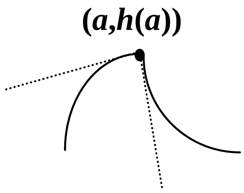
Nas figuras seguintes ilustram-se pontos de inflexão, de acordo com a definição anterior:



(1)



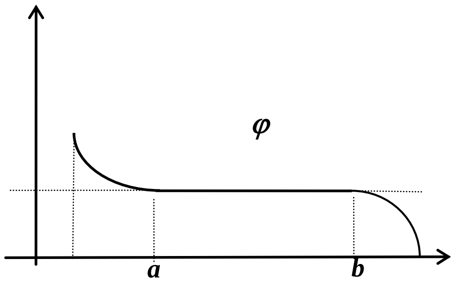
(2)



(3)

No caso **(2)** tem-se $g'(a) = +\infty$ e no caso **(3)** não existe $h'(a)$

A função φ representada no gráfico seguinte é derivável no seu domínio e todos os pontos $\left(x, f(x)\right)$ com $x \in \left[a,b\right]$ são **pontos de inflexão.**



Vamo-nos ocupar apenas do caso em que a função admite derivada finita no ponto a, como no exemplo **(1)**.

A figura sugere que a existência de inflexão num ponto está relacionada com o facto de o gráfico da função "atravessar" a tangente nesse ponto.

Ponha-se então a seguinte definição:

Definição 2:

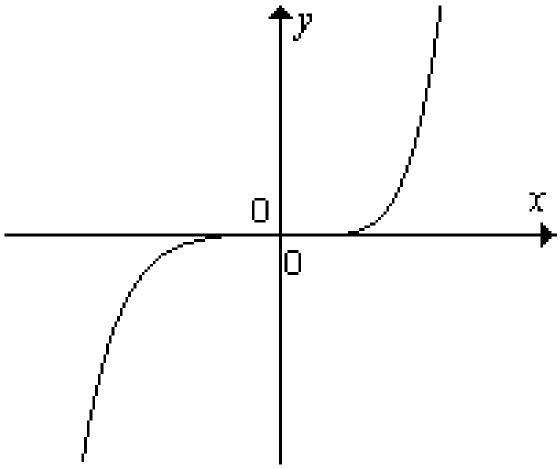
Seja I um intervalo aberto de $\Re$, $a \in I$, $f : I \to \Re$ uma função **contínua** e **derivável** em I.

A função tem um **ponto de inflexão** em $\left(a, f(a)\right)$ se em $\left]a-\varepsilon, a\right[$ o gráfico de f está acima (abaixo) da tangente em $\left(a, f(a)\right)$ e em $\left]a, a+\varepsilon\right[$ o gráfico de f está abaixo (acima) da tangente em $\left(a, f(a)\right)$.

Será que as duas definições são equivalentes?

Considere-se a função definida em $\Re$ por

$$f(x)=\begin{cases} x^5\left(sen\left(\frac{1}{x}\right)+2\right) & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } \quad x=0 \end{cases}$$

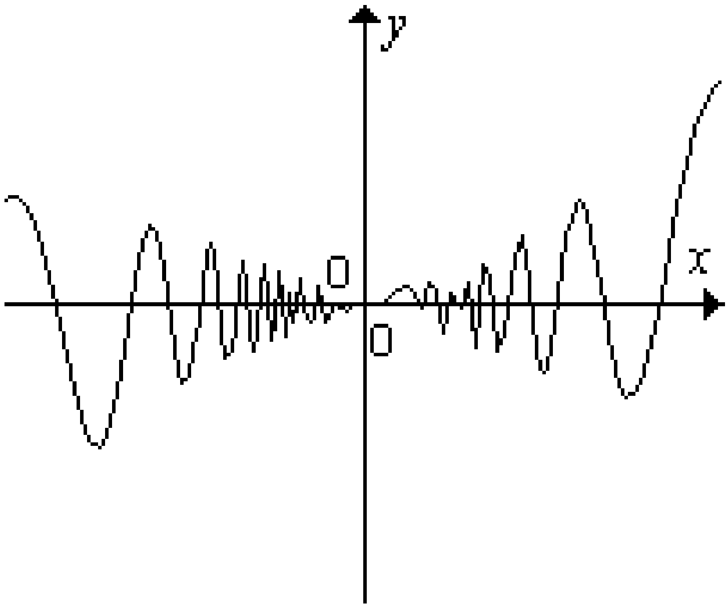


Trata-se de uma função duas vezes derivável em $\Re$, sendo f' e f'' dadas, respectivamente, por

$$f'(x)=\begin{cases} 5x^4\left(sen\left(\frac{1}{x}\right)+2\right)-x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } \quad x=0 \end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases} 20x^3\left(sen\left(\frac{1}{x}\right)+2\right)-8x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)-xsen\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

Observe-se o gráfico da segunda derivada no intervalo $[-0{,}1;\ 0{,}1]$



Não se pode dizer que f'' seja positiva ou negativa em algum intervalo $]-\varepsilon, 0[$ ou $]0, \varepsilon[$, isto é, não se pode dizer que exista uma mudança de sentido da concavidade em $(0{,}0)$. Assim, **de acordo com a definição 1, não existe inflexão em $(0{,}0)$.**

No entanto, a equação da tangente ao gráfico de *f* no ponto $(0{,}0)$ é $t(x)=0$. Tem-se $f(x)>t(x)$ para $x>0$ e $f(x)<t(x)$ para $x<0$. Então, **de acordo com a definição 2, $(0{,}0)$ é um ponto de inflexão.**

Função exponencial

O actual programa do ensino secundário prevê uma enumeração de resultados relativos à função exponencial, nomeadamente das propriedades da função exponencial de base "e" em que "e" é definido (no 11º ano) como o limite da sucessão de termo geral $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. O programa do 12º ano sugere que se refira que o número "e" é o único número real tal que $\left(e^x\right)' = e^x$, ficando os alunos informados que o número "e" pode ser definido por vários processos.

Ao incluir neste texto várias abordagens da função exponencial pretende-se disponibilizar informação que em alguns casos vai muito para além do programa em vigor.

1. O número "*e*"

No 11º ano o número "e" aparece aos alunos como o limite da sucessão de termo geral $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. O estudo da convergência desta sucessão ultrapassa o âmbito do actual programa. Tenha-se presente que os conceitos de sucessão monótona e de sucessão limitada fazem parte do actual programa do 11º ano, pelo que se poderá intuir o teorema das sucessões monótonas.

Para a existência deste limite é essencial a propriedade de o conjunto IR ser completo, já que sendo $\left(u_n\right)$ uma sucessão monótona e limitada em Q, não tem neste conjunto limite.

A convergência (existência de limite finito) da sucessão de termo geral $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, decorre do teorema das sucessões monótonas. Trata-se, com efeito, de uma sucessão monótona (crescente) e limitada (o conjunto dos seus termos está contido no intervalo $\left[2,3\right]$) sendo, portanto, convergente.

Para verificar que a sucessão é monótona crescente, atenda-se a que, pela fórmula do binómio de Newton,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{n}+\frac{n(n-1)}{n^2 2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3 3!}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{n^n n!} \qquad (*)$$

e assim

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!}+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!}$$

.

Tomem-se números naturais *n* e *m* tais que $n<m$. Tem-se

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+1+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{1}{3!}+\ldots+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\frac{1}{n!}+\ldots$$
$$\ldots+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\frac{1}{m!}$$

decorrendo então que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$.

Para verificar que a sucessão é limitada:

- Conclui-se imediatamente de $(*)$ que, para todo o número natural *n* maior que 1 se tem $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$.
- Atendendo a que, $1-\frac{1}{n}\leq 1$ para $n>1$, conclui-se que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!} (**)$$

Como, para todo o número natural *n*, se tem $n!\geq 2^{n-1}$ (como se vê por indução), de $(**)$ resulta que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\leq 1+2=3$$

e assim o conjunto dos termos da sucessão está contido no intervalo $[2, 3]$.

Conclui-se assim que a sucessão de termo geral $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é convergente e que o seu limite é um número maior que dois e menor ou igual a três. A partir destas certezas é legítimo utilizar a calculadora para estimar o valor de "*e*" com um certo número de casas decimais exactas.

Considere-se a sucessão de termo geral $v_n=1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$. Do estudo anterior, facilmente se conclui tratar-se de uma sucessão monótona crescente e limitada, logo convergente, tal que $u_n \leq v_n$ (por$(**)$) e, consequentemente, $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Mas, para todo o natural *p* maior ou igual a 2 , tem-se

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\ldots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!}\geq$$
$$\geq 1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\ldots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)}{p!}$$

Passando ao limite (em *n*) obtém-se, para todo o *p* nas condições anteriores,

$\lim u_n \geq 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{p!}=v_p$ e assim $\lim u_n \geq \lim v_n$

Então

$$e=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\left(1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}$$

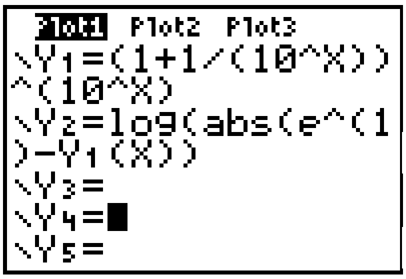
A tabela seguinte evidencia que a convergência da sucessão de termo geral $1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ é mais rápida do que a da sucessão de termo geral $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, uma vez que com a sucessão de termo geral $1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ já se obtém com $n=6$ um valor aproximado de "e" com três casas decimais exactas.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$
1	2,000	2,0
2	2,250	2,5
3	2,370	2,66
4	2,441	2,708
5	2,488	2,7166
6	2,522	2,71805
7	2,546	2,718253
8	2,566	2,7182787
9	2,581	2,71828152
10	2,594	2,718281801

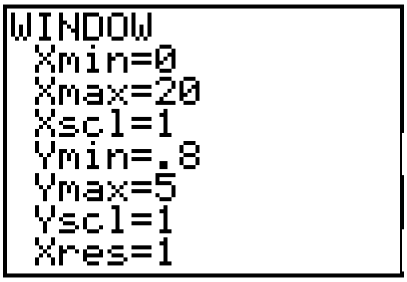
A convergência da sucessão de termo geral $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é muito lenta. Para $n=10000$ obtemos 2,7181415927 quando o limite é 2,718281828, o que dá apenas 4 casas decimais exactas.

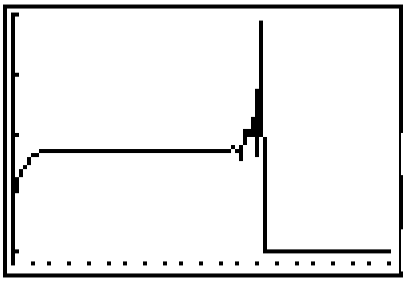
No âmbito do actual programa do Ensino Secundário surgem diversos limites que sugerem uma abordagem numérica. Contudo, a utilização de uma calculadora de precisão finita tem algumas limitações que importa ter presentes. Embora do ponto de vista matemático uma sucessão tome valores tão próximos do seu limite quanto se queira, desde que se tome um termo de ordem suficientemente elevada, do ponto de vista da calculadora isto nem sempre é observável: a partir de certa altura o resultado da calculadora não corresponde ao termo da sucessão.

Um caso típico é o cálculo do número e através do limite da sucessão de termo geral $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Fazendo alguns cálculos com a TI 83 para diferentes valores de n, aumentando muito o valor de n podem-se obter resultados "estranhos". Com $n=10^{13}$ obtém-se 2,760577856 e com $n=10^{14}$ obtém-se exactamente 1; o mesmo acontece para valores de n maiores do que 10^{14}. Parece então que, em vez de se aproximarem de e os termos da sucessão se aproximam de 1. O que se passa aqui é efeito apenas da precisão finita com que a máquina representa os números. Quando n é muito grande, o valor de $1+\frac{1}{n}$ deixa de ser rigorosamente representado pelos 14 dígitos que a TI 83 usa para representar os números. Se n for maior do que 10^{14} a máquina passa mesmo a obter um valor numérico de $1+\frac{1}{n}$ como sendo 1. Para se ter uma ideia do que se passa, podem-se observar os gráficos das seguintes funções:



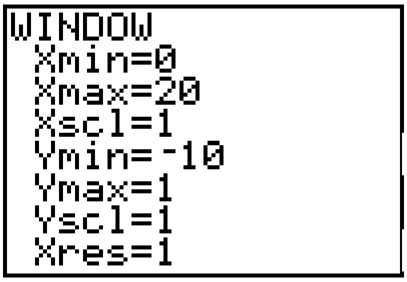
A função Y_1 dá, quer para os valores inteiros, quer para os reais, o valor obtido aplicando a fórmula da sucessão a 10^x, isto é, $\left(1+\frac{1}{10^x}\right)^{10^x}$.

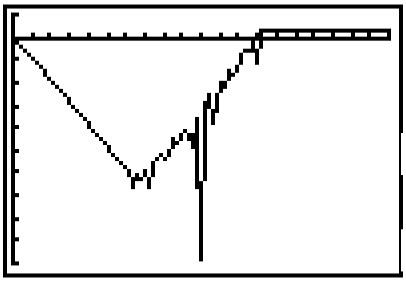




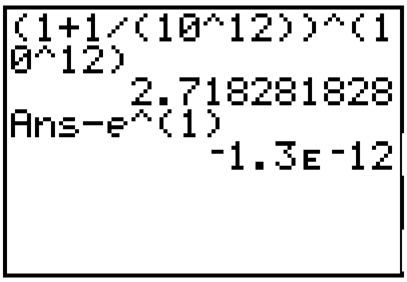
Pode-se ver que para valores de x entre 2 e 12 se obtém um valor próximo de e, mas após uma zona de oscilação o valor obtido é sempre 1.

Para se ter uma ideia mais precisa da aproximação a e pode-se estudar o logaritmo decimal do módulo da diferença entre $\left(1+\frac{1}{10^x}\right)^{10^x}$ e o número e; isto é o que se obtém com a função $Y_2 = \log\left|\left(1+\frac{1}{10^x}\right)^{10^x} - e\right|$:





Para valores de x até aproximadamente 6,5 a aproximação ao número e melhora, mas a partir daí começa a piorar. Contudo, apesar de não ser seguro que com valores de x superiores se obtenham melhores aproximações de e, acontece que se podem obter óptimas aproximações. Na TI 83 obtém-se, por exemplo



.

2. A função exponencial de base $a > 0$: definição construtiva

A abordagem da função exponencial de base $a > 0$, e a subsequente abordagem da função exponencial, é feita na maioria dos manuais destinados ao ensino pré-universitário recorrendo ao processo clássico de extensão do significado de a^x com x número racional e $a > 0$. Mais precisamente, define-se a^x como sendo o limite comum de todas as sucessões a^{q_n} em que (q_n) é qualquer sucessão de números racionais convergente para x. Pelo seu processo construtivo esta abordagem torna-se natural mas as propriedades da função exponencial não são perceptíveis.

Descreve-se em seguida este processo de abordagem, assinalando todos os passos necessários a uma formulação rigorosa. Observe-se que são apenas evocados resultados elementares sobre sucessões.

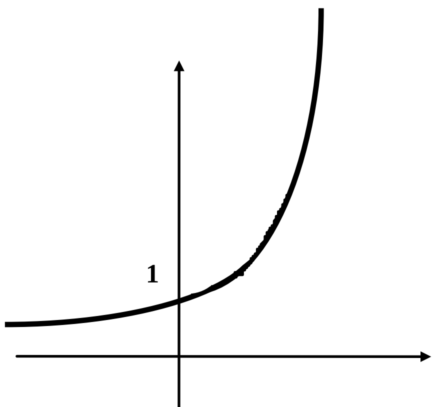
Põe-se, **por definição**, $a^x = \lim a^{q_n}$, para qualquer sucessão (q_n) de racionais convergente para x.

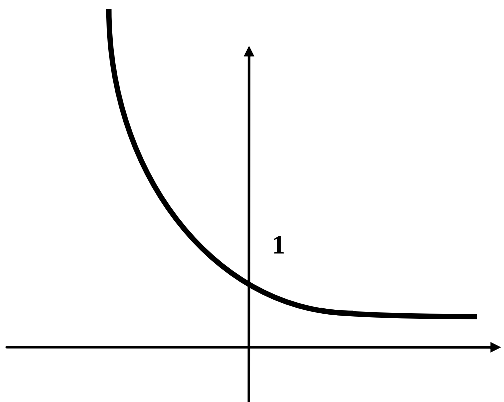
Para justificar a coerência desta definição, seria necessário:

- provar que se $\lim q_n = x$ então existe $\lim a^{q_n}$
- provar que este limite é independente da sucessão de racionais que converge para x
- provar que se mantêm válidas as propriedades de a^q com q racional ($a^q > 0,\ a^{-q} = \dfrac{1}{a^q},\ a^{q+r} = a^q a^r,\ q \text{ e } r \text{ racionais}$)

Depois de definido o que se entende por a^x sendo $a > 0$ e x um número real qualquer, tem sentido definir função exponencial de base $a > 0$.

Chama-se ***função exponencial de base*** $a > 0$ à função definida em IR por $f(x) = a^x$.





$a > 1$ $\qquad\qquad$ $0 < a < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{a} > 1$

De entre as funções exponenciais tem especial interesse a de base "*e*", designada apenas por função exponencial, $f(x) = e^x$, que verifica a equação diferencial $f'(x) = f(x)$. A demonstração desta propriedade da função exponencial é neste quadro bastante trabalhosa. Descrevem-se em seguida os passos da demonstração:

A. Comece-se por justificar que $e^x = \lim\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, $\forall\, x \in IR$.

Para não alongar muito a demonstração, admitam-se os seguintes resultados sobre sucessões:

- Se (a_n) é uma sucessão de números reais positivos que converge para $a > 0$ e (b_n) é uma sucessão de números reais que converge para *b*, então a sucessão ${a_n}^{b_n}$ converge para a^b.

- Se (a_n) é uma sucessão de números reais que tende para $+\infty$ ou $-\infty$, então

$$e = \lim\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$$

Seja então x um número real diferente de zero. Se (q_n) é uma sucessão de números racionais diferentes de zero que tende para x, tem-se que $\left(\frac{n}{q_n}\right)$ é uma sucessão de números reais que tende para $+\infty$ ou $-\infty$.

Atendendo aos resultados evocados sobre sucessões tem-se que, para todo o x diferente de zero,

$$\lim\left(1+\frac{q_n}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{\frac{n}{q_n}}\right)^n = \left(\lim\left(1+\frac{1}{\frac{n}{q_p}}\right)^{\frac{n}{q_n}}\right)^{q_n} = e^x$$

Como $e^0 = 1 = \lim\left(1+\frac{0}{n}\right)^n$, tem-se finalmente $e^x = \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, $\forall\, x \in \Re$

B. Prove-se que $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=1$

Seja $0 \le x < 2$. Tem-se

$$1+x \le \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+x+\frac{x^2}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{n^n}$$
$$= 1+x+\frac{x^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

e

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!} \le 1+x+x^2+\ldots+\frac{x^n}{2^{n-1}}$$

$$n! \ge 2^{n-1}$$

$$=1+x\left(1+x+\ldots+\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}\right)=1+x\frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^n}{1-\frac{x}{2}}=1+\frac{2x}{2-x}\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)\le 1+\frac{2x}{2-x}$$

$$0 \le x < 2$$

Então, se $0 \le x < 2$,

$$1+x \le e^x < 1+\frac{2x}{2-x} \Leftrightarrow x < e^x - 1 < \frac{2x}{2-x} \Leftrightarrow 1 \le \frac{e^x-1}{x} \le \frac{2}{2-x}$$

e $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=1$

Como $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-x}-1}{-x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{e^x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}\frac{1}{e^x}=1$, tem-se finalmente

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

C. Prove-se que $\left(e^x\right)' = e^x$ para todo o número real *x*.

Para qualquer $x \in IR$

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x\left(e^h-1\right)}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x$$

e assim

$$\left(e^{x}\right)' = e^{x} \,,\ \forall\ x \in IR .$$

Como $\left(e^{x}\right)' = e^{x} > 0$, $\forall\ x \in \Re$, a função exponencial $f(x) = e^{x}$ é estritamente crescente em IR.

Para a abordagem numérica de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x} - 1}{x}$, atendendo a que ele não é mais do que a razão incremental da função exponencial no ponto 0, aplica-se o que vem na brochura de funções do 11.º ano a propósito de derivação numérica (ver pág. 48).

Verifique-se que a função exponencial cresce mais depressa que qualquer função do tipo $\varphi(x) = x^{q}, \forall q \in N$, isto é, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x^{q}} = +\infty, \quad \forall q \in N$.

Da expressão do Binómio de Newton resulta que

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n} = 1 + x + \frac{n(n-1)}{n^{2}\,2!}x^{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^{3}\,3!}x^{3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{n^{n}\,n!}x^{n},$$

para qualquer número natural *q* tem-se

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n} &= 1 + x + \ldots + \frac{n\ldots(n-q)}{n^{q+1}(q+1)!}x^{q+1} \ldots + \frac{n\ldots(n-(n-1))}{n^{n}\,n!}x^{n} \\
&= 1 + x + \ldots + \frac{n\ldots(n-q)}{n^{q+1}(q+1)!}x^{q+1} + x^{q+2}\left(\frac{n\ldots(n-(q+1))}{n^{q+2}(q+2)!} + \ldots + \frac{n\ldots(n-(n-1))}{n^{n}\,n!}x^{n-(q+2)}\right) \\
&= P_{q+1}(x) + x^{q+2}\left(\frac{n\ldots(n-(q+1))}{n^{q+2}(q+2)!} + \ldots + \frac{n\ldots(n-(n-1))}{n^{n}\,n!}x^{n-(q+2)}\right)
\end{aligned}$$

em que $P_{q+1}(x)$ é um polinómio em *x* de grau $q + 1$.

Tomando $x > 0$ e sendo $e^x = \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, tem-se $\frac{e^x}{x^q} > \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{x^q} > \frac{P_{q+1}(x)}{x^q}$ e assim,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^q} = +\infty, \quad \forall q \in N$$

Depois do estudo de vários exemplos os alunos são informados do $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^p}$ (com $a > 1$ e $p > 0$). Para a abordagem numérica destes limites, para além das limitações de capacidade de representação da máquina, podem surgir dúvidas. Dizer que um limite é $+\infty$ significa que a função acaba por se tornar tão grande quanto se queira, desde que se escolham valores de x suficientemente grandes. Contudo estes valores de x podem até ser maiores do que aquilo que a máquina consegue representar. No caso considerado isso pode acontecer se p for grande e a for próximo de 1. Sugere-se, por exemplo, o estudo dos valores de $\frac{1{,}1^x}{x^{10}}$ quando x cresce. Para se perceber claramente que este quociente tende para $+\infty$ é necessário estudar valores de x acima de 500, de preferência no intervalo [1,1000]. Uma discussão mais detalhada deste tipo de limites pode ser encontrada no livro Princípios de Análise Matemática Aplicada, de J. C. Silva ou no artigo *Understanding exponential growth with technology*, do mesmo autor.

Nota:

Usando um processo análogo ao de 1 (pág. 48-50), verifica-se que

$$\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right), \ \forall x \in IR.$$

Resulta então que $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in IR$.

Um processo de definir função exponencial, e do qual decorrem facilmente as propriedades fundamentais desta função, consiste em defini-la como soma da série $\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$, que se verifica ser convergente, qualquer que seja o número real x.

O número "e" pode então ser definido como soma da série $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}$ (ver pág. 50).

2. Verificou-se anteriormente que a função exponencial tem função derivada que coincide com ela em IR. Um outro processo de definir a função exponencial é como a solução do problema de Cauchy $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$. Este processo será retomado na secção desta brochura dedicada a alguns modelos matemáticos.

Função logarítmica

Os estudos de astronomia e navegação no século XVI conduziram a que um grande número de matemáticos se dedicasse ao desenvolvimento da trigonometria. Uma das questões envolvidas dizia respeito a efectuar produtos de senos. Este problema foi resolvido pelo "método de prosthaphaeresis" que corresponde à fórmula

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right).$$

Esta fórmula permite reduzir um problema de multiplicação a uma simples questão de somas, diferenças e divisão por 2. É provável que esta fórmula motivasse Napier e outros matemáticos a desenvolverem processos de simplificação dos cálculos, sendo possível que ela tenha influenciado o trabalho de Napier, já que os primeiros logaritmos são logaritmos de senos.

Também constitui um factor do desenvolvimento dos logaritmos, o estudo exaustivo no século XV das propriedades das séries aritméticas e geométricas.

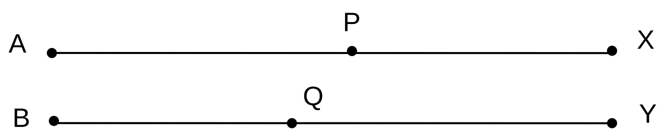
Com efeito, observando os termos de uma série aritmética de razão 1 e primeiro termo igual a 0 e uma série geométrica de razão 2 e primeiro termo igual a 1, verifica-se que os termos da série aritmética constituem os logaritmos na base 2 dos termos da série geométrica.

números	1	2	4	8	16	32	64
logaritmos	0	1	2	3	4	5	6

Esta tabela aparece num trabalho de Michael Stiefell em 1544 (6 anos antes do nascimento de Napier). Stiefell observa que a um produto de termos na série geométrica $(4 \times 8 = 32)$ corresponde uma soma de termos na série aritmética $(2 + 3 = 5)$. Assim, para simplificar o cálculo de um produto de números bastará escrevê-los como potências da mesma base.

A invenção dos logaritmos é atribuída a John Napier (Neper, Napeir, Napair, Nepeir, Naper, Napare, Naipper), barão escocês, nascido junto a Edimburgo em 1550.

A forma como Napier chegou à ideia de logaritmo não foi algébrica mas através da geometria. Considerou dois segmentos de recta AX e BY e dois pontos P e Q a moverem-se sobre eles, conforme se ilustra na figura :



Supõe-se que o ponto P se move ao longo de AX com velocidade constante, enquanto o ponto Q, que parte com a mesma velocidade que P, altera constantemente a sua velocidade de forma que, em cada instante, ela seja proporcional à distância QY. O logaritmo do número que traduz a distância de A a P será dado pelo número que traduz a distância do correspondente ponto Q a B.

Esta concepção geométrica dos logaritmos está ligada ao facto de os senos aparecerem na época de Napier como comprimento de linhas e não associados às medidas dos catetos de triângulos rectângulos.

Não se sabe ao certo quanto tempo Napier trabalhou a ideia de logaritmo antes da publicação em 1614 de um volume incluindo texto e tabelas intitulado “Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio” (Descrição da Admirável Tabela de Logaritmos).

O famoso matemático inglês Henry Briggs (1561-1631) tomou rapidamente conhecimento da obra de Napier e começou de imediato a trabalhar uma versão modificada das tabelas. A sugestão de Briggs consistia em modificar a base dos logaritmos, de forma a tornar mais fácil o seu uso. Este facto já tinha sido observado por Napier, que concordou com a sugestão de Briggs de adoptar a base 10. Briggs não acabou recalcular todos os logaritmos de Napier. Publicou em 1624 umas tabelas que continham os logaritmos de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000, calculados com 14 casas decimais.

Os logaritmos na base 10, são denominados “logaritmos de Briggs” e irão ser representados por “log”.

Observe-se que a variação de uma casa decimal num número se traduz na adição algébrica de uma unidade ao seu logaritmo na base 10:

$$\log 170 = \log 10 + \log 17 = 1 + \log 17; \qquad \log 1{,}7 = -1 + \log 17$$

Ilustra-se em seguida o método utilizado por Briggs para o cálculo de $\log 2$ (1624).

Calcule-se $\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{10}}} = 10^{\frac{1}{2^{54}}}$.

Pondo $c = \dfrac{1}{2^{54}}$, tem-se $10^c = 1{,}00000000000000012781914932003235 = 1 + a$

Calcule-se $\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{2^{54}}}$; tem-se

$$2^c = 1{,}00000000000000003847739796558310 = 1 + b$$

O valor procurado é x tal que $10^x = 2$.

Então, $1 + b = 2^c = \left(10^c\right)^x = (1 + a)^x \approx 1 + ax \Rightarrow x = \dfrac{b}{a}$ e assim,

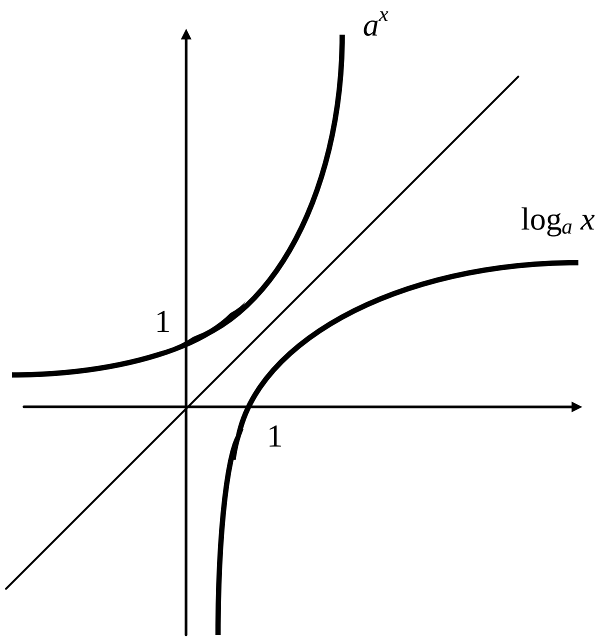
$$\log 2 \approx 0{,}3010299956638812$$

1. A função logarítmica como inversa da função exponencial

Sendo a função exponencial de base $a > 0$ monótona em IR com contradomínio IR^+, tem sentido definir em IR^+ a sua função inversa, que se designa por função logaritmo de base a. Tem-se assim $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$. Da definição do logaritmo como função inversa da função exponencial, decorrem imediatamente as seguintes propriedades:

- $\log_a\left(a^x\right) = x$
- $a^{\log_a x} = x$
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

Graficamente, se $a > 0$,



Se $a = e$ escreve-se $\log_e = \ln$, sendo a função $f(x) = \ln x$ designada apenas por "função logarítmica".

Deve-se a Euler a "Regra de ouro" para a mudança de base: $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, que é fundamental para a utilização da calculadora, atendendo a que a calculadora só fornece os logaritmos na base 10 e na base ***e***.

Para demonstrar esta regra, basta tomar os logaritmos de base b de ambos os membros de $x = a^y$. Com efeito, obtém-se $\log_b x = \log_b\left(a^y\right) = y \log_b a$ e assim $y = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

Como $x = a^y$ é equivalente a $y = \log_a x$, resulta que $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

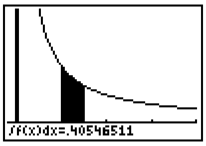
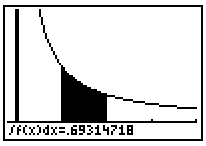
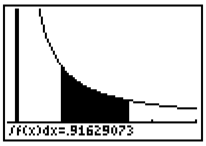
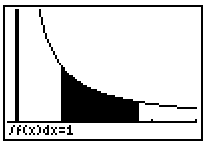
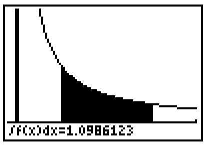
2. Definição do logaritmo como área

A determinação de áreas foi, em conjunto com a determinação de volumes, uma questão que mereceu o interesse dos matemáticos desde a antiguidade grega. Duas grandes descobertas de Arquimedes (283 AC - 212 AC) foram o cálculo da área do círculo e da área limitada por uma parábola. No século XVII, Bonaventura Cavalieri, Roberval e Fermat estudaram a determinação de áreas limitadas por curvas $y = x^{\alpha}$, sendo α qualquer.

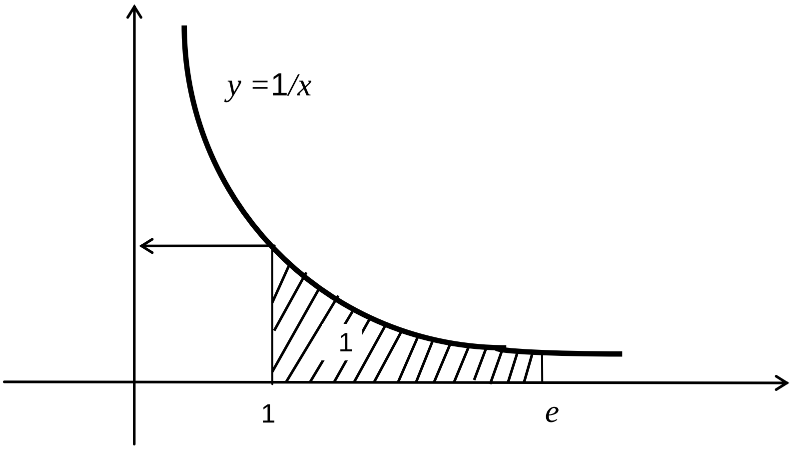
Fermat demonstrou que a área abaixo da curva $y = x^{\alpha}$ entre os limites $x = 0$ e $x = B$ é:

$$A = \frac{B^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

Este resultado não é aplicável no caso em que $\alpha = -1$. Este facto conduziu à descoberta seguinte, feita por Gregory of St.Vincent em 1647 e Alfons Anton de Sarasa em 1649: **a área abaixo da hipérbole** $y = \dfrac{1}{x}$ **é um logaritmo**. Mais precisamente, para cada $x > 1$ mostraram que a área abaixo da hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$ entre os pontos de abcissa 1 e x é um logaritmo.

r	**ln r** (com 5 casas decimais)	**Área abaixo da hipérbole** $y = \dfrac{1}{x}$ **entre** x **=1 e** x **= r.**
1,5	**0,40547**	
2	**0,69315**	
2,5	**0,91629**	
e	**1**	
3	**1,09861**	

A identificação do logaritmo de base e com áreas abaixo da hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$ permite interpretar geometricamente o número e : Este número é tal que a área abaixo da hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$ entre 1 e e é igual a 1.



Os logaritmos na base “*e*” são usualmente chamados logaritmos de Napier (ou de Neper), ou logaritmos naturais (por serem aqueles que são mais “naturais” para desenvolvimentos teóricos, ou logaritmos hiperbólicos (por estarem associados a áreas sob uma hipérbole).

3. A régua de cálculo

Edmund Gunter (1581-1628), professor de Astronomia e Matemática no Gresham College em Londres, onde Briggs também leccionava. Gunter dedicava-se especialmente a problemas de trigonometria e de navegação, para os quais as tabelas de logaritmos de Briggs constituíam apenas uma ajuda marginal. Chegou rapidamente à conclusão de que podia automatizar a soma dos logaritmos de dois números, gravando uma escala de logaritmos num bocado de madeira e usando um compasso de bicos para juntar os dois valores. Esta processo, não só eliminava o processo mental de adição, como evitava o trabalho e a demora ocasionada pela procura dos logaritmos nas tabelas. A madeira de Gunter ficou conhecida como “Linha de Números de Gunter” e o seu uso espalhou-se rapidamente por Inglaterra. Foi popularizada no continente europeu por Edmund Wingate.

As transformações que a Linha de Números de Gunter veio a sofrer são da responsabilidade de um clérigo inglês, William Oughtred (1574-1660) que, curiosamente, manifestava desprezo pela vertente computacional da matemática. O facto de Oughtred ser aquilo a que se pode chamar um matemático puro, não o impediu de se familiarizar com os instrumentos matemáticos então disponíveis. Ao tomar contacto com a Linha de Números de Gunter, rapidamente se deu conta da vantagem da utilização de duas escalas gravadas sobre duas madeiras distintas correndo uma sobre a outra, em vez da utilização do compasso de bicos. Também observou que, em vez das réguas de madeira gravadas, se podia optar por dois discos concêntricos, um deles ligeiramente menor, sendo as escalas gravadas nas suas bordas. Estes processos permitiam melhorar a utilização prática da Linha de Números de Gunter e poderiam ter sido objecto de exploração por parte de Oughtred. Este achou, no entanto, que o assunto não merecia o seu empenho, limitando-se a transmitir a suas ideias a Richard Delamain, um dos seus alunos. Delemain publicou em 1630 a descrição de uma régua de cálculo circular. Não se sabe ao certo se se tratou de uma invenção independente, ou apenas do aproveitamento das observações de Oughtred relativas à vantagem de utilização de dois discos concêntricos gravados nas bordas.

A primeira régua de cálculo com uma lingueta corrediça parece ter sido utilizada por R.Bissake em 1654 e em 1779, J. Watt aumentou o rigor nas graduações das escalas para as utilizar nos cálculos envolvidos nos projectos de máquinas a vapor.

A dificuldade de fabrico destes instrumentos, nomeadamente a forma deficiente como as escalas eram gravadas e a consequente existência de erros nos cálculos, tornaram a utilização da régua de cálculo muito limitada até meados do século XIX.

Em 1850 um jovem oficial francês chamado Amedee Mannheim, contornou as maiores dificuldades de utilização da régua de cálculo, introduzindo um cursor móvel ligando as escalas e que passou a fazer parte integrante da régua de cálculo. Este oficial foi mais tarde professor de Matemática em Paris, o que contribuiu para a divulgação da régua de cálculo. Este instrumento passou a ser usado para cálculos rápidos na Europa, mas só foi adoptado na América do Norte em 1888. Apesar de já serem fabricadas localmente (desde 1895), estes instrumentos só se vulgarizaram na América do Norte no princípio do século XX, com a sua introdução nas escolas de engenharia nos Estados Unidos.

É de referir a invenção, ainda no século XIX, pelo astrónomo português almirante Campos Rodrigues, de um tipo especial de régua de cálculo adequada a cálculos astronómicos.

Uma vez implantadas no mercado, as réguas de cálculo foram rapidamente aperfeiçoadas, com a introdução de 18 a 20 escalas diferentes, e foram concebidas versões para químicos e engenheiros de todas as especialidades. São geralmente de marfim ou de material duro e são brancas para permitir uma melhor visibilidade das escalas. Existem réguas de cálculo em formato de bolso e com formatos maiores, o que permite uma maior precisão. Embora menos comuns, também foram comercializadas modelos actualizados de réguas circulares, algumas de formato bastante reduzido.

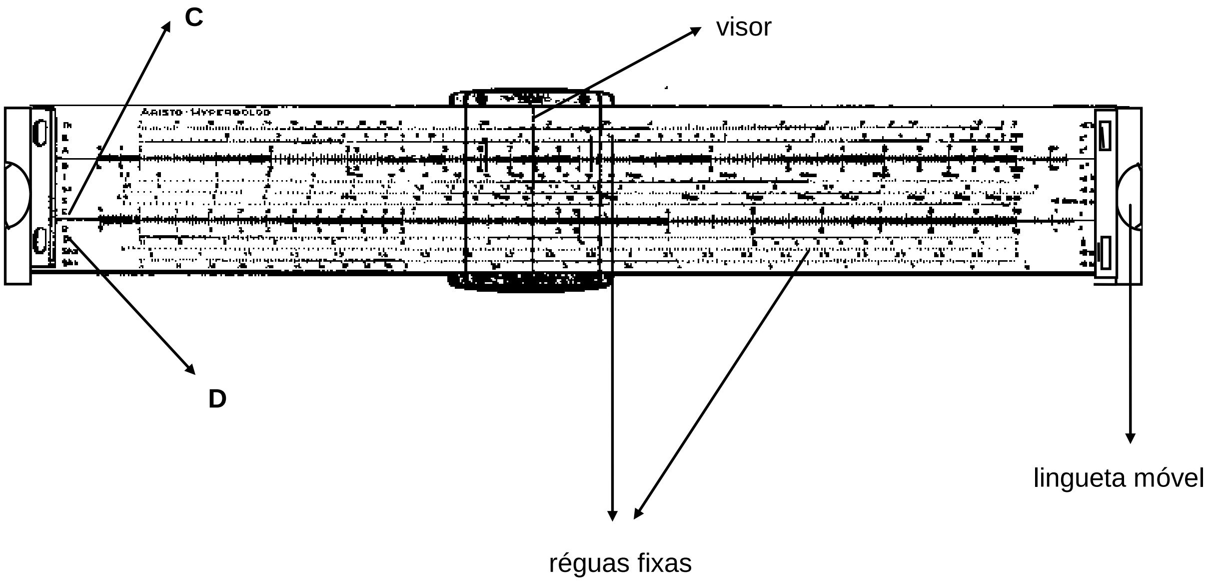
A régua de cálculo tornou-se um símbolo do avanço tecnológico no século XX.

Até à década de 70 a régua de cálculo de bolso fazia parte da indumentária diária dos engenheiros, qualquer que fosse a sua especialidade. A sua utilização foi bruscamente interrompida pela inundação dos mercados com calculadoras electrónicas de bolso, que ofereciam uma maior precisão associada à facilidade de utilização.

Como funcionam basicamente as réguas de cálculo modernas e qual a fiabilidade dos cálculos obtidos?

As réguas de cálculo são constituídas por uma régua dupla em que as duas partes são separadas por uma fenda longitudinal em que corre uma terceira régua, funcionando como lingueta móvel. Estas réguas são graduadas nos bordos e, por vezes, no meio e sobre elas desloca-se um cursor com traços verticais destinados a alinhar as leituras. Na lingueta (C) e numa das réguas fixas (D) estão gravadas escalas logarítmicas e os comprimentos a partir da origem não são correspondentes aos números inscritos mas aos seus logaritmos (na base 10). O funcionamento da régua de cálculo para efectuar produtos e cocientes baseia-se na soma e diferença comprimentos de segmentos, através da deslocação da lingueta. Por exemplo, para efectuar o produto 2×3 alinha-se o traço inicial da lingueta C com o 2 da régua fixa D e procura-se o traço da régua fixa alinhado com o 3 da lingueta; lê-se na escala da régua fixa (D) o número 6. Se se pretender dividir 8 por 4, alinha-se o 8 da escala D com o 4 da escala C e procura-se o traço de D alinhado com o número 1 na escala C.; lê-se na escala D o número 2.

Para cálculos envolvendo nos resultados mais de dois algarismos as réguas de cálculo só permitem a obtenção de valores aproximados, sendo o terceiro algarismo calculado por estimativa. Apesar desta limitação, a utilidade da régua de cálculo foi indiscutível pela sua facilidade de manejo e pela rapidez das operações. Observe-se que nas operações com réguas de cálculo não são tomadas em conta as vírgulas, que são colocadas mentalmente.



Uma simulação em Java da régua de cálculo pode ser encontrada em `http://www.syssrc.com/museum/mechcalc/javaslide/index.html`.

Se for possível dispor de uma impressora com resolução de 600 dpi pode construir-se uma régua de cálculo circular seguindo as instruções que se encontram em `http://icarus.physics.montana.edu/math/csr.html`.

Actividade / Projecto

Projectar e construir uma régua de cálculo de dimensões médias (acima de 20 cm).

Comentários : Pode partir-se de um estudo matemático dos logaritmos, elaborando depois o projecto para ser construído em madeira, por exemplo. Note-se que o objectivo é apenas atingir a funcionalidade no cálculo, pelo que não é obrigatório reproduzir os modelos de régua já existentes.

Alguns modelos matemáticos

1. Cálculo de juros compostos

Suponha-se um capital *P* depositado numa instituição bancária a uma taxa de juro *r* que se supõe composta anualmente. Que capital se terá ao fim de *t* anos ?

Ao fim do primeiro ano o capital será $A_1 = P + rP$

Ao fim do segundo ano o capital será

$$A_2 = A_1 + rA_1 = P + rP + r(P + rP) = P(1+r)(1+r) = P(1+r)^2$$

....

Ao fim de t anos o capital será $A_t = P(1+r)^t$

Suponha-se agora que o capital *P* à taxa de juro *r* é composto *m* vezes ao ano. Ao fim de *t* anos, o juro foi composto *mt* vezes, recebendo-se r/m de juros. O capital ao fim de *t* anos será $A_t = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}$

Assim, se o juro for composto continuadamente (no sentido em que os juros se podem compor ao minuto, ao segundo, ao milésimo de segundo, etc.), ao fim de t anos o capital será

$$A_t = \lim_{m\to+\infty} P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} = P \lim_{m\to+\infty}\left(\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}\right)^{t} = Pe^{rt}$$

Exemplo:

- Determinar o valor *A* de um capital *P* = 1000 c. investido a uma taxa de juro de 8% durante um período de 3 anos, com os juros compostos trimestralmente.

O juro foi composto 4 vezes num ano (m = 4).

Pretende-se o valor do capital ao fim de 3 anos (t = 3).

A taxa é $r = 0{,}08$.

O valor do capital ao fim de 3 anos é $A = 1000\left(1+\frac{0{,}08}{4}\right)^{4\times 3}$

- O mesmo problema, supondo que o juro é composto

a) diariamente

b) ao minuto

c) ao segundo

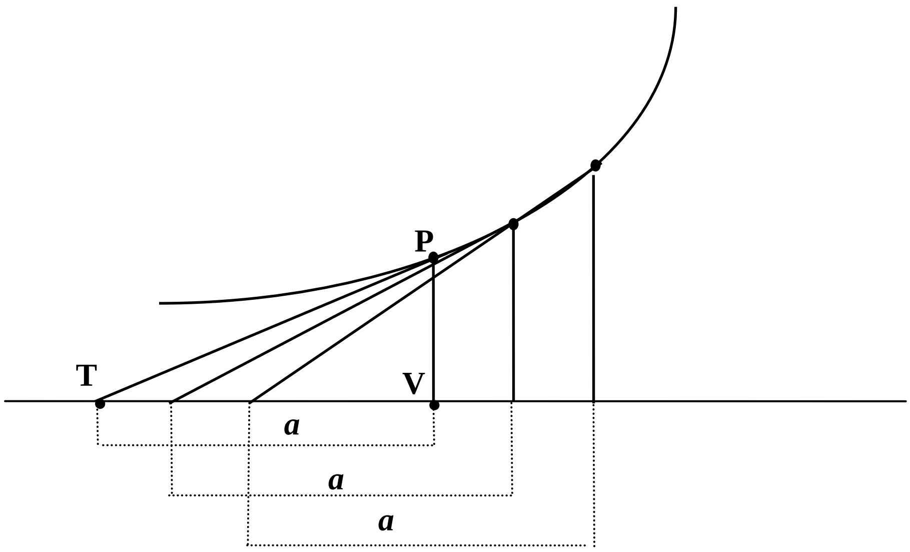
d) continuadamente.

No caso d), isto é, com o juro composto continuadamente, o valor do capital ao fim de 3 anos é $A = 1000\, e^{0{,}08\times 3}$.

2. A função exponencial como solução de um problema geométrico

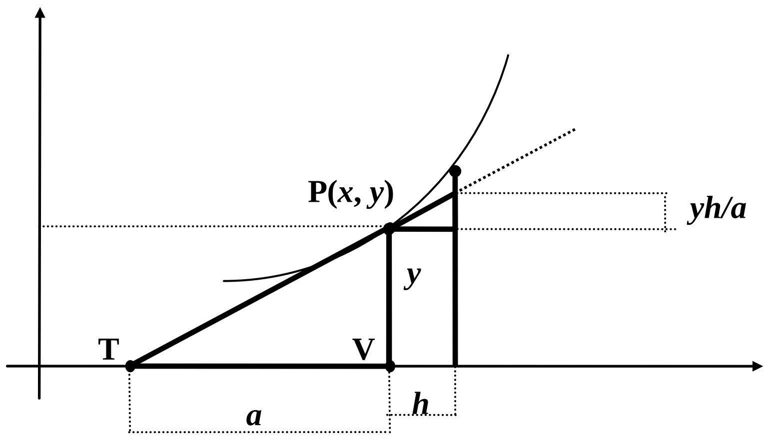
Foi sob a forma de um problema geométrico que a função exponencial surgiu pela primeira vez. F. Debaune (1601-1652) colocou a Descartes o seguinte problema geométrico:

Determinar uma curva $y(x)$ de forma que para cada ponto P a distância entre os pontos V e T onde a vertical e a tangente cortam o eixo dos x é constante igual a a.



Apesar dos esforços de Descartes e de Fermat, este problema permaneceu sem solução durante quase 50 anos.

Em 1684 Leibniz propôs uma solução, com base em argumentos geométricos. Concluiu tratar-se de uma curva $y(x)$ em que a um pequeno acréscimo h de x deverá corresponder para y um acréscimo de $\frac{yh}{a}$.



O valor $\frac{yh}{a}$ representa na realidade o diferencial de y e não o acréscimo Δy da função, quando a variável independente sofre um acréscimo h. Recorde-se a propósito a forma como a derivada era concebida por Leibniz (Funções 11º ano pág. 29)

Considere-se o caso particular em que $a = 1$ e o gráfico da curva procurada passa pelo ponto (0, 1).

Para h suficientemente pequeno tem-se

$$y(x+h) - y(x) \approx hy(x) \quad \Leftrightarrow \quad y(x+h) \approx y(x)(1+h)$$

logo $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{y(x+h) - y(h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{hy(x)}{h} = y(x)$

e a curva $y = y(x)$ é gráfico de uma função derivável, devendo satisfazer as condições

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Partindo de $y(0) = 1$ e substituindo a equação diferencial por $y(x+h) = y(x) + hy(x)$, obtém-se a sucessão de valores:

$h \to y(h) \approx 1 + h$

$2h \to y(2h) \approx y(h) + h\,y(h) \approx (1+h)(1+h) = (1+h)^2$

$3h \to y(3h) \approx y(2h) + h\,y(2h) \approx (1+h)^3$

....

$nh \to (1+h)^n$

....

Considere-se agora um número real positivo x e suponha-se que se quer ter uma boa aproximação de $y(x)$. Dividindo o intervalo $[0, x]$ em n partes iguais e avançando em passos $h = \frac{1}{n}$ tem-se então

$y\left(\frac{x}{n}\right) \approx 1 + \frac{x}{n}$

$y\left(\frac{2x}{n}\right) \approx \left(1 + \frac{x}{n}\right)^2$

....

$y\left(\frac{kx}{n}\right) \approx \left(1 + \frac{x}{n}\right)^k$

....

$y(x) \approx \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

....

Fazendo n cada vez maior tem-se que $y(x) = \lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Em particular, $y(1) = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

A solução proposta por Leibniz não é mais que a solução aproximada do problema

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

pelo *método de Euler*, método numérico que consiste em substituir a curva pela poligonal de vértices $\left(0,1+h\right)$, $\left(h,(1+h)^2\right)$, $\left(2h,(1+h)^3\right)$, $\ldots,\left(nh,(1+h)^{n+1}\right),\ldots$

Para resolver o problema, comece-se por recordar a ideia de Euler (1768) que surgiu da impossibilidade de se obterem soluções de certas equações diferenciais por métodos analíticos.

Suponha-se que se pretende determinar uma aproximação para a solução de uma equação diferencial $y' = f\left(x,y\right)$ tal que $y\left(x_0\right) = y_0$.

Tome-se $h > 0$ e substitua-se a solução para $x \in \left[x_0, x_0 + h\right]$ pela recta

$$r_0(x) = y_0 + \left(x - x_0\right) f\left(x_0, y_0\right)$$

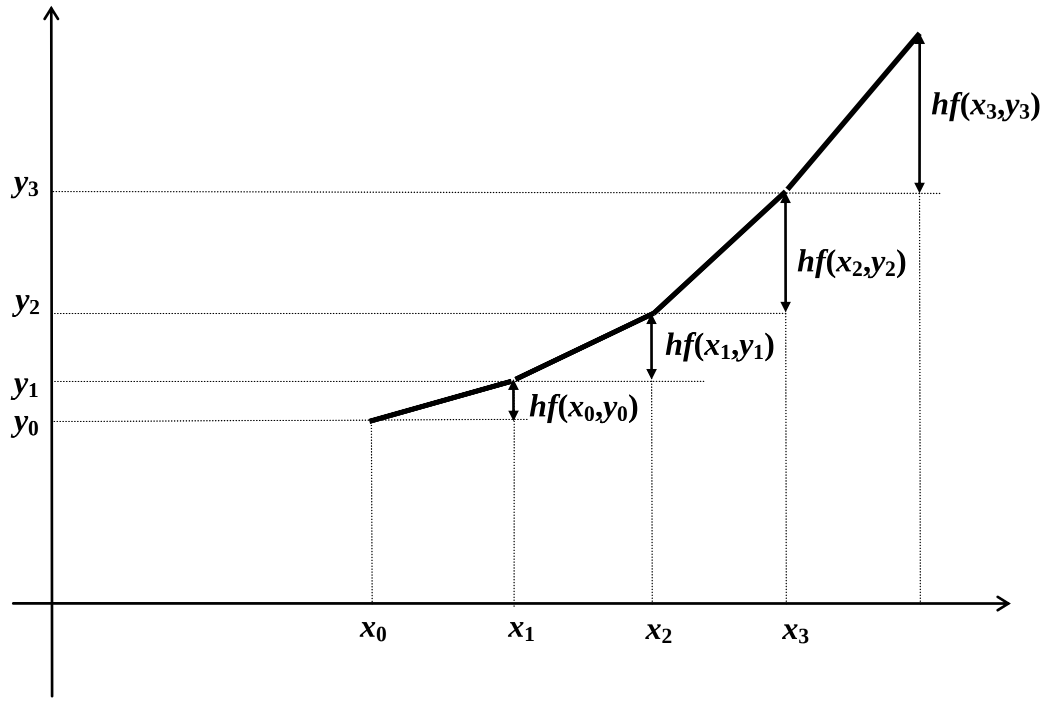
Se $x_1 = x_0 + h$ e $y_1 = r_0\left(x_1\right)$, obtém-se $y_1 = y_0 + hf\left(x_0, y_0\right)$.

Substitua-se a solução para $x \in \left[x_1, x_1 + h\right]$ pela recta $r_1(x) = y_1 + \left(x - x_1\right) f\left(x_1, y_1\right)$

Se $x_2 = x_1 + h$ e $y_2 = r_1\left(x_2\right)$, obtém-se $y_2 = y_1 + hf\left(x_1, y_1\right)$.

Repetindo este processo obtêm-se pares de valores $\left(x_n, y_n\right)$ em que $x_n = x_{n-1} + h$ e $y_n = y_{n-1} + hf\left(x_{n-1}, y_{n-1}\right)$.

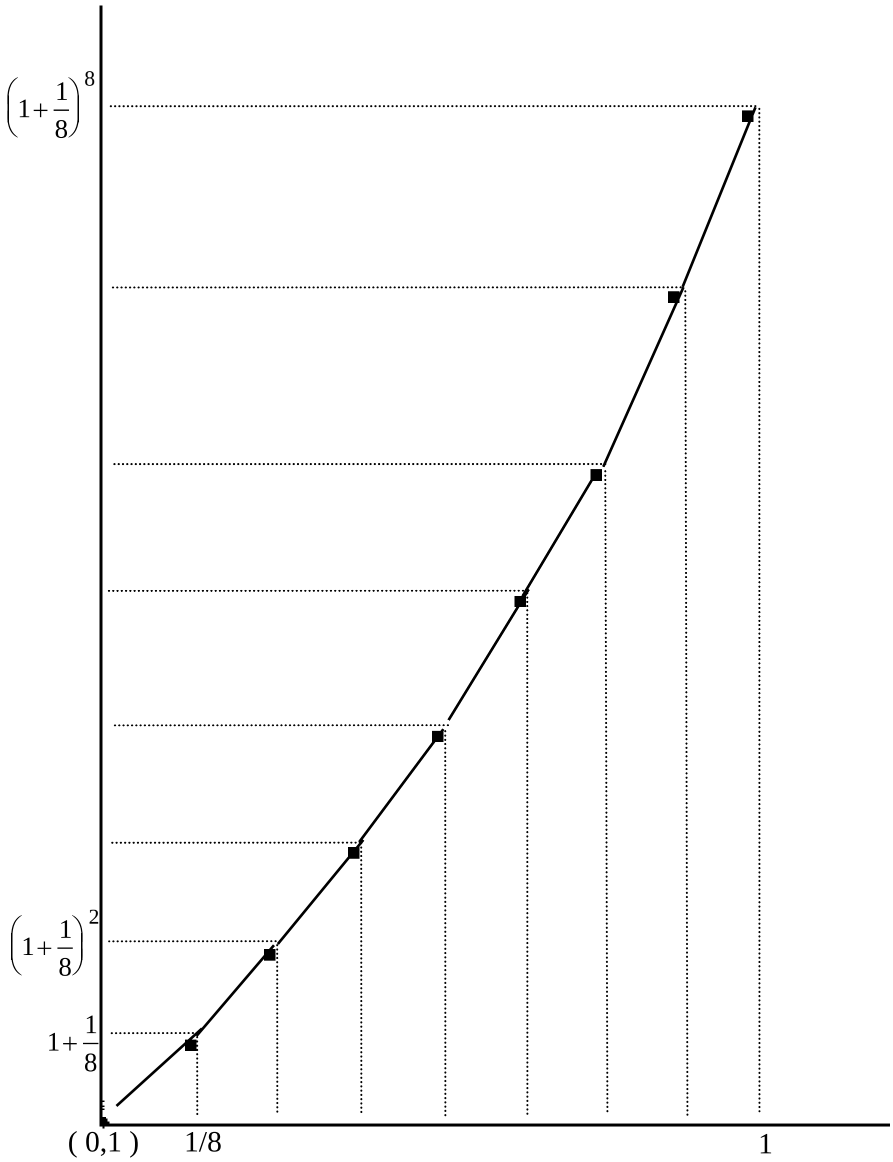
O **polígono de Euler** obtém-se justapondo os segmentos de rectas de extremos $\left(x_0, y_0\right),\ldots,\left(x_n, y_n\right),\ldots$. À medida que h tende para zero, o polígono aproxima-se cada vez mais da solução.



No caso concreto que se está a estudar tem-se $f(x,y)=y$, $x_0=0$ e $y_0=1$, obtendo-se para a poligonal de Euler a sucessão de vértices

$$(0,1+h),\ \left(h,(1+h)^2\right),\ \left(2h,(1+h)^3\right),\ \ldots,\left(nh,(1+h)^{n+1}\right),\ldots\ .$$

Para $h=\dfrac{1}{8}$ obtém-se



A resolução apresentada do problema de Debaune seguiu os passos de Leibniz. É, conforme se referiu, a solução do problema de Cauchy $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ pelo método aproximado do polígono de Euler.

Um dos processos de definição da função exponencial é como solução deste problema, isto é, define-se função exponencial como sendo a única função cuja função derivada coincide com ela própria e cujo gráfico passa pelo ponto (0, 1). Embora este processo conduza rapidamente a resultados importantes, seria preciso demonstrar primeiro que um problema de Cauchy como o apresentado tem sempre solução única, o que não se faz por métodos elementares.

Se o problema de Debaune tivesse sido colocado depois de construída a função exponencial e estudadas as suas propriedades, como é que ele poderia ser resolvido?

Pretende-se determinar uma curva $y(x)$ que passe pelo ponto $(0,1)$ de forma que para cada ponto P a distância entre os pontos V e T onde a vertical e a tangente cortam o eixo dos *x* é constante igual a 1

Num ponto qualquer $(x_0, y(x_0))$, a equação da tangente é $y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)$. A abcissa x_1 do ponto onde esta recta intersecta o eixo Ox $(y(x_1) = 0)$ é dada por $x_1 = \dfrac{x_0 y'(x_0) - y(x_0)}{y'(x_0)}$. Tendo a recta vertical que passa pelo ponto $(x_0, y(x_0))$ a equação $x = x_0$, pretende-se que $|x_0 - x_1| = 1$, isto é,

$$\left| x_0 - \frac{x_0 y'(x_0) - y(x_0)}{y'(x_0)} \right| = 1.$$

Então, $|y(x_0)| = |y'(x_0)|$, para qualquer ponto $(x_0, y(x_0))$.

O problema tem duas soluções: a curva deverá passar pelo ponto $(0,1)$ e ser tal que $y' = y$, isto é, $y = e^x$, ou a curva deverá passar pelo ponto $(0,1)$ e ser tal que $y' = -y$, isto é, $y = e^{-x}$.

Põe-se agora a questão de saber se estas soluções são únicas. Mais precisamente, justificar se $y = e^x$ é a única solução do problema de Cauchy $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ e se $y = e^{-x}$ é a única solução do problema de Cauchy $\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

Considere-se o problema de Cauchy $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$. Para se demonstrar que $y = e^x$ é a única solução deste problema é necessário ter em conta o seguinte bem conhecido resultado, que resulta imediatamente do Teorema de Lagrange(ver Funções - 11.º ano, pág. 54): *Se uma função tem derivada nula em todos os pontos de um intervalo aberto de IR então ela é constante nesse intervalo.*

A unicidade de solução do problema $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ resulta imediatamente do seguinte teorema:

Teorema:

Dado um número real c, seja f uma função real definida num intervalo aberto de IR e diferenciável nesse intervalo, tal que

$$f'(x) = c\,f(x); \qquad (*)$$

então f é da forma

$$f(x) = k\,e^{cx} \qquad (**)$$

onde k é uma constante real.

Demonstração:

É fácil ver que as funções dadas em (**) verificam a igualdade (*). Verifique-se então que toda a função que satisfaça (*) tem que ser do tipo (**).

Suponha-se que f é tal que $f'(x) = c\,f(x)$ e seja $\varphi(x) = e^{-cx}\,f(x)$.

Tem-se $\varphi'(x) = -ce^{-cx} f(x) + e^{-cx} f'(x) = -ce^{-cx} f(x) + e^{-cx} cf(x) = 0$ e $\varphi(x) = k$ com k constante real. Então $k = e^{-cx} f(x)$ e $f(x) = ke^{cx}$, isto é, toda a solução de $f'(x) = c\,f(x)$ é do tipo $f(x) = ke^{cx}$ com k constante real.

Nota:

Pode parecer contraditório ter-se começado por referir a complexidade do estudo da existência e unicidade de solução para problemas de Cauchy, associado ao facto de se definir a função exponencial como solução do problema $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ e depois tratar especificamente o caso $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$. Observe-se que a abordagem feita não envolve a questão da existência de solução, pois se admitiu que se conhecia uma função, a função exponencial, cuja função derivada coincide com ela própria. A definição da função exponencial como sendo a solução única do problema de Cauchy $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ não é elementar porque nesse caso seria necessário demonstrar, em abstracto, que este problema tem solução.

O interesse de considerar explicitamente o problema de Cauchy no contexto desta brochura deriva do facto de, com frequência, o modelo matemático de uma dada situação ser precisamente um problema de Cauchy, que envolve equações diferenciais e condições iniciais.

Vale ainda a pena citar como problema cujo estudo envolve equações diferenciais e condições iniciais, embora não tratado nesta brochura, o movimento das partículas materiais na Física Newtoniana.

3. Evolução de uma população

Suponha-se uma população de uma determinada espécie que vive, se reproduz e morre numa determinada região, sem que haja emigração ou imigração de indivíduos dessa espécie. Em cada instante t designe-se por $I(t)$ o número de indivíduos dessa população. Um primeiro aspecto que convém notar é que se vai representar por uma função real de variável real um número de indivíduos que é necessariamente inteiro. Isto é aceitável porque se pretende apenas uma aproximação do número de indivíduos; mesmo assim deve-se restringir a aplicação do modelo a populações com muitos indivíduos. Tendo também em mente que se trata de um grande número de indivíduos, pode supor-se ainda que há uma taxa de natalidade uniforme e uma taxa de mortalidade também uniforme. Isto quer dizer que o número de novos indivíduos nascidos por unidade de tempo e o número de mortes por unidade de tempo são proporcionais ao número de indivíduos existentes. Considerando taxas instantâneas de variação e se designando por n a taxa de nascimentos por unidade de tempo e por m a taxa de mortes por unidade de tempo, obtém-se

$$I'(t) = n\,I(t) - m\,I(t) = (n-m)\,I(t)\,.$$

Do anteriormente exposto resulta então que tem que ser

$$I(t) = k\,e^{(n-m)t}\,.$$

Como $I(0) = k$, se for I_0 o número de indivíduos no instante 0, a evolução da população será dada por

$$I(t) = I_0\,e^{(n-m)t}\,,$$

que é a solução do problema de Cauchy $\begin{cases} I'(t) = (n-m)\,I(t) \\ I(0) = I_0 \end{cases}$.

Este modelo foi apresentado por Malthus em 1798, embora tivesse sido já anteriormente sugerido por Euler.

Podem-se agora analisar as previsões deste modelo para a evolução de uma população. Sugere-se que se considerem os casos $n > m$, $n < m$ e $n = m$. No caso da taxa de mortalidade ser superior à taxa de natalidade o modelo prevê naturalmente o decréscimo da população para um valor que poderá levar ao desaparecimento da espécie na região. Se a taxa de natalidade for superior à taxa de mortalidade o modelo prevê que a população cresça exponencialmente, o que só se verifica na prática, dentro de intervalos de tempo limitados, em culturas microbianas. É fácil ver que se esta lei fosse válida para uma qualquer espécie durante um tempo muito grande essa espécie acabaria por ocupar todo o espaço disponível à superfície da Terra.

A aplicação do modelo de Malthus à população humana dá origem a grandes controvérsias. Por um lado pode-se constatar que nos últimos séculos a população humana tem seguido uma lei de crescimento que parece exponencial. Por outro lado o modelo supõe uma taxa de natalidade uniforme e isso está longe de se verificar na população humana. Tem-se verificado que é entre as populações mais pobres que a taxa de natalidade é maior. Se é previsível que a Terra não pode comportar um número infinito de seres humanos vivos, é um problema decidir o que se pode fazer para evitar um crescimento insustentável. A este propósito citamos a seguinte passagem do relatório "O nosso futuro comum" elaborado em 1987 pela Comissão Mundial do Ambiente e do Desenvolvimento:

"Os países industrializados com preocupações sérias quanto à alta taxa de natalidade noutras partes do mundo têm obrigações além do simples fornecimento de caixas com material contraceptivo. O desenvolvimento económico, através do seu impacto indirecto nos factores socioculturais, baixa as taxas de nascimento. As políticas internacionais que actuam sobre o desenvolvimento económico têm assim interferência na possibilidade de os países poderem fazer alterar a natalidade. O problema do crescimento populacional deve pois integrar-se no problema mais lato do rápido crescimento socioeconómico dos países em vias de desenvolvimento."

Esta é uma situação em que a aplicação dos modelos matemáticos à realidade e as limitações dos modelos podem ter um impacto muito importante na sociedade. Uma perspectiva sobre este assunto com vista a uma possível utilização na aula de Matemática é referida por S. Carreira no artigo referido na bibliografia.

Para dar conta das situações em que há um limite máximo para a população que pode viver numa região, Verhulst introduziu em 1836 um modelo que considera que à medida que uma população se aproxima de um certo valor máximo, a taxa de crescimento da população (taxa de natalidade – taxa de mortalidade) se reduz. Em termos da função I este modelo exprime-se por

$$I'(t) = k\, I\left(1 - \frac{I}{M}\right)$$

onde k é uma constante positiva e M é o número máximo de indivíduos suportado pela região. Este modelo chama-se modelo logístico. Note-se que, se a taxa de crescimento da população é da ordem de k quando I/M é pequeno; à medida que I se aproxima de M essa taxa de crescimento vai-se aproximando de zero. No caso de a população inicial exceder M indivíduos a taxa de crescimento torna-se negativa, o que leva a população a reduzir-se.

Não será feita aqui a determinação detalhada das funções que verificam a igualdade acima, mas é fácil verificar que as funções do tipo

$$I(t)=\frac{I(0)\,M\,e^{kt}}{M+I(0)\left(e^{kt}-1\right)}=\frac{M}{1+\frac{M-I(0)}{I(0)}e^{-kt}}$$

são soluções do modelo logístico. Pode agora ser interessante estudar qual a evolução da população quando $I(0)<M$, $I(0)=M$ e $I(0)>M$. Deve-se notar que a fase inicial de um crescimento logístico partindo de um $I(0)$ muito menor do que M, é muito parecida com um crescimento exponencial.

Voltando agora à questão da população humana, pode-se pensar em aplicar este modelo. Se a evolução da população humana for logística, então o crescimento da população deverá começar a abrandar quando se aproximar do máximo suportado pela região em estudo. Pensando na Terra, colocam-se agora algumas questões interessantes:

- qual será o máximo de população que a Terra pode suportar?
- será que esta capacidade máxima é constante ou irá variando com a evolução científica e tecnológica? (aqui há que ponderar recursos renováveis, recursos não renováveis e produção de resíduos)
- nota-se nos países mais desenvolvidos uma clara tendência para a redução da taxa de crescimento da população; será que nos aproximamos do equilíbrio logístico nessas regiões?

À volta destes temas podem ser discutidas questões sociais, ecológicas e éticas importantes. Um sinal do impacto da Matemática na nossa sociedade é que muitos dos pareceres científicos e decisões políticas (em economia, ambiente, etc.) são baseados em modelos matemáticos (que, embora mais sofisticados do que estes, não deixam de ser apenas modelos matemáticos).

4. O arrefecimento do café

Considere-se agora uma situação diferente. A temperatura ambiente é de T_a graus e é servido um café que chega à mesa a uma temperatura de T_0 graus. Como vai variar a temperatura do café nos instantes seguintes? Um modelo possível nesta situação é a chamada lei de Newton do arrefecimento e que diz que a taxa de variação da temperatura é proporcional à diferença entre a temperatura do café e a temperatura ambiente. Representando a temperatura do café no instante t pelo valor da função real $T(t)$, a lei de Newton exprime-se por

$$T'(t) = -k(T(t) - T_a)$$

sendo k uma constante positiva. Note-se que se a temperatura do café for superior à temperatura ambiente a variação de temperatura será negativa e que se a temperatura do café for inferior à do ambiente o café terá tendência para aquecer (embora talvez não se tivesse pensado inicialmente neste segundo caso, o modelo exprime igualmente bem as duas situações).

Para resolver a equação acima é mais simples considerar a diferença entre a temperatura do café e a temperatura ambiente. Faz-se então

$$D(t) = T(t) - T_a$$

e agora

$$D'(t) = -kD(t).$$

Chega-se assim ao problema de Cauchy $\begin{cases} D'(t) = -kD(t) \\ D(0) = T_0 - T_a \end{cases}$ cuja solução é $D(t) = D(0)\, e^{-kt}$, pelo que se obtém finalmente, após algumas contas,

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)\, e^{-kt},$$

Note-se para já que este é um modelo bastante simplificado da realidade. Está-se, por exemplo, a atribuir um único valor de temperatura do café a todos os pontos do interior da chávena, o que não é completamente realista. Podemos, em contrapartida, pensar que se trata de uma temperatura média. Um teste a este modelo pode ser feito na sala de aula, usando um sensor ligado à calculadora para medir a evolução da temperatura numa chávena de café e ver se se ajusta bem a uma função do tipo indicado acima. Podem usar-se as funções de ajustamento da calculadora para estimar um valor para o parâmetro desconhecido k.

5. Música e logaritmos

O som consiste em vibrações que se propagam no ar. Contudo, o ouvido humano e uma grande parte dos microfones são apenas sensíveis às variações de pressão no ar. Assim, o som escutado num determinado ponto pode ser descrito por uma função real de variável real, representado a diferença de pressão em função do tempo. Esta diferença de pressão é medida em relação à pressão de equilíbrio, correspondente à não existência de som.

Uma descrição tão geral como esta inclui todos os tipos de som, nomeadamente o ruído, e é aproveitada pela rádio e pelos aparelhos de reprodução sonora mais simples, que apenas transmitem a informação relativa às variações de pressão. Na recepção o alto-falante gera de novo variações de pressão iguais (tanto quanto possível) às recebidas pelo microfone.

Uma simplificação importante neste modelo é supor que a sobreposição de dois sons simultâneos é um som caracterizado pela soma das funções de variação de pressão correspondentes a cada um dos sons sobrepostos. Esta simplificação é válida se as variações de pressão envolvidas não forem muito grandes (no caso de estampidos provocados por explosões, por exemplo, esta simplificação não seria válida) e é importante porque permite decompor e compor sons em componentes de determinado tipo.

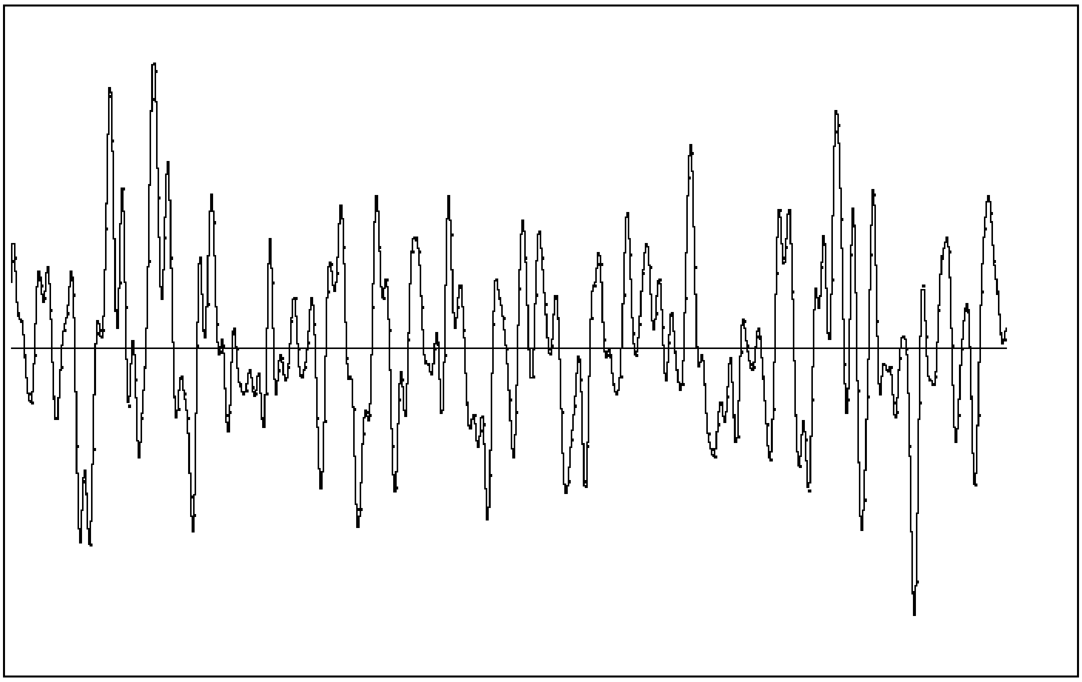
Um aparelho como o CBL e um sensor de som permite obter valores numéricos das variações de pressão num microfone e guardá-los na calculadora. Também um computador com uma placa de som permite gravar um som digitalizado (isto é, em formato numérico; os ficheiros típicos em Windows têm a extensão wav). O som digitalizado pode depois ser reproduzido pela placa de som ou pode ser analisado por um programa adequado. Quer na calculadora quer no computador é possível observar o gráfico correspondente à variação de pressão em função do tempo. Para este texto usou-se um software de análise e tratamento de som.

Actividade:

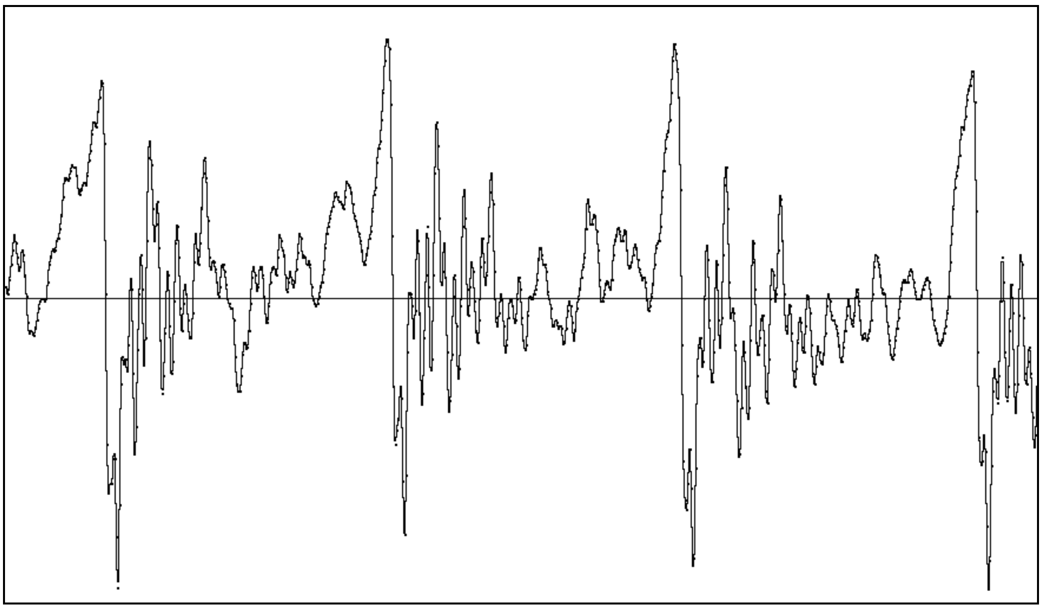
Usando o CBL e um sensor de som ou um computador com placa de som e software adequado, regista os gráficos correspondentes aos seguintes sons:

- bater palmas;
- voz humana a falar;
- som de uma só corda de guitarra;

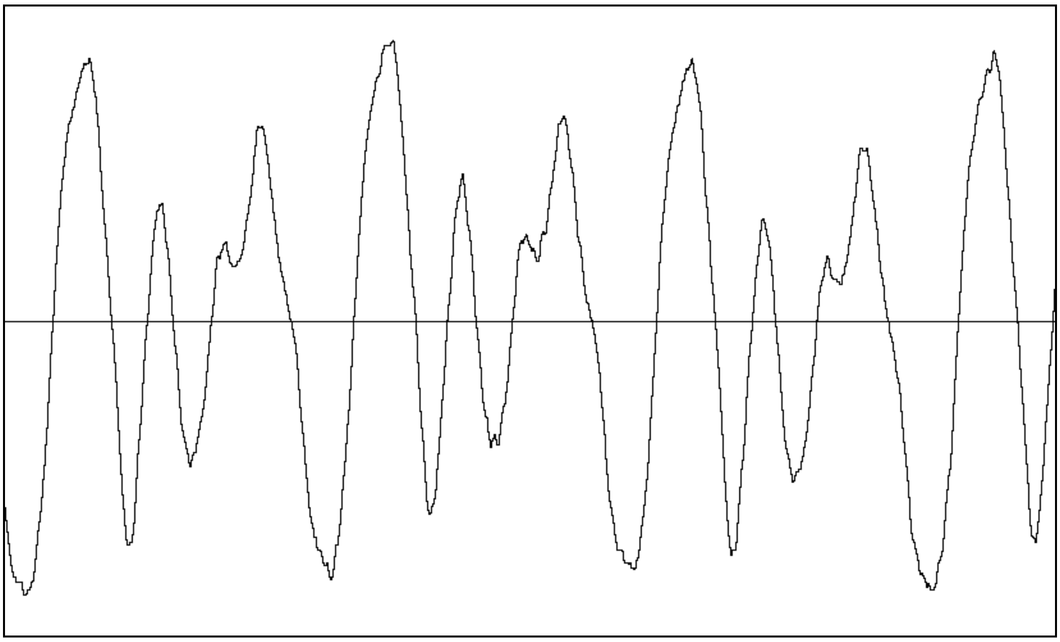
Apresentam-se nas figuras seguintes ampliações dos gráficos obtidos:



Este primeiro gráfico foi obtido a partir de um bater de palmas. Note-se que não se observa nenhum tipo de regularidade no comportamento da função.



O segundo gráfico foi obtido com uma voz masculina. a falar. Embora pareça haver um padrão que se repete periodicamente, os detalhes são diferentes em cada troço da função.



Este gráfico foi obtido a partir do som de uma corda de guitarra. Note-se que, à parte um ruído de pequena intensidade, está-se perante um padrão que se repete periodicamente.

Ao longo dos parágrafos seguintes pode-se constatar que este modelo para o fenómeno sonoro permite estudar já muitas das características dos sons e, em particular, dos sons musicais. No entanto, dado que o som é um fenómeno que se desenrola no espaço, uma função real de variável real não é suficiente para o descrever. O modelo de uma função para o som não dá conta de algumas características interessantes e importantes. Como os ouvidos estão em lados opostos da cabeça, cada ouvido recebe variações de pressão diferentes, consoante a fonte do som, e o cérebro tira partido desta característica para localizar a fonte do som. Se só se reproduzir o som ouvido num ponto não é possível gerar a sensação que permite, por exemplo, perceber se um som vem da esquerda ou da direita.

Para reproduzir a sensação espacial usa-se a estereofonia, que corresponde a usar duas funções, uma para cada ouvido.

No que se segue consideraram-se apenas sons produzidos por instrumentos musicais como pianos, guitarras, violinos, etc. Constata-se que estes sons são descritos por variações periódicas da pressão, pelo que se vão considerar algumas características das funções periódicas.

Uma função h diz-se **periódica** se existe $t > 0$ tal que

$$h(x+t) = h(x) \quad \forall x\colon x \in D_h \text{ e } x+t \in D_h \ .$$

Se a função h não for constante, ao menor positivo nas condições anteriores chama-se o período T e define-se a frequência f por

$$f = \frac{1}{T} \ .$$

Quando se fizerem medições com o CBL ou com o computador serão indicados o período em segundos e a frequência em ciclos por segundo ou Hertz (Hz).

Os sons musicais são geralmente classificados segundo três características: intensidade, altura e timbre.

A **intensidade** é a característica que permite distinguir sons fortes de sons fracos. Numa aparelhagem sonora faz-se variar a intensidade rodando o botão do volume.

A **altura** permite distinguir sons agudos de sons graves. Em geral a voz feminina é mais alta (aguda) do que a voz masculina.

O **timbre** é a característica que permite reconhecer a fonte que produz o som. Pode-se assim distinguir uma guitarra de um piano, ainda que produzam a mesma nota.

As três características acima indicadas estão relacionadas com as funções que descrevem os sons. A intensidade está ligada à amplitude das variações de pressão, sendo um som tanto mais intenso quanto maior for a variação da função que descreve o som. A percepção e medição (em decibéis) da intensidade sonora pode dar origem a um estudo interessante com a aplicação dos logaritmos.

A altura corresponde à frequência dessas variações de pressão. O timbre está ligado à forma da função que se repete periodicamente.

Actividade:
Usando dois ou mais instrumentos musicais bem afinados e o CBL procura obter os gráficos e as frequências das variações de pressão associadas, para as seguintes situações:
a) no mesmo instrumento, com notas diferentes;
b) no mesmo instrumento, a mesma nota, mas com intensidades diferentes (se possível);
c) a mesma nota em instrumentos diferentes;

São de considerar algumas questões que se colocam na música, no que diz respeito à altura do som musical.

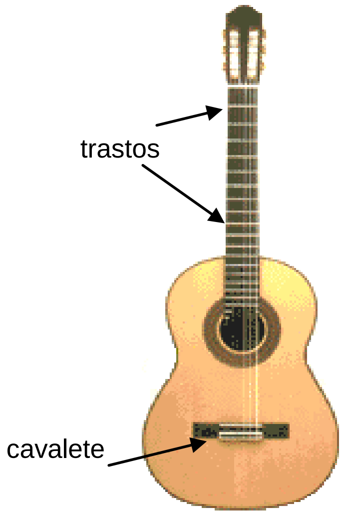
Um primeiro aspecto que se constata na música é que, para caracterizar uma melodia, são mais importantes as diferenças de altura dos sons do que as alturas absolutas, o que permite reconhecer uma melodia quer ela seja tocada por um violino ou por um trombone. Caracteriza-se assim musicalmente a noção de intervalo entre dois sons como sendo a diferença entre as suas alturas. Embora esta noção se baseie apenas na percepção dos músicos, ela tem sido usada desde há milénios como base da teoria musical.

Embora, dentro de certos limites, seja possível gerar sons com quaisquer alturas (com a voz ou com um violino, por exemplo) a verdade é que em geral os músicos optam por escolher e usar um número limitado de sons a que se chamam escala. Também aqui são mais importantes os intervalos entre os sons da escala do que os sons em si. Ao longo dos séculos mais recentes a mesma nota tem mesmo correspondido a valores ligeiramente diferentes, o que se traduz em diferentes afinações dos instrumentos.

Uma escala musical simples é composta pelas sete notas: dó, ré, mi, fá, sol, lá e si. Contudo os músicos usam ainda outros sons intermédios (dó sustenido, ré sustenido, fá sustenido, sol sustenido e lá sustenido) que formam a escala cromática: dó, dó sustenido, ré, ré sustenido, mi, fá, fá sustenido, sol, sol sustenido, lá, lá sustenido, si;
as notas acima e abaixo deste conjunto têm os mesmos nomes mas diz-se que pertencem a oitavas diferentes.

De seguida estudam-se algumas relações entre estes sons usando uma guitarra.

A guitarra tem seis cordas que podem vibrar soltas ou estando pressionadas contra trastos de metal de forma a reduzir o comprimento livre da corda. Quando na guitarra se avança de um trasto para o seguinte o comprimento reduz-se e o som sobe meio tom cromático. Tome-se como exemplo a 6.ª corda da guitarra, a mais grave; se a guitarra estiver correctamente afinada e esta corda estiver solta obtém-se um mi; apertando a corda no primeiro trasto obtém-se um fá, de seguida um fá sustenido, e assim por diante.



Actividade:

Material: uma guitarra e um CBL.

1. Numa guitarra mede as sucessivas distâncias entre os trastos e o cavalete. Obténs assim os comprimentos livres das cordas quando tocadas em cada uma das posições.

2. Faz uma tabela com os sucessivos quocientes entre cada comprimento e o anterior. Calcula agora os logaritmos dos comprimentos e faz um gráfico. Que tipo de função poderá ser um modelo para estes dados (logaritmos dos comprimentos)? E para os dados originais?

3. Usando o CBL recolhe os dados relativos ao som emitido pela 3.ª corda quando premida em cada uma das posições indicadas e determina as frequências associadas.

4. Tenta relacionar as duas listas de valores. Sugestão: calcula o produto da frequência pelo comprimento livre da corda.

Fazendo esta experiência e obtiveram-se os seguintes valores aproximados:

Posição	Comprim. útil (C_n)	Freq. medida (F_n)	C_{n+1}/C_n	$\ln(C_n)$	$C_n \times F_n$	F_{n+1}/F_n
Corda solta	64,6	189.2	0,944	4,17	12 222	1,088
1.º trasto	61,0	205.9	0,946	4,11	12 560	1,041
2.º trasto	57,7	214.3	0,943	4,06	12 365	1,077
3.º trasto	54,4	230.8	0,943	4	12 556	1,057
4.º trasto	51,3	243.9	0,945	3,94	12 512	1,079
5.º trasto	48,5	263.2	0,942	3,88	12 765	1,027
6.º trasto	45,7	270.3	0,945	3,82	12 353	1,033
7.º trasto	43,2	279.1	0,944	3,77	12 057	1,075
8.º trasto	40,8	300.0	0,946	3,71	12 240	1,083
9.º trasto	38,6	325.0	0,943	3,65	12 545	1,041
10.º trasto	36,4	338.3	0,942	3,59	12 314	1,082
11.º trasto	34,3	365.9	0,945	3,54	12 550	1,066
12.º trasto	32,4	390.2	0,944	3,48	12 642	1,046
13.º trasto	30,6	408.2	0,944	3,42	12 491	1,05
14.º trasto	28,9	428.6	0,945	3,36	12 387	1,056
15.º trasto	27,3	452.4	0,945	3,31	12 351	1,08
16.º trasto	25,8	488.4	0,942	3,25	12 601	1,048
17.º trasto	24,3	511.6	0,942	3,19	12 432	1,07
18.º trasto	22,9	547.6	0,943	3,13	12 540	1,044
19.º trasto	21,6	571.4		3,07	12 342	

Em baixo representam-se os gráficos dos comprimentos livres das cordas e dos logaritmos dos comprimentos e as respectivas funções de regressão.

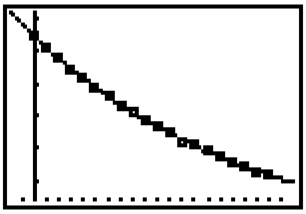
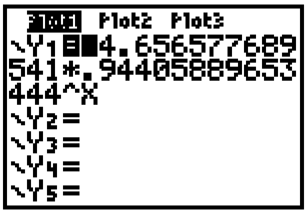


Gráfico
posição/comprimento



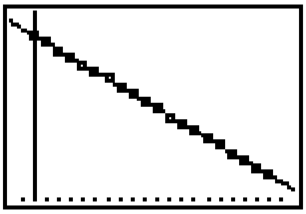
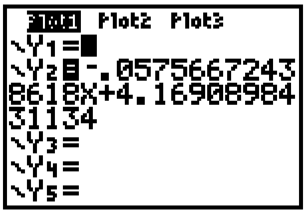


Gráfico posição/logaritmo dos comprimentos



Do estudo dos dados obtidos conclui-se que os produtos das frequências pelos comprimentos das cordas são aproximadamente constantes. Tomando a média (12 441) como referência, as variações são de poucos pontos percentuais. Verifica-se também que comprimentos e frequências são aproximadamente termos de progressões geométricas. Estes dados experimentais vêm ao encontro das previsões de modelos matemáticos para a corda vibrante. Efectivamente, da análise matemática de um modelo da corda vibrante resulta que, para duas cordas com a mesma densidade e sujeitas à mesma tensão, mas com comprimentos diferentes, as frequências fundamentais de vibração das cordas são inversamente proporcionais aos respectivos comprimentos.

Pode-se ver na actividade anterior que a cada nota está associada uma dada frequência. Na verdade convenciona-se internacionalmente que a cada nota corresponde uma dada frequência, de acordo com a seguinte tabela (o símbolo # indica os sustenidos):

Nota	Frequência	Nota	Frequência
Sol (2)	196,0	Fá (3)	349,2
Sol# (2)	207,7	Fá#(3)	370,0
Lá (2)	220,0	Sol (3)	392,0
Lá# (2)	233,1	Sol#(3)	415,3
Si (2)	246,9	Lá (3)	440,0
Dó (3)	261,6	Lá#(3)	466,2
Dó#(3)	277,2	Si (3)	493,9
Ré (3)	293,7	Dó (4)	523,3
Ré#(3)	311,1	Dó# (4)	554,4
Mi (3)	329,6	Ré (4)	587,3

Os números entre parêntesis correspondem às oitavas de um piano e são usados para distinguir sons com o mesmo nome mas de oitavas diferentes.

Comparando esta tabela com a que foi obtida experimentalmente pode concluir-se que a guitarra usada estava francamente desafinada.

Uma questão que se coloca agora é: porquê esta escala e não outra? Tentar-se-á chegar a uma resposta no que se segue.

Como se estão a caracterizar as alturas dos sons em termos das suas frequências, um intervalo de dois sons será caracterizado como sendo a razão das suas frequências. Verifica-se na tabela anterior que todos os intervalos de duas notas sucessivas são iguais. Contudo somando-se ou subtraindo-se razões entre frequências não se obtêm as relações aditivas entre intervalos usadas pelo músicos. É aqui que irão entrar os logaritmos, como se verá mais adiante.

Desde há muito que os músicos apreciam particularmente certos intervalos musicais. Estes intervalos têm hoje o nome de intervalo de uma oitava, intervalo de quinta, intervalo de quarta. Pitágoras (conhecido pelo teorema) usou mesmo um instrumento chamado monocórdio (com uma única corda) e chegou a uma conclusão que foi importante não só para a música mas também para a sua filosofia: os intervalos musicais mais importantes obtêm-se em dois monocórdios semelhantes quando as relações entre os seus comprimentos são fracções que envolvem os quatro primeiros inteiros (oitava = 2/1, quinta=3/2, quarta=4/3).

Pitágoras usou os intervalos fundamentais para construir a sua escala que incluía as seguintes relações (razões entre as frequências das notas e a frequência do dó; Pitágoras terá utilizado as razões entre os comprimentos das cordas, que são inversas destas):

Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

O sistema de Pitágoras foi utilizado durante a Idade Média, até ao século XVI. Contudo este sistema não era completamente satisfatório, nem do ponto de vista teórico, nem do ponto de vista prático. Um dos grandes defeitos do sistema de Pitágoras era que o intervalo de terceira (Dó-Mi) não soava muito bem. No século XVI, Zarlino propôs uma nova escala baseada no acorde perfeito maior (que ao dó e ao sol acrescenta um mi com uma frequência de 5/4 da do dó), alterando algumas notas:

Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó

1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

Podem-se agora usar os logaritmos, não só para compreender melhor alguns dos problemas que se punham mas também para acompanhar o processo de solução que ainda hoje está em uso. Considerem-se em primeiro lugar os intervalos entre notas sucessivas (razões das frequências e também razões entre as razões das duas tabelas acima). Para a escala de Pitágoras tem-se

Dó-Ré	Ré-Mi	Mi-Fá	Fá-Sol	Sol-Lá	Lá-Si	Si-Dó
9/8	9/8	256/243	9/8	9/8	9/8	256/243

e para a escala de Zarlino

Dó-Ré	Ré-Mi	Mi-Fá	Fá-Sol	Sol-Lá	Lá-Si	Si-Dó
9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15

Na escala de Pitágoras os intervalos de um tom são todos iguais entre si e os de meio tom são também iguais entre si. Na escala de Zarlino os intervalos de um tom não são todos iguais. Se um piano estivesse afinado pela escala de Zarlino e se se tentasse elevar a altura de uma melodia passando o intervalo Dó-Ré para Ré-Mi estar-se-ía a tocar um intervalo ligeiramente diferente. Além disso ficam ainda algumas questões cuja resposta não é óbvia olhando apenas para as tabelas: em qualquer das duas escalas, será que juntando dois meios tons se obtém algo muito próximo de um tom, isto é, será que $(256/243)^2 \approx 9/8$ ou que $(16/15)^2 \approx 9/8$ ou 10/9? Calculando os logaritmos de cada uma das razões obtém-se uma resposta rápida. Na escala de Pitágoras

Dó-Ré	Ré-Mi	Mi-Fá	Fá-Sol	Sol-Lá	Lá-Si	Si-Dó
0,1178	0,1178	0,0521	0,1178	0,1178	0,1178	0,0521

e para a escala de Zarlino

Dó-Ré	Ré-Mi	Mi-Fá	Fá-Sol	Sol-Lá	Lá-Si	Si-Dó
0,1178	0,1054	0,0645	0,1178	0,1054	0,1178	0,0645

Pode-se já observar que os meios tons de Zarlino são maiores do que os de Pitágoras e que se dois meios tons de Pitágoras não perfaziam um tom, dois meios tons de Zarlino excediam sempre um tom.

Entre os séculos XVI e XVIII foram sendo propostas e utilizadas diversas escalas, sobretudo com o objectivo de assegurar que os instrumentos que tinham (e ainda hoje têm) uma afinação fixa (órgãos e cravos) pudessem ser utilizados em situações variadas, conservando tanto quanto possível os intervalos descobertos por Pitágoras, que são os que parecem melhor ao ouvido.

Estas escalas foram-se aproximando de uma escala que já era conhecida desde a antiguidade mas que quase nunca passava de possibilidade teórica: fazer os intervalos de um tom (Dó-Ré, Ré-Mi, Fá-Sol, Sol-Lá, Lá-Si) todos iguais entre si e os de meio tom (Mi-Fá e Si-Dó) exactamente iguais a metade dos intervalos de um tom. Esta escala chama-se de temperamento igual e tem a vantagem de permitir que se transponha uma melodia (subindo ou descendo todas as notas) conservando rigorosamente os intervalos relativos.

Veja-se como se pode caracterizar a escala de temperamento igual usando os logaritmos. Designando por r a razão de frequências num intervalo de meio tom, num intervalo de um tom a razão será de r^2. Para preservar as oitavas com a razão igual a 2 obtém-se

$$r^2 \times r^2 \times r \times r^2 \times r^2 \times r^2 \times r = 2 \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}059463094.$$

A utilização destas razões dá origem à escala apresentada na tabela com as frequências das notas. Os meios tons e tons desta escala chamam-se cromáticos.

A escala de temperamento igual foi sendo adoptada ao longo de todo o século XIX e hoje é sistematicamente usada, excepto quando se tenta ouvir a música como ela era tocada na época em que foi composta. Contudo estas reconstituições são em parte conjecturais. Uma consequência curiosa da adopção generalizada do temperamento igual é que notas que noutras escalas eram distintas agora passaram a ser iguais. É o caso do Dó sustenido e do Ré bemol. Na escala actual correspondem exactamente ao mesmo som enquanto há dois séculos correspondiam a sons ligeiramente diferentes.

Podem-se ainda aproveitar os intervalos de meio tom cromático para medir qualquer intervalo, usando os logaritmos. Um intervalo com uma razão de frequências f_2/f_1 terá x meios tons se

$$r^x = \frac{f_2}{f_1} \Leftrightarrow x = \log_r\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = \frac{\ln\left(\frac{f_2}{f_1}\right)}{\ln r} = \frac{12\ln\left(\frac{f_2}{f_1}\right)}{\ln(2)}$$, dado que r = 2 $^{1/12}$

Esta unidade chama-se *prony* e usa-se habitualmente o centésimo de prony designado por *cent*. A oitava corresponde a uma razão de frequências de 2 e tem 12 prony = 1200 cents. Para a escala de Zarlino ficariam então os seguintes valores para os intervalos em cents:

Dó-Ré	Ré-Mi	Mi-Fá	Fá-Sol	Sol-Lá	Lá-Si	Si-Dó
203,91	182,4	111,73	203,91	182,4	203,91	111,73

A escala de temperamento igual prescinde dos intervalos naturais para garantir a facilidade de transposição das melodias e a facilidade de utilização de uma escala de sons mais alargada. Tomando ainda o cent como medida, pode-se ver que o intervalo de quinta natural devia ter

$$100\frac{12\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{\ln(2)} = 701{,}955 \text{ cents}$$

e tem apenas 700. A situação pior é a do intervalo de terceira (Dó-Mi) que para soar bem deveria ter uma razão de frequências de 5/4, isto é, de

$$100\frac{12\ln\left(\frac{5}{4}\right)}{\ln(2)} = 386{,}3138 \text{ cents}$$

e na escala de temperamento igual tem 400 cents. Contudo, na escala de Pitágoras estes intervalos tinham 407,82 cents, o que era ainda pior.

Exercício: A que razão de frequências corresponde um intervalo de 1 cent?

Termina-se esta secção com uma citação do livro "A Música - Linguagem, Estrutura, Instrumentos", de Roland de Candé (p. 135):

A utilização destas unidades logarítmicas permite comparar imediatamente os mais complicados intervalos e simplifica os cálculos, pois os intervalos são relações[1], não se

[1] Aqui o autor fala de relações no sentido de razões ou quocientes.

somam nem se subtraem, mas multiplicam-se ou dividem-se; enquanto as «alturas» (grandezas subjectivas variando como o logaritmo dos intervalos) se prestam à adição e à subtracção. Assim, permitindo substituir uma multiplicação por uma adição, uma elevação a potência por uma multiplicação, os logaritmos estão também mais conformes com o mecanismo da percepção auditiva.

ACTIVIDADES PARA A SALA DE AULA

À semelhança das brochuras sobre o mesmo tema para os 10º e 11º anos, apresentamos um conjunto de tarefas a propor aos alunos, em trabalhos de grupo ou individuais, na sala de aula ou fora dela.

Algumas das actividades são comentadas ou simplesmente indicadas soluções possíveis, pretendendo-se com isto transmitir de alguma forma a nossa leitura do programa.

Na fundamentação teórica são abordados um conjunto de modelos, retomados em propostas para a sala de aula, nomeadamente "Arrefecimento do café", "Evolução de uma população", "Música e logaritmos" e "O compasso de Descartes e a curva logarítmica".

São apresentadas actividades diversificadas cuja exploração ganha com a utilização de tecnologias (calculadora, sensores, computador, Internet).

Várias das actividades constituem bons exemplos para a discussão do processo de modelação. Na maioria dos problemas de modelação não faz qualquer sentido a exigência do cálculo de valores exactos dada a situação real em estudo.

Algumas das tarefas apresentadas nas brochuras dos anos anteriores, nomeadamente as que respeitam a problemas de optimização, podem ser retomadas e estudadas agora também com auxílio de derivadas.

Função exponencial e crescimento exponencial

As funções exponencial e logarítmica têm forte aplicação na vida real sendo possível encontrar muitos fenómenos físicos representáveis pelos seus gráficos. São funções privilegiadas para tratar o processo de modelação matemática.

EliM&Minação

Despeja uma embalagem de **M&M´s** para um prato de papel de modo que as pastilhas não fiquem umas por cima das outras. Retira todos os **M&M´s** em que o **M** esteja virado para cima (cuidado com as amarelas porque o **M** é difícil de ver).
Conta e regista o número das pastilhas removidas e o número das que restam.
Elimina as pastilhas removidas e despeja as restantes para um copo.
Agita o copo, despeja estas **M&M´s** outra vez para o prato e retira novamente aquelas em que o **M** aparece.
Regista o número das eliminadas e o número das que ficam.
Continua a repetir este processo até que todas as pastilhas sejam eliminadas.
Completa a tabela com as informações recolhidas:

Número da experiência **(x)**	Pastilhas removidas	Pastilhas restantes **(y)**
1		
2		
3		
4		
5		

• Na calculadora gráfica representa todos os pontos **(x, y)**.
• Encontra uma função que se adapte bem a estes dados.
• Embora não exista a resposta correcta para o problema, algumas funções são melhores do que outras. Tenta encontrar a melhor possível. Regista o tipo de função que escolheste, a expressão analítica, o gráfico e a nuvem de pontos.

Comentário

Esta poderá ser uma actividade a propor aos alunos para introduzir o estudo do crescimento exponencial. A coluna “pastilhas removidas” não é utilizada a não ser como controlo de contagem.

Numa das experiências realizadas a embalagem tinha 131 M&M e os resultados foram os seguintes:

Número da experiência **(x)**	1	2	3	4	5	6	7	8
Pastilhas restantes **(y)**	74	41	23	14	7	6	2	0

Os alunos poderão encontrar experimentalmente as funções.

Se esta actividade for introduzida antes do estudo da função exponencial, pode ser feita uma discussão colectiva com os alunos no sentido de recordar os tipos de funções já estudadas e os gráficos correspondentes. Esta altura será aproveitada para informar que funções do tipo $y = AB^x$, com A positivo e 0 < B < 1 apresentam gráficos como o indicado (gráfico 1).

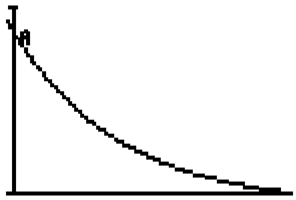


gráfico 1

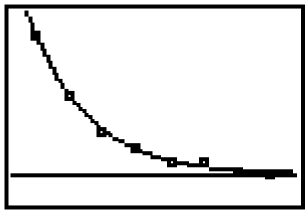
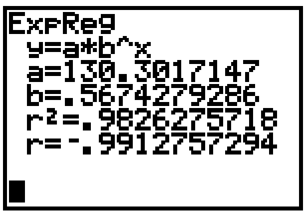
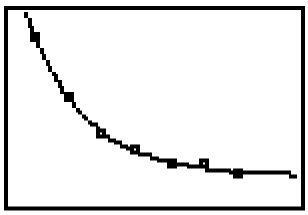


gráfico 2

Os alunos que fizeram esta experiência encontraram a função $y = 131 \times 0{,}57^x$. Esta função adapta-se bastante bem à nuvem de pontos (gráfico2).

De notar que se se procurar, com estes valores, a função de regressão exponencial, a máquina dará erro devido ao facto do último valor ser zero. Poderá ser sugerido aos alunos que desprezem o último valor. Neste caso a função de regressão obtida é a seguinte:





Depois de estudada a função exponencial, poderemos voltar a discutir esta questão, relacionando, por um lado, o valor zero com o limite no infinito da função exponencial, por outro lado analisando a adequação do modelo encontrado à situação em estudo.

Função exponencial – uma investigação

1. Faz o gráfico das seguintes funções:

$$y_1 = 2^x \qquad y_2 = 3^x \qquad y_3 = 5^x$$

a) Observa e descreve o modo como o parâmetro alterado influenciou os gráficos.

b) Indica o domínio, contradomínio, zeros e intervalos de monotonia de cada uma das funções.

2. Para que valores de x é que $2^x > 3^x > 5^x$?

E para que valores de x é que $2^x < 3^x < 5^x$?

3. Faz os gráficos das funções:

$$y_1 = 2^{-x} \qquad y_2 = 3^{-x} \qquad y_3 = 5^{-x}$$

a) Observa e descreve o modo como o parâmetro alterado influenciou os gráficos.

b) Indica o domínio, contradomínio, zeros e intervalos de monotonia de cada uma das funções.

c) Para que valores de x é que $2^{-x} > 3^{-x} > 5^{-x}$?

d) Para que valores de x é que $2^{-x} < 3^{-x} < 5^{-x}$?

4. Estuda agora as famílias de funções:

$$f(x) = a^x \quad \text{e} \quad g(x) = a^{-x}$$

Qual é em cada um dos casos a influência do parâmetro **a**?

5. Faz variar, em *IR*, os parâmetros **a**, **b** e **c** e estuda a família de funções ***h***:

$$h(x) = a^{bx+c}$$

<u>Comentário</u>

Desde o 10º ano que os alunos, com auxílio da calculadora gráfica têm vindo a estudar famílias de funções, deverão por isso nesta altura ser capazes de fazer o estudo proposto e registar gráficos e conclusões, nomeadamente no que respeita à monotonia, à forma relativa como variam as funções exponenciais em *IR*, ao facto do gráfico de todas as funções do tipo $y = a^{bx}$ intersectarem o eixo das ordenadas em (0,1) e finalmente o efeito do parâmetro c.

Os alunos podem também, a partir da observação dos gráficos intuir acerca dos limites no infinito.

Esta parece-nos ser uma investigação que pode ser pedida aos alunos como trabalho em casa e posteriormente discutidas as conclusões na aula.

Função exponencial de base e

1. Esboça o gráfico da função definida em *IR* por $f(x) = e^x$. A partir do gráfico anterior esboça os gráficos das seguintes funções, indicando para cada caso o domínio, contradomínio e zeros:

a) $g_1(x) = -f(-x)$ **b)** $g_2(x) = f(x-2)$ **c)** $g_3(x) = |f(x)|$

d) $g_4(x) = 2f(x)$ **e)** $g_5(x) = \dfrac{1}{f(x)}$

2. Representa graficamente as funções definidas em *IR* por:

$g_1(x) = e^{-x}$ e $g_2(x) = 1 - x^2$.

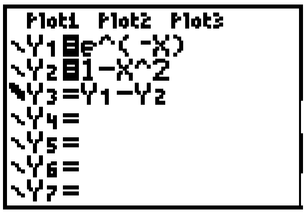
Determina o conjunto solução de $g_1(x) = g_2(x)$.

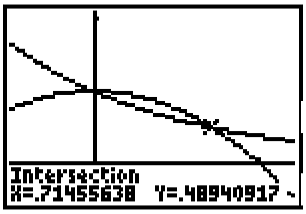
(Apresenta as soluções com aproximação às centésimas).

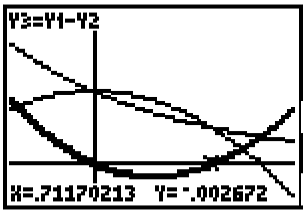
<u>Comentário</u>

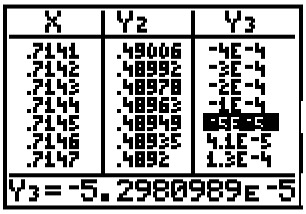
Uma vez que são conhecidos os comportamentos das funções g_1 e g_2 e analisando os gráficos não restam quaisquer dúvidas de que as funções se intersectam em apenas dois pontos. Com a calculadora podemos calcular as intersecções: a primeira, para $x = 0$ e a segunda para $x \approx 0{,}71$ (aproximação às centésimas).

Os alunos podem calcular a intersecção nas calculadoras que têm esta função ou então estudar a função diferença e procurar, na tabela, os seus zeros.









Arrefecimento do café

1. Quando nos entregam uma bica, o café vem muito quente e quem não põe açúcar precisa de esperar algum tempo para o beber.

A evolução da temperatura T (em °C) em função do tempo $\boldsymbol{t}$ (em minutos) é definida pela expressão $T = 20 + 60e^{-0,11t}$.

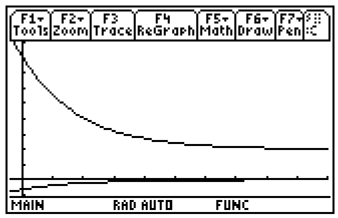
- Representa graficamente a função T.
- A que temperatura nos é entregue o café?
- Quem gosta de o beber a 60° quanto tempo tem de esperar?
- O arrefecimento do café é mais acentuado nos primeiros dois minutos ou nos dois minutos seguintes?
- Em que instante é que o arrefecimento é mais acentuado?
- Que acontece se deixarmos o café arrefecer muito tempo? Relaciona a conclusão a que chegaste com a expressão de T.

2. Estuda a família de funções $f(x) = ae^{-kx} + c$.

Comentário

Neste problema, em vez de se usar a expressão dada será bastante mais interessante fazer a experiência.

Para isso podem ser recolhidas as temperaturas utilizando um sensor de temperatura ou, na falta deste, um termómetro do laboratório de Física.



Após a recolha os dados serão tratados com a calculadora.

Para estudar a taxa de arrefecimento nos primeiros minutos, os alunos terão que calcular as taxas de variação média no intervalos $[0, 2]$ e $[2, 4]$. Se os intervalos considerados fossem, por exemplo, $[0, 10]$ e $[10, 20]$ os alunos poderiam representar as rectas secantes ao gráfico e justificar quando é que o arrefecimento é mais acentuado comparando os declives. No intervalo pedido esta comparação é difícil.

Para se indicar o instante em que o arrefecimento é mais acentuado, os alunos podem recorrer ao gráfico da função derivada e procurar o mínimo desta função no intervalo considerado.

Mais tarde, depois do estudo das regras de derivação da função exponencial, poder-se-á voltar ao problema e resolvê-lo também analiticamente.

Este é um problema que possibilita a discussão do processo de modelação matemática.

A propósito do modelo em causa deve ser lida a parte teórica desta brochura, na página 82.

A actividade que se apresenta na página seguinte " Mais funções exponenciais" é uma ficha de aplicação que se espera que os alunos resolvam recorrendo à calculadora, às transformações estudadas e às propriedades, agora conhecidas, da função exponencial.

Mais funções exponenciais

1. Considera os gráficos das seguintes funções:

$y_1 = -a^x$ $\quad y_2 = a^x$ $\quad y_3 = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, $a \neq 0$

Qual dos gráficos é simétrico, em relação à origem do referencial, ao gráfico da função $y = a^{-x}$?

2. Que transformações sofre o gráfico da função $y = 2^x$**,** para que se possa obter o gráfico de cada uma das seguintes funções:

$y_1 = 2^x - 4$ $\quad y_2 = 2^{x+1} + 7$ $\quad y_3 = 3\times(2^x)$ $\quad y_4 = -2^{-x}$

3. Resolve as inequações:

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **b)** $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^x$

4. Indica o **contradomínio**, **zeros** e **intervalos** de **monotonia** de cada uma das funções:

a) $y_1 = 2^x - 4$ **b)** $y_2 = 3\times(2^x)$ **c)** $y_3 = -2+(\frac{1}{2})^{x+1}$

5. Resolve as seguintes equações:

a) $2^x = 4^2$ **b)** $x^4 = 16$

c) $8^{0,5x} = 4^{x+1}$ **d)** $(-8)^{\frac{5}{3}} = 2\times\left(4^{\frac{x}{2}}\right)$

Remédios para dormir

Há pessoas que por razões de natureza física ou psíquica têm dificuldade em adormecer. Os médicos dispõem duma vasta gama de medicamentos que podem receitar nestes casos. Uma propriedade importante que se requer a estes medicamentos é que o seu efeito desapareça antes da manhã seguinte de forma que quem o toma possa retomar a sua actividade normal sem estar sonolento.

Imagina que o médico receitou a uma tua amiga um destes medicamentos. Depois de tomar algumas pastilhas, o medicamento atingiu um nível de 4mg/l no sangue.

Com que rapidez desaparecerá o efeito do medicamento?

Para estudares a situação considera os dados da tabela, referentes a 4 medicamentos:

Nome	Fórmula
Triazolam	$y = A(0.84)^x$
Nitrazepam	$y = A(0.97)^x$
Pentobombitone	$y = A(0,5)^x$
Methohexitone	$y = A(1.15)^x$

A - dose inicial (mg/l); **y** - quantidade de medicamento no sangue (mg/l)
x - tempo em horas desde que o medicamento chegou ao sangue.

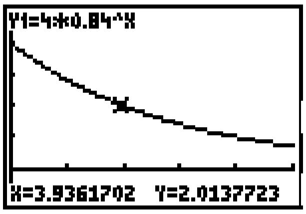
1. Qual a quantidade de Triazolam no sangue ao fim de 3 horas? E ao fim de 10 horas? Regista numa tabela a quantidade de Triazolam nas primeiras 10 horas.
2. Desenha um gráfico que possa descrever o comportamento do Triazolam.
3. Só três destes medicamentos poderão ser reais. Qual deles não é? O que aconteceria se por engano tomasses esse produto?
4. Faz os gráficos que te permitem analisar como evolui uma dose que provocou a concentração de 4mg/l de cada um dos medicamentos.
5. Qual dos medicamentos te parece preferível? Porquê
6. Analise agora com algum pormenor o efeito do Triazolam.
7. Ao fim de quanto tempo se reduz a metade a quantidade de medicamento no sangue? A redução para metade depende do tamanho da dose inicial? Como?
8. Qual será o efeito de tomar, hora a hora, uma dose de 4mg de Pentobombitone? Faz uma representação gráfica que descreva as tuas conclusões.

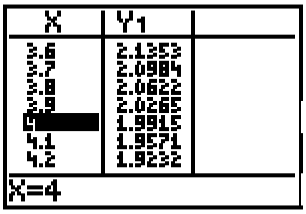
Comentário

Este problema possibilita o estudo da função exponencial (crescimento exponencial) numa situação concreta.

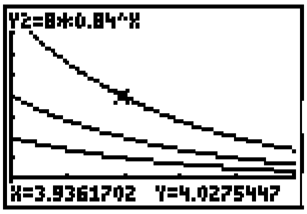
2. Para responder a esta questão os alunos poderão fazer a representação gráfica das funções e analisando o crescimento da concentração perceberão, que o Methohexitone não pode ser real.

3. Excluído o Methohexitone poderão observar os gráficos, o crescimento das funções e a partir daí discutir em função das hipóteses para o doente, qual a melhor solução.



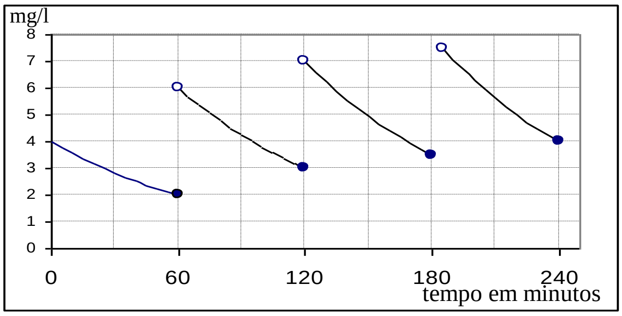


6. O tempo para que a dose se reduza a metade é de cerca de 4 horas. Atribuindo vários valores a A os alunos observarão que o tempo necessário para que a dose se reduza a metade não depende da concentração inicial. Se o problema for resolvido ou retomado mais tarde, depois do estudo da função logarítmica, pode ser confirmado este valor analiticamente,



$\dfrac{A\times 0{,}84^{t}}{A\times 0{,}84^{t1}}=\dfrac{1}{2}$ significa que $t–t_1 = \log_{0,84}(0{,}5) \approx 4$.

7. Para estudar o efeito da dose de pentobonbitone hora a hora, a exploração a fazer depende da turma e do tempo disponível. No entanto pretende-se, no mínimo, que os alunos sejam capazes de esboçar um gráfico do tipo do que se indica para descreverem a situação. Os alunos podem observar que a concentração máxima nunca ultrapassará 8mg/l. Se considerarem a sucessão das quantidades (q_n) ao fim de 1,2,3, n horas terão



$q_{1}=4\times 0{,}5$; $q_{2}=4\times(0{,}5^2+0{,}5)$; $q_{3}=4\times(0{,}5^3+0{,}5^2+0{,}5)$; $q_n= 4\times(0{,}5^n+0{,}5^{n-1}+ \ldots +0{,}5)$.
Quando n tende para infinito q_n tende para 4.

À espera do carbono 14


ecrópole visigótica ou moçarábica descoberta na Granja dos Serrões

À espera do carbono 14

... a datação da necrópole só será esclarecida com análises aos ossos por carbono 14 – método de datação a partir de um isótopo radioactivo de carbono que torna possível determinar a idade dos materiais em análise, uma vez que o seu tempo de desintegração é conhecido - ...

(jornal PÚBLICO, de 8 Outubro de 1995)

O Público noticiou a descoberta de uma necrópole, na Granja dos Serrões - Sintra, e o achado de seis sepulturas cujas datas, ainda desconhecidas, se podem situar desde o séc. I A.C. até ao séc. VII D.C.

1. Tal como o artigo também refere uma técnica utilizada para descobrir a antiguidade de um achado histórico consiste na análise de um objecto (osso, madeira, ...), medindo a quantidade de carbono 14 que contém. Quando vivos os animais e plantas têm uma quantidade constante de carbono 14, que vai diminuindo com o tempo, após a morte, por efeito da radioactividade. Por quantidade de carbono 14 entende-se a velocidade de desintegração de átomos de carbono 14 medida em desintegrações por minuto por grama de carbono (dmg). A quantidade (q) de carbono 14 encontrada num objecto é dada pela fórmula $q(t) = 15{,}3 \times 0{,}886^t$, em que t representa o tempo em milhares de anos.
2. Admitindo que os corpos encontrados nos túmulos são do séc. I A.C., que quantidade de carbono 14 deverá ser encontrada?
3. Se o Instituto Nacional de Engenharia e Tecnologia Industrial tivesse divulgado que a quantidade de carbono 14 encontrada era de 11,3 dmg, qual era a idade das sepulturas?
4. Imagina que és um investigador do INETI e te pediram um artigo em que fundamentes teoricamente os resultados que divulgaste. Escreve o artigo, com o máximo de 3 páginas A4.

Comentário

Relativamente ao artigo podem ser dados aos alunos mais algumas sugestões de exploração nomeadamente que expliquem:

- como encontraram a datação das sepulturas;
- como varia a velocidade de desintegração do carbono 14, nomeadamente que tempo demora a passar a metade a quantidade de carbono 14 de uma determinada amostra ou como se relacionam as idades de duas sepulturas que tem o dobro da quantidade de carbono 14 uma da outra.

Gripe asiática

1. Na cidade de Ulam Bator surgiu uma epidemia de gripe asiática. A evolução da doença foi dada pela fórmula P = $e^{0,4t-0,01t^2}$ onde **P** representa a % de pessoas doentes e ***t*** o tempo em dias.

a) Qual era a percentagem da população doente quando se começou o estudo da epidemia?

b) Quando foi o pior momento da epidemia? Qual era a percentagem de doentes?

c) A epidemia considera-se erradicada quando a percentagem de doentes for inferior a 1%. Quando aconteceu isso?

d) No 15º dia, qual é a probabilidade do presidente da câmara estar doente?

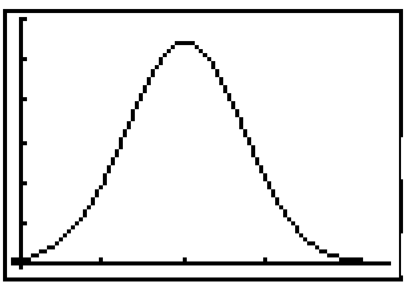
2. Fazendo variar os parâmetros estuda a família de funções:

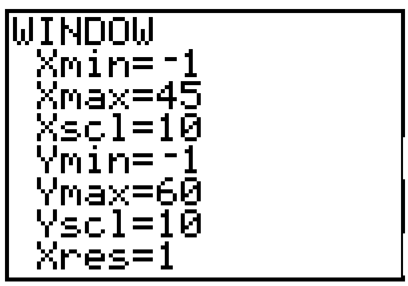
$$y = a^{x^2+cx}, \ a > 0$$

Comentário

Numa calculadora gráfica podemos obter o gráfico representado na página seguinte, no ecrã de visualização indicado.

O gráfico dá-nos uma ideia da forma como foi evoluindo a epidemia ao longo do tempo.



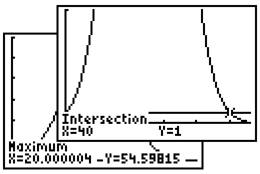


Determinando P(0) = 1 ficamos a saber que no início do estudo havia 1% da população que estava doente. Recorrendo ao gráfico ou a uma tabela podemos saber que o pior momento da crise foi atingido ao fim de 20 dias onde cerca de 54,5% da população estava doente.

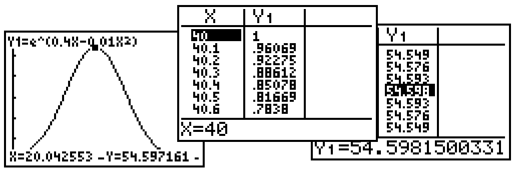
Traçando a recta de equação y = 1 e determinando a sua intersecção com a curva P ou utilizando uma tabela ficamos a saber que ao fim de 40 dias a epidemia é considerada erradicada.

Determinando P(15) ≈ 42,5, determinamos a probabilidade do Presidente da Câmara estar doente ao 15º dia - cerca de 42,5%

Neste caso, pensamos que não tem sentido exigir aos alunos o valor exacto, logo não é necessário recorrer ao estudo da função derivada.



Utilizando a funcão



Utilizando a função **TRACE**

Depois de terem estudado a situação concreta, faz sentido que os alunos organizem o estudo de uma família de funções que inclui a função trabalhada.:

$$y = a^{x^2+cx},\ a > 0$$

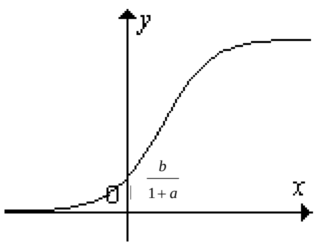
Evolução da população portuguesa

A tabela seguinte apresenta os dados relativos à população portuguesa residente no continente, no período de 1854 a 1991, de acordo com os censos respectivos.

Anos	1854	1864	1878	1890	1900	1911	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1981	1991
População (milhões)	3,499	3,927	4,303	4,713	5,039	5,586	5,668	6,34	7,219	7,921	8,293	8,075	9,337	9,363

1. Representa graficamente os dados e analisa a evolução da população ao longo deste período de tempo. A população cresceu sempre da mesma forma? Consegues identificar algum período em que se destaque um crescimento diferente do esperado? Porque terá sido?
2. Como sabes as funções exponenciais são usadas frequentemente para descrever a evolução de populações. Considera como modelos teóricos o modelo exponencial: $P(t) = P_0 . e^{at.}$ em que P_0 é a população no instante 0 ou seja em 1854, e o modelo logístico:

   $P(t) = \dfrac{b}{1+ae^{-kt}}$ em que $\dfrac{b}{1+a}$ é a população no instante 0 e b a capacidade máxima do sistema ou seja, neste caso, a população máxima admissível para o território do continente. Tenta encontrar valores para os parâmetros de modo que as funções descrevam de forma aceitável a evolução da população no período de tempo considerado.

3. Qual é o ponto de intersecção das duas curvas?
4. Experimenta também os modelos de regressão que a calculadora tem à tua disposição.
5. Qual a população portuguesa residente no continente, segundo cada um dos modelos, no ano 2000? 2010? e 2100?
6. O que pensas dos modelos? Qual te parece mais adequado para fazer estas previsões?
7. Se tiveres curiosidade vai ao INE, tenta saber as previsões deste instituto e compara-as com as tuas.

Comentário

A representação gráfica dos dados permite responder às primeiras questões colocadas. A este propósito pode ser consultada a brochura do 11º ano na pág. 136.

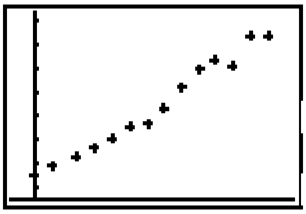
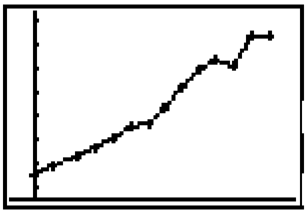



Gráfico estatístico (nuvem de pontos) Gráfico estatístico (pontos unidos)

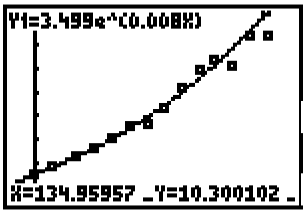
Para encontrar os modelos deve ter-se em conta o exposto na parte teórica desta brochura no ponto 3 do capítulo "Alguns modelos matemáticos" (pág.79) , podendo proceder-se assim:

Função exponencial:

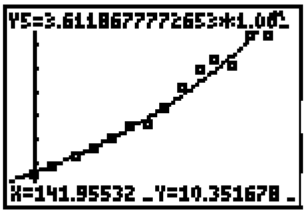
Por experimentação e tendo em conta os dados da tabela, os alunos podem encontrar uma função que se ajuste ao conjunto de pontos, por exemplo $P(t) = 3{,}499 \times e^{0{,}008x}$.

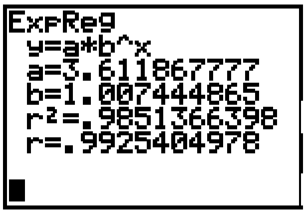
Repare-se que 3,499 é a população inicial e 0,008 está relacionado com as taxas de nascimento e mortes por unidade de tempo, sendo por isso um valor muito pequeno.

Depois de encontrarem uma função, por tentativas, os alunos podem utilizar a regressão da calculadora e comparar a função encontrada por este processo com a que descobriram antes. Na calculadora que utilizámos a função encontrada foi $P(t) \approx 3{,}612 \times 1{,}007^{x}$, ou seja $P(t) \approx 3{,}612 \times e^{0{,}007x}$



Função encontrada por experimentação



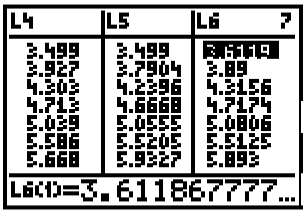


Função de regressão

A observação dos gráficos permite-nos concluir que qualquer das funções parece ajustar-se bastante bem ao conjunto de pontos.

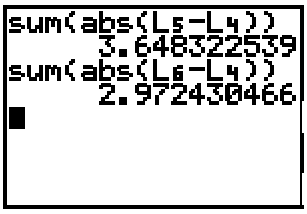
Entre várias funções, uma forma de perceber qual a que se adapta melhor a um conjunto de pontos, é fazer o estudo dos desvios. Para isso calculamos o valor absoluto da soma das diferenças entre os valores reais e os valores estimados para cada uma das funções. Esta soma é um indicador importante do ajuste das curvas aos pontos estatísticos.

No nosso caso temos em L4 os dados, em L5 os valores estimados pela função encontrada por tentativas e em L6 os valores estimados pela função de regressão.



L4	L5	L6 7
3.499	3.499	3.6119
3.927	3.7904	3.89
4.303	4.2396	4.3156
4.713	4.6668	4.7174
5.039	5.0555	5.0806
5.586	5.5205	5.5125
5.668	5.9327	5.893

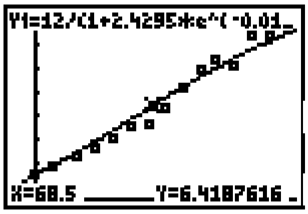
L6(1)=3.611867777…



Observando as somas dos valores absolutos dos desvios verifica-se que neste caso, a função encontrada pela máquina é melhor em termos de ajuste a este conjunto de pontos, podendo não ser melhor em termos de previsão.

Modelo Logístico:

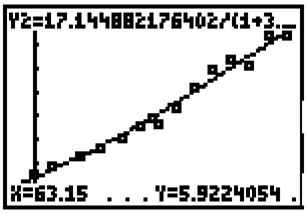
Para encontrar o modelo logístico os alunos terão que ter em conta o modelo e as informações dadas e fixar a capacidade máxima do sistema para o período em que vão fazer previsões. Considerando, por exemplo, esta capacidade 12 milhões, temos b =12 e como $\frac{b}{1+a}$ = 3,499, a ≈ 2,4295. O valor de k será obtido por experimentação. Uma função possível será então



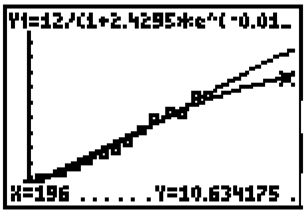
$$P(t)=\frac{12}{1+2{,}4295e^{-0{,}015t}}.$$

Com a calculadora podem encontrar para modelo logístico,

$$P(t)\approx\frac{17.14488}{1+3.99668e^{-0{,}01182}}.$$



Será interessante analisar de novo os desvios e comparar as duas funções para além dos limites dos dados, observando nomeadamente que parecendo qualquer das funções adaptar-se muito bem, de facto, como se observa no gráfico, em termos de previsão as curvas vão-se afastar significativamente uma da outra.



Esta tarefa para além de possibilitar o estudo das funções utilizadas como modelos, é um óptimo problema para discutir com os alunos o processo de modelação. É um tema relativamente ao qual é possível encontrar com facilidade dados e notícias, que em geral interessa os alunos e que possibilita a comparação de vários modelos para uma mesma situação, o confronto com a realidade, o ajustar do modelo, a formulação de previsões e até a sua comparação com as publicadas pelos institutos de estatística.

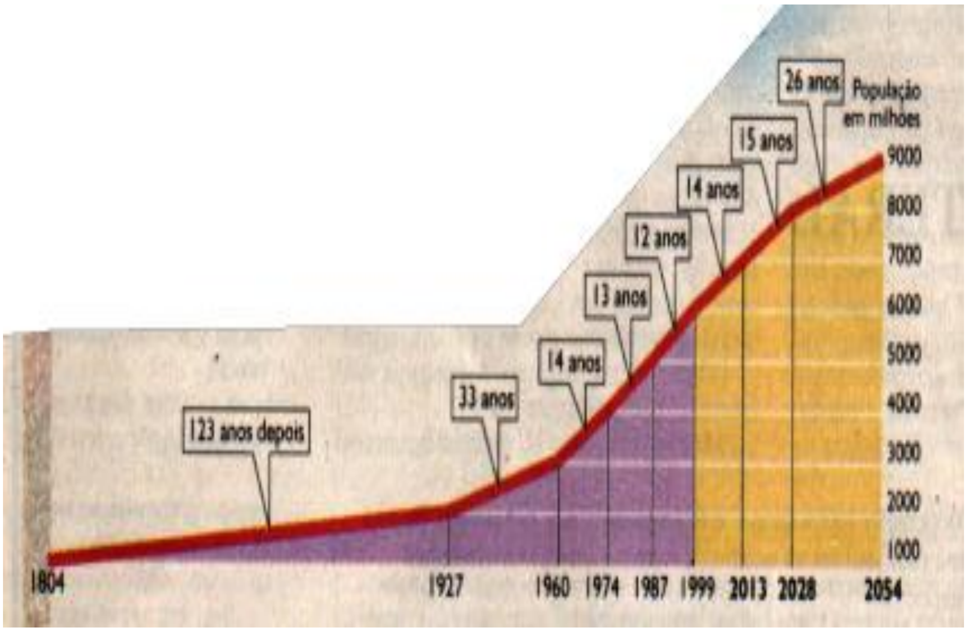
Relacionado com este assunto pode ser colocado aos alunos o problema apresentado a seguir, dizendo agora respeito à população mundial e possibilitando uma discussão do modelo proposto por comparação das previsões que os alunos fazem e as apresentadas no gráfico publicado no expresso.

População mundial em 2050

A população mundial (em milhares de milhões) desde 1900 pode ser modelada pela função logística P(t) = $\dfrac{78{,}12}{6{,}3+102e^{-0{,}02817t}}$ onde t representa o número de anos após 1900.

Usando este modelo calcula a população em 1950 e prevê a população em 2000 e 2050. Será este um bom modelo para prever a população daqui a 300 anos?

De acordo com a notícia divulgada no Expresso de 10 de Julho de 1999, a população mundial em 1999 é de 6000 milhões.



Expresso, 10 de Julho de 1999 (materiais do projecto T^3 – APM)

Intersecção de curvas

Considera as funções $f(x) = x^4$ e $g(x) = 4^x$.

1. Determina os pontos de intersecção dos gráficos das duas funções utilizando dois processos distintos:

- **Processo 1**: Representa no mesmo referencial o gráfico das duas funções. Determina as coordenadas dos pontos de intersecção.
- **Processo 2**: Determina os zeros da função $\boldsymbol{y} = x^4 - 4^x$ para descobrir as coordenadas dos pontos de intersecção.

2. Compara os métodos utilizados.

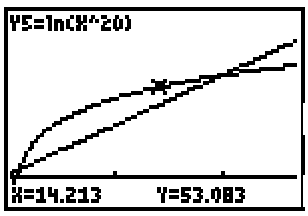
3. Indica o $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e o $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

<u>Comentário</u>

Para determinar pontos de intersecção de curvas é conveniente que os alunos conheçam vários processos de forma a garantir que encontraram todas as soluções. Neste caso pelo processo 1 dificilmente se descobrem as três intersecções.

Este problema permite mostrar a vantagem de se saber comparar o crescimento de uma função exponencial com o de uma função polinomial. Sabendo que o crescimento exponencial é mais rápido intui-se a 3ª intersecção. È uma boa oportunidade para se introduzir o $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^p}$, a>1 e p>0.

Depois do estudo das funções logarítmicas pode ser utilizado um 3º processo para a determinação das intersecções, baseado na propriedade: se $y_1 = y_2$ então $\ln y_1 = \ln y_2$, desde que ela se possa aplicar. Por exemplo a 3ª intersecção das curvas $y = x^{20}$ e $y = 20^x$ é impossível de calcular por qualquer dos dois primeiros processos e no entanto sabendo que ela existe e se verifica para valores de x positivos podemos calcular a intersecção das curvas logarítmicas.



Função logarítmica

Logaritmo na base 10

1. Completa a tabela:

x	– 4		– 2	– 1		1		3
$y = 10^x$		0,001		0,1	1		100	1000

O número a que tenho que elevar 10 para obter, por exemplo, 0,01 é –2. Este facto é traduzido dizendo que –2 é o logaritmo na base 10 de 0,01 e escreve-se $-2 = \log 0{,}01$

2. Calcula o logaritmo na base 10 de 40, a menos de

a) 1 unidade b) 0,1 c) 0,01 d) 0,001

3. Calcula o logaritmo na base 2 de 40, a menos de

a) 0,01 b) 0,001

4. Calcula o logaritmo na base e de 40, a menos de 0,001.

Comentário

Comece-se por se chamar a atenção que o log 40 a menos de uma unidade tem de estar entre 1 e 2, pois 10 < 40 < 100. Se se utilizar a calculadora, poder-se-á facilmente obter a seguinte tabela:

$$10^{1.0} = 10.0000$$
$$10^{1.1} = 12.5892$$
$$10^{1.2} = 15.8489$$
$$10^{1.3} = 19.9526$$
$$10^{1.4} = 25.1189$$
$$10^{1.5} = 31.6228$$
$$10^{1.6} = 39.8107$$
$$10^{1.7} = 50.1187$$

Na tabela pode ver-se que $10^{1.6} < 40 < 10^{1.7}$, o que significa que o log de 40 está entre 1.6 e 1.7. De um modo semelhante, se pode verificar que $10^{1.60} < 40 < 10^{1.61}$, o que significa que o log de 40 está entre 1.60 e 1.61. Este processo poder-se-á aplicar para calcular logaritmo de números qualquer que seja a base.

Função Logarítmica

1. Considera as funções

$y_1 = log\ x$ $y_2 = log\ (x+2)$ $y_3 = log\ (x^2)$ $y_4 = log\ |x|$

$y_5 = ln\ x$ $y_6 = ln\ (x+2)$ $y_7 = ln\ (x^2)$ $y_8 = ln\ |x|$

a) Representa-as graficamente.

b) Em cada caso indica o domínio, o contradomínio e os zeros.

c) Compara as funções y_7 e y_8.

2. Fazendo variar cada um dos parâmetros faz o estudo das seguintes famílias de funções:

a) $y_1 = \ln(c\,x + d)$ **b)** $y_2 = \ln(b\,x^2 + c)$ **c)** $y_3 = \ln(\frac{b}{x})$

3. Quantas soluções tem a equação $log\ x^2 = a$?

Verdade ou falso

Diz, justificando, qual é o valor lógico de cada uma das afirmações seguintes.

a) O logaritmo de um número positivo pode ser negativo.

b) $log\left|\frac{a}{b}\right|$ existe sempre, $\forall a,b \in IR \setminus \{0\}$.

c) $log\left|\frac{a}{b}\right|$ só existe se a e b forem positivos.

d) Se $k < 0$, a função f tal que $f(x) = log\ (|k|\ x)$, tem domínio $IR \setminus \{0\}$.

e) Se $a > 0$ e $b > 0$ então $log\ a + log\ b = log\ (a+b)$.

f) Se $a > 0$ então $log\sqrt{a} = (log\ a)^{0,5}$

Propriedades dos logaritmos

1. Determina o valor de:

a) $log\ 2 + log\ 3$ e $log(2 \times 3)$

b) $log\ 10 + log\ 20$ e $log(10 \times 20)$

c) $log\ \frac{2}{3} + log\ \frac{1}{7}$ e $log(\frac{2}{3} \times \frac{1}{7})$

d) $log\ \sqrt{2} + log\ \sqrt{5}$ e $log(\sqrt{2} \times \sqrt{5})$

A que será igual $log\ a + log\ b$? Tenta provar a tua conjectura.

2. A que será igual $log\ a - log\ b$? Tenta provar a tua conjectura.

3. Representa graficamente os pares de funções:

a) $f(x) = ln\ x^2$; $g(x) = 2\ ln\ x$

b) $f(x) = ln\ x^3$; $g(x) = 3\ ln\ x$

c) $f(x) = ln\ x^4$; $g(x) = 4\ ln\ x$

Indica para cada alínea se f e g são funções idênticas.

4. Repete o exercício para pares de funções do tipo $f(x) = ln\ x^n$ e $g(x) = n\ ln\ x$, $n \in IN$ e tira conclusões para que valores de n são ou não idênticas as funções f e g.

5. Representa gráficos das funções:

a) $f(x) = ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$; $g(x) = ln\ (x-1) - ln\ x$

b) $f(x) = ln\ [(x-1)\ x]$; $g(x) = ln\ (x-1) + ln\ x$

e, em cada alínea, justifica porque é que as funções f e g não são idênticas.

Á descoberta do erro!

1. A Joana e a Berta conversavam sobre o valor de $(-8)^{\frac{1}{3}}$. A Joana dizia que $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$ porque $(-8)^{\frac{1}{3}}$ significava a raiz cubica de – 8. A Berta dizia que $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \left[(-8)^2\right]^{\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{6}} = 2$. Quem tem razão ?

2. Utilizando uma calculadora gráfica a Ana descobriu que a equação $\log x^2 = 2 \log 3$ tinha duas soluções que eram 3 e –3. Resolveu algebricamente a equação seguindo os seguintes passos:

$$\log x^2 = 2 \log 3 \Leftrightarrow 2 \log x = 2 \log 3 \Leftrightarrow \log x = \log 3 \Leftrightarrow x = 3$$

Onde se perdeu a outra raiz?

3. Resolve algebricamente as equações:

a) $\log (x - 1)^2 = 2 \log 3$. (Solução: $x = 4 \vee x = -2$)

b) $\log (x + 1)^2 + \log (x + 9)^2 = 2 \log 9$ (Solução: $x = 0 \vee x = -10 \vee x = -5 \pm \sqrt{7}$)

4. O João está a resolver a equação $\log [(x + 3)(x - 8)] + \log \left(\frac{x+3}{x-8}\right) = 2$ **(1)**

como ambos os logaritmos estão na base 10, ele resolveu aplicar as propriedades dos logaritmos e escreveu:

$$\log (x + 3) + \log (x - 8) + \log (x + 3) - \log (x - 8) = 2 \quad \textbf{(2)}$$

depois simplificou, $2 \log (x + 3) = 2 \Leftrightarrow \log (x + 3) = 1 \Leftrightarrow x + 3 = 10 \Leftrightarrow x = 7$

Quando foi verificar a solução descobriu que 7 não pertencia ao domínio da equação. O Carlos amigo do João, utilizou um processo diferente e concluiu que a solução era x = – 13. Onde está o erro do João?

5. Sabendo que $\frac{1}{2} > \frac{1}{8}$ então $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$. Na inequação que se segue a > 1,

$\log_a \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \log_a \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 2 \log_a \frac{1}{2} > 3 \log_a \frac{1}{2}$, então 2 > 3.

Onde está o erro?

One equals Zero and other Mathematical Surprise

Comentário

Qualquer um dos erros cometidos são vulgares e os alunos devem ser alertados para eles.

1. A reposta certa é –2. A propriedade que diz que $a^{m\times n}=(a^m)^n$, só é valida para valores de a positivos. **2.** $\log x^2 = 2\log|x|$, logo $|x| = 3 \Leftrightarrow x \pm 3$.

4. Foram utilizadas duas propriedade dos logaritmos $\log AB = \log A + \log B$ e $\log \frac{A}{B} = \log A + \log B$ que só são válidas quando A e B são positivos. Logo a passagem de **(1)** para **(2)** não é válida. **5.** O erro consiste em não recordar que para a > 1, $\log_a x < o$ para valores de x compreendidos entre 0 e 1.

Demonstra que

Mostra que é verdadeira a seguinte afirmação:

"Se os valores de uma variável x crescerem em progressão geométrica de razão r >0, com o primeiro termo $u_1 > 0$, os logaritmos de x, em qualquer base, crescerão em progressão aritmética".

Nota: recorda que o termo geral de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é u_1 e razão r se pode escrever na forma $u_n=u_1\times r^{n-1}$ e que o termo geral da progressão aritmética se pode escrever na forma $u_n=u_1+(n-1)\times r$.

Comentário

Os alunos podem começar por fazer uma demonstração considerando para a progressão geométrica uma base particular, por exemplo 2, e só depois o caso geral.

No caso geral, tendo em conta a sugestão dada, como $u_n=u_1\times r^{n-1}$ então

$$\log_a u_n = \log_a (u_1\times r^{n-1}) \text{, portanto}$$

$$\log_a (u_1\times r^{n-1}) = \log_a u_1 + (n-1)\log_a r$$

Nesta altura pode-se reconhecer que $\log_a u_1 + (n-1)\log_a r$ é o termo geral de uma progressão aritmética cujo primeiro termo é $\log_a u_1$ e cuja razão é $\log_a r$.

No caso de os alunos não reconhecerem que se trata do termo geral da progressão poderão determinar a diferença entre os termos de ordem n e n-1.

A velocidade de crescimento logarítmico

x	$\log x$	$\log(\log x)$	$\log(\log(\log x))$
10^3	3		
10^{10}	10		
10^{30}	30		
10^{100}	100		
10^{300}	300		
$10^{1\,000}$	1 000		
$10^{1\,000\,000}$	1 000 000		

1. Completa a tabela e compara a velocidade de crescimento de cada uma das funções. Em cada caso determina o limite em $+\infty$.

2. Frequentemente, precisamos de comparar a velocidade de crescimento de duas ou mais variáveis. Essas comparações tornam-se mais fáceis quando sabemos comparar a velocidade de crescimento de funções simples tais como $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, ..., $y = \log x$, $y = e^x$, ou seja de funções polinomiais, exponenciais e logarítmicas.

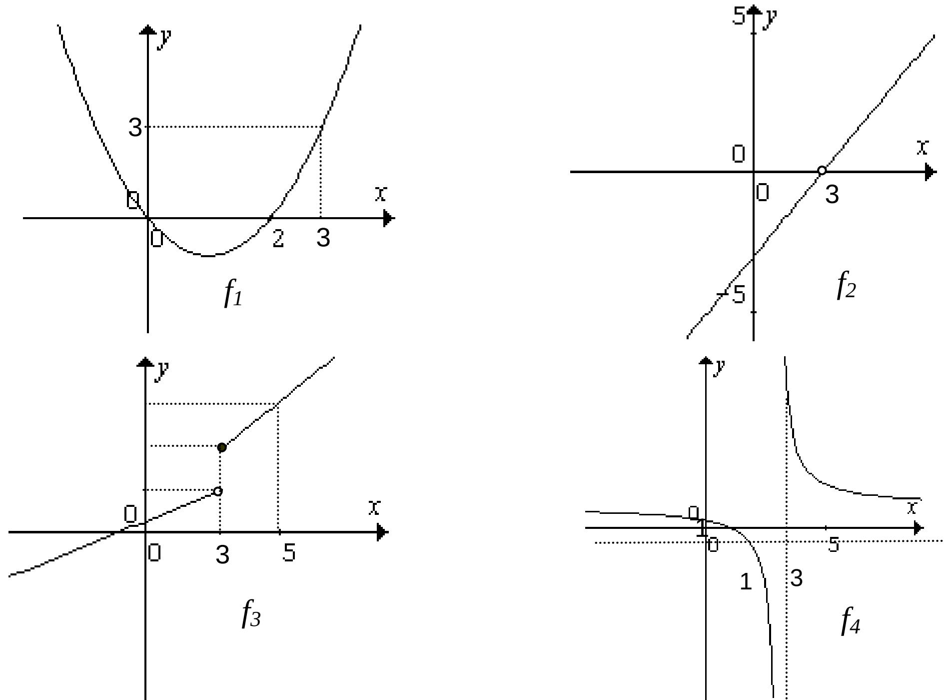
   O modo mais simples de compararmos o crescimento do logaritmo com o de $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, *etc,* é estudar o crescimento no infinito dos quocientes:

$$\frac{\log x}{x}, \ \frac{\log x}{x^2}, \ \frac{\log x}{x^3}, \text{ etc.}$$

Observa o quadro abaixo e indica qual o limite de $\frac{\log x}{x^n}$ quando **x** tende para $+\infty$.

x	$\frac{\log x}{x}$	$\frac{\log x}{x^2}$	$\frac{\log x}{x^3}$
10	0.1	0.01	0.001
100	0.02	0.000 2	0.000 002
1 000	0.003	0.000 003	0.000 000 003
10 000	0.000 4	0.000 000 04	0.000 000 000 004
100 000	0.000 05	0.000 000 000 5	0.000 000 000 000 005

Limites, assimptotas e continuidade



Observa os gráficos.

1. De acordo com o conceito intuitivo que tens de limite indica, para cada função, se existe ou não limite quando x tende para 3.
2. Para cada caso, escolhe duas sucessões (x_n) de valores do domínio da função que tendam para 3, uma por valores superiores e outra por valores inferiores e escreve as expressões dos termos gerais dessas sucessões.
3. Qualquer função (f_i) considerada é tua conhecida. Escreve uma expressão analítica para cada uma delas.
4. Estuda numericamente, com a calculadora, para cada caso, a sucessão $f_i(x_n)$. Em que casos existe (e qual é) o limite de cada uma das sucessões $f_i(x_n)$.
5. Formalmente, segundo a definição de Heine, diz-se que uma função $\boldsymbol{f}$ tem limite **b** quando $\boldsymbol{x}$ tende para **a**, se a qualquer sucessão ($\boldsymbol{x_n}$) de valores do domínio da função $\boldsymbol{f}$, que tenda para **a** por valores diferentes de **a**, corresponder uma sucessão $\boldsymbol{f(x_n)}$ a tender para **b**. Utilizando esta definição e as propriedades que conheces de limites de sucessões prova as conjecturas que fizeste acerca dos limites das funções no ponto de abcissa 3.

Comentário

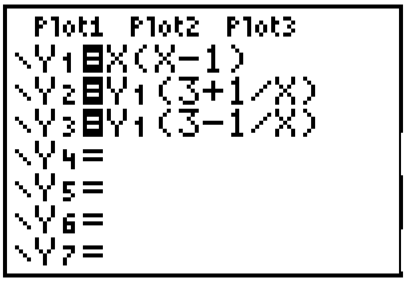
Expressões analíticas das funções: $f_1(x) = x(x-2)$; $f_2(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x-3}$;

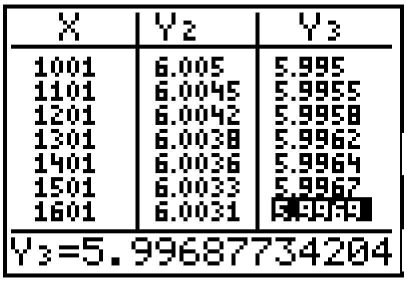
$$f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} & \text{se } x < 3 \\ x+1 & \text{se } x \geq 3 \end{cases} \quad ; \quad f_4(x) = \frac{x-1}{x-3}$$

Com esta actividade pretende-se que os alunos compreendam e utilizem a definição de limite.

Para que os alunos interiorizem a definição de limite segundo Heine valerá a pena fazer um estudo numérico, com a calculadora, antes da passagem à formalização.

Por exemplo, considerando as sucessões $u_n = 3 + \dfrac{1}{n}$ e $v_n = 3 - \dfrac{1}{n}$, obteremos da calculadora as seguintes tabelas





Deve-se chamar a atenção dos alunos para o facto de estarmos a considerar uma sucessão e portanto x assumir todos os valores naturais. Notar que uma das sucessões se aproxima de 6 por valores superiores a 6 e a outra por valores inferiores.

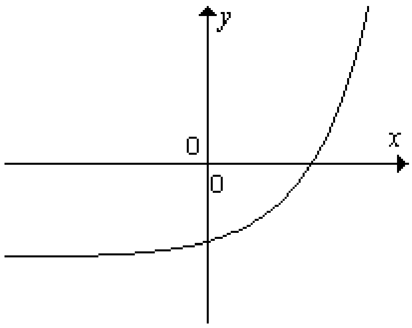
Os alunos podem considerar sucessões diferentes embora haja vantagem em discutir com eles uma forma fácil de encontrar uma sucessão que tenda para 3 por valores diferentes, inferiores ou superiores.

Depois deste estudo experimental será mais fácil para os alunos, considerar uma sucessão qualquer (x_n) a tender para 3 e provar, usando as propriedades dos limites de sucessões, que a sucessão das imagens converge para o valor que intuíram ou compreender que, nos casos em que não existe limite no ponto 3 (f_3 e f_4), para provar a conjectura basta encontrar um contra exemplo.

Qual é a resposta certa?

Sejam f e g as funções reais tais que $f(x) = \ln x$ e g representada graficamente na figura junta.

A recta $y = -3$ é assimptota do gráfico de g e os pontos $(0, -\frac{5}{2})$, $(3, 1)$ e $(\log_2 6, 0)$ são pontos do gráfico de g.



Recorrendo exclusivamente às condições dadas, escolhe em cada caso a resposta correcta.

1. O domínio da função $f \circ g$ é

(A) $]0, +\infty[$ (B) $]3, +\infty[$ (C) $]\log_2 6, +\infty[$ (D) *IR*

2. O conjunto solução da condição $f(g(x)) \leq 0$ é

(A) $]0, 3]$ (B) $]\log_2 6, +\infty[$ (C) $]\log_2 6, 3]$ (D) $]-\infty, \log_2 6[$

3. Sabendo que $g(x) = 2^{ax+b} + c$ então os valores de a, b e c são respectivamente

(A) –1, 1, 3 (B) –1, 1, –3 (C) 1, 1, – 3 (D) 1, –1, – 3

Confirma as respostas dadas anteriormente.

4. As assimptotas ao gráfico de h tal que $h(x) = \frac{1}{g(x)}$ são as rectas de equação

(A) $y = 3$, $x = 3$ e $x = \log_2 6$ (B) $y = 0$, $x = 0$ e $x = \log_2 6$

(C) $y = -\frac{1}{3}$, $y = 0$ e $x = \log_2 6$ (D) $y = -\frac{1}{3}$, $y = 3$ e $x = \log_2 6$

Comentário

Solução da actividade: 1. C; 2. C; 3. D; 4. C.

Teorema de Bolzano-Cauchy e aplicações numéricas

Equações e mais equações

Sejam, em IR, as equações $e^x + x = 0$; $lnx - x + 3 = 0$; $e^{-x} + lnx = 0$; $lnx = 4 - x^2$.

1. Localiza soluções destas equações recorrendo:

2. à sobreposição de gráficos conhecidos ($\ln x$, e^x, x^2,...), em intervalos de amplitude uma unidade e sem usar a calculadora gráfica.

3. à calculadora gráfica bem como às respectivas tabelas de valores, em intervalos de amplitude 0,01.

4. Procura justificar a existência de soluções para cada uma das equações anteriores, num intervalo de amplitude de uma unidade, usando um processo algébrico. Enuncia o teorema que te permite justificar a existência dessas soluções.

5. Indica, justificando, o número exacto de zeros das equações $e^x = x^2$, $e^x = x^3$. Tira conclusões para o número exacto de soluções da equação $e^x = x^p$ com $p \in IN$.

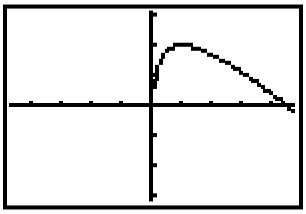
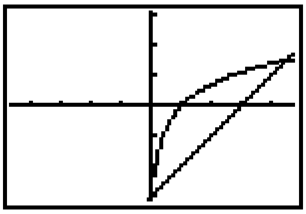
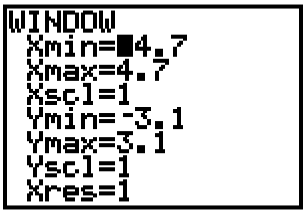
6. Justifica que todas as equações do tipo $lnx = x^p$, com $p \in IN$, são impossíveis em IR.

Comentário

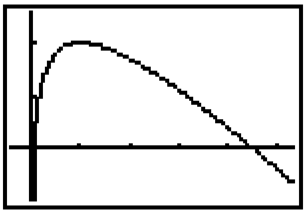
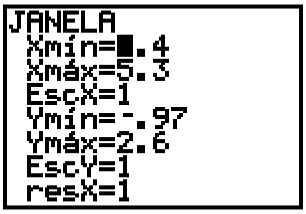
Trata-se de um conjunto de equações relativamente às quais não sabemos determinar o valor exacto das soluções. O processo a utilizar para a determinação de valores das raízes, está relacionado com o grau de aproximação desejado. Com a questão 1. a) pretende-se que os alunos utilizem os conhecimentos que têm sobre as representações gráficas de funções estudadas para descobrirem o número e localização das soluções. A calculadora gráfica permitirá uma aproximação num intervalo de amplitude bastante mais pequena.

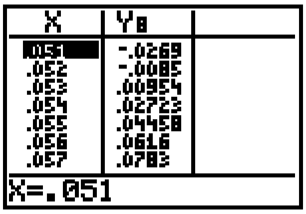
Podem ser encontradas dificuldades na resolução da equação $lnx - x + 3 = 0$.

Deve ser discutida com os alunos a vantagem de utilizar vários processos de resolução gráfica. Neste caso, quer os alunos calculem os zeros de $y = ln\, x - x + 3$, quer calculem os pontos de intersecção de $y = ln\, x$ com $y = x - 3$, podem encontrar algumas dificuldades se não utilizarem uma janela de visualização adequada, como se pode observar nos gráficos abaixo, que podem dar a ideia da existência de uma única solução.

No entanto com uma janela adequada, ou recorrendo à tabela, podem ser observadas as duas soluções x = 0.05 e x = 4,51



Na questão 4 os alunos poderão começar por fazer experiências podendo em seguida a proposição ser demonstrada analiticamente recorrendo à função $g(x) = ln\, x - x^p$. Uma forma de fazer a demonstração é considerar a função derivada e mostrar que ela tem um único zero para qualquer $p \in IN$. Para o zero da derivada encontrado a função $g(x)$ tem um máximo.

$$g'(x) = \frac{1 - px^p}{x}$$

$$\frac{1 - px^p}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[p]{\frac{1}{p}}$$

Mostrando que $g\left(\sqrt[p]{\frac{1}{p}}\right) < 0$, conclui-se que g(x) não tem zeros, ou seja que a equação $lnx = x^p$ com $p \in IN$ é impossível. O contradomínio da função g é $\left]-\infty,\ g\left(\sqrt[p]{\frac{1}{p}}\right)\right]$.

Funções deriváveis, problemas, modelação matemática ...

A Corrida de Automóveis

Nos Estados Unidos são muito populares as corridas de uns automóveis especiais chamados *dragsters*.

Participam dois concorrentes num trajecto muito curto. É necessário que os carros tenham um arranque rapidíssimo visto que a corrida dura poucos segundos.

A velocidade é nula no momento da partida e vai aumentando até à meta. O carro cruza a meta à velocidade máxima e começa imediatamente a travar até se imobilizar.

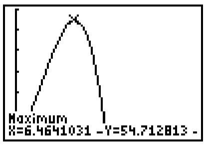
Para um certo carro, a equação da velocidade (em metros/segundo) numa corrida é: $V = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + 3t$

- Qual é a velocidade máxima deste carro?
- Quanto tempo demorou a chegar à meta?
- Ao fim de quanto segundos se imobilizou o carro?
  - Representa graficamente a situação descrita.
- Qual é a aceleração no instante t = 1 segundo?
- Aproximadamente, em que instante é que a aceleração é máxima?
- Qual é a aceleração média nos primeiros dois segundos?

Nota: lembra-te que a aceleração é a derivada da velocidade e que a aceleração média é a taxa de variação média da função velocidade.

Comentário

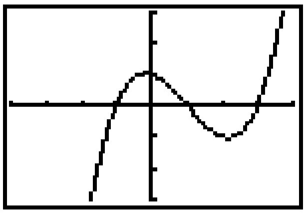
Representando graficamente a situação podemos, a partir do gráfico, indicar a velocidade máxima, 54,71m/s e o instante em que chegou à meta, 6,46s.



Dado que se trata de uma função polinomial do 3º grau cujo comportamento é conhecido, parece-nos que não é de exigir aos alunos a resolução algébrica. Os valores a indicar serão, como é natural neste caso, aproximados e por isso a calculadora dá todas as informações. A aceleração no instante *t*=1 é 7,9999997 m/s^2 e o instante em que a aceleração é máxima é 3.00047s.

Na figura junta está representada a primeira derivada de uma função *f*, polinomial.

A tabela indica valores da função *f* '.



X	Y1	
-2	-5	
-1	0	
0	1	
1	0	
2	-1	
3	0	
4	5	

X= -2

1. Indica, justificando, abcissas de pontos do gráfico de *f* para os quais as rectas tangentes

a) sejam paralelas.

b) sejam perpendiculares.

c) Tenham inclinação no intervalo]90º, 180º[.

2. Indica, justificando, o valor lógico das afirmações

a) "A função *f* é contínua em IR."

b) "A função *f* não tem extremos relativos."

c) "*f* (2) < *f* (3)".

d) gráfico de *f* tem dois pontos de inflexão.

3. Apresenta um gráfico de *f* compatível com o de *f* ' e que

a) Não intersecte o eixo das abcissas.

b) Intersecte o eixo das abcissas em quatro pontos.

Existe alguma função *f*, compatível com *f* ', cujo gráfico intersecte o eixo das abcissas em mais do que quatro pontos? Justifica.

4. Sabendo que $f(-1) = f(3) = -\frac{3}{4}$ e que $f(0) = 1$, determina:

a) uma equação da recta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa zero.

b) O contradomínio de *f* .

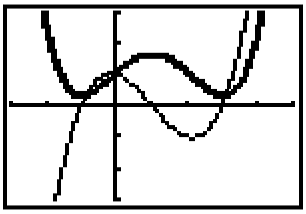
c) O número exacto de zeros da função $f(x) + \frac{3}{4}$.

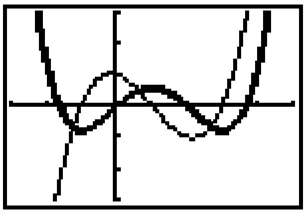
Comentário

É importante que os alunos saibam relacionar as informações fornecidas pelo gráfico da derivada com as características da função. A observação do gráfico de *f* ´ permite identificar de imediato três objectos com a mesma imagem, $f'(-1) = f'(1) = f'(3) = 0$, logo para estas três abcissas as rectas tangentes ao gráfico de *f* têm o mesmo declive e por isso são paralelas. Para $x = 0$ e $x = 2$, as rectas tangentes são perpendiculares.

No intervalo entre] – ∞, –1[e]1, 3[as rectas tangentes têm inclinação entre]90º, 180º[.

Como a derivada entre]1, 3[é negativa, neste intervalo a função é decrescente, logo *f*(2) > *f* (3). O gráfico de *f* tem dois pontos de inflexão que correspondem aos extremos de *f ’*.





A partir do gráfico da derivada ao alunos esboçam um gráfico compatível com as informações retiradas, sendo importante que esteja garantida a correspondência entre os extremos da função e os zeros da derivada, intervalos de monotonia e o sinal da derivada. Possíveis gráficos são os representados a cheio.

Com as informações dadas na questão 4., determina-se o contradomínio da função $[-\frac{3}{4}, +\infty[$ e portanto o número exacto de zeros de $f(x) + \frac{3}{4}$ é dois.

Qual o valor máximo da concentração?

Injectou-se uma substância no sangue de um animal. No instante ***t*** (em segundos), a concentração **C** da substância injectada é dada por $C(t) = 8(e^{-t} - e^{-2t})$.

a) Calcula, com aproximação às centésimas, o(s) instante(s) para os quais o valor da concentração é igual a 1.

b) Calcula $\lim_{t\to+\infty} C(t)$ e interpreta o resultado que encontraste.

c) Indica o valor máximo da concentração. Em que instante essa concentração foi observada?

d) Mostra que $C'(t) = \frac{8(2-e^{t})}{e^{2t}}$. Qual o significado do zero da função derivada?

e) Considera agora a extensão da função a *IR*. Determina o contradomínio da função.

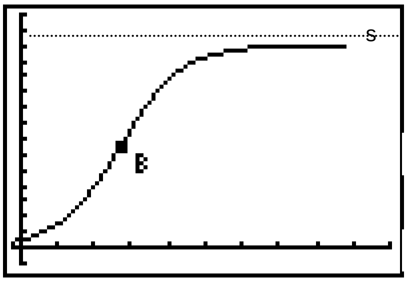
Adaptado da prova de aferição de 1993

A inteligência do rato

Numa experiência para medir a inteligência dos ratos, **Estes** colocou um rato numa caixa de Skinner. Privado de água durante 24 horas, o rato viu-se assim motivado para empurrar uma alavanca de água, admitindo-se que quantas mais vezes o fizesse maior seria a sua inteligência. **Estes** conseguiu estabelecer a curva de aprendizagem do rato - nº correcto de selecções por minuto, durante certo período - através da equação: $r(t) = \dfrac{13}{1+25e^{-0,24t}}$

em que **r** representa o número previsto de selecções correctas por minuto e **t** representa o tempo em minutos de duração da experiência.

1. Na calculadora gráfica obtém para $r(t)$ o gráfico representado ao lado.



a) Indica as coordenadas do rectângulo de visualização para o qual obtiveste um gráfico como este.

b) Determina o valor de $r(o)$.

c) Determina as coordenadas de B (ponto de inflexão da curva)

- Usando a calculadora e o gráfico da segunda derivada;
- Usando processos analíticos.

d) Determina uma equação da recta s (assimptota horizontal) e dá uma interpretação para este resultado.

f) Com o apoio nos cálculos feitos e na curva de aprendizagem explica como variou o número de selecções por minuto que o rato foi adquirindo ao longo das 24 horas que esteve na experiência.

e) Em que instante **t**, o aumento da aprendizagem foi mais rápido?

Adaptado de Aplicando a Matemática, de Luís Madureira

Comentário

Estas duas últimas actividades baseando-se em funções já apresentadas anteriormente permitem utilizar agora um tratamento gráfico e analítico relacionando vários aspectos do estudo das funções exponenciais.

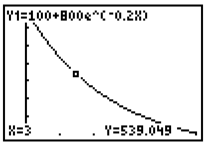
Publicidade

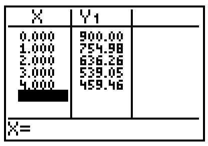
Uma empresa descobre que ***t*** dias após terminada uma campanha publicitária dum determinado produto, o número de vendas diárias é dado em função de ***t*** por

$s(t) = 100 + 800e^{-0,2t}$.

1. Determina:
   a) O número de vendas no instante em que terminou a campanha.
   b) O número de dias que se seguiram ao final da campanha e durante os quais o número de vendas foi superior a 500.
2. Recorre à calculadora para representar graficamente $s(t)$ e explica como foi variando o número de vendas diárias com o decorrer do tempo após ter terminado a campanha publicitária do produto.
3. Calcula e estuda o sinal de $s'(t)$. Com base nos resultados interpreta a forma como evoluiu o número de vendas e compara com as conclusões tiradas em c).
4. Se não for feita mais nenhuma campanha publicitária em que valor tenderá a estabilizar o número de vendas diárias do produto?
5. Calcula $s''(t)$ e verifica que $s'(t) \times s''(t) < 0, \forall\, t \in IR$

Comentário





a) A campanha terminou no instante 0, o nº de vendas é 900.

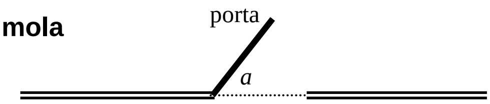
O domínio da função no contexto do problema é constituído por números inteiros positivos. Este facto deve ser discutido com os alunos, mas o natural é que representem a função na calculadora e considerem para as restantes alíneas a extensão a da função a IR^+.

b) Nesta alínea os alunos não terão que resolver algebricamente a equação $s(t) = 500$, a observação do gráfico ou da tabela permite de imediato concluir que ao 3º dia o número de vendas era superior a 500 mas ao 4º dia já não. Como a função é monótona decrescente não há qualquer dúvida sobre o resultado. Por outro lado não faz sentido neste caso a procura do valor exacto, dado que o resultado terá que ser sempre aproximado (inteiro).

c) É natural que os alunos já tenham o gráfico na calculadora e o tenham utilizado para responder às alíneas anteriores, trata-se de o registar no papel tendo em atenção as condições do problema e descrever a evolução do número de vendas.

Na alínea e) o facto da função ser sempre decrescente e do limite em $+\infty$ ser 100 permite concluir que o número de vendas estabiliza em 100. Nas alíneas d) e f) pretende-se que os alunos calculem as derivadas por processos algébricos.

A porta de mola



O diagrama representa uma porta com uma mola automática. No instante $t = 0$ uma pessoa empurra a porta com força. A porta abre com o impulso da mola e volta a fechar-se. Demora cerca de 7 segundos desde o momento em que foi empurrada até ao momento em que voltou a estar fechada.

1. Desenha um gráfico que te pareça aceitável para descrever a variação do ângulo(***a***) da porta em função do tempo (*t*).

2. Supõe que $a = 200t.2^{-t}$ e utiliza a calculadora para responderes às seguintes questões:

2.1.Representa graficamente a função ***a*** .

2.2.Constrói uma tabela de valores de ***a***, fazendo variar *t* de 0 a 7 segundos, de um em um segundo. Apresenta os valores do ângulo aproximados às décimas.

2.3.Ao fim de um segundo parece-te que a porta está a abrir ou a fechar. Explica o teu raciocínio.

2.4.Calcula a taxa de variação média da função no intervalo [1,1; 1,3]. Com base neste valor parece-te que a porta está a abrir ou a fechar? Explica porquê.

2.5. A que velocidade gira a porta no instante $t = 1{,}3$ segundos ? Explica o teu raciocínio.

2.6. Qual foi o maior ângulo de abertura da porta, de acordo com este modelo? Qual a velocidade da porta nesse instante?

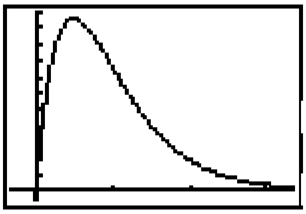
2.7. Considera agora o gráfico da função que traduz a velocidade da porta para cada ângulo e relaciona-o com o movimento da porta. Em que instante é mínima a velocidade. Qual o significado físico do valor encontrado.

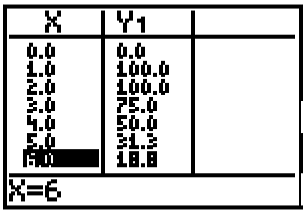
3. Aprendeste a calcular taxas de variação instantânea (derivadas) por processos gráficos, numéricos e analíticos. Usa as regras de derivação para calculares a expressão da função derivada de ***a***. Faz o estudo analítico (zeros e sinal) da função ***a´***. Compara os resultados com as conclusões encontradas anteriormente.

Adaptado de Calculus

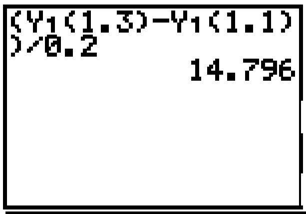
Comentário

1.Com a calculadora obtemos o gráfico e a tabela pedidos



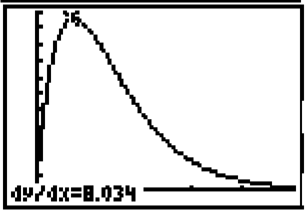


[-1,10]x[-5,110]

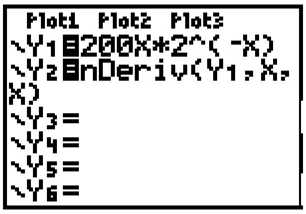


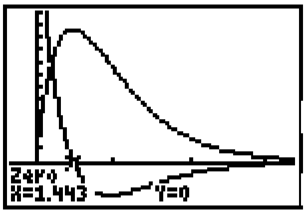
Ao fim de 1 segundo, quer a análise do gráfico quer a taxa de variação média permitem concluir que a porta parece estar a abrir.

O cálculo da derivada (com a função da calculadora) permite-nos ter a certeza de que a porta está a abrir uma vez que a derivada no ponto 1,3 é positiva (8,034), logo a função está a crescer ou seja a porta está a abrir.



A análise dos gráficos da função e da derivada permitem analisar o movimento da porta, o ângulo e a velocidade com que abre e fecha e responder às questões colocadas: o maior ângulo de abertura ocorreu no momento em que a porta deixou de abrir e passou a fechar ou seja no instante em que a velocidade atingiu o valor zero, em t ≈ 1,4 s.





Na questão 2.6 os alunos podem considerar duas funções diferentes: pensar na função módulo da velocidade (celeridade) e neste caso o mínimo será para $t \approx 1{,}4$ s, como foi visto antes; pensar, como é proposto, na função velocidade (derivada) sendo necessário neste caso determinar o mínimo para $t \approx 2{,}9$ (instante de aceleração nula).

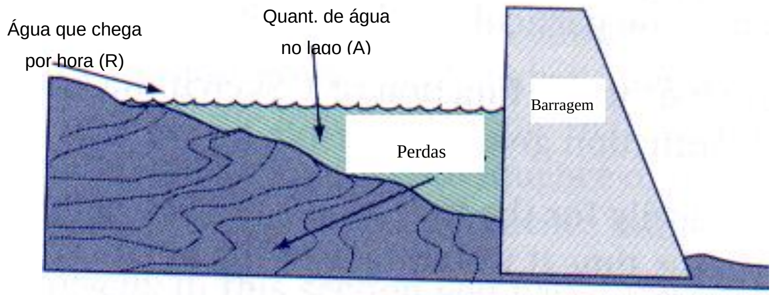
A última questão permite testar se os alunos conhecem as regras de derivação e sabem fazer o estudo analítico da função, encontrando nomeadamente um valor exacto para o máximo.

Repare-se que o domínio de ***a*** neste problema é o intervalo [0, 7], no entanto na questão 3 podemos pedir aos alunos que estudem a extensão da função a IR, podendo ser calculados os limites quando $t \to +\infty$ ou $t \to -\infty$.

Deve-se realçar que todo o problema pode ser resolvido e o processo de modelação discutido sem necessidade da resolução analítica.

Apesar do modelo ser dado à partida, a experiência é conhecida dos alunos, pode ser feita e o modelo pode ser confrontado com a realidade e discutido. Parece-nos também um bom problema para discutir o processo de modelação matemática.

A construção da barragem



Foi construída uma pequena barragem num local montanhoso como o indicado na figura, dando origem a um "lago artificial", para armazenar água. Os engenheiros depois de alguns estudos, tendo em conta a quantidade de água que, em geral, chegaria por hora à barragem (*R*) e as perdas devidas a infiltrações no terreno, concluíram que a quantidade de água no lago(A), em função do tempo (*t*) decorrido desde o momento em que este começou a encher, podia ser modelada pela função A $= \frac{R}{k}(1-e^{-kt})$, sendo k uma constante que estimaram em 0,04.

1. Supondo que a água chegava ao lago a uma média de cerca de 5000 m^3/h escreve a equação que te permite saber a quantidade de água armazenada após t horas.

2. Que quantidade de água estava armazenada ao fim de10 horas, de 20 horas e de 30 horas? E ao fim de 7 dias?

3. Ao fim de quantas horas atingiu o "lago" 100 000 m^3? E 124 000 m^3?

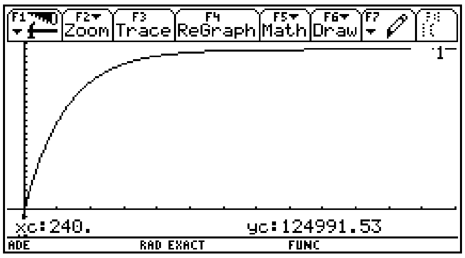
Calcula o $\lim_{t \to +\infty} A$. O que te indica este limite no caso de as condições do problema se não alterarem?

4. Ao fim de 10 dias foi possível verificar que a água armazenada era aproximadamente 37 000 m^3. Utiliza este valor para corrigir a constante k do modelo.

Adaptado de Calculus

Comentário

Considerando a função $A = \dfrac{5000}{0{,}04}(1 - e^{-0{,}04t})$ ou seja $A = 125000(1 - e^{-0{,}04t})$, a observação do gráfico mostra claramente a forma como o lago enche, estando, caso as condições não se alterem, ao fim de poucos dias (10 dias) com uma quantidade de água que se aproxima do $\lim\limits_{t \to +\infty} A$ ou seja de 125000.

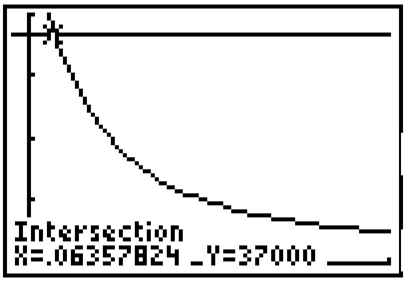


Existe uma assimptota horizontal y = 125000.

A equação $\dfrac{5000}{k}(1 - e^{-10k}) = 37000$

que permite responder à questão 5. só pode ser resolvida com a calculadora.

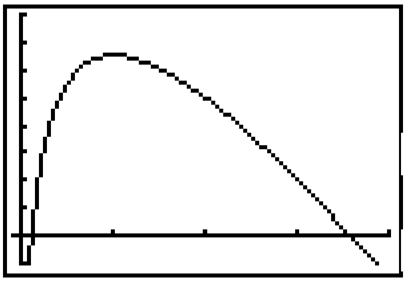
Uma hipótese é representar graficamente $y = \dfrac{5000}{k}(1 - e^{-10k})$ e $y = 37000$ e calcular a intersecção dos dois gráficos.



Qual é o contradomínio?

Na figura junta está representado o gráfico de uma função ***f***, real de variável real,

$$f(x) = 5 \ln x - \frac{1}{2}x$$



$[-1, 40] \times [-1, 8]$

a) Mostra que o gráfico tem uma única concavidade.

b) Determina o contradomínio da função.

c) Determina uma equação da normal ao gráfico no ponto de abcissa 1.

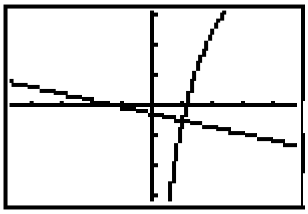
d) Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

e) Escreve, caso existam, as equações das assimptotas ao gráfico de ***f***.

Comentário

a) A expressão da segunda derivada da função é $f''(x) = -\dfrac{5}{x^2}$. Logo como *f''* é sempre negativa a função tem sempre a concavidade voltada para baixo.

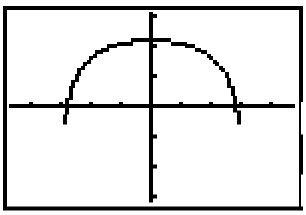
b) Para a determinação do contradomínio da função é necessário calcular não só o $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, que em ambos os casos é $-\infty$, como também o máximo da função (5*ln*10–5) com recurso ao zero da derivada (*x*=10).

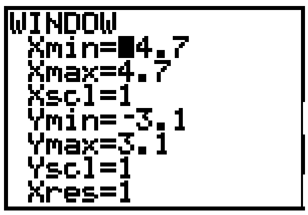


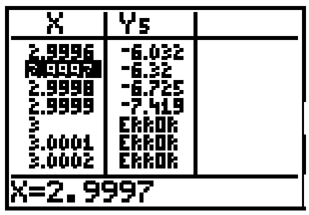
c) A normal ao gráfico tem equação $y = -\dfrac{2}{9}x - \dfrac{5}{18}$. Um ecrã de visualização adequado (em algumas calculadoras Zoom decimal), permite visualizar o resultado. Algumas calculadoras dão a equação da recta tangente num ponto da curva podendo a partir daí determinar-se o declive da normal.

d) Dado que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, logo $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5\ln x - \frac{1}{2}x}{x} = 0 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$. e) Apesar de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\dfrac{1}{2}$ não há assimptota oblíqua dado que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = +\infty$.

Os alunos devem ser alertados para a necessidade de conhecerem alguns limites da função logarítmica, uma vez que, em muitos casos o seu comportamento pode conduzir a intuições erradas. Um exemplo interessante é o de uma função do tipo de $y = \ln(9-x^2)$. Um gráfico, no ecrã de visualização indicado, é o seguinte e a análise de

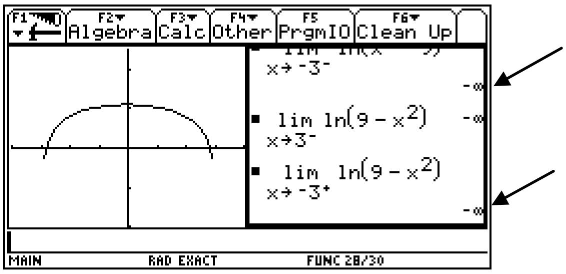






tabelas também não nos conduz a conclusões acerca do seu comportamento na proximidade de –3 e de 3. Para conhecer o contradomínio é indispensável saber que os limites, quando *x* tende para 3 por valores inferiores e para –3 por valores superiores, são $-\infty$. O máximo pode ser calculado de imediato uma vez que a função é par.

Numa calculadora com cálculo simbólico o gráfico não melhora de forma significativa mas é possível calcular os limites. Apesar destas calculadoras não serem ainda permitidas nos exames nada impede que, nas escolas em que existem, sejam usadas.

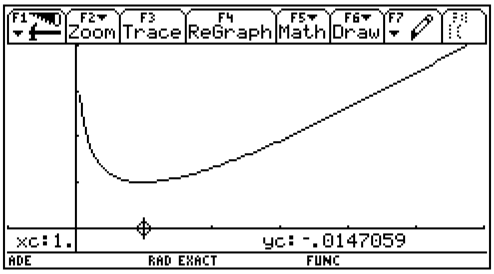


Uma formiga numa curva

Imagina-te sentada no ponto (1,0) de um referencial. Uma formiga desloca-se lentamente sobre uma curva com a forma do gráfico de $f(x) = x - ln\,x$. Indica as coordenadas da posição da formiga no instante em que a avistas pela primeira vez e no momento em que deixas de a ver.

<u>Comentário</u>

Trata-se de encontrar as tangentes ao gráfico que passam pelo ponto de coordenadas (1,0).Como $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$

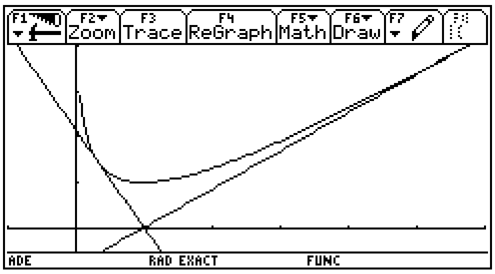


A equação das rectas tangentes ao gráfico num ponto A$(x_1, x_1 - ln\,x_1)$ é

$$y - x_1 + ln\,x_1 = (1 - \frac{1}{x_1})(x - x_1)$$

Como se pretende que passem por (1,0) são as rectas que verificam a condição $-x_1 + ln\,x_1 = (1 - \frac{1}{x_1})(1 - x_1)$ ou seja $ln\,x_1 = 2 - \frac{1}{x_1}$.

Com a calculadora podemos encontrar as soluções aproximadas x=0,3177 e x=6,3056 e a partir das equações confirmar graficamente as soluções para o problema.



Trata-se de um problema não muito fácil mas que pode ser apresentado como desafio a alunos mais interessados.

Sismos na Internet

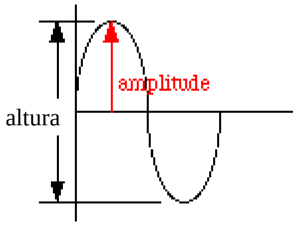
No sentido de compreender e estudar melhor as forças da natureza os cientistas têm armazenado grande quantidade de dados relativamente aos sismos. Podes encontrar na Internet dados organizados sobre muitos sismos. Por exemplo a base de dados "Significant Earthquake Database" em:

http://www.ngdc.noaa.gov/seg/hazard/sig_srch.html,

contém informação relativa a mais de 5000 sismos de grande intensidade decorridos desde há 4000 anos.

1. Utiliza a referida base de dados para encontrares as magnitudes, na escala de Richter, de dois sismos que ocorreram em 1985 um na Turquia e o outro nas ilhas Vanuatu.

2. A amplitude A da onda de choque de um sismo é metade da altura dessa onda. (ver figura). Se M representar a magnitude na escala de Richter de um sismo e **a** a amplitude da onda de choque de referência então $M = \frac{\log A}{a}$. Considera que a é igual a 1 e determina a amplitude dos sismos referidos.



3. Em 1755 ocorreu em Lisboa um sismo de grande intensidade " O terramoto de 1755", referido em algumas fontes como tendo magnitude 8,7. Qual foi a amplitude deste sismo?

4. A amplitude mede a intensidade do sismo. Quanto maior é amplitude mais forte é o sismo. Compara as amplitudes do sismo de 1755 com os da Turquia e das ilhas Vanuatu.

5. Em Março de 1985 ocorreu um sismo aproximadamente 200 vezes mais forte do que o da Turquia. Qual é a magnitude, na escala de Richter desse sismo? Em que ilhas se localizou?

6. A expressão $\log_{10} E = 11.8 + 1.5M$ permite calcular a quantidade aproximada de energia E, em ergs, libertada num sismo de magnitude M, na escala de Richter.

a) Resolve a equação em ordem a E e representa graficamente a função definida.

b) Qual foi a quantidade de energia libertada nos sismos que consideraste?

Sismos na Internet (cont.)

7. Mostra que a um aumento de uma unidade de magnitude na escala de Richter corresponde um sismo em que a energia desenvolvida é cerca de 30 vezes maior.
8. Resolve a equação considerada em 6 em ordem a M, definindo a magnitude M do sismo em função da energia E libertada.
9. Mostra que um sismo em que a energia é 10 vezes superior a outro tem um acréscimo de magnitude de apenas 0,67 na escala de Richter.
10. Representa graficamente a função definida em 8 e estuda a taxa de variação M´ da magnitude.
11. Mostra que quando o valor da energia é multiplicado por 100 a taxa de variação M' é 100 vezes inferior.
12. Com base no estudo feito tenta justificar porque é que um sismo de grau 5 na escala de Richter provoca poucos estragos e um de grau 8 provoca quase sempre uma catástrofe.

Adaptado de Advanced Algebra

Comentário

1. De acordo com os dados de "Significant Earthquake Database" o sismo da Turquia teve magnitude 4,1 e o das ilhas Vanuatu 7,6.

2. e 3. Com $M = log\ A$ então $4{,}1 = log\ A$ ou seja $A = 10^{4,1}$ para a Turquia, $A = 10^{7,6}$ para as Ilhas Vanuatu e $A = 10^{8,7}$ para o terramoto de 1755.

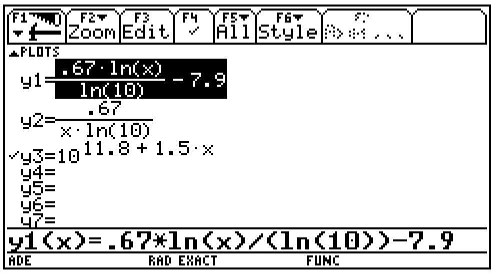
4. A amplitude do sismo de Lisboa teve cerca de 12, 6 vezes a amplitude do da Turquia e quase 40 mil vezes a amplitude do das ilhas Vanuatu, pois $\frac{10^{8,7}}{10^{7,6}} = 10^{1,1} \approx 12{,}6$ e $\frac{10^{8,7}}{10^{4,1}} = 10^{4,6} \approx 39811.$

5. De acordo com "Significant Earthquake Database" o sismo de magnitude 6,4 em Março de 1985 ocorreu nas Antilhas dado que A = $200 \times 10^{4,1}$ logo $M = log(200 \times 10^{4,1}) \approx 6{,}4$. *6.* $log_{10} E = 11{,}8 + 1{,}5M$ *ou seja* $E = 10^{11,8+1,5M}$. *E(Turquia)=*$10^{11,8+1,5x4,1}$*=*$10^{17,95}$*; E(Vanuatu)=* $10^{23,2}$*; E(Lisboa)=* $10^{24,85}$ *e E(Antilhas)* *=*$10^{21,4}$*. 7.* $\frac{E(M+1)}{E(M)} = 10^{1,5} \approx 31{,}6$; 8. $M = 0{,}67\, log\, E - 7{,}9$.

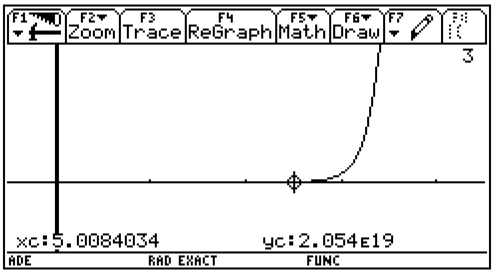
9. $M(10E) = 0{,}67\, log(10E) - 7{,}9 = 0{,}67\, log\, 10 + M(E) = 0{,}67 + M(E)$

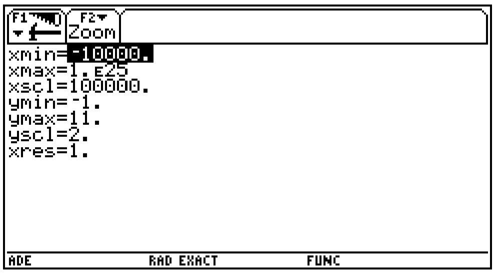
10. $M' = \dfrac{0,67}{E\,ln10}$. 11. $M'(100E) = \dfrac{0,67}{100E\,ln10} = \dfrac{1}{100}M'(E)$.

Para discutirem a última questão os alunos devem ter em conta o estudo realizado incluindo os gráficos da energia em função da magnitude (y_3), da magnitude em função da energia e o da taxa de variação da magnitude (y_3).

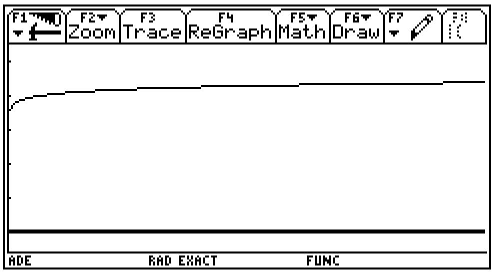


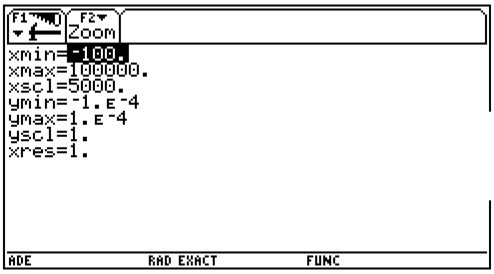
Y3



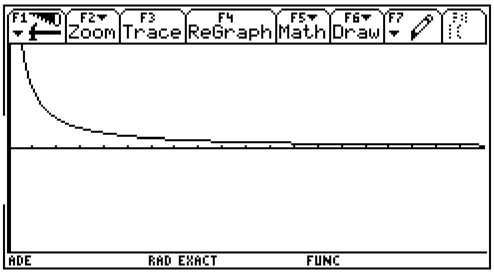


Y1





Y2



A observação dos gráficos e o estudo realizado nas questões anteriores permitirá que os alunos analisem o diferente crescimento das funções relacionando-o com o fenómeno sísmico. Torna-se pois claro que enquanto a energia cresce exponencialmente (havendo uma variação enorme entre a magnitude 5 e 8) a taxa de variação da magnitude é cada vez mais pequena.

Se houvesse tempo os alunos poderiam ainda explorar as escalas logarítmicas utilizando papel logarítmico ou a calculadora. A propósito desta actividade pode ser consultado o artigo “Quando a terra treme ..” na revista Educação e Matemática nº 43.

Alguns endereços para retirar dados sobre os sismos.

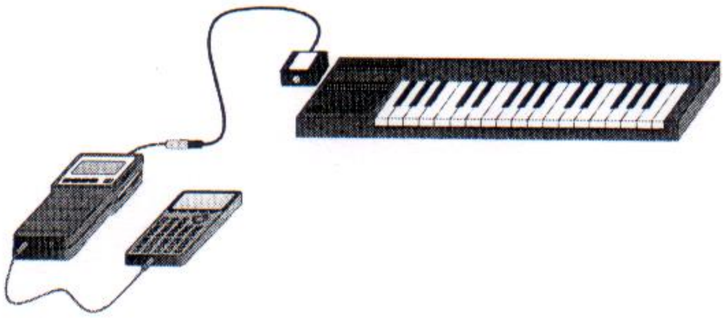
<u>http://www.usgs.gov/</u> – Centro Nacional de Informação sobre Terremotos de U. S

http://www.seismo.unr.edu/htdocs/info.html – Encarta 98.

Matemática e música

A música e a matemática estão relacionadas de perto. As frequências de duas notas que tocadas ao mesmo tempo soam bem aos nossos ouvidos apresentam em geral uma relação matemática especial.

O desafio é calcular as frequências de todas as notas de uma escala musical e verificar se existe algum padrão matemático nessas frequências.



Material:

CBL, calculadora e microfone para CBL (sensor)

Instrumento musical

Programa Physics

Objectivos

Determinar as frequências de notas de uma escala musical. Investigar diferenças e relações entre essas notas. Investigar que padrão matemático usam as escalas musicais.

Experiência

1. Liga o microfone ao CBL. Liga a calculadora ao CBL e corre o programa Physics.
2. Segura o microfone próximo do instrumento e produz um som o tempo suficiente para que seja possível medir a sua frequência. Regista os resultados da frequência numa tabela.

Nota: Se não tiveres possibilidade de recolher os dados utiliza os valores convencionados internacionalmente que se encontram na tabela anexa.

Matemática e música (continuação)

Análise dos dados

1. Representa cada nota pelo número indicado na primeira coluna da tabela e constrói o gráfico das frequências correspondentes a cada uma das notas.
2. Tenta encontrar, por regressão, uma função que descreva a situação.
3. Para perceberes melhor a relação das notas musicais com a Matemática lê e completa o texto de apoio "Música e Logaritmos – da escala de Pitágoras à escala cromática".
4. Depois de leres o texto volta a analisar os parâmetros da função que encontraste para modelo da situação. Compara com a que resulta dos dados convencionais da tabela.
5. Comenta os resultados.

Tabela de frequências (convencionais):

Tecla (T)	Nota (N)	Frequência (HZ) (F)
1	Sol	196,0
2	Sol #	207,7
3	Lá	220,0
4	Lá #	233,1
5	Si	246,9
6	Dó	261,6
7	Dó #	277,2
8	Ré	293,7
9	Re #	311,1
10	Mi	329,6
11	Fá	349,6
12	Fá #	370,0
13	Sol	392,0
14	Sol #	415,3
15	Lá	440,0
16	Lá #	466,2
17	Si #	493,9
18	Dó	523,3
19	Dó #	554,4
20	Ré	587,3

(adaptado de Physics with CBL)

Comentário:

As experiências com música são em geral do agrado dos alunos. Numa turma há quase sempre pelo menos um aluno que toca algum instrumento. A recolha de dados com o CBL é um pouco demorada uma vez que tem que ser recolhidos nota a nota. Na experiência que fizemos numa turma do 12º ano encontrámo-nos com os alunos que tocavam, extra-aula, e recolhemos os dados num piano e numa flauta. Na aula em que a ficha foi apresentada foram estes alunos a explicar a experiência à turma e foram apenas recolhidos a título de exemplo alguns dados com a flauta. É necessário colocar bem perto do instrumento o sensor de modo que os erros de leitura sejam menores. Os resultados também dependem da afinação do instrumento e da forma como os alunos tocam.

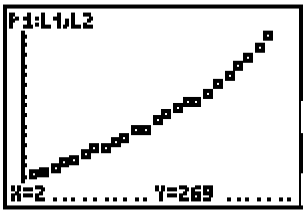
Na tabela seguinte estão os dados recolhidos na flauta e no piano:

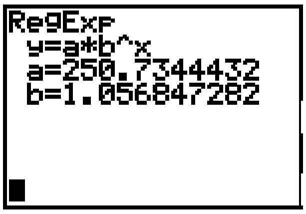
Tecla (T)	Nota (N)	Frequência (HZ) (F) Flauta	Frequência (HZ) (F) Piano
1	Dó	256	264
2	Dó #	269	280
3	Ré	283	314
4	Re #	311	351
5	Mi	332	342
6	Fá	355	363
7	Fá #	392	377
8	Sol	395	390
9	Sol #	418	434
10	Lá	443	457
11	Lá #	477	473
12	Si	489	479
13	Dó	530	507
14	Dó #	558	606
15	Ré	589	646
16	Re #	610	638
17	Mi	622	657
18	Fá	658	662
19	Fá #	698	777
20	Sol	750	810
21	Sol #	790	805
22	Lá	846	902
23	Lá #	886	989
24	Si #	946	1140

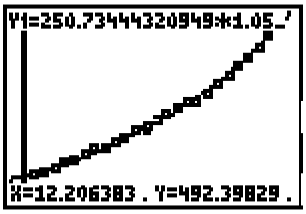
Representando graficamente as funções será fácil perceber que um modelo possível para descrever a situação é o exponencial.

Com auxílio da calculadora encontrámos as regressões exponenciais seguintes:

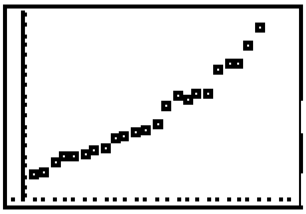
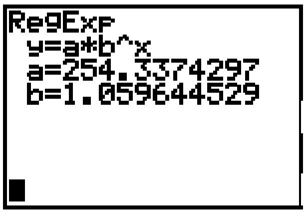
1. Para a flauta:

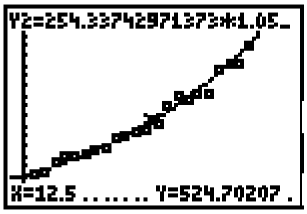






2. Para o piano:



Será interessante analisar com os alunos as equações de regressão, neste caso aproximadamente iguais a: $y = 250{,}73(1{,}0568)^x$ para a flauta e $y = 254{,}34(1{,}0596)^x$ para o piano. Se verificarmos que $2^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}05946309$ não será difícil que os alunos relacionem este número com o parâmetro b das funções de regressão. O texto de apoio ajudará a perceber a situação.

Esta experiência poderá, para alguns alunos, ser transformada num projecto mais prolongado e completada com outras experiências nomeadamente as referidas na primeira parte desta brochura (pág.84). A recolha de dados através do programa *Physics* pode também permitir o estudo de funções trigonométricas, uma vez que possibilita a recolha e o tratamento de dados relativos à intensidade do som em função do tempo.

A não existência de sensores não inviabiliza a realização do projecto uma vez que os alunos podem usar os dados convencionais fornecidos na tabela.

O programa *Physics* vai estar disponível na página do Acompanhamento de Matemática, nos materiais desta brochura.

Texto de apoio

Música e Logaritmos

Da escala de Pitágoras à escala cromática

Ao logo dos tempos a mesma nota musical tem correspondido a valores de frequência ligeiramente diferentes, o que se traduz em diferentes afinações dos instrumentos.

Desde há muito que os músicos apreciam certos intervalos musicais. Pitágoras usou um instrumento – o monocórdio (com uma única corda) e chegou à conclusão de que os intervalos musicais mais importantes se obtêm em dois monocórdios semelhantes quando os seus comprimentos são fracções que envolvem os quatro primeiros números inteiros (oitava = 2/1, quinta =3/2, quarta = 4/3). As frequências das notas tocadas no monocórdio são inversamente proporcionais aos comprimentos das cordas. Os intervalos entre notas sucessivas são definidos como as razões das frequências entre as notas.

Os estudos de Pitágoras conduziram à escala:

Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

A escala de Pitágoras foi usada durante a Idade Média até ao séc. XVI. No séc. XVI Zarlino propôs uma nova escala:

Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

(A) Compara estes valores com os que encontraste na ficha "Música e Matemática"

(B) Completa as tabelas 1 e 2:

1. Razões das frequências para a escala de Pitágoras:

Ré / Dó	Mi /Ré	Fá /Mi	Sol /Fá	Lá /Sol	Si /Lá	Dó /Si

2. Razões das frequências para a escala de Zarlino:

Ré / Dó	Mi /Ré	Fá /Mi	Sol /Fá	Lá /Sol	Si /Lá	Dó /Si

Se utilizarmos logaritmos a análise torna-se mais evidente:

Para a escala de Pitágoras:

Ré / Dó	Mi /Ré	Fá /Mi	Sol /Fá	Lá /Sol	Si /Lá	Dó /Si

Para a escala de Zarlino:

Ré / Dó	Mi /Ré	Fá /Mi	Sol /Fá	Lá /Sol	Si /Lá	Dó /Si

Repara que os intervalos de um tom (Dó-Ré, Ré-Mi, Fá-Sol, Sol-Lá, Lá-Si) são todos iguais em Pitágoras e não em Zarlino. Os meis tons de Zarlino (Mi-Fá e Si-Dó) são maiores do que os de Pitágoras. Enquanto 2 meios tons de Zarlino excedem um tom dois meios tons de Pitágoras não perfazem um tom.

Entre os séc. XVII e XVIII foram propostas várias escalas que conduziram à chamada escala de temperamento igual que foi sendo adoptada ao longo do séc. XIX e que ainda hoje é usada.

Trata-se de uma escala onde os intervalos de um tom são todos iguais entre si e os de meio tom exactamente iguais a metade dos de um tom, preservando as oitavas com a razão igual a 2.

Deste modo, se representarmos por r a razão de frequências num intervalo de meio tom, num intervalo de um tom a razão será r^2 e preservando as oitavas com razão igual a 2, temos: $r^2 \times r^2 \times r \times r^2 \times r^2 \times r^2 \times r = 2$, logo $r = 2^{1/12} \approx 1,059463094$

Aos tons e meios tons desta escala chamamos cromáticos.

Um intervalo com uma razão de frequências f_2/f_1 terá x meios tons se $r^x = f_2/f_1$.

Usando logaritmos para resolver a equação temos: x = **(1)**

(C) ***Deduz a expressão (1).***

A unidade que se usa para medir os intervalos chama-se prony e usa-se em geral o centésimo de prony denominado cent. A oitava, correspondente a uma razão de frequências de 2, tem 12 prony = 1200 cents.

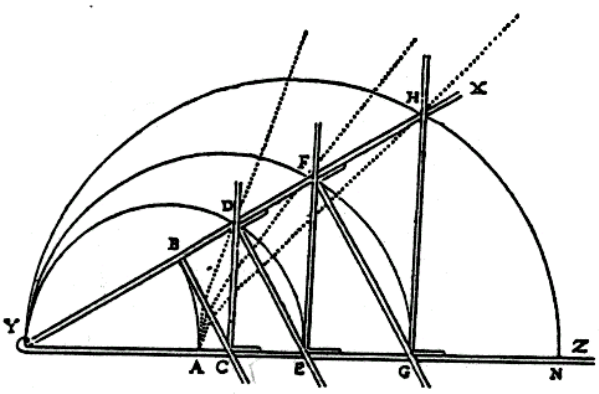
(D) Mostra que para a escala de Zarlino os valores em cents para os intervalos seriam os seguintes:

Ré / Dó	Mi /Ré	Fá /Mi	Sol /Fá	Lá /Sol	Si /Lá	Dó /Si
203,91	182,4	111,73	203,91	182,4	203,91	111,73

(E) A que razão de frequências corresponde um intervalo de um cent?

O compasso de Descartes e a curva logarítmica

Descartes (sec. XVII) seguiu a via das coordenadas para resolver problemas de geometria até aí difíceis por processos meramente geométricos. Mas, sendo ele essencialmente um geómetra estudou as curvas classificando-as em *geométricas* e *mecânicas e para* mostrar a unidade entre as curvas geométricas Descartes inventou um *compasso* que podia traçar tanto circunferências como outras curvas de grau superior.



Compasso de Descartes

Entre as várias curvas estudadas Descartes em resposta a um problema que lhe fora enviado por De Beaune estudou a curva logarítmica embora não a identificasse como tal.

A nossa proposta de trabalho não é acompanhar o processo de Descartes para a construção da curva, mas fazer uma simulação do compasso de Descartes no Sketchpad e com base nela construir uma curva logarítmica.

Para isso, observa a *fig.1*:

1. Considera o ponto O e dois eixos OX e OY perpendiculares e passando por O .
2. Traça a circunferência de centro O e raio AO.
3. Por A traça uma perpendicular a OX.
4. Traça a tangente à circunferência passando por A.
5. Marca o ponto X_{-1} de intersecção da tangente à circunferência em A com OX.
6. Constrói o segmento AX_{-1} .
7. Marca o ponto X de intersecção da circunferência com OX.

O compasso de Descartes e a curva logarítmica (continuação)

8. Repete os procedimentos anteriores para marcares os restantes X_i.

9. Sobre OY marca Y_1 e a igual distância Y_2.

10. Marca os outros Y_i. Uma forma será definir o vector OY_1 é fazer sucessivas translações dos pontos.

11. Os pontos da curva serão pontos (x_i, y_i). Para os marcares faz uma translação de cada ponto x_i, associada ao vector OY_i.

12. Para visualizares uma aproximação da curva une os pontos com segmentos de recta.

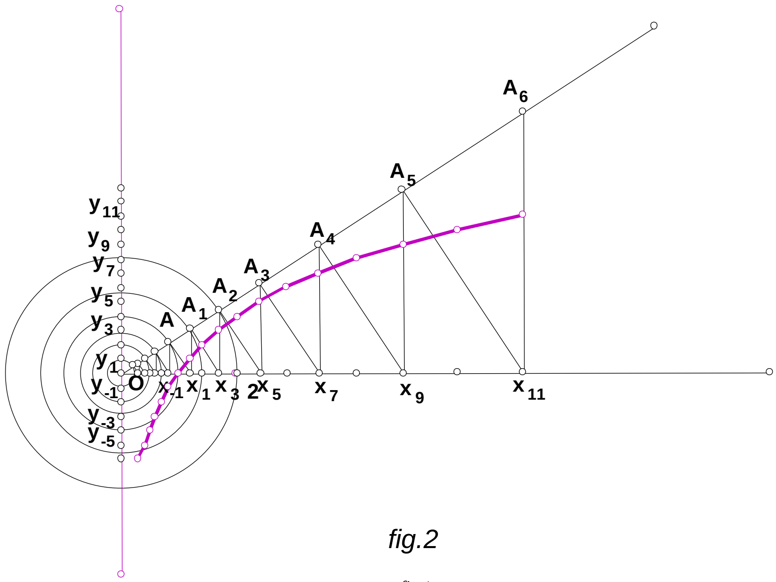


fig.2

fig.1

13. Altera o ângulo movendo o ponto A ou altera a unidade no eixo OY, movendo Y_1.

14. Determina as medidas de OX_i e de OY_i e constrói uma tabela com elas.

15. Experimenta fazer $OY_4 = 1$ e $OX_4 = 2$. Verifica, recorrendo à calculadora, que a tabela obtida é a da função logaritmo de base 2.

16. Tendo em conta a *fig. 3* , justifica que:

17. Os triângulos OAX_1 e OA_1X_1, OA_1X_2, OA_1X_3, ... são todos semelhantes *(fig. 3)*.

18. Com base na semelhança de triângulos completa:

$$\frac{OA}{OX_1} = \frac{OX_1}{OA_1} = \frac{OA_1}{} = -$$

O compasso de Descartes e a curva logarítmica *(continuação)*

19. Se $\overline{OA}=1$ e $\overline{OX_1}=r$, mostra que os comprimentos OX_i são termos de uma progressão geométrica de razão r.

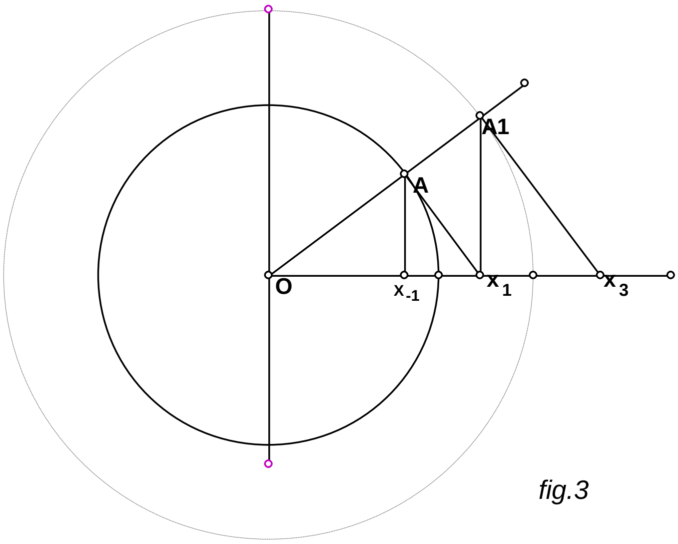


fig.3

20. Com base nos resultados anteriores e voltando à questão 11, mostra que de facto se trata da função logarítmica de base 2.
21. Experimenta agora fazer OY_8 =1 e OX_4 = 2 e verifica que se trata do logaritmo de base 4. E se OX_8 =3?
22. Pensa como podes obter a curva exponencial de base a, por um processo semelhante.

Adaptado de Geometry Turned On

Comentários:

A propósito desta actividade deve ser lida a primeira parte desta brochura (pág.71) e pode ser consultado o livro Geometria – Temas Actuais, de Eduardo Veloso (pág. 106).

Estudo de funções

Estuda as seguintes funções:

1. $f(x) = 2^{-x} + 2^{x}$
2. $g(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{2x + 1}$
3. $h(x) = \dfrac{x}{1 - log\, x}$

Comentário

O estudo de funções foi feito desde o 10º ano com auxílio da calculadora gráfica a partir de abordagens intuitivas e gráficas, com base em transformações.

No 12º ano o programa prevê o estudo de funções com apoio do cálculo diferencial. Atendendo à abordagem feita ao longo do ciclo um possível processo a seguir para estudar uma função é o seguinte:

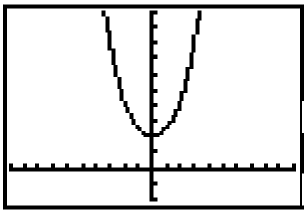
- Reconhecimento de características já conhecidas (pertence a uma família de funções já conhecida? É par ou ímpar? É periódica? ...)
- Explicitação do domínio da função
- Representação gráfica da função recorrendo à calculadora
- Determinação de valores aproximados para pontos notáveis (zeros, extremos, ...)
- Determinação das assimptotas se existirem
- Determinação dos valores exactos dos extremos da função, intervalos de monotonia e concavidades recorrendo ao estudo analítico
- Confronto das conclusões do estudo analítico com os resultados numéricos e gráficos.
- Indicação do contradomínio
- Registo do(s) gráfico(s) no papel, recorrendo eventualmente a escalas deformadas, assinalando as características notáveis obtidas.

Tendo em conta estes procedimentos, apresentamos a título de exemplo, o estudo das 3 funções acima e que vêm indicadas no programa:

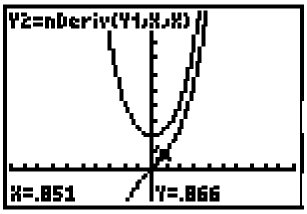
1. $f(x) = 2^{-x} + 2^{x}$

Esta função tem domínio IR.

A observação dos gráficos da função e da sua derivada permite-nos pensar que:



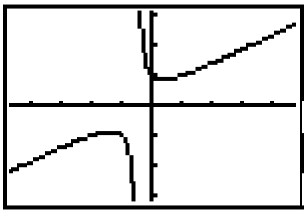
- a função é par;
- tem um mínimo absoluto que é 2, para x= 0;
- é decrescente em]–∞,0] e crescente em [0, +∞[;
- tem contradomínio [2, +∞[
- a concavidade está sempre voltada para cima



Podemos agora fazer o estudo analítico e confirmar a veracidade de todas as conjecturas feitas.

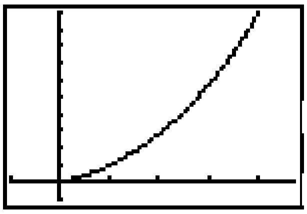
2. $g(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{2x + 1}$.

O domínio é IR \ {–0,5}. Atendendo a que se trata do quociente entre uma função polinomial do 2º grau e outra do 1º grau, que pode ser escrita na forma $g(x) = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}) + \dfrac{\frac{3}{4}}{2x+1}$, logo o seu gráfico é uma hipérbole que tem uma assimptota oblíqua y = $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ e uma assimptota vertical de equação x = – 0,5.



Nesta altura temos a certeza que o gráfico ao lado é representativo da função, sendo apenas necessário determinar os valores exactos dos extremos relativos para indicação do contradomínio. Para isso basta recorrer aos zeros da 1ª derivada.

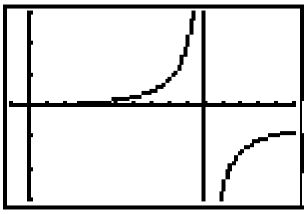
3. $h(x) = \dfrac{x}{1 - \log x}$.



[–1,5]× [–1,10]

A observação do gráfico pode leva-nos a pensar que:

- domínio e contradomínio são IR$^+$
- a função é monótona crescente e tem a concavidade voltada para cima



[–1,15]× [–300,300]

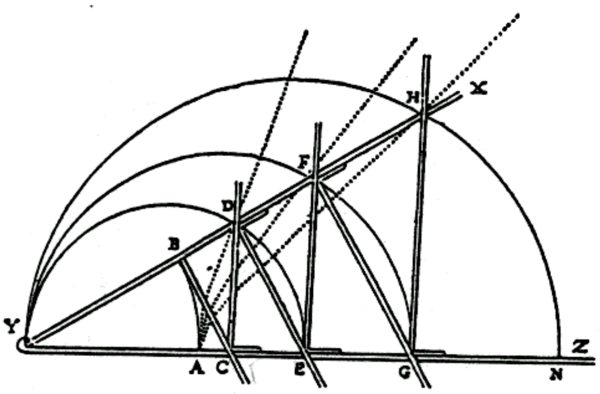
Analisando a expressão analítica verifica-se que o domínio é $IR^+ \setminus \{10\}$ pelo que é necessário averiguar o que se passa na proximidade de 10, sendo procurada a primeira correcção ao gráfico.

O estudo gráfico com a calculadora pode neste caso conduzir-nos a erro, levando a pensar que existe uma assimptota horizontal.

Justifica-se o estudo analítico da função através da 1ª e 2ª derivada e procura de assimptotas oblíquas para finalmente esboçar um gráfico (sem ser à escala) e que não é possível obter com a calculadora.

O compasso de Descartes e a curva logarítmica

Descartes (sec. XVII) seguiu a via das coordenadas para resolver problemas de geometria até aí difíceis por processos meramente geométricos. Mas, sendo ele essencialmente um geómetra estudou as curvas classificando-as em *geométricas* e *mecânicas e para* mostrar a unidade entre as curvas geométricas Descartes inventou um *compasso* que podia traçar tanto circunferências como outras curvas de grau superior.



Compasso de Descartes

Entre as várias curvas estudadas Descartes em resposta a um problema que lhe fora enviado por De Beaune estudou a curva logarítmica embora não a identificasse como tal.

A nossa proposta de trabalho não é acompanhar o processo de Descartes para a construção da curva, mas fazer uma simulação do compasso de Descartes no Sketchpad e com base nela construir uma curva logarítmica.

Para isso, observa a *fig.1*:

1. Considera o ponto O e dois eixos OX e OY perpendiculares e passando por O .
2. Traça a circunferência de centro O e raio AO.
3. Por A traça uma perpendicular a OX.
4. Traça a tangente à circunferência passando por A.
5. Marca o ponto X_{-1} de intersecção da tangente à circunferência em A com OX.
6. Constrói o segmento AX_{-1} .
7. Marca o ponto X de intersecção da circunferência com OX.

O compasso de Descartes e a curva logarítmica (continuação)

8. Repete os procedimentos anteriores para marcares os restantes X_i.

9. Sobre OY marca Y_1 e a igual distância Y_2.

10. Marca os outros Y_i. Uma forma será definir o vector OY_1 é fazer sucessivas translações dos pontos.

11. Os pontos da curva serão pontos (x_i, y_i). Para os marcares faz uma translação de cada ponto x_i, associada ao vector OY_i .

12. Para visualizares uma aproximação da curva une os pontos com segmentos de recta.

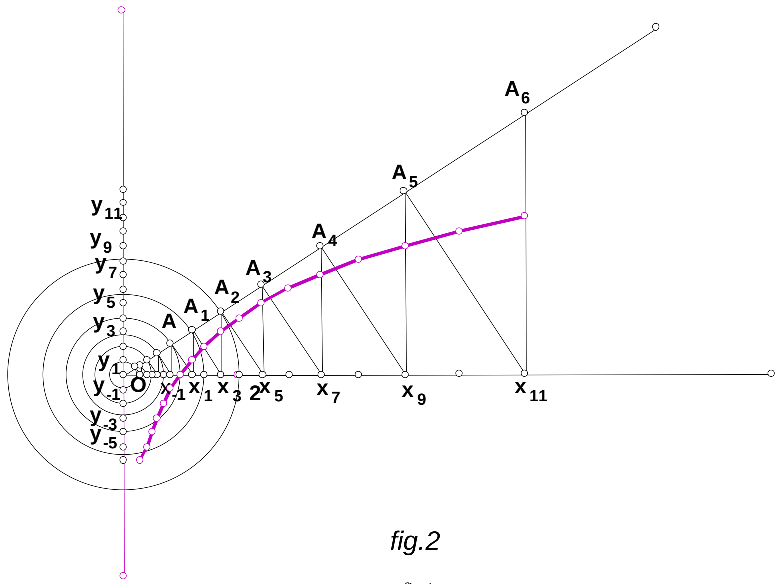


fig.2

fig.1

13. Altera o ângulo movendo o ponto A ou altera a unidade no eixo OY, movendo Y_1.

14. Determina as medidas de OX_i e de OY_i e constrói uma tabela com elas.

15. Experimenta fazer $OY_4 = 1$ e $OX_4 = 2$. Verifica, recorrendo à calculadora, que a tabela obtida é a da função logaritmo de base 2.

16. Tendo em conta a *fig. 3* , justifica que:

17. Os triângulos OAX_1 e OA_1X_1, OA_1X_2, OA_1X_3, ... são todos semelhantes *(fig. 3)*.

18. Com base na semelhança de triângulos completa:

$$\frac{OA}{OX_1} = \frac{OX_1}{OA_1} = \frac{OA_1}{} = -$$

O compasso de Descartes e a curva logarítmica *(continuação)*

19. Se $\overline{OA}=1$ e $\overline{OX_1}=r$, mostra que os comprimentos OX_i são termos de uma progressão geométrica de razão r.

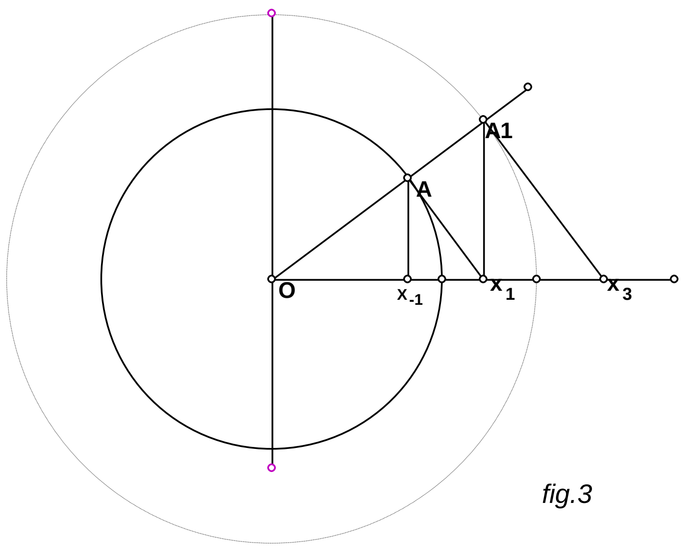


fig.3

20. Com base nos resultados anteriores e voltando à questão 11, mostra que de facto se trata da função logarítmica de base 2.
21. Experimenta agora fazer OY_8 =1 e OX_4 = 2 e verifica que se trata do logaritmo de base 4. E se OX_8 =3?
22. Pensa como podes obter a curva exponencial de base a, por um processo semelhante.

<u>Comentários:</u>

A propósito desta actividade deve ser lida a primeira parte desta brochura (pág.71) e pode ser consultado o livro Geometria – Temas Actuais, de Eduardo Veloso (pág. 106).

Bibliografia utilizada na elaboração da brochura

Aido, A. e outros. (1983). *Física para o 12.º ano de escolaridade/Via de ensino*, Vol. I. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 3.ª ed.

Apostol, T. M. (1983). *Cálculo*, vol. 1. Rio de Janeiro: Editora Reverté.

Bicknell, S., *Temperament: A Beginner's Guide*, Internet: `http://albany.edu/~piporg-L/tmprment.html`, acedido em Maio de 1999.

Candé, R. (1989). *A Música - linguagem, estrutura, instrumentos*. Lisboa: Edições 70.

Carreira, S. P. (1995). *A matematização na natureza e na sociedade: Uma forma de encarar a relação Matemática-Realidade*. in J. F. Matos e outros, *Matemática e Realidade: Que papel na Educação e no Currículo*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Cebolo, E. A. s/d. *Guitarra Mágica – Acordes*. Porto: ed. do autor.

Chilov, G. (1975). *Gamme simple (structure de l'échelle musicale)*, in AAVV, *Quelques applications des mathématiques.* Moscou: Editions Mir.

Comissão Mundial do Ambiente e do Desenvolvimento. (1991). *O Nosso Futuro Comum*. Lisboa: Meribérica/Liber.

Dixmier, J. (1967). *Cours de Mathématiques du Premier Cycle*. Gauthier-Villars.

Ferreira, J. C. (1988). *Introdução à Análise Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2.ª ed.

Figueira, M. S. R. (1996). *Fundamentos de Análise Infinitesimal*. Textos de Matemática, vol. 5, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Foerster, Paul ª (1998). *Calculus – Concepts and Applications*. Califórnia: Key Curriculum Press

Gastineau, John E. e outros (1998). *Physics with CBL*.Portland: Vernier Software

Geller, S. (1973). *Abrégé de Mathématiques a l'usage des étudiants en Médecine et en Biologie.* Masson.

Gonçalves, J. V. (1953). *Curso de Álgebra Superior*. Lisboa, 3.ª ed.

Hairer, E. e Wanner, G. (1995). *Analysis by Its History*. Springer.

Henrique, L. (1988). *Instrumentos Musicais*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Internet: `http://www.medieval.org/emfaq/harmony/pyth.htm` , *Pythagorean Tuning and Medieval Polyphony*, acedido em Junho de 1999.

Internet: `http://www.syssrc.com/museum/mechcalc/javaslide/index.html`, *The Slide Rule*, acedido em Julho de 1999.

Internet: `http://icarus.physics.montana.edu/math/csr.html`, *Make your own circular slide rule,* acedido em Julho de 1999.

Internet: `http://www.physics.ohio-state.edu/~dvandom/slide.html`, *Slide Rules!*, acedido em Julho de 1999.

Jones, K. C. e Gaudin, A. J. (1983). *Introdução à Biologia*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Kirk, G. S. e Raven, J. E. (1982). *Os filósofos pré-socráticos*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2.ª ed.

Lopes-Graça, F. (1977). *A musicologia imaginária*, in Lopes-Graça, F. *Escritos Musicológicos*. Lisboa: Edições Cosmos.

Louder, J., *Demystifying Temperament*, Internet: `http://orgalt.com/louder.html`, acedido em Maio de 1999.

Machado, A., Carvalho, R. Abrantes, P. (1985). *M 12 Matemática 12º ano*. Lisboa: Texto Editora.

Madureira, L. (1993). *Aplicando a Matemática*. Lisboa: VRAL, Lda.

Marques, R. M. L. (1999). *Será possível ouvir a forma de um tambor?* Seminário do Mestrado em Matemática para o Ensino, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Meyer, W. J. (1987). *Concepts of Mathematical Modeling*. New York: McGraw-Hill.

Murray, J. D. (1993). *Mathematical Biology*. Berlin: Springer-Verlag, 2nd ed.

Pappas, T. (1998). *Fascínios da Matemática*. Lisboa: Editora Replicação.

Pinto, José Pedro. (1999). *Música e logaritmos*, Comunicação pessoal.

Silva, J. C. (1994). *Princípios de Análise Matemática Aplicada*. Lisboa: McGraw-Hill.

Silva, J. C., *Understanding exponential growth with technology*, in Electronic Proceedings of ICTCM-7, Internet: `http://archives.math.utk.edu/ICTCM/EP-7.htm`, acedido em Junho de 1999.

Silva, J. S. (1978). *Compêndio de Matemática*, 2.º vol. Lisboa: GEP.

Silva, J. S. e Silva Paulo, J. D. (1970). *Compêndio de Álgebra,* Tomo 1, 6ºano. Braga.

Silva, P. M. (1989). *Elementos de Acústica Musical*. Lisboa: Laboratório Nacional de Engenharia Civil.

Smith, D. E. (1959). *A Source Book in Mathematics*. New York: Dover Publications, Inc.

Veloso, E.(1998). *Geometria – Temas Actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional

Verbo, *Enciclopédia Luso-Brasileira de Cultura*.

White, H. E. e Peckman, E. F. (1959). *Physics - An Exact Science*. Princeton: Van Nostrand.

Williams, M. (1997). *History of Computing Technology*. California: IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, 2.ª ed.

(1997).Geometry Turned On. Editions The Mathematical Association of America.

(1998). One Equals Zero and Other Mathematical Surprises. Key Curriculum Press.

Locais da Internet

ACOMPANHAMENTO DE MATEMÁTICA**: http://www.terravista.pt/IlhadoMel/1129**

ENSINO DA MATEMÁTICA:

- **http://www.mat.uc.pt/~jaimecs**
- **http://correio.cc.fc.ul.pt/~jponte/**
- **http://go.to/alunos**

APM: **http://www.apm.pt**

SPM**: http://ptmat.lmc.fc.ul.pt/~spm**

MAA: http://www.maa.org**.**

NCTM: **http://www.nctm.org.**

LIMITES E CONTINUIDADE

http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/1/limits.4/index.html

FUNÇÃO EXPONENCIAL

http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/0/exp_log.6/index.html

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/0/shifting.6/index.html

DERIVADAS:

Differential and differences: **http://www.math.psu.edu/dna/calculus/differential**
Secants and tangent: **http://www.math.psu.edu/dna/calculus/secants**
Visual Calculus -Derivatives: **http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/2**
http://www.ies.co.jp/math/java/doukan/doukan.html

MATH FORUM: **http://forum.swarthmore.edu**

MATH ARCHIVES: **http://archives.math.utk.edu**

***Software* educativo:**

Modellus: **http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus**

Geometer'sketchpad: **http://www.keypress.com/sketchpad/**

Casio: **http://pegasus.cc.ucf.edu/~ucfcasio**

Texas: **http://www.ti.com/**

Autores da brochura:

Adelina Precatado (aprecatado@mail.telepac.pt)

Carlos Albuquerque (albuquer@lmc.fc.ul.pt)

Paula Teixeira (pteixeira@mail.telepac.pt)

Suzana Nápoles (napoles@lmc.fc.ul.pt)