

10.º ANO | ENSINO SECUNDÁRIO

MATEMÁTICA A

INTRODUÇÃO

As Aprendizagens Essenciais (AE) constituem a referência nacional comum para aquilo que todos os alunos devem aprender ao longo da escolaridade obrigatória. Representam um núcleo fundamental de conhecimentos, capacidades e atitudes que cada disciplina deve assegurar, funcionando como um denominador curricular comum, sem esgotar o conjunto total de aprendizagens possíveis. Embora obrigatórias não limitam a possibilidade de aprender mais. As AE deixam espaço para que cada escola e cada aluno possam aprofundar conteúdos e desenvolver competências adicionais.

Enquanto documentos de orientação curricular, as AE servem de base à planificação, realização e avaliação do ensino e da aprendizagem. Contribuem diretamente para o desenvolvimento das áreas de competências definidas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória. Por essa razão, constituem, juntamente com o Perfil, o referencial para a avaliação externa.

Organizam-se em três componentes fundamentais:

1. O que os alunos devem saber – conteúdos estruturados, indispensáveis, articulados conceitualmente, relevantes e significativos;
2. Como devem pensar e trabalhar para aprender – processos cognitivos e operações essenciais à aquisição do conhecimento;
3. Como devem mostrar o que aprenderam – o “saber fazer”, aplicado dentro de cada disciplina e em articulação horizontal com as restantes.

Em síntese, as Aprendizagens Essenciais asseguram que o currículo é claro, coerente e acessível, combinando conteúdos sólidos com processos cognitivos que permitem aos alunos compreender, aplicar e aprofundar o que aprendem.

MATEMÁTICA ESCOLAR ORIENTADA PARA O FUTURO

A formação de indivíduos matematicamente competentes é um propósito fundamental do currículo de matemática para o ensino secundário. A sociedade e o mundo contemporâneos, marcados pela globalização, pela crescente digitalização, pela conectividade e pela automatização, e ainda pela aceleração do desenvolvimento tecnológico, enfrentam desafios nos quais o conhecimento matemático adquire um papel essencial, proporcionando conceitos, métodos, modelos e formas de pensar. Esse poder matemático deve ser parte integrante da educação de todos os cidadãos, incluindo conhecimentos e capacidades que os jovens transportarão para a sua vida pessoal, social e profissional.

Empreender uma formação matemática abrangente e inovadora, neste ciclo de escolaridade, significa desenvolver nos alunos a capacidade de identificar conceitos matemáticos relevantes para resolver problemas reais, aplicar procedimentos matemáticos adequados e interpretar os resultados em contextos diversos. O raciocínio matemático está na base dos processos de compreensão dos conceitos e objetos matemáticos, que podem e devem ser analisados, representados e relacionados de diferentes maneiras. São

igualmente importantes a formulação de hipóteses, a testagem de conjecturas, a dedução, a generalização e a abstração, na construção de argumentos lógicos e conclusões, cuja comunicação de forma apropriada é cada vez mais importante no mundo atual.

O currículo consagra o propósito de preparar os alunos para formularem juízos e tomarem decisões fundamentadas, contribuindo para que se tornem cidadãos reflexivos, empenhados e participativos. Visa também contribuir para que os jovens valorizem o papel da Matemática no mundo e o seu carácter de ciência em evolução e renovação permanente, apreciando a sua dimensão estética, a par do seu legado histórico.

Assim, o currículo de Matemática para o futuro orienta-se para o desenvolvimento de áreas de competências, à luz do que é preconizado no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*, nomeadamente no que se refere ao pensamento crítico aliado à resolução de problemas, promovendo a criatividade e a comunicação, além de acentuar a pertinência do trabalho colaborativo.

IDEIAS INOVADORAS DO CURRÍCULO

Matemática para a Cidadania

O reconhecimento do ensino secundário como um ciclo que é parte integrante da formação geral dos jovens, incluído na escolaridade obrigatória, cria um contexto em que todas as disciplinas, incluindo a Matemática, devem contribuir para o desenvolvimento dos alunos enquanto cidadãos ativos, conscientes, informados e interventivos.

A crescente relevância do papel da Matemática na sociedade atual realça a importância e a necessidade de dotar os alunos de ferramentas matemáticas de análise dos processos sociais, que estão na base do exercício de uma cidadania ativa. Assim, estas Aprendizagens Essenciais exploram Modelos Matemáticos de processos eleitorais e a análise matemática de modelos financeiros, e valorizam o desenvolvimento da literacia estatística.

Pensamento Computacional

Os aspetos comuns entre o Pensamento Matemático e o Pensamento Computacional, bem como a relevância atual do Pensamento Computacional na ciência e na sociedade, justificam que o currículo de Matemática valorize esta abordagem conceptual na resolução de problemas. As Aprendizagens Essenciais de Matemática A promovem o desenvolvimento de práticas como a abstração, a decomposição, o reconhecimento de padrões, a análise e definição de algoritmos, bem como a aquisição de hábitos de depuração e otimização dos processos envolvidos na atividade matemática. Deste modo, a aposta no Pensamento Computacional revela a aproximação do currículo às recomendações internacionais, designadamente em relatórios da União Europeia, e também o alinhamento com o currículo de Matemática do ensino básico, favorecendo o desenvolvimento desta capacidade de forma integrada, coerente e progressiva.

Diversificação de temas no currículo

Além do desenvolvimento de competências dos alunos no âmbito da cidadania, pretende-se continuar a disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com os métodos numéricos, o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia e a inclusão de temas com pouca tradição no ensino secundário em Portugal. Esta diversificação é intensificada no 12.º ano, com a proposta de três temas em opção, possibilitando que turmas diferenciadas trabalhem temas matemáticos diferentes, podendo em algumas turmas, caso o tempo o permita, ser lecionado mais do que um dos temas opcionais propostos.

Matemática para todos

Assume-se que, na escolaridade obrigatória, o currículo deve dar resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos. Os formalismos e os níveis de abstração devem ser adequados ao trabalho desenvolvido em cada tema. Pretende-se que a matemática seja um contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias.

IDEIAS-CHAVE DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS

As Aprendizagens Essenciais de Matemática no ensino secundário dão continuidade às aprendizagens do ensino básico e assumem um conjunto de princípios e orientações metodológicas, cuja concretização e especificação é feita para cada ano de escolaridade e para cada tema matemático. A seguir, enunciam-se e apresentam-se as nove ideias-chave preconizadas nas Aprendizagens Essenciais, esquematizadas na Figura 1:



Figura 1 - Ideias-chave das Aprendizagens Essenciais

Resolução de problemas, modelação e conexões

Dar sentido à Matemática e enfatizar a modelação e as aplicações

A resolução de problemas, tal como a modelação, devem constituir o contexto para o estabelecimento de conexões entre diferentes conceitos e áreas da Matemática, assim como entre a Matemática e outras áreas do saber, permitindo uma abordagem integrada e significativa para os alunos na sua atividade matemática. É fundamental que os alunos tenham contacto com o processo de modelação matemática e sejam capazes de criticar, validar e aperfeiçoar modelos matemáticos. Preconizando a exploração de ideias e conceitos matemáticos, pretende-se que a aprendizagem não se reduza à memorização de regras, ao treino de procedimentos ou à sua execução sem compreensão. É essencial que as definições, os resultados e os procedimentos matemáticos adquiram sentido, e que os alunos os saibam mobilizar e aplicar adequadamente para resolver problemas do mundo real, em situações do dia a dia ou de outras disciplinas. Uma das áreas de competências no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*, fortemente ligada à Matemática - Raciocínio e Resolução de Problemas -, implica que os alunos sejam capazes de: i) interpretar informação, planear e conduzir pesquisas; ii) gerir informações e tomar decisões; iii) desenvolver processos conducentes à construção de conhecimento, usando recursos diversificados.

Raciocínio e lógica matemática

Incentivar processos de raciocínio dedutivo, integrando a lógica matemática nos diversos temas

O aluno deve ser sistematicamente incentivado a explorar situações problemáticas, a usar abordagens heurísticas, a formular e validar conjecturas, a justificar processos de resolução e a encadear raciocínios. Os conceitos e métodos relativos à lógica matemática não constituem um tema específico das Aprendizagens Essenciais, mas devem, de forma natural, ser integrados nos vários temas abordados. Noções elementares de Lógica podem e devem ser introduzidas à medida que forem relevantes para a clarificação de processos e de raciocínios. Pretende-se, assim, que o aluno adquira a capacidade de raciocinar dedutivamente e de modo autónomo, usando os princípios e a simbologia inerentes à lógica matemática. A integração do raciocínio dedutivo e da lógica, bem como da linguagem matemática e simbólica, deve estar presente em todos os momentos de aprendizagem, sem se transformar num conteúdo tratado de

forma isolada. O grau de formalização a utilizar deve ter sempre em conta o nível de maturidade matemática dos alunos e deve surgir, se possível, como uma necessidade, garantindo que o processo de formalização acompanha a apropriação dos conceitos. Diversos temas, como Geometria, Funções e Probabilidade, em contexto de resolução de problemas, podem constituir-se como excelentes oportunidades para desenvolver o raciocínio dedutivo, no qual se inclui a utilização de linguagem e de notações adequadas.

Recurso sistemático à tecnologia

Incentivar a exploração de ideias e conceitos, integrando a tecnologia como alavanca para a compreensão e resolução de problemas

A abordagem exploratória de ideias e conceitos matemáticos apresenta-se como determinante, o que pressupõe levar o aluno a participar ativamente num processo de construção e aprofundamento, motivado por questões desafiadoras, problemas e procura de justificações. A integração da tecnologia é considerada como indispensável nesse processo, pelas possibilidades que oferece de experimentação, visualização, representação, simulação, interatividade, bem como, evidentemente, de cálculo numérico e simbólico. O recurso a ambientes de geometria dinâmica (AGD), à folha de cálculo e a aplicativos digitais, explorados em computadores, *smartphones* ou calculadora gráfica, deve ser feito de forma sistemática. As atividades de programação devem ser integradas com uma complexidade progressiva, sendo relevantes para o desenvolvimento de processos algorítmicos, de um pensamento estruturado e do raciocínio lógico, proporcionando um vasto campo de aplicação da Matemática e envolvendo genuinamente a formulação e a resolução de problemas, além de promover o desenvolvimento do pensamento computacional.

Tarefas e recursos educativos

Apoiar a aprendizagem em tarefas, contextos e recursos diversificados

A construção de tarefas de aprendizagem constitui uma das ações decisivas do professor. Uma tarefa matemática enriquecedora pode assumir a forma de um problema, uma questão exploratória, um exercício de aplicação, um pequeno projeto ou uma pesquisa de aprofundamento, sempre que cumpra os seguintes critérios: ser interessante e desafiante, envolver matemática relevante, criar oportunidades para aplicar e ampliar conhecimentos, permitir diferentes estratégias, tornar possível monitorizar a compreensão dos

alunos e apoiar o seu progresso. As tarefas devem ser, ainda, diversificadas e ajustadas aos objetivos de aprendizagem, e a sua planificação deve prever diferentes tipos de organização do trabalho dos alunos. A utilização de recursos variados, nomeadamente da tecnologia, bem como a diversificação de contextos de aprendizagem, incluindo laboratórios, espaços fora da sala de aula, museus de ciência e outros, deverão merecer especial atenção na construção de tarefas.

História da Matemática

Valorizar a importância da Matemática na evolução da sociedade

O recurso a episódios e problemas marcantes da História da Matemática deve motivar pesquisas, estudos ou debates, não de carácter enciclopédico, mas contribuindo para que o progresso da Matemática seja apreciado e compreendido. Além do seu valor intrínseco, enquanto património cultural que importa valorizar, existem numerosos factos, aspetos particulares e episódios da História da Matemática que, pelo seu potencial pedagógico, devem ser explorados em tarefas dentro e fora da sala de aula. Os professores devem aproveitar os factos contemporâneos da História da Matemática para levar os alunos a entender o papel determinante da Matemática na sociedade atual. Por exemplo, podem ser referidas as primeiras Medalhas *Fields* atribuídas a mulheres matemáticas, a importância dos Modelos Matemáticos para entender a crise climática, a evolução das epidemias ou a exploração espacial.

Práticas enriquecedoras e criatividade

Inovar e investir em práticas enriquecedoras, favorecendo o desenvolvimento da criatividade e atitudes positivas face à Matemática

O currículo integra propostas inovadoras, que incluem a realização de projetos, de profundidade e extensão ajustadas às condições existentes e aos alunos. É igualmente recomendado que os alunos se envolvam na resolução de questões e problemas autênticos em contextos de interdisciplinaridade (nomeadamente numa perspetiva integradora de STEAM - ciências, tecnologia, engenharia, artes e matemática). A programação, tal como a modelação ou o trabalho de projeto, abrem inúmeras vias de trabalho promissoras que não devem ser ignoradas. Também a beleza da Matemática, a sua aplicabilidade e a história fascinante que a envolve são fortes motivos para inovar através de práticas de enriquecimento das aprendizagens. É importante que os alunos experimentem o prazer da descoberta

em Matemática e que desenvolvam o gosto pelo desafio, pela procura de soluções e pela sua comunicação. Dar aos alunos oportunidades de aprenderem matemática significativa contribui para que desenvolvam atitudes positivas em relação à disciplina. Estimular a curiosidade, o interesse, a motivação e a criatividade é essencial para que reconheçam a importância da Matemática na sua formação pessoal e académica e para que adquiram autoconfiança, sentindo-se capazes de raciocinar e comunicar matematicamente. O contexto socioemocional que permeia a aprendizagem da Matemática tem grande influência sobre a imagem que os jovens constroem da disciplina, sendo determinante na formação de cidadãos críticos, reflexivos, que se sintam capazes de tomar decisões e de formular e resolver problemas de forma criativa e eficiente.

Organização do trabalho dos alunos

Valorizar o trabalho colaborativo num ambiente de entreajuda e corresponsabilização, cultivando comunidades de aprendizagem

A valorização do trabalho colaborativo é assumida enquanto estratégia de aprendizagem e enquanto competência a desenvolver nos jovens, na sociedade atual. A colaboração é especialmente indicada em tarefas nas quais os alunos possam discutir e definir abordagens e processos de resolução, confrontar ideias e contribuir para um objetivo comum. É também uma forma de trabalho em que os alunos se devem apoiar mutuamente, envolvendo-se em processos matemáticos, argumentação e comunicação, valorizando as competências individuais de cada um. Assim, o trabalho em pares e em pequenos grupos é adequado em múltiplas situações de aprendizagem, desde a realização de tarefas curtas, passando por situações que envolvem pesquisa, recolha de dados, modelação, até ao desenvolvimento de projetos.

Comunicação matemática

Comunicar recorrendo a representações múltiplas, com clareza e rigor e um nível de formalização adequado

A comunicação matemática, a par do raciocínio e do pensamento crítico, está presente quando os alunos interpretam gráficos, esquemas, diagramas ou dados, justificam afirmações, utilizam diferentes representações, escrevem e criticam explicações e argumentos matemáticos, com simbologia adequada e produzindo encadeamentos lógicos. Importa pôr em prática diversos tipos de comunicação,

dando espaço às discussões coletivas e em pequenos grupos, apresentações orais e/ou escritas, elaboração de relatórios e composições, publicações e exposições, que são essenciais no processo de desenvolvimento de conceitos ou processos matemáticos. A simbologia constitui um sistema de representação matemática robusto que deve ser relacionado com outros modos de representação, tendo em vista a sua utilização oportuna, nomeadamente no âmbito da comunicação matemática. A formalização de conceitos e resultados matemáticos é uma etapa importante da aprendizagem que não se alcança por meio do excesso de manipulação simbólica ou pela prática de artifícios de cálculo demasiadamente técnicos.

Avaliação para a aprendizagem

Privilegiar a avaliação formativa na regulação do processo de aprendizagem

A abordagem exploratória que se privilegia implica a integração da avaliação no processo de aprendizagem. É necessário que a avaliação seja um processo, e não um fim, e que esteja ao serviço da aprendizagem dos alunos, de modo a favorecê-la. A diversificação de formas e instrumentos de avaliação é uma das práticas de avaliação recomendadas. Constituem boas tarefas de avaliação formativa as resoluções detalhadas de tarefas, os relatórios e os cartazes. A produção de documentos de natureza audiovisual é igualmente válida e apelativa, designadamente sob a forma de pequenos vídeos, criação de páginas e *blogs*, tirando partido de ferramentas digitais. As partilhas de ideias e conclusões em sala de aula, bem como as apresentações orais, constituem boas oportunidades para monitorizar e acompanhar o desenvolvimento das aprendizagens e identificar dificuldades e obstáculos.

AVALIAÇÃO

A avaliação é intrínseca ao ensino e à aprendizagem e deve, por isso, assumir-se como um processo contínuo e integrado que regula o progresso das aprendizagens e orienta a prática pedagógica.

A investigação em educação tem vindo a evidenciar que a avaliação se desenvolve numa relação entre o professor, o aluno e os seus pares, em diferentes momentos do processo de aprendizagem. Partindo da identificação de três questões centrais, identificar onde os alunos se encontram no seu percurso de aprendizagem, para onde devem progredir e que estratégias podem apoiar esse progresso, identificam-se cinco estratégias-chave para a implementação, com sucesso, da avaliação para a aprendizagem:

- clarificar, compreender e partilhar os objetivos de aprendizagem e os critérios de sucesso (critérios de avaliação/verificação do sucesso);
- promover o diálogo, bem como realizar atividades e tarefas eficazes que permitam recolher informação sobre a aprendizagem;
- dar *feedback* que promova o desenvolvimento da aprendizagem;
- promover a aprendizagem entre pares;
- implicar os alunos como agentes da sua aprendizagem.

As práticas em sala de aula, decorrentes da implementação destas estratégias-chave, podem ser consideradas formativas, na medida em que a informação sobre o desempenho dos alunos, sustentada em evidências recolhidas no decurso das atividades realizadas, é interpretada e utilizada por professores, alunos ou pelos seus pares com o objetivo de apoiar decisões pedagógicas fundamentadas sobre os próximos passos no processo de ensino e aprendizagem.

Ao fomentar uma avaliação pedagógica contínua e integrada, em que o aluno é encarado como agente da aprendizagem, reforça-se a intencionalidade pedagógica do ensino, promovendo a avaliação não apenas das aprendizagens, mas sobretudo para as aprendizagens.

A avaliação para a aprendizagem decorre da utilização de informação recolhida através de instrumentos diversificados e da observação, muitas vezes informal, dos desempenhos dos alunos nas atividades diárias da sala de aula, não se constituindo como uma tarefa burocrática que implique o registo sistemático de toda a informação relativa a esse desempenho. Tanto a avaliação formativa (sistemática e contínua) como a avaliação sumativa (que permite fazer um ponto de situação sobre o que os alunos aprenderam num dado intervalo de tempo ou unidade didática) devem ser coerentes e intencionais, contribuindo para uma avaliação pedagógica consistente. Neste pressuposto, também os resultados da avaliação externa devem ser utilizados com intenção pedagógica e permitir aos alunos e aos professores melhorar o ensino e a aprendizagem.

Com o objetivo de apoiar os processos de avaliação pedagógica, interna e externa, foram introduzidos, nos documentos das Aprendizagens Essenciais (AE) de cada disciplina, descritores de desempenho organizados por domínio e por nível de desempenho (*Desempenho Proficiente* e *Desempenho Avançado*), que se constituem como o referencial nacional para a avaliação dos alunos. Salienta-se que o que deve ser aprendido por todos os alunos, em cada disciplina, é o constante do quadro “Operacionalização das Aprendizagens Essenciais”. Com a introdução destes dois níveis de desempenho, estabelece-se um referencial comum, salvaguardando-se simultaneamente a autonomia das escolas para a (re)definição de critérios e para o (re)ajustamento de instrumentos de recolha de informação sobre as aprendizagens.

Os descritores de desempenho constituem referenciais que permitem identificar e caracterizar diferentes níveis de desenvolvimento das aprendizagens dos alunos. Estes descritores apoiam a interpretação do desempenho escolar e promovem padrões elevados de qualidade na consolidação do conhecimento e no desenvolvimento de competências.

No exercício da sua autonomia, as escolas e os professores tomam estes descritores como referenciais para apoiar a definição dos critérios de avaliação e a construção de instrumentos de recolha de informação ajustados ao contexto educativo e às especificidades de cada disciplina. A partir destes referenciais, as escolas definem critérios que orientam a apreciação do trabalho realizado pelos alunos, garantindo que a avaliação se centra na qualidade da mobilização dos conhecimentos e das competências desenvolvidas ao longo do processo de ensino e aprendizagem.

Neste enquadramento, os descritores apresentados para cada domínio permitem identificar diferentes níveis de desempenho evidenciados pelos alunos nas tarefas realizadas em contexto de aprendizagem. A sua interpretação pressupõe uma análise global do trabalho dos discentes, considerando a compreensão dos temas em estudo, a capacidade de selecionar, organizar e utilizar informação relevante, de aplicar conceitos e procedimentos adequados e de mobilizar o que foi aprendido nas tarefas propostas, demonstrando domínio das AE. No nível de desempenho **Proficiente**, observa-se uma utilização adequada, consistente e segura dos conhecimentos e das competências em diferentes situações de trabalho escolar, o que possibilita a explicação de fenómenos ou processos, a interpretação de informação e a resolução de tarefas com base no que foi aprendido.

No nível de desempenho **Avançado**, os alunos demonstram uma mobilização mais autónoma, rigorosa e integrada desses conhecimentos e dessas competências. Analisam, interpretam e relacionam informação de forma crítica, utilizam conceitos com rigor e articulam diferentes saberes para explicar fenómenos ou processos de forma fundamentada, revelando maior capacidade de análise, de integração da informação e de aplicação das aprendizagens em diferentes contextos.

Os descritores não substituem os critérios de avaliação definidos pelas escolas, mas constituem um referencial comum que visa apoiar os professores na apreciação do desenvolvimento das aprendizagens, na comunicação do desempenho dos alunos e na tomada de decisões pedagógicas orientadas para aprendizagens de qualidade.

Com o propósito de promover a transparência e o envolvimento no processo de aprendizagem, a explicitação e clarificação dos critérios de avaliação de escola junto dos alunos e dos encarregados de educação assumem particular importância, pois favorecem a compreensão e a apropriação dos princípios de uma avaliação centrada na aprendizagem.

Este documento curricular apresenta uma proposta de descritores de desempenho que têm por base os seguintes domínios (i) Resolução de Problemas, Modelação e Conexões; (ii) Raciocínio e Lógica Matemática; (iii) Comunicação Matemática; (iv) Recurso Sistemático à Tecnologia; e (v) Práticas Enriquecedoras e Criatividade.

Domínio de avaliação	Nível	Descritor de desempenho
Resolução de Problemas, Modelação e Conexões	Avançado	• Critica, de forma fundamentada, soluções de modelos matemáticos. • Valida modelos matemáticos a partir do confronto sistemático com a realidade. • Aperfeiçoa, de forma autónoma e justificada, modelos matemáticos para resolver problemas do mundo real, em contextos do quotidiano, interdisciplinares ou de outras disciplinas.
	Proficiente	• Critica, sem fundamentar, soluções de modelos matemáticos, identificando erros ou limitações mais evidentes. • Valida modelos matemáticos a partir do confronto com a realidade tirando conclusões simples. • Aperfeiçoa, modelos matemáticos, com orientação, para resolver problemas do mundo real, em contextos do quotidiano.
Raciocínio e Lógica Matemática	Avançado	• Explora, de forma autónoma e sistemática, situações problemáticas, identificando padrões, relações e diferentes estratégias de abordagem. • Seleciona e aplica, de forma intencional e flexível, abordagens heurísticas adequadas, ajustando-as em função do problema. • Formula, testa e valida conjecturas de forma rigorosa, recorrendo a argumentos matemáticos. • Justifica, de forma clara, estruturada e fundamentada, os processos de resolução e procedimentos, avaliando a sua validade. • Raciocina dedutivamente de forma autónoma, usando os princípios e a simbologia da lógica matemática.

Domínio de avaliação	Nível	Descritor de desempenho
	Proficiente	• Explora situações problemáticas, identificando padrões, relações e estratégias de resolução, com apoio quando necessário. • Usa abordagens heurísticas adequadas, com orientação, aplicando-as na resolução de problemas. • Formula e valida conjeturas, com base em exemplos ou situações concretas. • Justifica processos de resolução e procedimentos de forma clara, ainda que com fundamentação parcial. • Raciocina e encadeia raciocínios, usando os princípios e a simbologia inerentes à lógica matemática.
Comunicação Matemática	Avançado	• Formaliza conceitos e resultados matemáticos de forma rigorosa e eficaz, recorrendo à simbologia adequada e à notação correta. • Escreve explicações e argumentos matemáticos claros e estruturados, apresentando justificações completas com encadeamento lógico consistente, e avalia criticamente a validade das suas ideias. • Interpreta e analisa gráficos, esquemas, diagramas e dados, extraíndo informação relevante e identificando padrões, relações ou tendências significativas. • Justifica afirmações com base em raciocínios matemáticos rigorosos, construindo argumentos completos e consistentes. • Utiliza diferentes representações (simbólica, gráfica, numérica e verbal) de forma integrada, estabelecendo relações claras e generalizando conclusões quando apropriado. • Escreve explicações e argumentos matemáticos de forma precisa e articulada, avaliando os seus próprios procedimentos e conclusões.

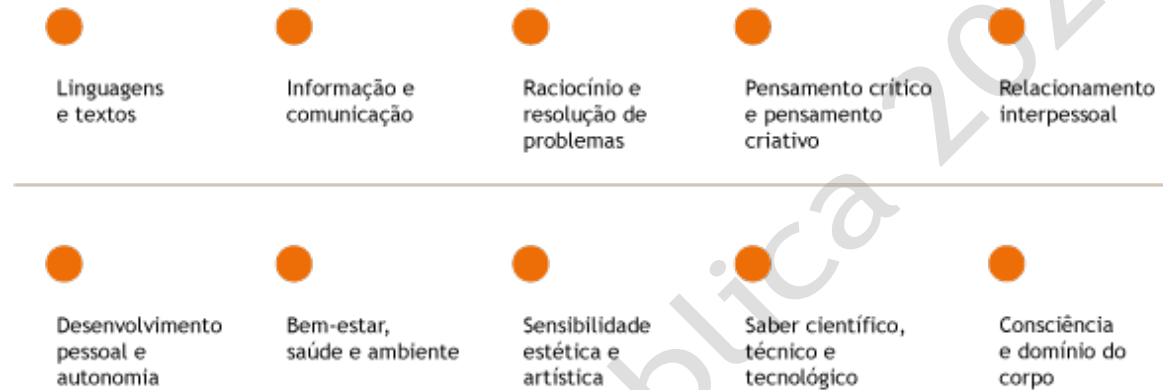
Domínio de avaliação	Nível	Descritor de desempenho
	Proficiente	• Formaliza conceitos e resultados matemáticos, recorrendo à simbologia adequada, ainda que com imprecisões. • Escreve explicações e argumentos matemáticos simples, apresentando justificações com encadeamento lógico, e identifica aspetos a melhorar. • Interpreta gráficos, esquemas, diagramas ou dados, retirando informação adequada. • Justifica afirmações com base em raciocínios matemáticos simples, ainda que nem sempre completos ou totalmente rigorosos. • Utiliza diferentes representações (simbólica, gráfica, numérica e verbal), estabelecendo algumas relações entre elas. • Escreve explicações e argumentos matemáticos de forma compreensível, apresentando justificações com encadeamento lógico e identifica aspetos a melhorar.
Recurso Sistemático à Tecnologia	Avançado	• Resolve problemas que integram atividades de programação, folhas de cálculo e ambientes de geometria dinâmica, enfrentando desafios de complexidade elevada. • Desenvolve processos algorítmicos com pensamento estruturado e raciocínio lógico, aplicando estratégias adequadas de forma consistente e autónoma. • Envolve-se de modo proativo na formulação e resolução de problemas, identificando objetivos, decompondo tarefas e avaliando soluções. • Desenvolve o pensamento computacional de forma rigorosa, criando, testando e refletindo sobre os procedimentos, os resultados e a eficiência das estratégias utilizadas.

Domínio de avaliação	Nível	Descritor de desempenho
	Proficiente	• Resolve problemas que integram atividades de programação, folhas de cálculo e ambientes de geometria dinâmica, enfrentando desafios de complexidade moderada. • Desenvolve processos algorítmicos com pensamento estruturado e raciocínio lógico, aplicando estratégias apropriadas, de forma parcial ou com orientação. • Envolve-se na formulação e resolução de problemas, identificando objetivos e decompondo tarefas, com orientação na avaliação das soluções. • Desenvolve o pensamento computacional através da análise de algoritmos e de pequenos programas propostos, identificando padrões e relações simples.

Domínio de avaliação	Nível	Descritor de desempenho
Práticas Enriquecedoras e Criatividade	Avançado	• Participa de modo proativo na resolução de questões e problemas autênticos em contextos de interdisciplinaridade, integrando de forma consciente conceitos de STEAM (Ciências, Tecnologia, Engenharia, Artes e Matemática). • Desenvolve atividades em contextos diversificados, utilizando recursos tecnológicos, estratégias de modelação e projetos colaborativos para explorar e aprofundar ideias matemáticas. • Propõe soluções e ideias criativas e originais, explorando diferentes abordagens e refletindo criticamente sobre o impacto e a aplicabilidade das suas ideias em diferentes situações. • Trabalha de forma autónoma e proativa com tarefas matemáticas enriquecedoras, incluindo problemas complexos, questões exploratórias, projetos interdisciplinares ou pesquisas aprofundadas. • Resolve tarefas matemáticas de forma autónoma e proativa, identificando oportunidades para aplicar, aprofundar e integrar conhecimentos em contextos diversos e desafiantes, utilizando diferentes estratégias. • Revela atitudes positivas e curiosidade intelectual, refletindo sobre a sua aprendizagem, propondo novas questões e explorando oportunidades de aprofundamento.

Domínio de avaliação	Nível	Descritor de desempenho
	Proficiente	• Participa na resolução de questões e problemas autênticos em contextos interdisciplinares, com orientação, reconhecendo ligações simples entre conceitos de STEAM (Ciências, Tecnologia, Engenharia, Artes e Matemática). • Desenvolve atividades em contextos diversificados, utilizando recursos tecnológicos, estratégias de modelação ou trabalho de projeto, com algum apoio na organização e execução. • Apresenta soluções e ideias criativas de forma guiada, refletindo de modo simples sobre a aplicabilidade ou relevância das suas propostas. • Trabalha com tarefas matemáticas enriquecedoras sob a forma de um problema, uma questão exploratória, um exercício de aplicação, um pequeno projeto ou uma pesquisa de aprofundamento. • Resolve tarefas matemáticas, aproveitando oportunidades para aplicar e ampliar conhecimentos, utilizando diferentes estratégias. • Revela atitudes positivas em relação à disciplina.

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS (ACPA)



Para trabalhar todos os Temas, Tópicos e Subtópicos matemáticos das AE das disciplinas de Matemática A, Matemática B, Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS) e Matemática para os Cursos Profissionais para o ensino secundário, foram selecionadas algumas das Áreas de Competência do *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (PA).

As AE para as disciplinas de Matemática A, Matemática B, MACS e Matemática para os Cursos Profissionais para o ensino secundário evidenciam as conexões das competências do PA com cada tema. A construção das próprias AE foi feita tendo em vista essa articulação, fornecendo pistas, que se pretende que sejam óbvias, para que o PA seja concretizado efetivamente na sala de aula.

Apresenta-se uma listagem exemplificativa das Áreas de competência do perfil dos alunos, em que é estabelecida uma ligação com os temas de aprendizagens matemáticas mais fortemente visados.

Linguagens e textos

Reconhece e utiliza linguagem simbólica.

Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática.

- Modelos Matemáticos para Cidadania (10.º ano)
- Geometria (10.º ano, 11.º ano)
- Funções (10.º ano, 11.º ano, 12.º ano)
- Matemática Discreta (11.º ano)
- Números Complexos (12.º ano)
- Probabilidade (12.º ano)
- Introdução à Inferência Estatística (12.º ano)
- Primitivas Imediatas e Integrais Definidos (12.º ano)
- Matrizes (12.º ano)

Informação e comunicação

Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avaliando, validando e organizando a informação recolhida.

Apresenta e explica conceitos em grupos, ideias e projetos diante de audiências reais, presencialmente ou a distância.

- Modelos Matemáticos para Cidadania (10.º ano)
- Estatística (10.º ano)
- Geometria (10.º ano)
- Funções (10.º ano, 11.º ano, 12.º ano)
- Números Complexos (12.º ano)

- Probabilidade (12.º ano)
- Introdução à Inferência Estatística (12.º ano)
- Primitivas Imediatas e Integrais Definidos (12.º ano)
- Matrizes (12.º ano)

Raciocínio e resolução de problemas

Coloca e analisa questões a investigar, distinguindo o que se sabe do que se pretende descobrir.

Gere projetos e toma decisões na resolução de problemas e analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas.

Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo.

- Modelos Matemáticos para Cidadania (10.º ano)
- Estatística (10.º ano)
- Geometria (10.º ano, 11.º ano)
- Funções (10.º ano, 11.º ano, 12.º ano)
- Matemática Discreta (11.º ano)
- Números Complexos (12.º ano)
- Probabilidade (12.º ano)
- Introdução à Inferência Estatística (12.º ano)
- Primitivas Imediatas e Integrais Definidos (12.º ano)
- Matrizes (12.º ano)

Pensamento crítico e pensamento criativo

Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões.

Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido, no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade.

- Modelos Matemáticos para Cidadania (10.º ano)
- Estatística (10.º ano)
- Geometria (10.º ano, 11.º ano)
- Funções (10.º ano, 11.º ano, 12.º ano)
- Matemática Discreta (11.º ano)
- Números Complexos (12.º ano)
- Probabilidade (12.º ano)
- Introdução à Inferência Estatística (12.º ano)
- Primitivas Imediatas e Integrais Definidos (12.º ano)
- Matrizes (12.º ano)

Relacionamento interpessoal

Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos.

- Modelos Matemáticos para Cidadania (10.º ano)
- Estatística (10.º ano)
- Funções (10.º ano, 11.º ano, 12.º ano)
- Números Complexos (12.º ano)
- Probabilidade (12.º ano)
- Introdução à Inferência Estatística (12.º ano)
- Primitivas Imediatas e Integrais Definidos (12.º ano)
- Matrizes (12.º ano)

Bem-estar, saúde e ambiente

Preocupa-se com a construção de um futuro sustentável e envolve-se em projetos de cidadania ativa.

- Modelos Matemáticos para Cidadania (10.º ano)
- Estatística (10.º ano)

Saber científico, técnico e tecnológico

Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão.

Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos.

- Modelos Matemáticos para Cidadania (10.º ano)
- Estatística (10.º ano)
- Geometria (10.º ano, 11.º ano)
- Funções (10.º ano, 11.º ano, 12.º ano)
- Matemática Discreta (11.º ano)
- Números Complexos (12.º ano)
- Probabilidade (12.º ano)
- Introdução à Inferência Estatística (12.º ano)
- Primitivas Imediatas e Integrais Definidos (12.º ano)
- Matrizes (12.º ano)

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

A disciplina de Matemática assume um papel estruturante nos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. As Aprendizagens Essenciais do 10.º ano integram uma vertente de formação matemática para a cidadania, em consonância com as restantes disciplinas de Matemática do ensino secundário. Esta vertente é concretizada nos temas Modelos Matemáticos para a Cidadania e Estatística. Além destes temas, no 10.º ano, os alunos estudam Geometria e Funções numa lógica de ampliar e aprofundar as abordagens do ensino básico.

No 11.º ano, as Aprendizagens Essenciais integram Geometria, Matemática Discreta e Funções. No tema Geometria inclui-se geometria analítica e vetorial e trigonometria. Na Matemática Discreta estudam-se técnicas de contagem e sucessões. O estudo das funções considera sempre a abordagem dos diferentes pontos de vista: gráfico, numérico e algébrico.

No 12.º ano é abordado o tema Números Complexos e são aprofundados os temas Probabilidade e Funções. A finalizar as Aprendizagens Essenciais do 12.º ano são propostos três temas em alternativa: Inferência Estatística, Primitivas Imediatas e Integrais Definidos e Matrizes. Deve ser escolhido um destes temas para cada turma da escola, podendo essa escolha variar de turma para turma. Se o tempo o permitir, pode ser trabalhado mais do que um tema opcional.

O trabalho de projeto assume uma dimensão relevante, surgindo explicitamente no 10.º ano e no 11.º ano. No 10.º ano, são sugeridas propostas de projetos nos temas Estatística, Modelos Matemáticos para a Cidadania, Geometria sintética e Funções. No 11.º ano, são sugeridas propostas de projetos nos temas Matemática Discreta (Sucessões), Geometria e Funções. Em cada um destes anos deverá ser desenvolvido pelo menos um dos projetos, podendo em alternativa ser desenvolvida outra proposta de trabalho, em qualquer tema que o professor considere adequado.

As Aprendizagens Essenciais relativas à Matemática A, dos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas, concretizam-se em três documentos distintos. A organização das Aprendizagens Essenciais, que a seguir se detalha, é apresentada em três áreas:

- Temas, Tópicos e Subtópicos matemáticos, em que são identificados os conceitos matemáticos a abordar;
- Objetivos de aprendizagem: conhecimentos, capacidades e atitudes que o aluno deve revelar, em que são concretizadas, para cada tópico matemático, as aprendizagens visadas, com a indicação do foco e da especificação preconizada;
- Ações estratégicas de ensino do professor, em que é clarificado o papel do professor e as indicações metodológicas que são consideradas adequadas para atingir os objetivos de aprendizagem definidos, bem como a sugestão de exemplos para a concretização das atividades a propor aos alunos; são também dadas indicações para clarificar os níveis de dificuldade que se consideram parte integrante destas Aprendizagens Essenciais.

Quando nas Aprendizagens Essenciais se refere o recurso a tecnologia gráfica, deve entender-se a utilização de folhas de cálculo ou qualquer versão de calculadora gráfica, física ou sob a forma de emulador, bem como o uso do Geogebra ou outro Ambiente de Geometria Dinâmica, nas suas diversas versões disponíveis em qualquer dispositivo digital. Considera-se também o recurso a aplicativos digitais específicos disponíveis na Internet ou em fóruns temáticos.

Para cada tema, são incluídas notas clarificadoras, nomeadamente no que se refere à sugestão de: atividades para o desenvolvimento do Pensamento Computacional, com recurso a exemplos; propostas de possíveis aprofundamentos de alguns temas ou de abordagens alternativas; referências bibliográficas, que incluem documentos e recursos para apoio ao trabalho do professor.

A ordem dos temas apresentados nestas Aprendizagens Essenciais constitui um exemplo de uma sequência que se considera adequada no âmbito do processo de gestão e desenvolvimento do currículo.

Na tabela abaixo, apresenta-se uma possível distribuição dos tempos letivos pelos tópicos das Aprendizagens Essenciais, tomando como referência vinte e oito semanas letivas, num total de trinta e duas ou trinta e três semanas previstas usualmente no calendário escolar. Considerou-se cada semana com cinco tempos letivos de cinquenta minutos.

Temas	Tópicos	Aulas (50 min)	Semanas
Modelos Matemáticos para a Cidadania	Modelos Matemáticos nas eleições	5	4
	Modelos Matemáticos na partilha	5	
	Modelos Matemáticos na partilha	10	
Estatística	Problema estatístico e População e amostra	2	6
	Dados univariados	15	
	Dados bivariados	8	
	[Trabalho de projeto]	5	
Geometria Sintética no plano	Pontos notáveis do triângulo	8	3
	Reta de Euler	4	
	Circunferência dos 9 pontos	3	
Funções	Generalidades acerca de funções	5	6
	Funções polinomiais de grau não superior a 2	20	
	Funções definidas por ramos	5	

Temas	Tópicos	Aulas (50 min)	Semanas
Geometria Analítica no plano e no espaço	Geometria Analítica no plano	15	9
	Geometria Analítica no espaço	10	
	Vetores no plano e no espaço	20	
		Total	28

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
Modelos Matemáticos para a Cidadania	Modelos Matemáticos nas eleições - reconhecer o papel da matemática na escolha de representantes em sistemas políticos e sociais; - perceber que existem Modelos Matemáticos que permitem criar procedimentos para transformar as preferências individuais numa decisão coletiva.	- Contribuir para o reconhecimento da necessidade da matemática para definir métodos eleitorais; - Contribuir para a clarificação da importância da participação de cada cidadão na eleição dos seus representantes (delegado de turma, associação de estudantes, estruturas sindicais e poderes políticos).
	Maioria simples e Maioria absoluta: identificar o vencedor de um processo eleitoral através de maioria simples e maioria absoluta.	- Promover a análise, a interpretação e a discussão de sistemas eleitorais que valorizem a existência de uma segunda volta, como é o caso da eleição do Presidente da República de Portugal, nomeadamente a referência à eleição presidencial de 1986; - Propor a construção de um programa simples em <i>Python</i>, de iniciação à linguagem, que permita determinar o número de votos que garante a maioria absoluta, sendo inseridas as votações em 3 candidatos.
	Método de Borda: identificar o vencedor de processos eleitorais que recorram a boletins de preferência (método de Borda).	- Propor a análise de situações que evidenciem claramente o facto de métodos eleitorais diferentes gerarem escolhas diferentes para a mesma votação, recorrendo a contextos eleitorais concretos, por exemplo: - eleição do delegado de turma; - eleição para a Associação de Estudantes; - eleições para os órgãos sociais de clubes desportivos;

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	Modelos Matemáticos na partilha Método de Hondt e Método de St. Laguë: - perceber que existem Modelos Matemáticos que permitem criar procedimentos para fazer distribuições proporcionais; - conhecer e aplicar o método de Hondt e o método de St. Laguë; - identificar vantagens e limitações dos métodos de Hondt e St. Laguë.	- Referir que todos os métodos eleitorais têm limitações, nomeadamente, encorajar o debate acerca de situações em que existe e em que não existe transitividade das escolhas. - Analisar com os alunos os contextos eleitorais das eleições autárquicas e das eleições para a Assembleia da República, suscitando a compreensão da necessidade de um método de partilha proporcional; - Incentivar os alunos a confirmar o processo da distribuição de mandatos num organismo local (eleições com um número reduzido de mandatos - até 6 mandatos); - Promover a exploração, com recurso à tecnologia gráfica (folha de cálculo), de distribuições de mandatos em cenários nacionais (eleições com um número elevado de mandatos, por exemplo, a distribuição de mandatos por círculo eleitoral); - Propor a análise de situações concretas que evidenciem claramente que métodos de partilha diferentes geram distribuições diferentes para a mesma eleição, por exemplo, as eleições europeias de 1987; - Promover a análise de casos em outras situações, por exemplo, a distribuição de um número de computadores por departamentos com diferentes dimensões; - Promover discussões sobre problemas de partilha, identificando os Modelos Matemáticos que contribuem para as diversas soluções e as limitações na sua aplicação.

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	Modelos Matemáticos em finanças Matemática nos salários: ▪ calcular o valor dos salários mensal, anual e por hora, dadas as condições de um contrato; ▪ reconhecer as diferenças entre salário bruto e salário líquido; ▪ calcular contribuições obrigatórias para sistemas de segurança social; ▪ calcular a retenção na fonte para IRS; ▪ calcular o IRS anual em casos simples em função do rendimento coletável; ▪ compreender o carácter provisório da taxa mensal de retenção na fonte (IRS); ▪ identificar a progressividade do IRS e a relevância dos escalões.	▪ Dinamizar a realização de simulações relacionadas com processamento de salários (em que sejam utilizados os conceitos de vencimento líquido, salário bruto, abonos e descontos), promovendo a construção de uma folha de cálculo. ▪ Sugerir em grande grupo: ▪ uma discussão que inclua a identificação de diferentes formas de referência aos rendimentos e dificuldades de comparação (por exemplo: rendimento anual, salário mensal, rendimento por hora); ▪ a análise de exemplos relacionados com o processamento dos vencimentos (por exemplo: recibos); ▪ a pesquisa e análise de tabelas de IRS, identificação dos escalões aplicáveis e discussão sobre a progressividade deste imposto.
	Matemática na poupança e no crédito: ▪ calcular o juro simples e o juro composto (com diferentes períodos de capitalização dos juros).	▪ Promover, com recurso à tecnologia, o cálculo de juros simples e compostos em diferentes situações; ▪ Promover a aplicação da fórmula $j = Ci \times r \times n$ para o cálculo do juro simples (Ci = capital inicial, r = taxa de juro anual e n = número de anos) e da fórmula de cálculo de juro composto $Cf = Ci \times (1 + r)^n$ (Ci = capital inicial, Cf = capital final, r = taxa de juro anual e n = número de anos);

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
		▪ Para uma capitalização mensal, dada a taxa anual r, aplicar a fórmula $Cf = Ci \times \left(1 + \frac{r}{12}\right)^n$, em que n é o número de meses; ▪ Propor a construção de um programa simples em <i>Python</i> que permita determinar o cálculo de juros simples e o cálculo de juros compostos; ▪ Analisar a rentabilidade de diferentes depósitos a prazo, durante um prazo predefinido, recorrendo à folha de cálculo e ao uso de simuladores disponíveis na Internet; ▪ Promover, em casos simples, o cálculo de: ▪ capital inicial a depositar para, ao fim de um dado tempo, ter um certo capital final com uma taxa de juro fixa; ▪ tempo mínimo de capitalização, dados os capitais inicial e final e a taxa de juro.

Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor nos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser encorajados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer a ordem entre eles.

Antes de redigir o programa na linguagem *Python*, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Exemplo de programa em *Python* que permite determinar o número de votos que garante a maioria absoluta, sendo inseridas as votações de 3 candidatos (270 para o candidato A, 153 votos para o candidato B e 201 votos para o candidato C).

```
cA=270
cB=153
cC=201
ma=int((cA+cB+cC)/2)+1
```

```
print(ma)
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

A conclusão é que, para obter maioria absoluta, são precisos *ma* votos. Algum dos candidatos ultrapassou esse valor?

Numa possível extensão a este programa, poderá verificar-se se algum dos candidatos obteve maioria absoluta.

Exemplo de programa em *Python* que permite, sendo inseridas as votações de 3 candidatos, determinar o número de votos que garante a maioria absoluta e verificar se algum dos candidatos obteve essa maioria.

```
cA=int(input("N.º de votos do candidato A:"))
cB=int(input("N.º de votos do candidato B:"))
cC=int(input("N.º de votos do candidato C:"))
ma=int((cA+cB+cC)/2)+1
print("Serão necessários pelo menos",ma,"votos para obter maioria absoluta.")
if cA>=ma:
    print("O candidato A obteve maioria absoluta com",cA,"votos.")
elif cB>=ma:
    print("O candidato B obteve maioria absoluta com",cB,"votos.")
elif cC>=ma:
    print("O candidato C obteve maioria absoluta com",cC,"votos.")
else:
    print("Nenhum dos candidatos obteve maioria absoluta.")
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Em alternativa à folha de cálculo, as simulações referentes à distribuição de mandatos pelo método de Hondt poderão ser realizadas através de pequenos programas em *Python*, procurando, por exemplo, o número mínimo e máximo de votos para um partido obter um número predeterminado de lugares (por exemplo, todos os mandatos serem atribuídos ao mesmo partido). Uma simulação do método de Hondt pode ser encontrada em: <https://www.sg.mai.gov.pt/AdministracaoEleitoral/MetodoHondt/Paginas/default.aspx>

Podem propor-se vários tipos de programas em *Python* para concretizar os Modelos Financeiros; por exemplo, o cálculo de uma capitalização anual ou de uma capitalização mensal, dado um capital inicial.

Exemplo de programa em *Python* para calcular a capitalização anual, dado um capital inicial:

```
ci=1000    #valor inicial
r=0.03     #taxa de juro anual
cf=ci+ci*r
print('O capital final é ',cf,'€')
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Exemplo de programa em *Python* para calcular a capitalização mensal passados n meses, dado um capital inicial:

```
ci=300      #valor inicial
r=0.03      #taxa de juro anual
n=10        #número de períodos de capitalização
cf=ci*(1+r/12)**n
print('O valor final ao fim de ',n,' meses é', cf,'€')
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Como possíveis alterações a este programa sugere-se a variação da periodicidade e do número de períodos de capitalização.

Possíveis aprofundamentos

Se for possível e oportuno, poderão ser abordados outros métodos eleitorais, por exemplo, o método de Condorcet e a sua alegada proposta (em 1888) de um método eleitoral superior a todos os outros.

Exemplo de um caso interessante a estudar: a mudança do uso da maioria simples para a maioria absoluta ao longo dos anos, na Ordem dos Médicos e na Ordem dos Advogados.

Também pode ser feita a comparação com o método usado nas eleições para a Ordem dos Enfermeiros, em que a lista vencedora é a que obtiver mais votos, sem exigência de maioria absoluta (e só com uma volta). Neste último caso, pode ser consultada a página <https://www.ordemenfermeiros.pt/arquivo/comunicacao/Paginas/ProclamacaoEleicoes>, em que se encontra a proclamação dos resultados definitivos das Eleições de 12 de dezembro de 2011.

Avaliação financeira de um projeto de investimento, através do cálculo do valor atual de fluxos financeiros futuros previstos.

Cálculo das prestações constantes em empréstimos e comparação com os simuladores em sites de bancos e empresas financeiras.

Para os alunos de Ciências Socioeconómicas, será recomendável que se fomentem as conexões com assuntos e conceitos da disciplina de Economia.

Bibliografia de referência

Aspas, R. (2020). *Tipos de impostos: diretos e indiretos*. Doutor Finanças. Recuperado de <https://www.doutorfinancas.pt/financas-pressoais/impostos-em-portugal-diretos-e-indiretos/>

Batista, A. S. (2014). *Matemática financeira: O valor do dinheiro ao longo do tempo*. Vida Económica.

Chalub, F. (2019). O ano de todas as eleições. *Gazeta de Matemática*, (188), 9-11.

Comissão Nacional de Eleições. (s.d.). *Eleições / Referendos*. Recuperado de <https://www.cne.pt/content/eleicoes-referendos>

Comissão Nacional de Eleições. (s.d.). *Método de Hondt*. Recuperado de <https://www.cne.pt/content/metodo-de-hondt>

COMAP. (2016). *For all practical purposes: Mathematical literacy in today's world*. W. H. Freeman and Company.

Conselho Nacional de Supervisores Financeiros. (2016). *Plano Nacional de Formação Financeira 2016-2020*. Banco de Portugal.

Domingos, A., Santiago, A., & Teixeira, P. (2017). Materiais para a aula de Matemática - Perfis financeiros. *Educação & Matemática*, (142), 13-14.

Feiteira, R. (2007). O que têm em comum a eleição de um delegado de turma e as eleições legislativas? *Gazeta de Matemática*, (152), 32-37.

Feiteira, R. (2008). Alguns métodos eleitorais através do Excel. *Educação & Matemática*, (96), 29-33.

Gonçalves, D. (2019). *Quais os impostos cobrados na compra de uma casa?* Doutor Finanças. Recuperado de <https://www.doutorfinancas.pt/creditos/credito-habitacao/quais-os-impostos-cobrados-na-compra-de-uma-casa/>

Júnior, I. M. (2021). *Educação financeira*. IMPA. Recuperado de <https://umlivroaberto.org/producao/educacao-financeira/>

Lopes, A. V., & Moreirinha, O. (2004). Materiais para a aula de Matemática - Métodos de apoio à decisão: Plínio, o jovem. *Educação & Matemática*, (79), 25.

Lopes, A. V., et al. (2002). Materiais para a aula de Matemática - Eleições para a Presidência da República - 1986. *Educação & Matemática*, (67), 34-35.

Machado, H. A. (2011). *A literacia financeira da população escolar em Portugal: Estudo aplicado a alunos do ensino secundário da região de Lisboa* [Dissertação de mestrado, Universidade Técnica de Lisboa].

Malkevitch, J. (1999). *Teoria matemática das eleições* (tradução portuguesa do DES). COMAP. Recuperado de <https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online>

Ministério da Educação e Ciência. (2013). *Referencial de Educação Financeira para a Educação Pré-Escolar, o Ensino Básico, o Ensino Secundário e a Educação e Formação de Adultos*. Recuperado de https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/referencial_de_educacao_financeira_final_versao_port.pdf

Nascimento, N. H. A. (2015). *Matemática e educação financeira: Um estudo de caso do ensino secundário* [Dissertação de mestrado, Universidade Nova de Lisboa]. Repositório da Universidade Nova. <http://hdl.handle.net/10362/16356>

Pinto, D. V., & Domingos, A. (2015). A educação financeira para uma eficaz contenção do consumo. In *Atas do 2.º Seminário de Investigação em Educação Financeira Escolar e Educação Matemática* (p. 121). Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia; Unidade de Investigação e Desenvolvimento.

Pordata & RTP. (2015). *O que é a dívida pública?* Recuperado de <https://ensina.rtp.pt/artigo/o-que-e-a-divida-publica/>

Pordata & RTP. (2015). *O que são impostos diretos e indiretos?* Recuperado de <https://ensina.rtp.pt/artigo/o-que-sao-impostos-diretos-e-indiretos/>

Ribeiro, E. M. C. (2013). *Literacia financeira: Estudo aplicado aos alunos do 3.º ciclo do ensino básico e secundário* [Dissertação de mestrado, Universidade Portucalense Infante D. Henrique].

Rodrigues, A., & Pimenta, C. (2017). Literacia financeira - Construção do conhecimento matemático (uma experiência de ensino com alunos do 12.º ano de escolaridade). In *CIBEM 2017 - Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática* (pp. 74-84). Universidade Complutense.

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
Estatística	Problema estatístico Variabilidade: - reconhecer o papel relevante desempenhado pela Estatística em todos os campos do conhecimento; - reconhecer a variabilidade como um conceito-chave de um problema estatístico; - conhecer e interpretar situações do mundo que nos rodeia em que a variabilidade está presente.	- Promover a discussão na turma para identificar e formular questões estatísticas, cujas respostas dependam da recolha de dados; - Propor a discussão de situações do mundo real envolvente em que a variabilidade está presente. Por exemplo, um político questiona se valerá a pena candidatar-se às próximas eleições autárquicas para o seu concelho; o diretor de um agrupamento escolar questiona a percentagem de alunos que almoçam diariamente na escola; um padeiro questiona quantos pães deve fazer por dia; o gerente de uma fábrica têxtil questiona qual o tamanho das camisas em que deverá investir.
	População, amostra e variável Identificar, num estudo estatístico, população, amostra e a(s) característica(s) a estudar, que se designa(m) por variável (variáveis).	- Alertar que os termos população e amostra se referem a conjuntos de unidades estatísticas, mas que estes termos também são usados para identificar os conjuntos de valores assumidos pela variável em estudo; - Propor a recolha de informação nos jornais ou na Internet sobre notícias que permitam diferenciar os processos de recenseamento e sondagem (recolher dados sobre toda a população ou sobre uma amostra): - identificar exemplos de amostras enviesadas, nomeadamente amostras por conveniência e por resposta voluntária; - identificar exemplos de amostras enviesadas, nomeadamente amostras por conveniência e por resposta voluntária.

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	Fases de um procedimento: - reconhecer as fases de um procedimento estatístico: - produção ou aquisição de dados; - organização e representação de dados; - interpretação tendo por base as representações obtidas; - reconhecer os métodos existentes para a seleção de amostras, no sentido de que estas sejam representativas das populações subjacentes, e de modo a evitar amostras enviesadas, cujo estudo levaria a extrair conclusões erradas para as populações; - intuir que os problemas estatísticos em que se recorre a amostras para inferir para a população subjacente não têm uma solução matemática única que se possa exprimir como verdadeiro ou falso.	- Alertar para a necessidade de recolha de dados reais como forma de responder a questões concretas; - Promover a discussão sobre a dimensão da amostra a recolher, informando que esta dimensão depende muito da variabilidade presente na população subjacente e que deverá ser tanto maior quanto maior for a dimensão da população. Informar que existem técnicas para definir quais as dimensões mínimas para garantir a precisão dos processos em que se pretende inferir para a população as propriedades verificadas na amostra. Chamar a atenção para o facto de existirem processos apropriados para a seleção das amostras, de forma a garantir a aleatoriedade e a representatividade da população subjacente; - Informar que a utilização da probabilidade vai permitir tomar uma decisão para a população, a partir do estudo da amostra, quantificando o erro cometido ou o grau de confiança nessa decisão, exemplificando com o modo como se comunica o resultado de uma sondagem eleitoral.
	Dados univariados Dados quantitativos discretos ou contínuos: identificar dados quantitativos discretos ou contínuos.	Informar que, quando se está a recolher dados quantitativos, isto é, a “medir” a variável em estudo sobre as unidades estatísticas selecionadas para a amostra, nos confrontamos com duas situações: ou a variável assume um número finito ou infinito numerável de valores distintos, caso em que se diz discreta, e a observação assume a forma de uma contagem; ou

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
		a variável pode assumir qualquer valor num intervalo em $\mathbb{R}$, caso em que se diz contínua, e a observação assume a forma de uma medição; ▪ Salientar que a natureza dos dados não é uma característica necessariamente inerente à variável em estudo, porque pode depender da forma como é medida. Exemplificar com a variável Idade que é de tipo contínuo e que pode ser utilizada de forma discreta (10, 15, 23, ...), e com uma peça de roupa, cujo “tamanho” é uma variável contínua, mas é frequentemente classificada em categorias (XS, S, M, L, XL, ...), isto é, dados de tipo qualitativo.
	Organização de dados: ▪ organizar e representar a informação contida em dados quantitativos discretos e contínuos em tabelas de frequências absolutas, absolutas acumuladas, relativas e relativas acumuladas, e interpretá-las; ▪ selecionar representações gráficas adequadas para cada tipo de dados, identificando vantagens/inconvenientes, lembrando a construção de gráficos de barras, diagramas de caule-e-folhas e diagramas de extremos-e-quartis.	▪ Promover a utilização da tecnologia para construir tabelas e gráficos. ▪ Realçar a utilidade do diagrama de caule-e-folhas para uma ordenação rápida dos dados e salientar a importância do diagrama de extremos-e-quartis para comparar várias distribuições de dados.

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	Histograma: - reconhecer que o histograma é um diagrama de áreas, e que para a sua construção é necessária uma organização prévia dos dados em classes na forma de intervalos; - construir histogramas, considerando classes com a mesma amplitude.	- Salientar que o aspeto do histograma depende do número de classes considerado, da amplitude de classe e do ponto onde se começa a considerar a construção da primeira classe (discutir com os alunos o que se entende por um número adequado de classes, chamando a atenção para o facto de que uma representação com muitas classes apresentar muita da variabilidade presente nos dados, não conseguindo fazer sobressair o padrão que se procura, enquanto um número muito pequeno de classes esconderá esse padrão); - Salientar a importância do gráfico de barras e do histograma para uma posterior seleção do modelo da população subjacente à amostra, respetivamente discreto ou contínuo.
	Medidas de localização: interpretar as medidas de localização: média ($\bar{x}$), mediana (M_e), moda(s) (M_o) e percentis (quartis como caso especial) na caracterização da distribuição dos dados, relacionando-as com as representações gráficas obtidas.	Incentivar a utilização da tecnologia para o cálculo das diversas medidas, em particular quando a dimensão da amostra é razoavelmente grande, não negligenciando antecipadamente o cálculo dessas medidas, usando papel e lápis para amostras de dimensão reduzida.
	Medidas de dispersão: interpretar as medidas de dispersão, amplitude, amplitude interquartil e desvio	Propor a elaboração de um programa simples em <i>Python</i> que permita recolher as idades de, por exemplo, 5 alunos de uma turma na disciplina de Matemática, organizá-las sob a forma de uma lista, retornando a média, a mediana, o máximo e o mínimo.

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	padrão amostral, s, (variância amostral s^2) na caracterização da distribuição dos dados, relacionando-as com as representações gráficas obtidas. Propriedades das medidas: - interpretar e mostrar analiticamente as alterações provocadas na média por transformação dos dados pela multiplicação de cada um por uma constante “a” e pela adição de uma constante “b”; - compreender os conceitos e as seguintes propriedades das medidas: - pouca resistência da média e do desvio padrão; - soma dos desvios dos dados relativamente à média é igual a zero; - desvio padrão é igual a zero se e só se todos os dados forem iguais; - amplitude interquartil igual a zero não implica a não existência de variabilidade; - conhecer que se os dados forem fornecidos já agrupados em classes, na forma de intervalos, se torna necessário adequar as fórmulas ou os procedimentos existentes para dados não	- Promover a utilização da tecnologia para explorar as propriedades das medidas, nomeadamente as alterações provocadas nas medidas de localização e dispersão por transformação dos dados pela multiplicação de cada um por uma constante “a” e pela adição de uma constante “b”. Realçar a utilização enganadora da média, em casos em que existem outliers (dados muito diferentes do padrão dos restantes), devido à grande influência desses dados; - Incentivar os alunos a interpretar os conceitos e as propriedades das medidas, privilegiando a sua compreensão, em detrimento do uso de fórmulas e de procedimentos para as calcular. Por exemplo, depois de compreender o conceito de percentil, utilizar a função cumulativa ou as tabelas de frequências relativas acumuladas para calcular valores aproximados dessas medidas; - Promover a utilização da tecnologia para determinar os percentis, e exemplificar a sua utilização com as tabelas de crescimento da Direção-Geral de Saúde (https://www.dgs.pt/upload/membro.id/ficheiros/i007811.pdf), relacionando o “peso” e a “estatura” com a “idade”; - Promover a elaboração de um programa em Python para permitir o cálculo da amplitude e do desvio padrão e estudar as propriedades dessas medidas, efetuando alterações nos dados;

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	agrupados, de modo a obter valores aproximados da média e do desvio padrão; - reconhecer que existem situações em que é preferível utilizar, como medida de localização do centro da distribuição dos dados, a mediana em vez da média, e como medida de dispersão a amplitude interquartil em vez do desvio padrão, apresentando exemplos simples; - reconhecer que algumas representações gráficas são mais adequadas que outras para comparar conjuntos de dados, nomeadamente o diagrama de extremos e quartis, para comparar a distribuição de dois ou mais conjuntos de dados, realçando aspetos de simetria, dispersão, concentração, etc.	Conduzir os alunos na interpretação das representações gráficas e das medidas, no contexto do problema que levou à recolha dos dados.
	Dados bivariados Dados quantitativos: reconhecer que, para estudar a associação entre duas variáveis quantitativas de uma população, se observam essas variáveis sobre cada unidade estatística, obtendo-se uma amostra de pares de dados.	Conduzir os alunos a explorar situações em que tenha interesse estudar a associação entre duas variáveis sobre as mesmas unidades estatísticas.

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	Diagrama de dispersão: reconhecer a importância da representação dos dados no diagrama de dispersão, nuvem de pontos, para interpretar a forma, a direção e a força da associação (linear) entre as duas variáveis.	Envolver os alunos na discussão sobre a construção do diagrama de dispersão, em especial na identificação da variável independente ou explanatória. Por exemplo, pretendendo-se estudar a associação entre as variáveis “idade” e “altura”, a variável independente ou explanatória deverá ser a “idade” e a variável “altura” deverá ser a variável dependente ou resposta.
	Coefficiente de correlação linear: identificar o coeficiente de correlação linear r, como medida dessa direção e grau de associação (linear), e saber que assume valores pertencentes a $[-1,1]$, dizendo-se com base nesse valor que a correlação é positiva, negativa ou nula; recorrer à tecnologia para proceder ao cálculo do coeficiente de correlação linear.	- Apresentar a expressão do coeficiente de correlação e utilizá-la para interpretar a associação linear entre as variáveis como positiva, negativa ou nula; - Realçar que o coeficiente de correlação só assume os valores -1 ou 1, quando os pontos no diagrama de dispersão estão alinhados numa reta.
	Reta de regressão - variável independente ou explanatória e variável dependente ou resposta:	- Realçar e exemplificar que a correlação linear só mede a associação linear entre as variáveis, já que o coeficiente de correlação pode ser próximo de zero e as variáveis estarem fortemente correlacionadas, não linearmente; - Realçar que só no caso de se visualizar uma associação aproximadamente linear entre os pontos do diagrama de

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	- compreender que, no caso do diagrama de dispersão mostrar uma forte associação linear entre as variáveis, essa associação pode ser descrita pela reta de regressão ou reta dos mínimos quadrados; utilizar a tecnologia para determinar uma equação da reta de regressão; - compreender que, na construção da reta de regressão, não é indiferente qual das variáveis é que se considera como variável independente ou explanatória; - compreender que a existência de <i>outliers</i> influencia estes procedimentos; - utilizar a reta de regressão para inferir o valor da variável dependente ou resposta, para um dado valor da variável independente ou explanatória, quando existe uma forte associação linear entre as variáveis, quer positiva, quer negativa, e desde que este esteja no domínio dos dados considerados; - compreender que não se pode confundir correlação com relação causa-efeito, pois podem existir variáveis “perturbadoras” que podem provocar uma aparente associação entre as variáveis em estudo.	dispersão é que faz sentido utilizar a tecnologia para calcular o coeficiente de correlação, bem como construir a reta de regressão; - Comentar com os alunos a razão de se chamar à reta de regressão, reta dos mínimos quadrados; - Propor a construção da reta de regressão, recorrendo à tecnologia, e explorar a forma como é afetada por <i>outliers</i>; - Exemplificar com os chamados “conjuntos de dados de Anscombe”, que, embora apresentem as mesmas características amostrais, têm representações gráficas muito diferentes, realçando a importância de uma visualização prévia dos dados antes de proceder ao cálculo do coeficiente de correlação ou à construção da reta de regressão; - Explorar o modelo da reta de regressão no contexto do estudo, nomeadamente inferindo valores da variável resposta para determinados valores para a variável explanatória; - Propor a pesquisa na Internet de situações em que existem variáveis “perturbadoras”.
	Gráfico de linhas:	

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	entender que um gráfico de linhas é um caso particular de um diagrama de dispersão, em que se pretende estudar a evolução de uma das variáveis relativamente a outra variável, geralmente o tempo, e em que se unem, por linhas, os pontos representados.	Promover a exploração de alguns exemplos concretos de gráficos de linhas, como a evolução da temperatura medida numa determinada hora, ao longo de um mês, em determinado local.
	Aprofundamento do estudo de Estatística com trabalho de projeto (*) - aplicar e aprofundar conceitos e processos associados à Estatística num problema contextualizado, desenvolvendo competências de representação e comunicação matemática; - desenvolver hábitos de pesquisa; - Interpretar, de forma crítica, informação, modelos e processos; - conhecer, aplicar e construir modelos presentes na Estatística, tirando partido da tecnologia; - desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.	- Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões). - Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório; - Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia; - Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta; - Estimular a discussão do tema de cada investigação, que pode ser escolhido de entre uma lista de opções, como por exemplo: - A minha região em números! O que dizem os Censos 2021...; - A nossa Cantina Escolar em números! - Papel da Mulher na Sociedade;

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
		Alterações climáticas. Os negacionistas têm razão ou há estatísticas a provar que não?

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
		- Como estão os nossos oceanos? (Plasticus maritimus, Planeta tangerina, ...); - Somos oito mil milhões. Como estamos distribuídos? - Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática, ou o recurso à programação, sempre que for considerado relevante.
(*) Este tópico pode ser substituído por tópico idêntico noutros temas do 10.º ano, tal como é exemplificado nas propostas apresentadas abaixo.		

Pensamento Computacional

Exemplo de programa em *Python* que permite calcular a média, a mediana, o máximo e o mínimo das idades de 5 alunos de uma turma:

```
idades=[14,16,14,15,17]
idades.sort()
soma=0
for i in range(5):
    soma=soma+idades[i]
print('Idades:',idades)
print('Media:',soma/5)
print('Mediana:',idades[2])
print('Máximo:',idades[4])
```

```
print('Mínimo:', idades[0])
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Como possível extensão poderá propor-se aos alunos uma generalização do programa de modo que a dimensão da lista possa ser variável. Sugere-se a utilização da função *len()*, que permitirá determinar o número de elementos da lista.

Exemplo de programa em *Python* que permita determinar o desvio-padrão e a amplitude de uma lista de idades com um número de elementos variável:

```
idades=[14,16,14,15,17,23]
idades.sort()
n=len(idades)
soma=0
for i in range(n):
    soma=soma+idades[i]
media=soma/n
desvios=0
for i in range(n):
    desvios = desvios + (idades[i]-media)**2
desvio_padrao=math.sqrt(desvios/n)
amplitude=idades[n-1]-idades[0]
print('Desvio padrao:', desvio_padrao)
print('Amplitude:', amplitude)
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Possíveis aprofundamentos

Explorar a utilização de tabelas de contingência (tabelas de dupla entrada) para representar amostras de dados bivariados qualitativos. Ter em consideração que, embora se fale de dados qualitativos, eles podem ser resultado da observação de variáveis quantitativas (Exemplo: a variável *Idade*, que é quantitativa contínua, mas em que os dados podem ser apresentados em classes etárias, ou a variável *Tamanho de uma camisola*, que pode ser medida nas categorias XS, S, M, L, XL, 2XL ou 3XL). Considerar as distribuições marginais e as distribuições condicionais e explorar a possível associação entre as variáveis. Utilizar representações gráficas adequadas.

Explorar, no contexto da correlação, a existência de variáveis “perturbadoras”, exemplificando.

Explorar diferentes tipos de amostragem que conduzam a amostras representativas das populações subjacentes, por oposição a processos que conduzam a amostras enviesadas.

Bibliografia de referência

ActivAlea. (s.d.). *Associação entre variáveis qualitativas*. Recuperado de http://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=270&Itemid=1653&lang=pt

ActivAlea. (s.d.). *Associação entre variáveis quantitativas: O coeficiente de correlação*. Recuperado de http://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=272&Itemid=1651&lang=pt

ALEA. (s.d.). *Noções de estatística*. Recuperado de https://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=131&Itemid=1203&lang=pt

COMAP. (2016). *For all practical purposes: Mathematical literacy in today's world*. W. H. Freeman and Company.

Graça Martins, M. E. (2005). *Introdução à probabilidade e à estatística, com complementos de Excel*. Sociedade Portuguesa de Estatística.

Graça Martins, M. E., & Cerveira, A. (1998). *Introdução às probabilidades e à estatística*. Universidade Aberta.

Graça Martins, M. E., Cerveira, A., & outros. (1997). *Estatística*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Graça Martins, M. E., & Loura, L. (2002). *Estatística, modelos de probabilidade e introdução à inferência estatística* (edição da responsabilidade do DES). Recuperado de <https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online>

Grupo de Trabalho T3. (1999). *Estatística e calculadoras gráficas*. Associação de Professores de Matemática.

Martins, H., & Domingos, A. (2018). *Estatística no secundário com calculadora gráfica*. Nova FCT Editorial.

Moore, D. S. (2019). *Statistics: Concepts and controversies*. W. H. Freeman and Company.

Moore, D. S., McCabe, G. P., Craig, B. A., & Alwan, L. C. (2021). *The basic practice of statistics*. W. H. Freeman and Company.

Rossmann, A. J., Chance, B. L., & Medina, E. (2011). *Workshop statistics: Discovery with data*. Wiley.

Vigen, T. (s.d.). *Correlações espúrias*. Recuperado de <http://tylervigen.com/spurious-correlations>

Proposta 1

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
Aprofundamento do estudo de Modelos Matemáticos para a Cidadania com trabalho de projeto	▪ aplicar e aprofundar conceitos e processos associados aos Modelos Matemáticos para a Cidadania num problema contextualizado, desenvolvendo competências de representação e comunicação matemática; ▪ desenvolver hábitos de pesquisa; ▪ Interpretar, de forma crítica, informação, modelos e processos; ▪ conhecer, aplicar e criar Modelos Matemáticos importantes para a Cidadania, tirando partido da tecnologia; ▪ desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.	▪ Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões); ▪ Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório; ▪ Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia; ▪ Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta; ▪ Estimular a discussão do tema de cada investigação, que pode ser escolhido de entre uma lista de opções, por exemplo: ▪ Eleições com círculos eleitorais uninominais ou regionais versus um círculo nacional único; ▪ Casos concretos de eleições com colégio eleitoral (Estados Unidos da América, Estónia, Índia,...);

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
		▪ Eleições com dados “falsificados” (Lei de Benford); ▪ Estudo de diferentes modos de eleger uma Associação de Estudantes, um delegado ou um subdelegado das turmas da escola; ▪ Análise de um projeto de investimento, através do cálculo do valor atual de fluxos financeiros futuros previstos; ▪ Cálculos das prestações constantes em empréstimos e comparação com os simuladores em sites de bancos e empresas financeira; ▪ Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática, ou o recurso à programação, sempre que for considerado relevante.

Proposta 2

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
Aprofundamento do estudo de Geometria Sintética com trabalho de projeto	▪ aplicar e aprofundar conceitos e processos associados aos Modelos Matemáticos para a Cidadania num problema contextualizado, desenvolvendo competências de representação e comunicação matemática; ▪ desenvolver hábitos de pesquisa; ▪ Interpretar, de forma crítica, informação, modelos e processos;	▪ Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões); ▪ Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório; ▪ Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia;

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	- conhecer, aplicar e criar Modelos Matemáticos importantes para a Cidadania, tirando partido da tecnologia; - desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.	- Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta; - Estimular a discussão do tema de cada investigação, que pode ser escolhido de entre uma lista de opções, como por exemplo: - Exploração da Enciclopédia de pontos notáveis de um triângulo; - Secções num cubo; - Sólidos platónicos e sólidos arquimedianos; - Poliedros estrelados; - Estudo do primeiro livro dos Elementos de Euclides. - Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática sempre que for considerado relevante.

Proposta 3

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
Aprofundamento do estudo de Funções com trabalho de projeto	- aplicar e aprofundar conceitos e processos associados aos Modelos Matemáticos para a Cidadania num problema contextualizado, desenvolvendo competências de representação e comunicação matemática; - desenvolver hábitos de pesquisa;	- Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões); - Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório; - Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia;

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	▪ Interpretar, de forma crítica, informação, modelos e processos; ▪ conhecer, aplicar e criar Modelos Matemáticos importantes para a Cidadania, tirando partido da tecnologia; ▪ desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.	▪ Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta; ▪ Estimular a discussão do tema de cada investigação, que pode ser negociado ou escolhido de entre uma lista de opções, como por exemplo: ▪ Funções e gráficos de funções na comunicação social; ▪ Funções ao longo da história (Oresme, Kepler, Newton, ...); ▪ Modelação de funções a partir de dados recolhidos com sensores; ▪ Modelação de funções a partir de dados consultados na Internet (Pordata, INE, OCDE, UNESCO, ...); ▪ Funções associadas às viagens espaciais (Projeto ARTEMIS, Projeto DART, ...); ▪ Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática, ou o recurso à programação, sempre que for considerado relevante.

Bibliografia de referência (trabalhos de projeto)

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projeto e a relação dos alunos com a matemática: A experiência do projeto MAT789* [Tese de doutoramento, Associação de Professores de Matemática].

Amado, N., & Carreira, S. (2019). *Trabalho de projeto*. Recuperado de <http://hdl.handle.net/10400.1/15482>

George Lucas Educational Foundation. (2021). *Project-based learning (PBL)*. Recuperado de <https://www.edutopia.org/project-based-learning>

Mestre, A. P. (2011). *Histórias com matemática: Trabalho de projeto no 2.º ciclo do ensino básico* [Dissertação de mestrado]. Recuperado de <http://hdl.handle.net/10400.1/6872>

Ponte, J. P., Brunheira, L., Abrantes, P., & Bastos, R. (1998). *Projetos educativos: Matemática - ensino secundário*. Ministério da Educação.

Consulta pública 2026

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
Geometria	Geometria sintética no plano Pontos notáveis do triângulo: - Incentro - Circuncentro - Ortocentro - Baricentro ▪ definir e caracterizar: ▪ incentro e circunferência inscrita (com demonstração); ▪ circuncentro e circunferência circunscrita (com demonstração); ▪ ortocentro; ▪ baricentro. ▪ conhecer propriedades das medianas e do baricentro: ▪ as três medianas dividem o triângulo em seis triângulos equivalentes (com demonstração); ▪ a distância do baricentro a qualquer dos vértices é $\frac{2}{3}$ da mediana respetiva (com demonstração); ▪ o baricentro é o centro de massa (gravidade, geométrico) de um triângulo.	▪ Promover explorações e construções a realizar pelos alunos, envolvendo pontos notáveis do triângulo, usando geometria dinâmica, para resolver problemas, perceber os conceitos, formular conjecturas, visualizar e testar propriedades. ▪ Desenvolver nos alunos o gosto pela argumentação em geral e pela demonstração como elemento central da matemática, por exemplo, a propósito da circunferência inscrita e da circunferência circunscrita.

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	localizar os pontos notáveis em triângulos equiláteros, isósceles e escalenos e em triângulos acutângulos, retângulos e obtusângulos.	Propor a resolução de problemas com pontos notáveis do triângulo, envolvendo os alunos em investigações/explorações (em pequenos grupos), visando a elaboração de pequenos relatórios, composições, pósteres ou outros.
	Reta de Euler e Circunferência dos nove pontos: verificar a existência da reta de Euler e da circunferência dos nove pontos.	- Propor a construção da reta de Euler e da circunferência dos nove pontos, usando geometria dinâmica, permitindo aos alunos a exploração de situações extremas da localização dos pontos notáveis, por exemplo: num triângulo equilátero os quatro pontos notáveis são coincidentes; num triângulo retângulo, o ortocentro coincide com o vértice do ângulo reto; num triângulo obtusângulo o circuncentro é exterior ao triângulo; - Exibir relações métricas entre os pontos notáveis, por exemplo: a distância do ortocentro ao baricentro é o dobro da distância do baricentro ao circuncentro; o centro da circunferência de nove pontos é o ponto médio do segmento definido pelo circuncentro e pelo ortocentro; o raio da circunferência de nove pontos é metade do raio da circunferência circunscrita.

Possíveis aprofundamentos

Poderão ser abordados outros temas para aprofundamento:

- estender o estudo a, pelo menos, outro ponto notável, envolvendo os alunos em atividades exploratórias com geometria dinâmica. Alguns exemplos de pontos notáveis: ponto de Fermat (ou ponto de Torricelli), ponto de Nagel, ponto de Miquel, ponto de Feuerbach, ponto de Gergonne (referência à Enciclopédia de pontos notáveis de um triângulo);
- resolver problemas das Olimpíadas de Matemática que envolvem pontos notáveis do triângulo;

- propor a elaboração de composições matemáticas sobre: a Geometria na “República”, de Platão; a Geometria dos ORIGAMI; a Geometria dos templos japoneses.

Bibliografia de referência

ATRACTOR. (s.d.). *Triângulos belos*. Recuperado de https://www.atractor.pt/mat/triangulos_belos/

Caraça, B. J. (1998). *Conceitos fundamentais da matemática*. Gradiva.

Cássio, J. (2019). *Aprendendo geometria plana com a plataforma GeoGebra*. Recuperado de <https://www.geogebra.org/m/hsXHDX7>

Estrada, M. F., et al. (2000). *História da matemática*. Universidade Aberta.

Gonçalves, G. W. B. (2014). *Geometria do triângulo* [Monografia de graduação, Universidade de Brasília]. Recuperado de https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/16950/1/2014_GeorgeWesleyBarbalhoGon%C3%A7alves.pdf

Khan Academy. (s.d.). *Medianas e baricentros de triângulos*. Recuperado de <https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/triangle-properties/medians-centroids/v/triangle-median-and-centroids>

Kimberling, C. (2022). *Encyclopedia of triangle centers*. Recuperado de <https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/etc.html>

Loureiro, C., et al. (1997). *Geometria: 10.º ano de escolaridade*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Martins, A., et al. (2018). *Reta de Euler: Colinearidade dos ortocentro, baricentro e circuncentro de um triângulo*. Recuperado de <https://geometrias.blogspot.com/2018/02/reta-de-euler-colinearidade-dos.html>

Rosário, N. (2008). *Aspectos avançados da geometria do triângulo* [Dissertação de mestrado, Universidade do Algarve]. Recuperado de <https://sapientia.ualg.pt/bitstream/10400.1/642/1/AspectosAvancadosGeometriaTriangulo.pdf>

Sebastião e Silva, J. (1976). *A matemática na Antiguidade*. Sociedade Portuguesa de Matemática.

SESAMATH. (2019). *Manuel Maths 2de - Programme 2019*. Recuperado de https://mep-ouils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms2_2019

Silva, E. (2019). *Relações entre os pontos notáveis do triângulo e outras construções* [Dissertação de mestrado, Universidade do Porto]. Recuperado de https://sigarra.up.pt/fcup/pt/pub_geral.show_file?pi_doc_id=205687

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas atuais*. Instituto de Inovação Educacional.

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
Funções	Generalidades acerca de funções: -Evolução histórica do conceito de função e formas de representação -Funções definidas por tabelas, gráficos ou analiticamente -Domínio, conjunto de chegada, contradomínio, variável independente e variável dependente: ▪ analisar elementos da evolução histórica do conceito de função e as diversas formas de representação: diagramas, tabelas, gráficos e expressões analíticas; ▪ identificar domínio, conjunto de chegada, contradomínio, objeto e imagem de uma função em contextos históricos, de modelação, ou abstratos, com recurso a vários tipos de representações (tabelas, gráficos e expressões analíticas).	▪ Apresentar elementos da evolução histórica do conceito de função, envolvendo episódios e problemas clássicos, por exemplo, tabelas numéricas (quadrados, cubos, recíprocos, raízes quadradas e raízes cúbicas), tabelas trigonométricas de Ptolomeu/Copérnico o lançamento de projéteis; ▪ Explorar o conceito de função em contextos reais e matemáticos em que faça sentido, nomeadamente como relação de covariação, incluindo a possibilidade de definição de funções em ambientes gráficos (calculadoras gráficas ou Geogebra) ou em ambientes de programação (<i>Python</i>); ▪ Promover a análise de diferentes tabelas ou representações gráficas que se podem encontrar em jornais, revistas ou na Internet (retomar exemplos do 3.º ciclo do EB).

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	Funções polinomiais de grau não superior a 2 Função afim: estudar gráfica e analiticamente a função afim em termos de zeros, sinal e monotonia.	Relembrar as relações entre a representação algébrica e geométrica de uma função afim, estudadas no 3.º ciclo do EB, nomeadamente a identificação do declive da reta e da ordenada na origem nas duas representações.
	Função quadrática: - estudar famílias de funções quadráticas relativamente ao sentido das concavidades do seu gráfico, eixo de simetria, contradomínio, zeros, sinal, monotonia e extremos, gráfica e analiticamente; - interpretar e prever as alterações no gráfico de uma função $f(x - a)$, $f(x) + b$, $c \cdot f(x)$, com a, b e c números reais, c não nulo, a partir do gráfico da função de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, e descrever o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas; - resolver equações e inequações do 2.º grau, em contextos de resolução de problemas;	- Promover o estudo de funções definidas analiticamente com recurso à tecnologia gráfica, nomeadamente através da resolução de problemas em contexto de modelação de funções afins e quadráticas. No caso da função quadrática, efetuar uma referência histórica à parábola; - Propor a representação de famílias de funções afins e quadráticas, com recurso à tecnologia gráfica, determinando zeros, sinal e vértice das parábolas; - Conduzir os alunos à dedução da fórmula resolvente para o cálculo dos zeros da função quadrática; - Propor a elaboração de um programa em <i>Python</i> para determinação dos zeros de uma função quadrática; - Promover o estudo da relação entre o gráfico da função definida por $f(x) = x^2$ e os gráficos das funções $f(x - a)$, $f(x) + b$, $c \cdot f(x)$, com a, b e c números reais, c não nulo, e usá-las na resolução de problemas em contextos de modelação; - Promover a recolha de dados para modelação com funções, utilizando instrumentos de medição ou sensores, por exemplo a experiência da deslocação de uma bola num plano inclinado.

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	determinar expressões analíticas de funções representadas graficamente.	
	Funções definidas por ramos: - estudar gráfica e analiticamente funções definidas por ramos e utilizá-las em contextos de modelação; - estudar funções definidas por ramos relativamente ao domínio, contradomínio, coordenadas dos pontos de interseção com os eixos coordenados e sinal, em casos simples; - reconhecer a função módulo como um caso particular de uma função definida por ramos.	- Fomentar a resolução de problemas, em contexto real, que possam ser modelados por funções definidas por ramos (por exemplo, escalões do IRS, faturas de água ou eletricidade, as sucessivas acelerações e desacelerações provocadas no movimento de um automóvel). - Propor a elaboração de tabelas de variação de sinal. - Propor o estudo da função módulo como uma função definida por ramos. - Propor a elaboração de um programa em <i>Python</i> para definir a função módulo.

Pensamento Computacional

Exemplo de programa em *Python* para determinar as soluções de uma equação do 2.º grau:

```
import math
a=2
b=1
c=-3
delta=b**2-4*a*c
if delta<0:
```

```
print("Não tem soluções")
elif delta==0:
    x1=(-b-math.sqrt(delta))/(2*a)
    print('Tem só uma solução: ',x1)
else:
    x1=(-b-math.sqrt(delta))/(2*a)
    x2=(-b+math.sqrt(delta))/(2*a)
    print('Tem 2 soluções: ',x1,' e ',x2)
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0

Exemplo de programa em Python para definir a função módulo calculando a imagem para um determinado objeto:

```
def modulo(x):
    if x<0:
        return -x
    else:
        return x

x=float(input('x = '))
print('A imagem de ',x,' é: ',modulo(x))
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0

Possíveis aprofundamentos

- Caracterizar o gráfico de uma função quadrática como sendo o conjunto de pontos a igual distância de um ponto (foco) e de uma reta (diretriz).
- Definir regiões do plano delimitadas por parábolas e retas e obter aproximações da área respetiva por enquadramentos com recurso a polígonos.
- Estudar a parte inteira de um número, as funções “chão” e “teto”, as funções “sinal” $\text{sgn}(x)$ e de *Heaviside* $H(x)$, como funções definidas por ramos.

Bibliografia de referência

Copérnico, N. (2014). *A revolução das orbes celestes*. Fundação Calouste Gulbenkian.

Grupo de Trabalho T3. (2011). *Funções no 3.º ciclo com tecnologia*. Associação de Professores de Matemática.

Guichard, J.-P. (1986). *História da matemática no ensino da matemática* (adaptação livre de Arsélio Martins). In A. Bouvier (Coord.), *Didactique des mathématiques*. Cedic/Nathan. Recuperado de <https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/mhist.html>

Icart, J. (2021). Fonctions: Une perspective historique. *Revue MathémaTICE*, (75). Recuperado de <http://revue.sesamath.net/spip.php?article1414>

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1997). *Funções - 10.º ano*. Ministério da Educação.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1998). *Funções - 11.º ano*. Ministério da Educação.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1999). *Funções - 12.º ano*. Ministério da Educação.

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
Geometria	Geometria analítica no plano Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no plano Coordenadas de pontos num referencial cartesiano identificar coordenadas de pontos do plano num referencial cartesiano, ortogonal e monométrico.	- Promover o uso do Geogebra em explorações, por exemplo: - procurar coordenadas do transformado de um ponto, por uma reflexão de eixo vertical ou horizontal, ou por uma meia-volta de centro na origem;
	Conjuntos de pontos e condições Mediatriz, circunferência e círculo: - reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas: - transformados de pontos, por uma reflexão de eixo vertical ou horizontal, ou por uma meia-volta de centro na origem; - coordenadas do ponto médio de um segmento de reta; - fórmula da distância entre dois pontos;	- Promover o uso do Geogebra em explorações, por exemplo: - analisar condições que possam definir conjuntos de pontos e perceber como diferentes condições geram conjuntos de pontos diferentes (incluindo o conjunto vazio); - Propor a determinação das coordenadas do baricentro e do circuncentro de um triângulo, dadas as coordenadas dos seus vértices; - Propor problemas de modelação matemática, por exemplo, encontrar a melhor localização, em termos de coordenadas no plano, para uma torre de transmissão de sinal que sirva três localidades;

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	- condições que definem conjuntos de pontos: - equações de retas verticais e não verticais; - semitplanos; - mediatriz de um segmento de reta; - circunferência e círculo; - outros conjuntos definidos por conjunções e disjunções, em casos simples.	Nestas Aprendizagens Essenciais, no estudo que envolve circunferências, só se consideram equações reduzidas.
	Geometria analítica no espaço Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no espaço Coordenadas de pontos: identificar coordenadas de pontos do espaço num referencial cartesiano ortogonal e monométrico.	Estimular os alunos a utilizar o Geogebra 3D para visualizar, explorar e estabelecer conjecturas, envolvendo geometria no espaço, por exemplo, problemas envolvendo interseções de planos paralelos aos planos coordenados com esferas.
	Conjuntos de pontos e condições Superfície esférica e esfera:	Propor problemas de modelação matemática, por exemplo a determinação da distância entre a Terra, o Sol e outros corpos celestes, a partir das suas coordenadas;

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	- reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas: - coordenadas do ponto médio de um segmento de reta; - fórmula da distância entre dois pontos; - condições que definem conjuntos de pontos: - planos paralelos aos planos coordenados; - retas paralelas a um dos eixos; - planos mediadores; - superfície esférica e esfera.	Nestas Aprendizagens Essenciais, no estudo que envolve superfícies esféricas só se consideram equações reduzidas.
	Vetores no plano e no espaço Vetores livres no plano e no espaço: - coordenadas de um vetor num referencial ortonormado - vetor como diferença de dois pontos - colinearidade de dois vetores - reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas: - norma de um vetor; - propriedades algébricas das operações com vetores;	- Abordar a soma de vetores, a soma de um ponto com um vetor e o produto de um escalar por um vetor em contexto de resolução de problemas. - Referir a ligação do cálculo vetorial com outras áreas, como por exemplo, as grandezas vetoriais da Física (forças, deslocamentos, velocidades), a meteorologia, a computação gráfica, o jogo do bilhar.

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	▪ coordenadas de um vetor; ▪ coordenadas da soma e da diferença de vetores; ▪ coordenadas do produto de um escalar por um vetor e do simétrico de um vetor; ▪ relação entre as coordenadas de vetores colineares; ▪ vetor definido por dois pontos e cálculo das respetivas coordenadas; ▪ coordenadas do ponto resultante da soma de um ponto com um vetor; ▪ cálculo da norma de um vetor por meio das suas coordenadas.	
	Equação vetorial da reta no plano e no espaço: ▪ reconhecer que uma reta fica definida se for conhecido um ponto da reta e um vetor diretor. ▪ escrever uma equação vetorial de uma reta.	▪ Conduzir os alunos a escrever a equação vetorial de uma reta, associada ao produto de um escalar por um vetor e à colinearidade de dois vetores; ▪ Promover a determinação da equação reduzida de uma reta, tendo por base uma equação vetorial dessa reta e vice-versa.

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	Equação reduzida da reta no plano: - Estabelecer a relação entre: - as coordenadas de um vetor diretor e o declive da reta; - paralelismo de retas, igualdade do declive e colinearidade de vetores diretores das retas; - equação reduzida e equação vetorial de uma reta.	- Propor aos alunos a utilização do Geogebra para explorar: - a relação entre vetor diretor de uma reta e paralelismo de retas; - o efeito dos parâmetros da equação reduzida de uma reta, na sua representação gráfica. - Propor a construção de um programa simples em <i>Python</i> que permita determinar a equação reduzida de uma reta e uma equação vetorial dessa reta, dadas as coordenadas de dois pontos; - Salientar o papel central da equação reduzida da reta, permitindo escrever a equação de qualquer reta não vertical, cujo gráfico lhe seja apresentado, sem que para isso seja necessário fazer exercícios repetitivos.

Pensamento Computacional

Exemplo de programa em *Python* para determinar o declive, a ordenada na origem, a equação reduzida e uma equação vetorial da reta que passa por 2 pontos, a partir das suas coordenadas.

```
xA=3
yA=-1
xB=-4
yB=-2
if xA==xB:
    print('A reta que une os dois pontos é vertical: x=',xA)
else:
    m=(yB-yA)/(xB-xA)
    b= yA-m*xA
    print('Declive da reta: ',m)
    print('Ordenada na origem: ',b)
    print('y=',m,'x+',b)
print('Uma equação vetorial da reta é: (x,y)=(',xA,', ',xB,')+k(',xB-xA,', ',yB-yA,') , kER')
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0

Exemplo de programa em *Python* para colocar pontos igualmente espaçados num segmento dado pelas suas coordenadas.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import math
xA=3
yA=7
xB=1
yB=-8
n=4
xv=xB-xA
yv=yB-yA
xx=[]
yy=[]
```

```
for i in range(n+1):  
    di=i/n  
    xx=xx+[xA+di*xv]  
    yy=yy+[yA+di*yv]  
plt.plot(xx,yy,'o-')
```

Nota: O programa foi criado em *Spyder* IDE 5.1.5

Possíveis aprofundamentos

Poderão ser abordados outros temas como aprofundamento:

- Explorar os primórdios da Geometria Analítica com Descartes e Fermat;
- Explorar a geometria numa esfera e como influencia as viagens espaciais.
- Explorar uma das aplicações modernas da geometria analítica no espaço, o GPS-Sistema de Posicionamento Global. Na sua versão mais simples, envolve a interseção de esferas a partir das suas equações.

Algumas das referências e vídeos:

Alves, S. (2006). A matemática do GPS. *Revista do Professor de Matemática*, nº 59. Obtido de <https://www.rpm.org.br/cdrpm/59/5.htm>

Como funciona o GPS. Obtido de <http://www.ime.unicamp.br/~apmat/o-sistema-gps/>

A matemática está por trás do GPS e da navegação moderna. Obtido de <https://impa.br/noticias/a-matematica-esta-por-tras-do-gps-e-da-navegacao-moderna/>

A matemática do GPS. Obtido de https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?cpf=96932821320&d=20191117203922&h=0818e4e2bf4b85e9e5e4f1320b439a6e3009ea91

O uso do GPS como recurso pedagógico para o estudo de elementos da Geometria Analítica. Obtido de <http://hdl.handle.net/1843/BUBD-ANHM7M>

Atrator, Núcleo do Porto da APM (2013). A Geometria do Planeta Terra, *Educação & Matemática*, nº 121, p. 22-26

Bibliografia de referência

Carreira, S., & Amado, N. (2018). A tecnologia entre uma tarefa de geometria analítica e a Vesica Piscis. *Educação & Matemática*, (148), 39-43.

Devlin, K. (2002). *Matemática: A ciência dos padrões*. Porto Editora.

Estrada, M. F., et al. (2000). *História da matemática*. Universidade Aberta.

Haese, M., et al. (2019). *Mathematics - Applications and interpretation HL 2 (for use with IB Diploma Programme)*. Haese Mathematics.

Khan Academy. (s.d.). Geometria analítica. Recuperado de <https://pt-pt.khanacademy.org/math/10ano/xe7bf8a38a4e84c6a:geometria-analitica-no-plano>

Loureiro, C., et al. (1997). *Geometria: 10.º ano de escolaridade*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Loureiro, C., et al. (1998). *Geometria: 11.º ano de escolaridade*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Odenwald, S. (s.d.). *Astronomy and space science applications featuring geometry*. SPACEMATH@NASA. Recuperado de <https://spacemath.gsfc.nasa.gov/geometry.html>

Precatado, A., & Guimarães, H. (2001). *Materiais para a aula de matemática*. Associação de Professores de Matemática.

Sebastião e Silva, J. (1970). *Geometria analítica plana*. Empresa Literária Fluminense.

Sebastião e Silva, J. (1975-1978). *Compêndio de matemática* (Vols. 1-3). GEP.

SESAMATH. (2019). *Manuel Maths 1re - Programme 2019*. Recuperado de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1spe_2019

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas atuais*. Instituto de Inovação Educacional.

ARTICULAÇÃO COM AS DIMENSÕES DA EDUCAÇÃO PARA A CIDADANIA

A Matemática contribui para a implementação da componente curricular de Cidadania e Desenvolvimento sempre que os conhecimentos, capacidades e atitudes são mobilizados de forma intencional para a compreensão crítica de realidades e desafios da sociedade. Neste sentido, o trabalho desenvolvido no âmbito das aprendizagens da Matemática pode favorecer uma reflexão informada sobre questões relacionadas com os Direitos Humanos, a Democracia e as Instituições Políticas, o Desenvolvimento Sustentável, a Literacia Financeira e o Empreendedorismo, a Saúde, o Risco e a Segurança Rodoviária, o Pluralismo e a Diversidade Cultural e os *Media*, promovendo uma participação cívica consciente, responsável e fundamentada.

No entanto, embora alguns temas ou domínios possam constituir oportunidades particularmente evidentes para esta articulação, a relação entre as Aprendizagens Essenciais e as dimensões da Educação para a Cidadania não se limita a conteúdos específicos.

As competências desenvolvidas no âmbito das aprendizagens da Matemática, como a análise crítica e o tratamento da informação, a interpretação de diferentes perspetivas, a argumentação fundamentada, a resolução de problemas, a comunicação de ideias, o pensamento crítico e criativo, a colaboração e a reflexão sobre diferentes realidades, constituem elementos fundamentais para a concretização dos objetivos definidos na Estratégia Nacional de Educação para a Cidadania.

Assim, com o objetivo de apoiar a articulação entre as Aprendizagens Essenciais da Matemática e a componente curricular de Cidadania e Desenvolvimento, apresentam-se algumas propostas de exploração, sem prejuízo de outras que a escola, no âmbito da sua autonomia, considere pertinentes.

Democracia e Instituições Políticas

Conduzir os alunos na reflexão da importância da participação de cada cidadão na eleição dos seus representantes (delegado de turma, associação de estudantes, poderes políticos, ...).
Promover a análise, a interpretação e a discussão de sistemas eleitorais.

Literacia Financeira e Empreendedorismo	Dinamizar a realização de simulações relacionadas com processamento de salários (em que sejam utilizados os conceitos de vencimento líquido, salário bruto, abonos e descontos). Sugerir em grande grupo uma discussão que inclua a pesquisa e análise de tabelas de IRS, ou o cálculo de juros simples e compostos em diferentes situações.
Pluralismo e Diversidade Cultural	Estimular a discussão e a reflexão sobre os seguintes temas: O papel da mulher na sociedade; Somos oito mil milhões. Como estamos distribuídos?
Media	Analisar dados apresentados em representações gráficas, verificando que o modo como a informação está apresentada pode influenciar a mensagem.
Desenvolvimento Sustentável	Estimular a discussão e reflexão sobre os seguintes temas: Alterações climáticas. Os negacionistas têm razão ou há estatísticas a provar que não?; Como estão os nossos oceanos? (<i>Plasticus maritimus</i> , Planeta tangerina, ...).

Cabe ao professor de Matemática em articulação com os restantes elementos do conselho de turma, tendo em consideração o projeto educativo da escola, o currículo (incluindo os projetos assumidos pelo conselho de turma) e outros aspetos que caracterizam o contexto local, definir os percursos pedagógicos mais adequados, que contribuam para a concretização da componente curricular de Cidadania e Desenvolvimento.