



EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO



11.º ANO | ENSINO SECUNDÁRIO

MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS

INTRODUÇÃO

As Aprendizagens Essenciais (AE) constituem a referência nacional comum para aquilo que todos os alunos devem aprender ao longo da escolaridade obrigatória. Representam um núcleo fundamental de conhecimentos, capacidades e atitudes que cada disciplina deve assegurar, funcionando como um denominador curricular comum, sem esgotar o conjunto total de aprendizagens possíveis. Embora obrigatórias não limitam a possibilidade de aprender mais. As AE deixam espaço para que cada escola e cada aluno possam aprofundar conteúdos e desenvolver competências adicionais.

Enquanto documentos de orientação curricular, as AE servem de base à planificação, realização e avaliação do ensino e da aprendizagem. Contribuem diretamente para o desenvolvimento das áreas de competências definidas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória. Por essa razão, constituem, juntamente com o Perfil, o referencial para a avaliação externa.

Organizam-se em três componentes fundamentais:

1. O que os alunos devem saber – conteúdos estruturados, indispensáveis, articulados conceitualmente, relevantes e significativos;
2. Como devem pensar e trabalhar para aprender – processos cognitivos e operações essenciais à aquisição do conhecimento;
3. Como devem mostrar o que aprenderam – o “saber fazer”, aplicado dentro de cada disciplina e em articulação horizontal com as restantes.

Em síntese, as Aprendizagens Essenciais asseguram que o currículo é claro, coerente e acessível, combinando conteúdos sólidos com processos cognitivos que permitem aos alunos compreender, aplicar e aprofundar o que aprendem.

MATEMÁTICA ESCOLAR ORIENTADA PARA O FUTURO

A formação de indivíduos matematicamente competentes é um propósito fundamental do currículo de matemática para o ensino secundário. A sociedade e o mundo contemporâneos, marcados pela globalização, crescente digitalização, conectividade e automatização, e por uma aceleração do desenvolvimento tecnológico, enfrentam desafios nos quais o conhecimento matemático adquire um papel essencial, proporcionando conceitos, métodos, modelos e formas de pensar. Esse poder matemático deve ser parte integrante da educação de todos os cidadãos, incluindo conhecimentos e capacidades que os jovens transportarão para a sua vida pessoal, social e profissional.

Empreender uma formação matemática abrangente e inovadora, neste ciclo de escolaridade, significa desenvolver nos alunos a capacidade de identificar conceitos matemáticos relevantes para resolver problemas reais, aplicar procedimentos matemáticos adequados e interpretar os resultados em contextos diversos. O pensamento matemático está na base dos processos de compreensão dos conceitos e objetos matemáticos, que podem e devem ser analisados, representados e relacionados de diferentes formas. São igualmente

importantes a formulação de hipóteses, a testagem de conjecturas, a generalização e a abstração, na construção de argumentos lógicos e conclusões, cuja comunicação de forma apropriada é cada vez mais importante no mundo atual.

O currículo consagra o propósito de preparar os alunos para formularem juízos e tomarem decisões fundamentadas, contribuindo para que se tornem cidadãos reflexivos, empenhados e participativos. Visa também contribuir para que os jovens valorizem o papel da Matemática no mundo e o seu carácter de ciência em evolução e renovação permanente, apreciando a sua dimensão estética, a par do seu legado histórico.

Assim, o currículo de Matemática para o futuro orienta-se para o desenvolvimento de áreas de competências, à luz do que é preconizado no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, nomeadamente no que se refere ao pensamento crítico aliado à resolução de problemas, promovendo a criatividade e a comunicação, além de acentuar a pertinência do trabalho colaborativo.

IDEIAS INOVADORAS DO CURRÍCULO

Matemática para a Cidadania

O reconhecimento do ensino secundário como um ciclo que é parte integrante da formação geral dos jovens, incluído na escolaridade obrigatória, cria um contexto em que todas as disciplinas, incluindo a Matemática, devem contribuir para o desenvolvimento dos alunos enquanto cidadãos ativos, conscientes, informados e interventivos.

A crescente relevância do papel da Matemática na sociedade atual realça a importância e a necessidade de dotar os alunos de ferramentas de análise dos processos sociais, que estão na base do exercício de uma cidadania ativa. Assim, as Aprendizagens Essenciais de MACS exploram modelos e processos eleitorais e a análise de modelos financeiros e valorizam o desenvolvimento da literacia estatística.

Pensamento Computacional

Os aspetos comuns entre o Pensamento Matemático e o Pensamento Computacional, bem como a relevância atual do Pensamento Computacional na ciência e na sociedade, justificam que o currículo de Matemática valorize esta abordagem conceptual na resolução de

problemas. As Aprendizagens Essenciais de MACS promovem o desenvolvimento de práticas como a abstração, a decomposição, o reconhecimento de padrões, a análise e definição de algoritmos, bem como a aquisição de hábitos de depuração e otimização dos processos envolvidos na atividade matemática. Deste modo, a aposta no Pensamento Computacional revela a aproximação do currículo às recomendações internacionais, designadamente em relatórios da União Europeia, e também o alinhamento com o currículo de Matemática do ensino básico, favorecendo o desenvolvimento desta capacidade de forma integrada, coerente e progressiva.

Diversificação de temas no currículo

Para além do desenvolvimento de competências dos alunos no âmbito da cidadania, pretende-se continuar a disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando o recurso à tecnologia.

Matemática para todos

Assume-se que o currículo na escolaridade obrigatória deve dar resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos. Os formalismos e os níveis de abstração excessivos deverão ser preteridos em favor de uma perspetiva de identificação do poder da Matemática na interpretação da realidade. Pretende-se que a matemática seja um contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias.

IDEIAS CHAVE DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS

As Aprendizagens Essenciais de Matemática no ensino secundário dão continuidade às aprendizagens do ensino básico e assumem um conjunto de princípios e orientações metodológicas, cuja concretização e especificação é feita para cada ano de escolaridade e tema matemático. A seguir, enunciam-se e apresentam-se as nove ideias chave preconizadas nas Aprendizagens Essenciais, esquematizadas na Figura 1:



Figura 1 - Ideias chave das Aprendizagens Essenciais

Resolução de problemas, modelação e conexões

Dar sentido à Matemática e enfatizar a modelação e as aplicações

A resolução de problemas, tal como a modelação, devem constituir o contexto para o estabelecimento de conexões entre diferentes conceitos e áreas da Matemática, assim como entre a Matemática e outras áreas do saber, permitindo uma abordagem integrada e significativa para os alunos na sua atividade matemática. É fundamental que os alunos tenham contacto com o processo de modelação matemática e sejam capazes de criticar, validar e aperfeiçoar modelos matemáticos. Preconizando a exploração de ideias e conceitos matemáticos, pretende-se que a aprendizagem não se reduza à memorização de regras, ao treino de procedimentos ou à sua execução sem compreensão. É essencial que as definições, os resultados e os procedimentos matemáticos adquiram sentido e que os alunos os saibam mobilizar e aplicar adequadamente para resolver problemas do mundo real, em situações do dia-a-dia ou de outras disciplinas. Uma das áreas de competências no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (PA), fortemente ligada à Matemática - Raciocínio e Resolução de Problemas - implica que os alunos sejam capazes de: i) interpretar informação, planear e conduzir pesquisas; ii) gerir informações e tomar decisões; iii) desenvolver processos conducentes à construção de conhecimento, usando recursos diversificados.

Raciocínio dedutivo e lógica matemática

Incentivar processos de raciocínio dedutivo, integrando a lógica matemática nos diversos temas

O aluno deve ser sistematicamente incentivado a justificar processos de resolução, a encadear raciocínios e a formular e validar conjecturas. Os conceitos e métodos relativos à lógica matemática não constituem um tema específico das Aprendizagens Essenciais, mas devem, de forma natural, ser integrados nos vários temas abordados. A integração do raciocínio dedutivo e da lógica, bem como da linguagem matemática e simbólica, deve estar presente em todos os momentos de aprendizagem, sem se transformar num conteúdo tratado de forma isolada. O grau de formalização a utilizar deve ter sempre em conta o nível de maturidade matemática dos alunos e deve surgir, se possível, como uma necessidade, garantindo que o processo de formalização acompanha a apropriação dos conceitos. Diversos temas, como, por exemplo, Modelos de Grafos ou Probabilidade, em contexto de resolução de problemas, podem constituir-se

como excelentes oportunidades para desenvolver o raciocínio dedutivo, no qual se inclui a utilização de linguagem e de notações adequadas.

Recurso sistemático à tecnologia

Incentivar a exploração de ideias e conceitos, integrando a tecnologia como alavanca para a compreensão e resolução de problemas.

A abordagem exploratória de ideias e conceitos matemáticos apresenta-se como determinante, o que pressupõe levar o aluno a participar ativamente num processo de construção e aprofundamento, motivado por questões desafiadoras, problemas e procura de justificações. A integração da tecnologia é considerada como indispensável nesse processo, pelas possibilidades que oferece de experimentação, visualização, representação, simulação, interatividade, bem como, evidentemente, de cálculo numérico e simbólico. O recurso à folha de cálculo e a aplicativos digitais, explorados em computadores, smartphones ou calculadora gráfica, deve ser feito de forma sistemática. O pensamento computacional deve ser integrado com uma complexidade progressiva, desenvolvendo processos algorítmicos, um pensamento estruturado e o raciocínio lógico, proporcionando um vasto campo de aplicação da Matemática e envolvendo genuinamente a formulação e a resolução de problemas.

Tarefas e recursos educativos

Apoiar a aprendizagem em tarefas, contextos e recursos diversificados

A construção de tarefas de aprendizagem constitui uma das ações decisivas do professor. Uma tarefa matemática enriquecedora pode assumir a forma de um problema, uma questão exploratória, um exercício de aplicação, um pequeno projeto ou uma pesquisa de aprofundamento, sempre que observe os seguintes critérios: ser interessante e desafiante, envolver matemática relevante, criar oportunidades para aplicar e ampliar conhecimentos, permitir diferentes estratégias, tornar possível monitorizar a compreensão dos alunos e apoiar o seu progresso. As tarefas devem ser, ainda, diversificadas e ajustadas aos objetivos de aprendizagem e a sua planificação deve prever diferentes tipos de organização do trabalho dos alunos. A utilização de recursos variados, nomeadamente da

tecnologia, bem como a diversificação de contextos de aprendizagem, incluindo laboratórios, espaços fora da sala de aula, museus de ciência e outros, deverão merecer especial atenção na construção de tarefas.

História da Matemática

Valorizar a importância da Matemática na evolução da sociedade

O recurso a episódios e problemas marcantes da História da Matemática deve motivar pesquisas, estudos ou debates, não de caráter enciclopédico, mas contribuindo para que o progresso da Matemática seja apreciado e compreendido. Para além do seu valor intrínseco, enquanto património cultural que importa valorizar, existem numerosos factos, aspetos particulares e episódios da História da Matemática que, pelo seu potencial pedagógico, devem ser explorados em tarefas dentro e fora da sala de aula. Os professores devem aproveitar os factos contemporâneos da História da Matemática para levar os alunos a entender o papel determinante da Matemática na sociedade atual. Por exemplo, podem ser referidas as primeiras Medalhas Fields atribuídas a mulheres matemáticas, a importância dos modelos matemáticos para entender a crise climática, o estudo matemático das epidemias ou o papel dos modelos matemáticos na exploração espacial.

Práticas enriquecedoras e criatividade

Inovar e investir em práticas enriquecedoras, favorecendo o desenvolvimento da criatividade e atitudes positivas face à Matemática

O currículo integra propostas inovadoras, que incluem a realização de projetos, de profundidade e extensão ajustados às condições existentes e aos alunos. É igualmente recomendado que os alunos se envolvam na resolução de questões e problemas autênticos em contextos de interdisciplinaridade. A programação, tal como a modelação ou o trabalho de projeto, abrem inúmeras vias de trabalho promissoras que não devem ser ignoradas. Também a beleza da Matemática, a sua aplicabilidade e a história fascinante que a envolve são fortes motivos para inovar através de práticas de enriquecimento das aprendizagens. É importante que os alunos experimentem o prazer da descoberta em Matemática e que desenvolvam o gosto pelo desafio, pela procura de soluções e pela sua comunicação. Dar aos alunos oportunidades de aprenderem matemática significativa contribui para que desenvolvam atitudes positivas em relação à disciplina.

Estimular a curiosidade, o interesse, a motivação e a criatividade é essencial para que reconheçam a importância da Matemática na sua formação pessoal e académica e adquiram autoconfiança, sentindo-se capazes de raciocinar e comunicar matematicamente. O contexto socioemocional que permeia a aprendizagem da Matemática tem grande influência sobre a imagem que os jovens constroem da disciplina, sendo determinante na formação de cidadãos críticos, reflexivos, que se sintam capazes de tomar decisões e de formular e resolver problemas de forma criativa e eficiente.

Organização do trabalho dos alunos

Valorizar o trabalho colaborativo num ambiente de entreajuda e corresponsabilização, cultivando comunidades de aprendizagem

A valorização do trabalho colaborativo é assumida enquanto estratégia de aprendizagem e enquanto competência a desenvolver nos jovens na sociedade atual. A colaboração é especialmente indicada em tarefas nas quais os alunos possam discutir e definir abordagens e processos de resolução, confrontar ideias e contribuir para um objetivo comum. É também uma forma de trabalho em que os alunos se devem apoiar mutuamente, envolvendo-se em processos matemáticos, argumentação e comunicação, valorizando as competências individuais de cada um. Assim, o trabalho em pares e em pequenos grupos é adequado em múltiplas situações de aprendizagem, desde a realização de tarefas curtas, passando por situações que envolvem pesquisa, recolha de dados, modelação, até ao desenvolvimento de projetos.

Comunicação matemática

Comunicar recorrendo a representações múltiplas, com clareza e rigor e um nível de formalização adequado

A comunicação matemática, a par do raciocínio e do pensamento crítico, está presente quando os alunos interpretam gráficos, esquemas, diagramas ou dados, justificam afirmações, utilizam diferentes representações, escrevem e criticam explicações e argumentos matemáticos, com simbologia adequada e produzindo encadeamentos lógicos. Importa pôr em prática diversos tipos de comunicação, dando espaço às discussões coletivas e em pequenos grupos, apresentações orais e/ou escritas, elaboração de relatórios e composições, publicações e exposições, que são essenciais no processo de desenvolvimento de conceitos ou processos matemáticos. A simbologia

constitui um sistema de representação matemática robusto que deve ser relacionado com outros modos de representação, tendo em vista a sua utilização oportuna, nomeadamente no âmbito da comunicação matemática. A formalização de conceitos e resultados matemáticos é uma etapa importante da aprendizagem que não se alcança por meio do excesso de manipulação simbólica ou pela prática de artifícios de cálculo demasiadamente técnicos.

Avaliação para a aprendizagem

Privilegiar a avaliação formativa na regulação do processo de aprendizagem

A abordagem exploratória que se privilegia implica a integração da avaliação no processo de aprendizagem. É necessário que a avaliação seja um processo, e não um fim, e que esteja ao serviço da aprendizagem dos alunos, de modo a favorecê-la. A diversificação de formas e instrumentos de avaliação é uma das práticas de avaliação recomendadas. Constituem boas tarefas de avaliação formativa as resoluções detalhadas de tarefas, os relatórios e os cartazes. A produção de documentos de natureza audiovisual é igualmente válida e apelativa, designadamente sob a forma de pequenos vídeos, criação de páginas e blogs, tirando partido de ferramentas digitais. As partilhas de ideias e conclusões em sala de aula, bem como as apresentações orais, constituem boas oportunidades para monitorizar e acompanhar o desenvolvimento das aprendizagens e identificar dificuldades e obstáculos.

AVALIAÇÃO

A avaliação é intrínseca ao ensino e à aprendizagem e deve, por isso, assumir-se como um processo contínuo e integrado que regula o progresso das aprendizagens e orienta a prática pedagógica.

A investigação em educação tem vindo a evidenciar que a avaliação se desenvolve numa relação entre o professor, o aluno e os seus pares, em diferentes momentos do processo de aprendizagem. Partindo da identificação de três questões centrais, identificar onde os alunos se encontram no seu percurso de aprendizagem, para onde devem progredir e que estratégias podem apoiar esse progresso, identificam-se cinco estratégias-chave para a implementação, com sucesso, da avaliação para a aprendizagem:

- clarificar, compreender e partilhar os objetivos de aprendizagem e os critérios de sucesso (critérios de avaliação/verificação do sucesso);
- promover o diálogo, bem como realizar atividades e tarefas eficazes que permitam recolher informação sobre a aprendizagem;
- dar *feedback* que promova o desenvolvimento da aprendizagem;
- promover a aprendizagem entre pares;
- implicar os alunos como agentes da sua aprendizagem.

As práticas em sala de aula, decorrentes da implementação destas estratégias-chave, podem ser consideradas formativas, na medida em que a informação sobre o desempenho dos alunos, sustentada em evidências recolhidas no decurso das atividades realizadas, é interpretada e utilizada por professores, alunos ou pelos seus pares com o objetivo de apoiar decisões pedagógicas fundamentadas sobre os próximos passos no processo de ensino e aprendizagem.

Ao fomentar uma avaliação pedagógica contínua e integrada, em que o aluno é encarado como agente da aprendizagem, reforça-se a intencionalidade pedagógica do ensino, promovendo a avaliação não apenas das aprendizagens, mas sobretudo para as aprendizagens.

A avaliação para a aprendizagem decorre da utilização de informação recolhida através de instrumentos diversificados e da observação, muitas vezes informal, dos desempenhos dos alunos nas atividades diárias da sala de aula, não se constituindo como uma tarefa burocrática que implique o registo sistemático de toda a informação relativa a esse desempenho. Tanto a avaliação formativa (sistemática e contínua) como a avaliação sumativa (que permite fazer um ponto de situação sobre o que os alunos aprenderam num dado intervalo de tempo ou unidade didática) devem ser coerentes e intencionais, contribuindo para uma avaliação pedagógica consistente. Neste pressuposto, também os resultados da avaliação externa devem ser utilizados com intenção pedagógica e permitir aos alunos e aos professores melhorar o ensino e a aprendizagem.

Com o objetivo de apoiar os processos de avaliação pedagógica, interna e externa, foram introduzidos, nos documentos das Aprendizagens Essenciais (AE) de cada disciplina, descritores de desempenho organizados por domínio e por nível de desempenho (*Desempenho Proficiente* e *Desempenho Avançado*), que se constituem como o referencial nacional para a avaliação dos alunos. Salienta-se que o que deve ser aprendido por todos os alunos, em cada disciplina, é o constante do quadro “Operacionalização das Aprendizagens Essenciais”. Com a introdução destes dois níveis de desempenho, estabelece-se um referencial comum, salvaguardando-se simultaneamente a autonomia das escolas para a (re)definição de critérios e para o (re)ajustamento de instrumentos de recolha de informação sobre as aprendizagens.

Os descritores de desempenho constituem referenciais que permitem identificar e caracterizar diferentes níveis de desenvolvimento das aprendizagens dos alunos. Estes descritores apoiam a interpretação do desempenho escolar e promovem padrões elevados de qualidade na consolidação do conhecimento e no desenvolvimento de competências.

No exercício da sua autonomia, as escolas e os professores tomam estes descritores como referenciais para apoiar a definição dos critérios de avaliação e a construção de instrumentos de recolha de informação ajustados ao contexto educativo e às especificidades de cada disciplina. A partir destes referenciais, as escolas definem critérios que orientam a apreciação do trabalho realizado pelos alunos, garantindo que a avaliação se centra na qualidade da mobilização dos conhecimentos e das competências desenvolvidas ao longo do processo de ensino e aprendizagem.

Neste enquadramento, os descritores apresentados para cada domínio permitem identificar diferentes níveis de desempenho evidenciados pelos alunos nas tarefas realizadas em contexto de aprendizagem. A sua interpretação pressupõe uma análise global do trabalho dos discentes, considerando a compreensão dos temas em estudo, a capacidade de selecionar, organizar e utilizar informação relevante, de aplicar conceitos e procedimentos adequados e de mobilizar o que foi aprendido nas tarefas propostas, demonstrando domínio das AE. No nível de desempenho **Proficiente**, observa-se uma utilização adequada, consistente e segura dos conhecimentos e das competências em diferentes situações de trabalho escolar, o que possibilita a explicação de fenómenos ou processos, a interpretação de informação e a resolução de tarefas com base no que foi aprendido.

No nível de desempenho **Avançado**, os alunos demonstram uma mobilização mais autónoma, rigorosa e integrada desses conhecimentos e dessas competências. Analisam, interpretam e relacionam informação de forma crítica, utilizam conceitos com rigor e articulam diferentes saberes para explicar fenómenos ou processos de forma fundamentada, revelando maior capacidade de análise, de integração da informação e de aplicação das aprendizagens em diferentes contextos.

Os descritores não substituem os critérios de avaliação definidos pelas escolas, mas constituem um referencial comum que visa apoiar os professores na apreciação do desenvolvimento das aprendizagens, na comunicação do desempenho dos alunos e na tomada de decisões pedagógicas orientadas para aprendizagens de qualidade.

Com o propósito de promover a transparência e o envolvimento no processo de aprendizagem, a explicitação e clarificação dos critérios de avaliação de escola junto dos alunos e dos encarregados de educação assumem particular importância, pois favorecem a compreensão e a apropriação dos princípios de uma avaliação centrada na aprendizagem.

Este documento curricular apresenta uma proposta de descritores de desempenho que têm por base os seguintes domínios (i) Resolução de Problemas, Modelação e Conexões; (ii) Raciocínio e Lógica Matemática; (iii) Comunicação Matemática; (iv) Recurso Sistemático à Tecnologia; (v) Práticas Enriquecedoras e Criatividade.

Domínio de avaliação	Nível	Descritor de desempenho
Resolução de Problemas, Modelação e Conexões	Avançado	▪ Critica, de forma fundamentada, soluções de modelos matemáticos. ▪ Valida modelos matemáticos a partir do confronto sistemático com a realidade. ▪ Aperfeiçoa, de forma autónoma e justificada, modelos matemáticos para resolver problemas do mundo real, em contextos do quotidiano, interdisciplinares ou de outras disciplinas.
	Proficiente	▪ Critica, sem fundamentar, soluções de modelos matemáticos, identificando erros ou limitações mais evidentes. ▪ Valida modelos matemáticos a partir do confronto com a realidade tirando conclusões simples. ▪ Aperfeiçoa, modelos matemáticos, com orientação, para resolver problemas do mundo real, em contextos do quotidiano.
Raciocínio e Lógica Matemática	Avançado	▪ Explora, de forma autónoma e sistemática, situações problemáticas, identificando padrões, relações e diferentes estratégias de abordagem. ▪ Seleciona e aplica, de forma intencional e flexível, abordagens heurísticas adequadas, ajustando-as em função do problema. ▪ Formula, testa e valida conjeturas de forma rigorosa, recorrendo a argumentos matemáticos. ▪ Justifica, de forma clara, estruturada e fundamentada, os processos de resolução e procedimentos, avaliando a sua validade. ▪ Raciocina dedutivamente e de forma autónoma, usando os princípios e a simbologia da lógica matemática.

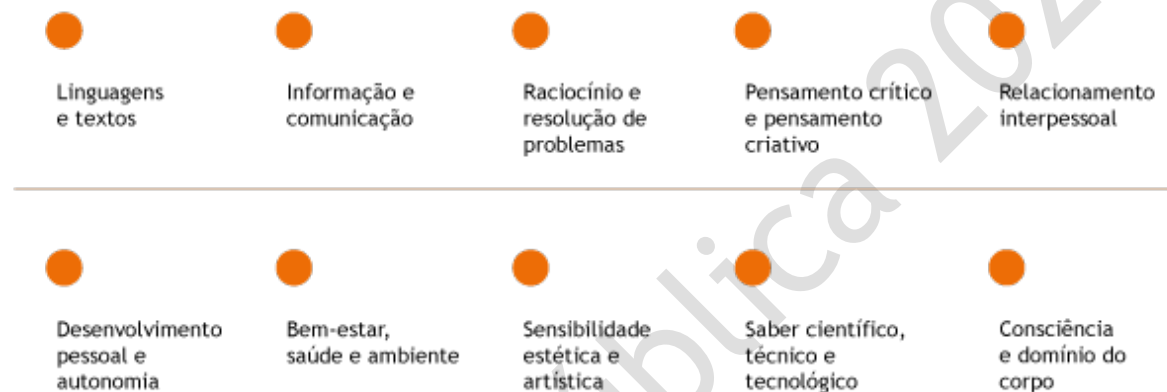
Domínio de avaliação	Nível	Descritor de desempenho
	Proficiente	▪ Explora situações problemáticas, identificando padrões, relações e estratégias de resolução, com apoio quando necessário. ▪ Usa abordagens heurísticas adequadas, com orientação, aplicando-as na resolução de problemas. ▪ Formula e valida conjecturas, com base em exemplos ou situações concretas. ▪ Justifica processos de resolução e procedimentos de forma clara, ainda que com fundamentação parcial. ▪ Raciocina e encadeia raciocínios, usando os princípios e a simbologia inerentes à lógica matemática.
Comunicação Matemática	Avançado	▪ Formaliza conceitos e resultados matemáticos de forma rigorosa e eficaz, recorrendo à simbologia adequada e à notação correta. ▪ Escreve explicações e argumentos matemáticos claros e estruturados, apresentando justificações completas com encadeamento lógico consistente, e avalia criticamente a validade das suas ideias. ▪ Interpreta e analisa gráficos, esquemas, diagramas e dados, extraindo informação relevante e identificando padrões, relações ou tendências significativas. ▪ Justifica afirmações com base em raciocínios matemáticos rigorosos, construindo argumentos completos e consistentes. ▪ Utiliza diferentes representações (simbólica, gráfica, numérica e verbal) de forma integrada, estabelecendo relações claras e generalizando conclusões quando apropriado. ▪ Escreve explicações e argumentos matemáticos de forma precisa e articulada, avaliando os seus próprios procedimentos e conclusões.

Domínio de avaliação	Nível	Descritor de desempenho
	Proficiente	▪ Formaliza conceitos e resultados matemáticos, recorrendo à simbologia adequada, ainda que com imprecisões. ▪ Escreve explicações e argumentos matemáticos simples, apresentando justificações com encadeamento lógico, e identifica aspetos a melhorar. ▪ Interpreta gráficos, esquemas, diagramas ou dados, retirando informação adequada. ▪ Justifica afirmações com base em raciocínios matemáticos simples, ainda que nem sempre completos ou totalmente rigorosos. ▪ Utiliza diferentes representações (simbólica, gráfica, numérica e verbal), estabelecendo algumas relações entre elas. ▪ Escreve explicações e argumentos matemáticos de forma compreensível, apresentando justificações com encadeamento lógico e identifica aspetos a melhorar.
Recurso Sistemático à Tecnologia	Avançado	▪ Resolve problemas que integram atividades de programação, folhas de cálculo e ambientes de geometria dinâmica, enfrentando desafios de complexidade elevada. ▪ Desenvolve processos algorítmicos com pensamento estruturado e raciocínio lógico, aplicando estratégias adequadas de forma consistente e autónoma. ▪ Envolve-se de modo proativo na formulação e resolução de problemas, identificando objetivos, decompondo tarefas e avaliando soluções. ▪ Desenvolve o pensamento computacional de forma rigorosa, criando, testando e refletindo sobre os procedimentos, os resultados e a eficiência das estratégias utilizadas.

Domínio de avaliação	Nível	Descritor de desempenho
	Proficiente	▪ Resolve problemas que integram atividades de programação, folhas de cálculo e ambientes de geometria dinâmica, enfrentando desafios de complexidade moderada. ▪ Desenvolve processos algorítmicos com pensamento estruturado e raciocínio lógico, aplicando estratégias apropriadas, de forma parcial ou com orientação. ▪ Envolve-se na formulação e resolução de problemas, identificando objetivos e decompondo tarefas, com orientação na avaliação das soluções. ▪ Desenvolve o pensamento computacional através da análise de algoritmos e de pequenos programas propostos, identificando padrões e relações simples.
Práticas Enriquecedoras e Criatividade	Avançado	▪ Participa de modo proativo na resolução de questões e problemas autênticos em contextos de interdisciplinaridade, integrando de forma consciente conceitos de STEAM (Ciências, Tecnologia, Engenharia, Artes e Matemática). ▪ Desenvolve atividades em contextos diversificados, utilizando recursos tecnológicos, estratégias de modelação e projetos colaborativos para explorar e aprofundar ideias matemáticas. ▪ Propõe soluções e ideias criativas e originais, explorando diferentes abordagens e refletindo criticamente sobre o impacto e a aplicabilidade das suas ideias em diferentes situações. ▪ Trabalha de forma autónoma e proativa com tarefas matemáticas enriquecedoras, incluindo problemas complexos, questões exploratórias, projetos interdisciplinares ou pesquisas aprofundadas. ▪ Resolve tarefas matemáticas de forma autónoma e proativa, identificando oportunidades para aplicar, aprofundar e integrar conhecimentos em contextos diversos e desafiantes, utilizando diferentes estratégias. ▪ Revela atitudes positivas e curiosidade intelectual, refletindo sobre a sua aprendizagem, propondo novas questões e explorando oportunidades de aprofundamento.

Domínio de avaliação	Nível	Descritor de desempenho
	Proficiente	▪ Participa na resolução de questões e problemas autênticos em contextos interdisciplinares, com orientação, reconhecendo ligações simples entre conceitos de STEAM (Ciências, Tecnologia, Engenharia, Artes e Matemática). ▪ Desenvolve atividades em contextos diversificados, utilizando recursos tecnológicos, estratégias de modelação ou trabalho de projeto, com algum apoio na organização e execução. ▪ Apresenta soluções e ideias criativas de forma guiada, refletindo de modo simples sobre a aplicabilidade ou relevância das suas propostas. ▪ Trabalha com tarefas matemáticas enriquecedoras sob a forma de um problema, uma questão exploratória, um exercício de aplicação, um pequeno projeto ou uma pesquisa de aprofundamento. ▪ Resolve tarefas matemáticas, aproveitando oportunidades para aplicar e ampliar conhecimentos, utilizando diferentes estratégias. ▪ Revela atitudes positivas em relação à disciplina.

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS (ACPA)



Para trabalhar todos os Temas, Tópicos e Subtópicos matemáticos das novas AE das disciplinas de Matemática A, Matemática B, MACS e Cursos Profissionais para o ensino secundário foram selecionadas algumas das Áreas de Competência do *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (PA).

As AE para as disciplinas de Matemática A, Matemática B, MACS e Matemática para os Cursos Profissionais para o ensino secundário evidenciam as conexões das competências do PA com cada tema. A construção das próprias AE foi feita tendo em vista essa articulação, fornecendo pistas, que se pretende que sejam óbvias, para que o PA seja concretizado efetivamente na sala de aula.

Apresenta-se uma listagem exemplificativa das áreas de competência do perfil dos alunos, em que é estabelecida uma ligação com os temas de aprendizagens matemáticas mais fortemente visados.

Linguagens e textos

Reconhece e utiliza linguagem simbólica.

Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática.

- Modelos matemáticos para cidadania (10.º ano)
- Modelos matemáticos em finanças (10.º ano)
- Modelos de grafos e populacionais (11.º ano)
- Probabilidade (11.º ano)
- Introdução à inferência estatística (11.º ano)

Informação e comunicação

Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avaliando, validando e organizando a informação recolhida.

Apresenta e explica conceitos em grupos, ideias e projetos diante de audiências reais, presencialmente ou a distância.

- Modelos matemáticos para cidadania (10.º ano)
- Estatística (10.º ano)
- Modelos matemáticos em finanças (10.º ano)
- Probabilidade (11.º ano)
- Introdução à inferência estatística (11.º ano)

Raciocínio e resolução de problemas

Coloca e analisa questões a investigar, distinguindo o que se sabe do que se pretende descobrir.

Gere projetos e toma decisões na resolução de problemas e analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas.

Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo.

- Modelos matemáticos para cidadania (10.º ano)
- Estatística (10.º ano)
- Modelos matemáticos em finanças (10.º ano)
- Modelos de grafos e populacionais (11.º ano)
- Probabilidade (11.º ano)
- Introdução à inferência estatística (11.º ano)

Pensamento crítico e pensamento criativo

Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões. Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido, no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade.

- Modelos matemáticos para cidadania (10.º ano)
- Estatística (10.º ano)
- Modelos matemáticos em finanças (10.º ano)
- Modelos de grafos e populacionais (11.º ano)
- Probabilidade (11.º ano)
- Introdução à inferência estatística (11.º ano)

Relacionamento interpessoal

Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos.

- Modelos matemáticos para cidadania (10.º ano)
- Estatística (10.º ano)

- Modelos matemáticos em finanças (10.º ano)
- Modelos de grafos e populacionais (11.º ano)
- Probabilidade (11.º ano)
- Introdução à inferência estatística (11.º ano)

Desenvolvimento pessoal e autonomia

É confiante, resiliente e persistente, construindo caminhos personalizados de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências.

- Modelos matemáticos em finanças (10.º ano)

Bem-estar, saúde e ambiente

Preocupa-se com a construção de um futuro sustentável e envolve-se em projetos de cidadania ativa.

- Modelos matemáticos para cidadania (10.º ano)
- Modelos de grafos e populacionais (11.º ano)

Saber científico, técnico e tecnológico

Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão.

Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos.

- Modelos matemáticos para cidadania (10.º ano)
- Estatística (10.º ano)
- Modelos matemáticos em finanças (10.º ano)
- Modelos de grafos e populacionais (11.º ano)

- Probabilidade (11.º ano)
- Introdução à inferência estatística (11.º ano)

Consulta pública 2026

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

A disciplina de MACS assume um papel estruturante no Curso de Línguas e Humanidades. As Aprendizagens Essenciais do 10.º ano integram uma vertente de formação matemática para a cidadania, em consonância com as restantes disciplinas de Matemática do ensino secundário. Esta vertente é concretizada nos temas de Eleições e Partilha, Literacia Financeira e Estatística. Os alunos a quem a esta disciplina se destina, estudam estes temas de uma forma mais aprofundada e integrada pela natureza do seu percurso académico e do papel esperado para a Matemática na sua formação enquanto cidadãos.

No 11.º ano as Aprendizagens Essenciais de MACS preconizam o aprofundamento do estudo de modelos matemáticos que permitem descrever e analisar a realidade, nomeadamente modelos de grafos e modelos populacionais. É ainda proposto uma ampliação do pensamento estatístico pela abordagem de modelos de probabilidade em casos discretos e contínuos e de uma introdução à inferência estatística.

O trabalho de projeto assume uma dimensão relevante, surgindo explicitamente no 10.º ano e no 11.º ano. Em cada um destes anos deverá ser desenvolvido pelo menos um dos projetos propostos, mas poderá ser também uma proposta de trabalho em qualquer tema que o professor considere adequado.

As Aprendizagens Essenciais relativas a MACS do Curso de Línguas e Humanidades concretizam-se em dois documentos distintos. A organização das Aprendizagens Essenciais, que a seguir se detalha, é apresentada em três áreas:

- *Temas, Tópicos e Subtópicos matemáticos*, em que são identificados os conceitos matemáticos a abordar.
- *Objetivos de aprendizagem: conhecimentos, capacidades e atitudes que o aluno deve revelar*, em que são concretizadas, para cada tópico matemático, as aprendizagens visadas com a indicação do foco e da especificação preconizada.
- *Ações estratégicas de ensino do professor*, onde é clarificado o papel do professor e as indicações metodológicas que são consideradas adequadas para atingir os objetivos de aprendizagem definidos, bem como a sugestão de exemplos para a

concretização das atividades a propor aos alunos. São também dadas indicações para clarificar os níveis de dificuldade que se consideram parte integrante destas Aprendizagens Essenciais.

Para cada tema são incluídas notas clarificadoras, nomeadamente no que se refere à sugestão de: atividades para o desenvolvimento do Pensamento Computacional, com recurso a exemplos; propostas de possíveis aprofundamentos de alguns temas ou de abordagens alternativas; referências bibliográficas que incluem documentos e recursos para apoio ao trabalho do professor.

A ordem dos temas apresentados, nestas Aprendizagens Essenciais, constitui um exemplo de uma sequência que se considera adequada no âmbito do processo de gestão e desenvolvimento do currículo.

Na tabela abaixo apresenta-se uma possível distribuição dos tempos letivos pelos tópicos das Aprendizagens Essenciais, tomando como referência vinte e oito semanas letivas, num total de trinta e duas ou trinta e três semanas previstas usualmente no calendário escolar. Considerou-se cada semana com seis tempos letivos de cinquenta minutos.

Temas	Tópicos	Aulas (50 min)	Semanas
Modelos de grafos e populacionais	Introdução aos grafos	6	12
	Grafos de Euler	12	
	Grafos de Hamilton	12	
	Modelos populacionais	12	
	Crescimento linear, exponencial, logarítmico e logístico	18	
	[Trabalho de projeto]	12	

Temas	Tópicos	Aulas (50 min)	Semanas
Probabilidade	Fenómeno aleatório	2	9
	Probabilidade	16	
	Probabilidade condicionada	12	
	Modelos de probabilidade em espaços finitos	12	
	Modelo normal	12	
Introdução à inferência estatística	Introdução à inferência estatística	12	7
	Distribuição de uma amostragem estatística	16	
	Intervalos de confiança	14	
		Total	28

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
Modelos de grafos e populacionais	Introdução aos grafos - desenvolver competências para identificar o essencial de uma determinada situação de modo a desenhar esquemas apropriados para modelar problemas de logística; - familiarizar os alunos com as noções de vértice, de aresta, laço, vértice isolado e vértices adjacentes de um grafo; - indicar a ordem de um grafo e o grau de um vértice; - identificar caminho e circuito.	- Proporcionar aos alunos a interpretação de situações reais que possam ser representadas por um sistema de pontos e linhas, unindo alguns desses pontos. - Introduzir as definições e as notações à medida que forem sendo necessárias e úteis para economia e clareza da linguagem e estas devem ser inteligíveis no âmbito das situações em estudo. - Utilizar os problemas históricos, nomeadamente como motivação para atividades de consulta e de metodologia de projeto. - Incentivar a análise e a modelação de situações concretas nas comunidades envolventes/locais para terem oportunidade de apresentarem propostas de melhoria aos responsáveis.
	Grafos de Euler - conhecer as condições para um grafo admitir um circuito de Euler; - conhecer e aplicar o Teorema de Euler; - identificar as condições para um grafo admitir um caminho euleriano; - reconhecer as condições para eulerizar um grafo.	- Explorar o problema das pontes de Königsberg pelo papel relevante na história da teoria dos grafos, e em particular no conceito de grafo de Euler. - Apresentar situações que sejam modeladas por grafos (sistemas de distribuição, carteiros, patrulhamento e controle de equipamentos sociais, parcometros, sistemas de recolha de lixo e de limpeza de ruas, ...) e analisar a relevância do Teorema de Euler neste contexto. - Propor problemas com níveis de exigência mais elevada que justifiquem a necessidade e vantagem de introduzir noções e técnicas. Por exemplo, um problema de patrulhamento e controle de

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
		equipamentos sociais pode ir desde procurarem quaisquer caminhos possíveis, passando por encontrar caminhos sem repetir ruas, até à necessidade de caminhos sem repetições a começar e a acabar num mesmo ponto.
	Modelos populacionais familiarizar os alunos com a diversidade de modelos de crescimento populacional, entre os quais o linear, exponencial, logarítmico e logístico.	Promover discussões sobre a modelação de fenómenos relevantes em contextos variados em que a modelação permite formular previsões ou contribuir para a tomada de decisões como por exemplo a evolução da população mundial, a cobertura nacional e mundial de acesso à Internet ou a evolução do número de carros elétricos.
	Crescimentos linear, exponencial, logarítmico e logístico - comparar os crescimentos linear, exponencial, logarítmico e logístico; - selecionar o modelo adequado a um fenómeno considerando os dados disponíveis e a previsível variação em função do tempo; - compreender as limitações da adequação de modelos teóricos a situações reais.	- Conduzir os alunos na identificação situações que possam ser modeladas por modelos linear, exponencial, logarítmico e logístico, clarificando as características de cada modelo que favorecem a sua adequação à situação selecionada, e as limitações do modelo. - Recorrer a séries temporais de dados estatísticos disponíveis em bases de dados de acesso livre (por exemplo Pordata) para ajustar modelos, por regressão estatística, a diferentes conjuntos de dados, acompanhada da discussão da adequação do modelo ao objetivo definido em cada situação. - Promover a comparação da modelação da mesma situação através de modelos diferentes, explicitando as vantagens de cada opção.

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	Aprofundamento do estudo dos modelos de grafos ou populacionais com trabalho de projeto (*) ▪ aplicar e aprofundar conceitos e processos associados aos modelos de grafos ou populacionais a num problema contextualizado, desenvolvendo competências de representação e comunicação matemática; ▪ desenvolver hábitos de pesquisa; ▪ interpretar de forma crítica informação, modelos e processos; ▪ conhecer, aplicar e criar modelos de grafos ou populacionais, tirando partido da tecnologia; ▪ desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.	▪ Alargar o leque de exemplos a estudar recorrendo a exemplos históricos significativos (teoria malthusiana) ou a contextos de variação de preços de um produto, a evolução da taxa de inflação ou outras situações com relevância local. ▪ Incentivar a exploração de situações em que os modelos discretos permitam uma melhor interpretação da situação em estudo. ▪ Incentivar a utilização da representação gráfica do modelo para identificar valores concretos (objetos e imagens da função) recorrendo à resolução gráfica ou numérica de equações. ▪ Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões). ▪ Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório. ▪ Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia. ▪ Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta.

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
		▪ Estimular a discussão do tema de cada investigação que pode ser escolhido de escolhido de entre uma lista de opções, como por exemplo: ▪ colorir um mapa, aplicando o número cromático de um grafo; ▪ resolver problemas de sistemas de distribuição tais como: patrulhamento, distribuição de correio ou outros, de modo que se possam encontrar soluções que permitam encontrar caminhos sem repetir arestas, começando e terminando no mesmo vértice; ▪ modelar as interações entre os diferentes personagens de uma obra literária por meio de um grafo de arestas ponderadas; ▪ estudar populações afetadas por vírus, evolução de propagação de bactérias ou vírus ou crescimento bacteriano num laboratório, o crescimento de uma determinada espécie vegetal/animal sem ter em conta os recursos; ▪ aproximar através de um modelo a evolução de uma população (exemplo da freguesia local) ao longo de um século a partir dos dados disponíveis em sítios da Internet. ▪ Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática, ou o recurso à programação, sempre que for considerado relevante.

(*) Este tópico pode ser substituído por tópico idêntico noutros temas do 11.º ano tal como é exemplificado nas propostas apresentadas abaixo.

Pensamento Computacional

MODELOS DE GRAFOS

Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes e a estabelecer ordem entre eles. O reconhecimento de padrões na tarefa (ou situação) apresentada, ou em problemas semelhantes anteriormente resolvidos, poderá contribuir para facilitar a estruturação das etapas de resolução.

Podem ser desenhadas configurações para exploração, estabelecimento e testagem de conjecturas, com dois softwares gratuitos. São eles:

- [Grinvin http://www.grinvin.org/en/start.html](http://www.grinvin.org/en/start.html).
- [GEPHI - The Open Graph Viz Platform https://gephi.org](https://gephi.org).

MODELOS POPULACIONAIS

Para fomentar a visualização gráfica e a interpretação do crescimento dos diferentes tipos de funções pode-se recorrer a ferramentas computacionais, como por exemplo, o GeoGebra:

- Crescimento linear versus crescimento exponencial: <https://www.geogebra.org/m/c5jcwbdh>
- Funções Exponenciais e o Novo Coronavírus: <https://www.geogebra.org/m/hvkwdwv4>
- Curva de crescimento logístico: <https://www.geogebra.org/m/bhyvBC4j>
- Crescimento do leão marinho: <https://www.geogebra.org/m/n8caGQWf>

- Funciones exponencial y logarítmica: <https://www.geogebra.org/m/pXfHPKvH>
- Função Exponencial e Logarítmica: <https://www.geogebra.org/m/tquatedq>
- *Exponential and logistic growth*: <https://www.geogebra.org/m/qvy4fbrn>

Possíveis aprofundamentos

Podem ser introduzidos outros modelos de crescimento comuns como o do modelo de Gompertz, Obtido em:

- https://en.wikipedia.org/wiki/Gompertz_function
- <https://www.geogebra.org/m/rbxepcnd>
- <https://www.geogebra.org/m/d5dwwxss>

Bibliografia de referência

Abrantes, P. (1994). *Contagens, Grafos e Matrizes nos nossos programas?* Educação & Matemática, nº 30, p. 17-20.

Bernardes, A., Colaço, T. (1997). Sismos, exponenciais e logaritmos: uma proposta de modelação matemática. *Educação & Matemática*, n.º 43, p. 13-16.

Caraça, B. J. (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva.

COMAP (2016). *FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.

COMAP. (1999). *Geometry and its applications-Graph Models*. COMAP, Lexington: COMAP.

Devlin, K. (2002). *Matemática - A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Estrada, M. F. Sá, C., Queiró, J. F., Silva, M. C. & Costa, M. J. (2000). *História da Matemática*. Universidade Aberta.

Feiteira, R., & Pires, M. (2008). Grafos e Jogos. *Educação & Matemática*, n.º 97, p. 19-24.

Guia do Estudante (2020). *Coronavírus: o que é crescimento exponencial e como pode cair nas provas*. Editora Abril. Obtido de <https://guiadoestudante.abril.com.br/estudo/coronavirus-o-que-e-crescimento-exponencial-e-como-pode-cair-nas-provas/>.

Malkevitch, J. (1995). *Modelos de Grafos*. COMAP (tradução portuguesa da responsabilidade do DES, Lisboa, 1999). Obtido de <https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online>.

Matos, J. F., & Carreira, S. P. (1996). *Modelação e Aplicações no Ensino da Matemática*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Nápoles, S., (2018). O crescimento exponencial de populações: Euler ou Malthus?, *Rev. Ciência Elem.*, V6(2):041.

Pires, M., & Kravtchenko, V. (2007). Reflexões sobre o ensino de Grafos. *Educação & Matemática*, nº 93, p. 11-15.

Precatado, A., Guimarães, H. (2001). *Materiais para a aula de Matemática*. Lisboa: APM.

Sebastião e Silva, J. (1975-1978). *Compêndio de Matemática* (3 volumes). Lisboa: GEP.

Simões, M. (1999). *Teoria dos grafos - aplicações práticas* (edição da responsabilidade do DES, Lisboa). Obtido de <https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online>.

Teixeira, P. et al (1997). *Funções - 10º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

Teixeira, P. et al (1998). *Funções - 11º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

Teixeira, P. et al (1999). *Funções - 12º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

Torres, T. A. (2007). *Aplicações e modelação matemática com recurso à calculadora gráfica e sensores: um estudo com alunos do 12º ano de escolaridade*. Universidade do Minho, Instituto de Educação e Psicologia. Braga.

Torres, T. A., Coutinho, C. & Fernandes, J. (2008). Aplicações e Modelação Matemática com recurso à calculadora gráfica e sensores. *UNIÓN*, Sept. 2008, nº 15, p. 9 - 31. Obtido de <http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/8269>

Vieira, A.,; Veloso, E. & Lagarto, M. J. (org.) (1997). Relevância da História no Ensino da Matemática. História da Matemática - *Cadernos do GTHEM* - 1 APM. Lisboa: APM.

Proposta

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	Aprofundamento do estudo de Inferência Estatística em trabalho de projeto ▪ aplicar e aprofundar conceitos e processos associados aos modelos de grafos ou populacionais a num problema contextualizado, desenvolvendo competências de representação e comunicação matemática; ▪ desenvolver hábitos de pesquisa; ▪ interpretar de forma crítica informação, modelos e processos;	▪ Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões). ▪ Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório. ▪ Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia. ▪ Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta.

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	- conhecer, aplicar e criar modelos de grafos ou populacionais, tirando partido da tecnologia; - desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.	- Estimular a discussão do tema de cada investigação que pode ser escolhido de entre uma lista de opções, como por exemplo: - estimar a proporção de alunos que almoçam na cantina da escola num certo dia da semana; - prever os resultados eleitorais para a Associação de Alunos; - conhecer os hábitos de reciclagem dos agregados familiares dos alunos da escola; - estimar o atraso de uma certa carreira de autocarro de um determinado horário. - Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática, ou o recurso à programação, sempre que for considerado relevante.

Bibliografia de referência

Abrantes, P. (1994). O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática: a experiência do projecto mat789. (Tese de Doutoramento). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Amado, N. & Carreira, S. (2019). Trabalho de Projeto. Obtido de: <http://hdl.handle.net/10400.1/15482>.

George Lucas Educational Foundation (2021). Project-Based Learning (PBL). Obtido de: <https://www.edutopia.org/project-based-learning>.

Mestre, A. P. (2011). Histórias com matemática: trabalho de projecto no 2º ciclo do ensino básico. (Dissertação de Mestrado). Obtido de: <http://hdl.handle.net/10400.1/6872>.

Ponte, J. P., Brunheira, L., Abrantes, P., & Bastos, R. (1998). *Projetos Educativos: matemática - ensino secundário*. Ministério da Educação.

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
Probabilidade	Fenómeno aleatório - distinguir entre fenómeno aleatório e não aleatório (determinístico); - compreender que as realizações individuais de um fenómeno aleatório são incertas, mas existe um padrão genérico de comportamento, recorrendo-se à Teoria da Probabilidade para construir modelos matemáticos que descrevam a regularidade estatística observada numa longa série de repetições do fenómeno.	Recorrer a situações em contextos variados, para sensibilizar os alunos para a existência destes fenómenos, nomeadamente através de exemplos de fenómenos físicos, com leis determinísticas (movimento de um carro; queda de uma maçã do alto de uma torre) e de exemplos de fenómenos que se podem considerar aleatórios pela dificuldade em arranjar uma lei física para os descrever (número de irmãos de um aluno da escola, escolhido ao acaso; face do dado que fica virada para cima quando se lança; temperatura máxima a observar numa data futura).
	Experiência aleatória Espaço de resultados ou espaço amostral Modelo de probabilidade Acontecimentos União e interseção de acontecimentos - compreender que: - à realização de um fenómeno aleatório se dá o nome de experiência aleatória;	Salientar que os modelos de probabilidade são modelos matemáticos que descrevem os fenómenos aleatórios;

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	▪ ao conjunto S de resultados possíveis se dá o nome de espaço de resultados ou espaço amostral; ▪ um acontecimento é um subconjunto do espaço de resultados e que a estes resultados se dá o nome de “resultados favoráveis” à realização do acontecimento; ▪ a descrição do fenómeno aleatório é feita através de um modelo de probabilidade, constituído pelos resultados possíveis e a probabilidade atribuída a cada resultado. ▪ relembrar os conceitos: acontecimento certo, impossível, elementar e composto; acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos; acontecimentos contrários ou complementares; união e interseção de acontecimentos.	▪ Realçar que para construir um modelo de probabilidade tem que se recorrer a um processo que permita atribuir probabilidades aos acontecimentos elementares.
	Probabilidade Probabilidade frequencista ▪ compreender que a característica do fenómeno aleatório permite definir, intuitivamente, a probabilidade de um acontecimento A,	▪ Iniciar o estudo deste tema com modelos de probabilidade simples, com espaços de resultados finitos, nomeadamente os que descrevem os chamados “jogos de sorte e azar”. Por exemplo, intuitivamente, espera-se que ao fim de muitas repetições do lançamento do dado,

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	representada por $P(A)$, como sendo o valor para o qual estabiliza a frequência relativa da realização de A, num grande número de repetições da experiência aleatória, nas mesmas condições, ou seja, $P(A)$ é o valor em que estabiliza $\frac{n_A}{n}$, onde n_A representa o número de vezes que se realizou A em n repetições da experiência aleatória. Regras da probabilidade - reconhecer que as probabilidades associadas aos acontecimentos elementares têm de ser números entre 0 e 1 e que a soma total deve ser 1; - reconhecer que a probabilidade de um acontecimento é igual à soma das probabilidades dos acontecimentos elementares constituídos pelos resultados que o compõem. Probabilidade da união de acontecimentos - utilizar a representação dos acontecimentos em diagramas de Venn, para mostrar que, dados dois acontecimentos A e B quaisquer, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;	cada uma das faces saia aproximadamente 16,6(6)% das vezes. Alguns acontecimentos, associados com esta experiência, são: “sair uma face com um n.º de pintas par”, “sair uma face com um n.º de pintas maior ou igual a 5”, “sair uma face com um n.º de pintas maior que 6”, etc.

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	Regra de Laplace - reconhecer que se admite que os acontecimentos elementares são equiprováveis quando não haja à partida razão para admitir que os resultados do espaço de resultados não tenham igual possibilidade de se verificarem; - compreender que quando se puder admitir que os acontecimentos elementares são equiprováveis, se pode utilizar a regra de Laplace para determinar a probabilidade de um acontecimento A, com o seguinte enunciado: $\text{Probabilidade de } A = \frac{\text{Número de resultados favoráveis a } A}{\text{Número de resultados possíveis}}$	- Propor a resolução de problemas que envolvam o cálculo de probabilidades recorrendo à regra de Laplace; - Realçar que uma vez definido o modelo de probabilidade se pode calcular a probabilidade de qualquer acontecimento associado ao fenómeno em estudo; - Alertar os alunos para o facto de que na vida real as situações mais frequentes são aquelas em que não é possível recorrer à regra de Laplace para calcular a probabilidade de acontecimentos, por exemplo: o tipo sanguíneo de uma pessoa escolhida ao acaso, de entre a população portuguesa, ou a eficácia de uma vacina.
	Probabilidade condicionada Definição saber que a probabilidade de um acontecimento A se realizar, condicionada ou sabendo que o acontecimento B se realizou, com $P(B) > 0$, se representa por $P(A B)$ e se	Conduzir os alunos a reconhecerem que em muitas situações em que se pretende calcular a probabilidade de um acontecimento, já se dispõe de alguma informação sobre o resultado da experiência, a qual permite atualizar a atribuição de probabilidade a esse acontecimento;

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	calcula de acordo com a seguinte fórmula: $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$	▪ Exemplificar com situações intuitivas, como a extração de bolas, de vários tipos, de uma caixa sucessivamente, sem reposição, em que a composição da caixa se altera, implicando que a probabilidade de se retirar uma bola depende dos tipos de bolas que saíram nas extrações anteriores.
	Regra do produto ▪ reconhecer que a partir da definição de probabilidade condicionada se pode definir a probabilidade simultânea de dois acontecimentos, chamada regra do produto, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B A)$ ou $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A B)$ conforme seja A ou B o acontecimento que está a condicionar.	
	Árvore de probabilidade ▪ reconhecer a utilidade de árvores de probabilidade para organizar a informação disponível sobre os acontecimentos em cadeia.	▪ Pedir aos alunos que calculem a probabilidade de ocorrência de cadeias simples de acontecimentos, utilizando árvores de probabilidade, como forma de organização da informação disponível.

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	Tabelas de contingência reconhecer a utilidade das tabelas de contingência para calcular a probabilidade condicionada.	
	Acontecimentos independentes: - identificar que os acontecimentos A e B, com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, são independentes quando a ocorrência de um deles não altera a probabilidade da ocorrência do outro, ou seja, $P(A B) = P(A)$ (A independente de B) ou $P(B A) = P(B)$ (B independente de A); - reconhecer que outra definição de independência consiste em dizer que os acontecimentos A e B são independentes se e só se $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. As duas definições de independência são equivalentes desde que se exija que $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$.	- Salientar que uma das situações mais simples para compreender intuitivamente o conceito de independência de acontecimentos está ligada à situação do lançamento de uma moeda. A moeda “não tem memória” e a probabilidade de sair “face nacional” no próximo lançamento não depende do que saiu nos lançamentos anteriores. Porém, no acontecimento “selecionar o nome de dois alunos do sexo masculino” de uma turma com 14 rapazes e 16 raparigas, a probabilidade de selecionar o segundo rapaz, depende da escolha do primeiro aluno (seleção sem reposição). - Promover a resolução de problemas em que se obtenha a probabilidade de um certo acontecimento B, quando são conhecidas as probabilidades de B condicionadas aos acontecimentos $(A_1, A_2, \dots, A_n)$, mutuamente exclusivos em que a sua união é igual ao espaço de resultados e são conhecidas as suas probabilidades, não nulas, utilizando: $P(B) = P(B A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B A_n) \cdot P(A_n)$

ORGANIZADOR	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS
Domínio	O aluno deve ficar capaz de:	(Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	Modelos de probabilidade em espaços finitos Variáveis aleatórias (discretas) Função massa de probabilidade - reconhecer que se podem associar números aos resultados de um fenómeno aleatório, através de uma função denominada variável aleatória (v.a.) e que construir um modelo de probabilidade para modelar um fenómeno aleatório, com espaço de resultados finito, é equivalente a construir a função massa de probabilidade (f.m.p.) da variável aleatória associada; - identificar a população com a variável aleatória associada e reconhecer que construir a f.m.p. é obter um modelo para a população; - reconhecer que a f.m.p. permite calcular a probabilidade de acontecimentos, relacionados com a realização do fenómeno modelado.	- Exemplificar e orientar os alunos na construção de modelos de probabilidade simples, nomeadamente o que descreve o resultado do lançamento de um dado equilibrado, em que se define a variável aleatória X, que associa a cada face do dado, o seu número de pintas. - Destacar a situação do lançamento de dois dados em que se pretende modelar o fenómeno aleatório que consiste em observar a soma das pintas dos dois dados e chamar a atenção para que embora o número de resultados possíveis seja igual a 11, a probabilidade de cada um não é $\frac{1}{11}$.

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	Valor médio e desvio padrão populacional - reconhecer que dois dos parâmetros, características numéricas da população, mais importantes são o valor médio (média populacional) e o desvio padrão populacional, e saber que estes parâmetros se representam pelas letras gregas μ (miu) e σ (sigma), respetivamente; - compreender o paralelismo entre valor médio μ e a média $\bar{x}$ e também, de modo idêntico, para o desvio padrão populacional σ e desvio padrão (amostral) s, e outras medidas calculadas para a população e para a amostra; - calcular o valor médio e o desvio-padrão populacional de uma variável aleatória de suporte finito, a partir da f.m.p.	- Propor o cálculo do valor médio e do desvio padrão, recorrendo à f.m.p. em exemplos como o do lançamento do dado e de outros modelos como seja, a extração de bolas de um saco com e sem reposição. - Salientar que a fórmula utilizada para calcular o valor médio é semelhante à fórmula utilizada para calcular a média com os dados discretos agrupados em tabelas de frequências relativas, destacando a interpretação frequencista da probabilidade, em que as frequências relativas são interpretadas como probabilidades. - Orientar na interpretação do valor médio, utilizando exemplos associados a jogos.
	Modelo Normal reconhecer o modelo ou distribuição Normal, de suporte contínuo, como um dos modelos de probabilidade mais importantes para a modelação de fenómenos aleatórios.	Salientar que é necessário alargar o conceito de modelo de probabilidade a situações onde o espaço amostral não seja finito, como por exemplo, o “n.º de carros que passam numa determinada portagem das 8h às 9h”, em que se considera como suporte do modelo os números naturais, ou o comprimento do salto de um atleta, em que o suporte da variável comprimento é $\mathbb{R}^+$;

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
		▪ Destacar que o modelo Normal é, dos modelos contínuos, o mais conhecido para estudar variáveis aleatórias de suporte contínuo, como, por exemplo, a “altura” ou o “peso” de um indivíduo adulto; ▪ Salientar que vários cientistas, ao trabalharem com dados, obtinham histogramas cuja população poderia ser modelada por um modelo Normal. Este modelo é a base de muitos dos processos de inferência estatística clássica.
	Propriedades ▪ identificar que as curvas que representam esta família de modelos são simétricas, com o aspeto de um sino, e que cada distribuição Normal fica definida através dos parâmetros valor médio μ e desvio padrão σ; ▪ saber que o valor médio determina o eixo de simetria da distribuição e que a distância entre o valor médio e as abcissas dos pontos de mudança de curvatura é igual ao desvio padrão; ▪ calcular probabilidades com base nesta família de modelos.	▪ Salientar a curva em forma de “sino” como representativa do modelo Normal, bem como o significado nessa curva dos valores da probabilidade associados a intervalos. ▪ Utilizar a tecnologia para calcular probabilidades, com base no modelo Normal, associadas a quaisquer intervalos.

Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles. O reconhecimento de padrões na tarefa (ou situação) apresentada ou em problemas semelhantes, anteriormente resolvidos, poderá contribuir para facilitar a estruturação do algoritmo a desenvolver. Antes de redigir o programa na linguagem *Python*, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Exemplo de programa em *Python* para simular lançamentos de 1 dado cúbico, numerado de 1 a 6, e o registo das frequências relativas referentes à saída de cada face:

```
import random
n=int(input("Quantos lançamentos queres simular?"))
f1=0
f2=0
f3=0
f4=0
f5=0
f6=0
for i in range(0,n):
    r=random.randint(1, 6)
    if r==1:
        f1=f1+1
    elif r==2:
```

```
f2=f2+1
elif r==3:
    f3=f3+1
elif r==4:
    f4=f4+1
elif r==5:
    f5=f5+1
elif r==6:
    f6=f6+1
print("Freq. relativa da saída da face 1 = "+str(f1/n))
print("Freq. relativa da saída da face 2 = "+str(f2/n))
print("Freq. relativa da saída da face 3 = "+str(f3/n))
print("Freq. relativa da saída da face 4 = "+str(f4/n))
print("Freq. relativa da saída da face 5 = "+str(f5/n))
print("Freq. relativa da saída da face 6 = "+str(f6/n))
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Possíveis aprofundamentos

Estudar alguns modelos de probabilidade discretos, tais como o Uniforme em n pontos, o Binomial(n,p) e o Poisson(λ), assim como os modelos contínuos, o Uniforme no intervalo $[a,b]$ e o Exponencial(λ).

Explorar a utilização da tecnologia para simular determinados acontecimentos e utilizar a aproximação frequencista da probabilidade para estimar a probabilidade desses acontecimentos.

Explorar o problema das três portas (Monty Hall).

Bibliografia de referência

ALEA - Noções de Probabilidade, obtido de:

https://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=132&Itemid=1204&lang=pt.

COMAP (2016). *FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.

Graça Martins, M. E. & Cerveira, A. (1998). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Universidade Aberta.

Graça Martins, M. E. et al. (1999). *Probabilidades e Combinatória*. Ministério da Educação/Departamento do Ensino secundário.

Graça Martins, M. E. (2005). *Introdução à Probabilidade e à Estatística, com complementos de Excel*. Sociedade Portuguesa de Estatística.

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
Introdução à inferência estatística	Introdução à inferência estatística Raciocínio indutivo ou inferencial compreender que o raciocínio indutivo ou inferencial se utiliza quando se pretende estudar uma população, analisando só alguns elementos dessa população, ou seja uma amostra, e que a partir das propriedades verificadas na amostra, se inferem propriedades para a população.	- Recorrer a contextos variados, que levem os alunos a tomar consciência de situações aleatórias, em que é necessário tomar decisões sobre populações, a partir de alguma informação recolhida dessas populações, na forma de dados. - Orientar os alunos na leitura da ficha técnica que acompanha o resultado de uma sondagem, alertando que a tomada de decisões tem um erro associado, que vai ser contabilizado em termos de probabilidade.
	Parâmetro e estatística - conhecer que parâmetro é uma característica numérica da população e que estatística é uma característica numérica da amostra; - compreender que um dos objetivos pretendidos ao recolher uma amostra da população, que se pretende estudar, é tirar conclusões sobre os parâmetros dessa população, considerando-se funções adequadas, estatísticas, que só dependem dos elementos da amostra.	Salientar que o parâmetro é uma característica numérica da população, (normalmente desconhecida) enquanto a estatística é uma característica numérica da amostra (que se pode calcular). Exemplificar situações, como por exemplo, a média das alturas de todos os portugueses adultos, que é um parâmetro, enquanto a média das alturas de uma amostra é uma estatística, ou a proporção de eleitores decididos a votar em determinado candidato presidencial, que é um parâmetro, e a proporção de eleitores, que numa amostra, disseram ir votar nesse candidato, é uma estatística.

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	Estimador e estimativa saber que a estatística utilizada para estimar um parâmetro também se dá o nome de estimador e que ao valor do estimador para uma determinada amostra também se chama estimativa.	Chamar a atenção dos alunos que o termo “estatística” se utiliza tanto para referir uma função das amostras, o estimador ($\bar{X}$) como o valor observado dessa função para uma determinada amostra que tenha sido selecionada, a estimativa ($\bar{x}$).
	Amostras aleatórias - compreender que é necessário recolher uma amostra aleatória, quando se pretende utilizá-la para retirar conclusões para a população subjacente, pois só assim será possível utilizar a probabilidade para quantificar o erro cometido ao inferir para a população, os resultados aí verificados; - compreender que os processos de seleção da amostra podem ser sem reposição ou com reposição; - compreender que o processo da seleção da amostra é o primeiro passo importante para uma inferência estatística eficiente.	- Orientar os alunos na recolha de uma amostra, necessariamente aleatória, quando se pretende utilizá-la para estimar um parâmetro. Realçar que o valor do estimador depende da amostra considerada, podendo-se obter tantas estimativas diferentes, quantas as amostras consideradas, da mesma dimensão, sendo esta variabilidade inerente à aleatoriedade da escolha da amostra. - Exemplificar a construção da distribuição de amostragem do estimador da proporção de homens numa população constituída por 3 mulheres e 2 homens, recolhendo amostras de dimensão 2. - Conduzir, dada uma certa população, à obtenção da distribuição de amostragem da média, quando se pretende estimar o valor médio dessa população, utilizando a tecnologia gráfica para simular a recolha de amostras de determinada dimensão.

ORGANIZADOR	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS
Domínio	O aluno deve ficar capaz de:	(Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	Distribuição de amostragem de uma estatística compreender que para averiguar da eficácia de um estimador para estimar um parâmetro, é necessário conhecer a sua distribuição de amostragem, ou seja, a distribuição dos valores obtidos pelo estimador, quando se consideram todas as amostras possíveis (da mesma dimensão), utilizando um determinado esquema de amostragem.	Chamar a atenção dos alunos para a existência de duas fórmulas para calcular o desvio-padrão amostral, obtido a partir das fórmulas para a variância amostral: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ e $S'^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$ e explicar que a razão da utilização da primeira, é ser a que fornece melhores estimativas quando se está a estimar o desvio-padrão populacional σ.
	Distribuição de amostragem da média Teorema Limite Central (TLC) - compreender que a distribuição de amostragem de um estimador depende da dimensão das amostras consideradas e apresentará tanto menor variabilidade, quanto maior for a dimensão das amostras; - compreender a utilização do Teorema Limite Central (TLC) na obtenção da distribuição de amostragem da média, quando se consideram amostras aleatórias de dimensão suficientemente grande, legitimando a	- Salientar que obter a distribuição de amostragem da média seria uma tarefa, a maior parte das vezes, impossível, pois teria de se calcular o valor da média para todas as amostras aleatórias de determinada dimensão, de populações de grandes dimensões ou eventualmente infinitas. Esta situação é resolvida pelo TLC, segundo o qual o modelo Normal é uma aproximação para a sua distribuição de amostragem, independentemente da forma da distribuição da população subjacente, - Exemplificar a recolha de várias amostras aleatórias, da mesma dimensão, calculando o valor da média para cada uma delas e explorar esta situação, chamando a atenção para a impossibilidade de saber qual das estimativas se deve utilizar, para estimar o

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	utilização do modelo Normal e a utilização da média como estimador do valor médio μ. Estimativas pontuais e estimativas intervalares - reconhecer as limitações das estimativas pontuais, na medida em que, devido à variabilidade amostral, podem apresentar tantos valores diferentes quantas as amostras utilizadas para as obter. Intervalos de confiança Intervalo de confiança, para o valor médio, com uma confiança de 95%: - utilizar o modelo Normal como aproximação da distribuição de amostragem do estimador média, para estimar o valor médio μ, desconhecido, de uma população com desvio padrão σ, para obter a seguinte probabilidade $P\left(\bar{X} - 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0,95$ e chamar ao intervalo $\left[\bar{x} - 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ um intervalo de 95% de confiança para μ, em que se substitui o parâmetro σ, quando desconhecido, pelo desvio-padrão amostral s.	parâmetro valor médio, desconhecido, da população subjacente às amostras consideradas.

ORGANIZADOR	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS								
Domínio	O aluno deve ficar capaz de:	(Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)								
	Intervalo de confiança, para o valor médio, com outros níveis de confiança: 90% e 99%: ▪ adaptar o intervalo de confiança anterior para os níveis de confiança de 90% e 99%, substituindo 1,96 respetivamente pelos valores 1,645 e 2,576.									
	Margem de erro: ▪ saber que a margem de erro é igual a metade da amplitude do intervalo de confiança.	▪ Explorar a relação entre a margem de erro, a confiança e a dimensão da amostra a recolher, para construir a estimativa intervalar.								
	Intervalo de confiança para a proporção (populacional) p ▪ reconhecer que a proporção (populacional) p, é um caso particular do valor médio de uma população constituída por uns e zeros, conforme a característica que se está a estudar está ou não presente na população e que o estimador que se utiliza é a proporção amostral, que se representa por $\hat{p}$;	▪ Orientar os alunos na obtenção do intervalo de confiança para a proporção p, admitindo que o modelo de probabilidade para a população X é <table><tr><td>X</td><td>1</td><td>0</td><td>Valor médio de $X = p$</td></tr><tr><td>Probabilidade</td><td>p</td><td>$1 - p$</td><td>Variância de $X = p(1 - p)$</td></tr></table> ▪	X	1	0	Valor médio de $X = p$	Probabilidade	p	$1 - p$	Variância de $X = p(1 - p)$
X	1	0	Valor médio de $X = p$							
Probabilidade	p	$1 - p$	Variância de $X = p(1 - p)$							

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	saber fazer uma leitura adequada da informação veiculada pela comunicação social quando apresentam resultados de sondagens, na forma de intervalos de confiança.	

Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles. O reconhecimento de padrões na tarefa (ou situação) apresentada ou em problemas semelhantes, anteriormente resolvidos, poderá contribuir para facilitar a estruturação do algoritmo a desenvolver. Antes de redigir o programa na linguagem Python, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Exemplo de programa em Python para explorar a noção de intervalo de confiança. Extraem-se sucessivas amostras, com a mesma dimensão, de uma população com distribuição Normal $N(0,1)$ e para cada uma delas apresenta-se o intervalo de 95% de confiança para o valor médio. Pode verificar-se que este intervalo depende da amostra e que nem sempre contém o valor médio da população. Pode também fazer-se variar a dimensão das amostras, o nível de confiança e comparar as amplitudes dos intervalos.

```
import random
import statistics
import math

num_amostras=100
dim_amostra=20

for i in range(num_amostras):
    amostra=[random.normalvariate(0,1) for k in range(dim_amostra)]
    vmedio=statistics.mean(amostra)
    desvio_padrao=statistics.stdev(amostra)
    d=1.96*desvio_padrao/math.sqrt(dim_amostra)
    print('O intervalo de 95% de confiança para o valor médio é [' ,vmedio-d,',',vmedio+d ,']')
```

Nota: O programa foi criado em *Python* 3.11.0 para computador.

Possíveis aprofundamentos

Estudar a relação entre a margem de erro e a dimensão da amostra utilizada.

Bibliografia de referência

Alea - Introdução à Inferência Estatística, obtido de

http://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=133&Itemid=1205&lang=pt.

COMAP (2016). FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World. New York: W. H. Freeman and Company.

Graça Martins, M. E. & Loura, L. (2002). Estatística, Modelos de Probabilidade e Introdução à Inferência Estatística (edição da responsabilidade do DES, Lisboa). Obtido de <https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online>.

Graça Martins, M. E. (2005). Introdução à Probabilidade e à Estatística, com complementos de Excel. Sociedade Portuguesa de Estatística.

ARTICULAÇÃO COM AS DIMENSÕES DA EDUCAÇÃO PARA A CIDADANIA

A Matemática contribui para a implementação da componente curricular de Cidadania e Desenvolvimento sempre que os conhecimentos, capacidades e atitudes são mobilizados de forma intencional para a compreensão crítica de realidades e desafios da sociedade. Neste sentido, o trabalho desenvolvido no âmbito das aprendizagens da Matemática pode favorecer uma reflexão informada sobre questões relacionadas com os Direitos Humanos, a Democracia e as Instituições Políticas, o Desenvolvimento Sustentável, a Literacia Financeira e o Empreendedorismo, a Saúde, o Risco e a Segurança Rodoviária, o

Pluralismo e a Diversidade Cultural e os *Media*, promovendo uma participação cívica consciente, responsável e fundamentada.

No entanto, embora alguns temas ou domínios possam constituir oportunidades particularmente evidentes para esta articulação, a relação entre as Aprendizagens Essenciais e as dimensões da Educação para a Cidadania não se limita a conteúdos específicos.

As competências desenvolvidas no âmbito das aprendizagens da Matemática, como a análise crítica e o tratamento da informação, a interpretação de diferentes perspetivas, a argumentação fundamentada, a resolução de problemas, a comunicação de ideias, o pensamento crítico e criativo, a colaboração e a reflexão sobre diferentes realidades, constituem elementos fundamentais para a concretização dos objetivos definidos na Estratégia Nacional de Educação para a Cidadania.

Assim, com o objetivo de apoiar a articulação entre as Aprendizagens Essenciais da Matemática e a componente curricular de Cidadania e Desenvolvimento, apresentam-se algumas propostas de exploração, sem prejuízo de outras que a escola, no âmbito da sua autonomia, considere pertinentes.

Direitos Humanos	▪ Analisar os desafios globais e temas controversos de Direitos Humanos.
Democracia e Instituições Políticas	▪ Conduzir os alunos na reflexão da importância da participação de cada cidadão na eleição dos seus representantes (delegado de turma, associação de alunos, poderes políticos, ...).

Pluralismo e Diversidade Cultural	▪ Estimular a discussão e a reflexão sobre os seguintes temas: ▪ O Papel da Mulher na Sociedade; ▪ Somos oito mil milhões. Como estamos distribuídos? ▪ Refletir, criticamente, sobre desafios atuais da democracia, como o discurso de ódio, a corrupção, o populismo, entre outros.
Media	▪ Analisar dados apresentados em representações gráficas, verificando como a informação está apresentada pode influenciar a mensagem, avaliando a veracidade da informação com base em fontes credíveis e reconhecer a importância das tecnologias e dos <i>media</i> na sociedade.
Desenvolvimento Sustentável	▪ Estimular a discussão e reflexão sobre os seguintes temas: ▪ Alterações climáticas. Os negacionistas têm razão ou há estatísticas a provar que não? ▪ Como estão os nossos oceanos? (<i>Plasticus maritimus</i>, Planeta tangerina,...).

Cabe ao professor de Matemática em articulação com os restantes elementos do conselho de turma, tendo em consideração o projeto educativo da escola, o currículo (incluindo os projetos assumidos pelo conselho de turma) e outros aspetos que caracterizam o contexto local, definir os percursos pedagógicos mais adequados, que contribuam para a concretização da componente curricular de Cidadania e Desenvolvimento.