

REPÚBLICA
PORTUGUESA

EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO



EduQA

Instituto de
Educação, Qualidade
e Avaliação

11.º ANO | ENSINO SECUNDÁRIO

Matemática A

INTRODUÇÃO

As Aprendizagens Essenciais (AE) constituem a referência nacional comum para aquilo que todos os alunos devem aprender ao longo da escolaridade obrigatória. Representam um núcleo fundamental de conhecimentos, capacidades e atitudes que cada disciplina deve assegurar, funcionando como um denominador curricular comum, sem esgotar o conjunto total de aprendizagens possíveis. Embora obrigatórias não limitam a possibilidade de aprender mais. As AE deixam espaço para que cada escola e cada aluno possam aprofundar conteúdos e desenvolver competências adicionais.

Enquanto documentos de orientação curricular, as AE servem de base à planificação, realização e avaliação do ensino e da aprendizagem. Contribuem diretamente para o desenvolvimento das áreas de competências definidas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória. Por essa razão, constituem, juntamente com o Perfil, o referencial para a avaliação externa.

Organizam-se em três componentes fundamentais:

1. O que os alunos devem saber – conteúdos estruturados, indispensáveis, articulados concetualmente, relevantes e significativos;
2. Como devem pensar e trabalhar para aprender – processos cognitivos e operações essenciais à aquisição do conhecimento;
3. Como devem mostrar o que aprenderam – o “saber fazer”, aplicado dentro de cada disciplina e em articulação horizontal com as restantes.

Em síntese, as Aprendizagens Essenciais asseguram que o currículo é claro, coerente e acessível, combinando conteúdos sólidos com processos cognitivos que permitem aos alunos compreender, aplicar e aprofundar o que aprendem.

Matemática Escolar Orientada para o Futuro

A formação de indivíduos matematicamente competentes é um propósito fundamental do currículo de matemática para o Ensino Secundário. A sociedade e o mundo contemporâneos, marcados pela globalização, crescente digitalização, conectividade e automatização, e por uma aceleração do desenvolvimento tecnológico, enfrentam desafios nos quais o conhecimento matemático adquire um papel essencial, proporcionando conceitos, métodos, modelos e formas de pensar. Esse poder matemático deve ser parte integrante da educação de todos os cidadãos, incluindo conhecimentos e capacidades que os jovens transportarão para a sua vida pessoal, social e profissional.

Empreender uma formação matemática abrangente e inovadora, neste ciclo de escolaridade, significa desenvolver nos alunos a capacidade de identificar conceitos matemáticos relevantes para resolver problemas reais, aplicar procedimentos matemáticos adequados e interpretar os resultados em contextos diversos. O raciocínio matemático está na base dos processos de compreensão dos

conceitos e objetos matemáticos, que podem e devem ser analisados, representados e relacionados de diferentes formas. São igualmente importantes a formulação de hipóteses, a testagem de conjecturas, a dedução, a generalização e a abstração, na construção de argumentos lógicos e conclusões, cuja comunicação de forma apropriada é cada vez mais importante no mundo atual.

O currículo consagra o propósito de preparar os alunos para formularem juízos e tomarem decisões fundamentadas, contribuindo para que se tornem cidadãos reflexivos, empenhados e participativos. Visa também contribuir para que os jovens valorizem o papel da Matemática no mundo e o seu carácter de ciência em evolução e renovação permanente, apreciando a sua dimensão estética, a par do seu legado histórico.

Assim, o currículo de Matemática para o futuro orienta-se para o desenvolvimento de áreas de competências, à luz do que é preconizado no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, nomeadamente no que se refere ao pensamento crítico aliado à resolução de problemas, promovendo a criatividade e a comunicação, além de acentuar a pertinência do trabalho colaborativo.

Ideias Inovadoras do Currículo

Matemática para a Cidadania

O reconhecimento do Ensino Secundário como um ciclo que é parte integrante da formação geral dos jovens, incluído na escolaridade obrigatória, cria um contexto em que todas as disciplinas, incluindo a Matemática, devem contribuir para o desenvolvimento dos alunos enquanto cidadãos ativos, conscientes, informados e interventivos.

A crescente relevância do papel da Matemática na sociedade atual realça a importância e a necessidade de dotar os alunos de ferramentas matemáticas de análise dos processos sociais, que estão na base do exercício de uma cidadania ativa. Assim, estas Aprendizagens Essenciais exploram modelos matemáticos de processos eleitorais e a análise matemática de modelos financeiros e valorizam o desenvolvimento da literacia estatística.

Pensamento Computacional

Os aspetos comuns entre o Pensamento Matemático e o Pensamento Computacional, bem como a relevância atual do Pensamento Computacional na ciência e na sociedade, justificam que o currículo de Matemática valorize esta abordagem conceptual na resolução de problemas. As Aprendizagens Essenciais de Matemática A promovem o desenvolvimento de práticas como a abstração, a decomposição, o reconhecimento de padrões, a análise e definição de algoritmos, bem como a aquisição de hábitos de depuração e otimização dos processos envolvidos na atividade matemática. Deste modo, a aposta no Pensamento Computacional revela a aproximação do currículo às recomendações internacionais, designadamente em relatórios da União Europeia, e também o alinhamento com o currículo de Matemática do Ensino Básico, favorecendo o desenvolvimento desta capacidade de forma integrada, coerente e progressiva.

Diversificação de temas no currículo

Para além do desenvolvimento de competências dos alunos no âmbito da cidadania, pretende-se continuar a disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com os métodos numéricos, o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia, e a inclusão de temas com pouca tradição no Ensino Secundário em Portugal. Esta diversificação é intensificada no 12.º ano com a proposta de três temas em opção, possibilitando que turmas diferenciadas trabalhem temas matemáticos diferentes, podendo em algumas turmas, caso o tempo o permita, ser lecionado mais do que um dos temas opcionais propostos.

Matemática para todos

Assume-se que o currículo na escolaridade obrigatória deve dar resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos. Os formalismos e os níveis de abstração devem ser adequados ao trabalho desenvolvido em cada tema. Pretende-se que a matemática seja um contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias.

Ideias chave das Aprendizagens Essenciais

As Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Secundário dão continuidade às aprendizagens do Ensino Básico e assumem um conjunto de princípios e orientações metodológicas, cuja concretização e especificação é feita para cada ano de escolaridade e tema matemático. A seguir, enunciam-se e apresentam-se as nove ideias chave preconizadas nas Aprendizagens Essenciais, esquematizadas na Figura 1:



Figura 1 - Ideias chave das Aprendizagens Essenciais

Resolução de problemas, modelação e conexões

Dar sentido à Matemática e enfatizar a modelação e as aplicações

A resolução de problemas, tal como a modelação, devem constituir o contexto para o estabelecimento de conexões entre diferentes conceitos e áreas da Matemática, assim como entre a Matemática e outras áreas do saber, permitindo uma abordagem integrada e significativa para os alunos na sua atividade matemática. É fundamental que os alunos tenham contacto com o processo de modelação

matemática e sejam capazes de criticar, validar e aperfeiçoar modelos matemáticos. Preconizando a exploração de ideias e conceitos matemáticos, pretende-se que a aprendizagem não se reduza à memorização de regras, ao treino de procedimentos ou à sua execução sem compreensão. É essencial que as definições, os resultados e os procedimentos matemáticos adquiram sentido e que os alunos os saibam mobilizar e aplicar adequadamente para resolver problemas do mundo real, em situações do dia-a-dia ou de outras disciplinas. Uma das áreas de competências no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, fortemente ligada à Matemática - Raciocínio e resolução de problemas - implica que os alunos sejam capazes de: i) interpretar informação, planear e conduzir pesquisas; ii) gerir informações e tomar decisões; iii) desenvolver processos conducentes à construção de conhecimento, usando recursos diversificados.

Raciocínio e lógica matemática

Incentivar processos de raciocínio dedutivo, integrando a lógica matemática nos diversos temas

O aluno deve ser sistematicamente incentivado a explorar situações problemáticas, a usar abordagens heurísticas, a formular e validar conjecturas, a justificar processos de resolução e a encadear raciocínios. Os conceitos e métodos relativos à lógica matemática não constituem um tema específico das Aprendizagens Essenciais, mas devem, de forma natural, ser integrados nos vários temas abordados. Noções elementares de Lógica podem e devem ser introduzidas à medida que forem relevantes para a clarificação de processos e de raciocínios. Pretende-se, assim, que o aluno adquira a capacidade de raciocinar dedutivamente e de forma autónoma, usando os princípios e a simbologia inerentes à lógica matemática. A integração do raciocínio dedutivo e da lógica, bem como da linguagem matemática e simbólica, deve estar presente em todos os momentos de aprendizagem, sem se transformar num conteúdo tratado de forma isolada. O grau de formalização a utilizar deve ter sempre em conta o nível de maturidade matemática dos alunos e deve surgir, se possível, como uma necessidade, garantindo que o processo de formalização acompanha a apropriação dos conceitos. Diversos temas, como, por exemplo, Geometria, Funções e Probabilidade, em contexto de resolução de problemas, podem constituir-se como excelentes oportunidades para desenvolver o raciocínio dedutivo, no qual se inclui a utilização de linguagem e de notações adequadas.

Recurso sistemático à tecnologia

Incentivar a exploração de ideias e conceitos, integrando a tecnologia como alavanca para a compreensão e resolução de problemas.

A abordagem exploratória de ideias e conceitos matemáticos apresenta-se como determinante, o que pressupõe levar o aluno a participar ativamente num processo de construção e aprofundamento, motivado por questões desafiadoras, problemas e procura de justificações. A integração da tecnologia é considerada como indispensável nesse processo, pelas possibilidades que oferece de experimentação, visualização, representação, simulação, interatividade, bem como, evidentemente, de cálculo numérico e simbólico. O recurso a ambientes de geometria dinâmica (AGD), à folha de cálculo e a aplicativos digitais, explorados em computadores, smartphones ou calculadora gráfica, deve ser feito de forma sistemática. As atividades de programação devem ser integradas com uma complexidade progressiva, sendo relevantes para o desenvolvimento de processos algorítmicos, de um pensamento estruturado e do raciocínio lógico, proporcionando um vasto campo de aplicação da Matemática e envolvendo genuinamente a formulação e a resolução de problemas, além de promover o desenvolvimento do pensamento computacional.

Tarefas e recursos educativos

Apoiar a aprendizagem em tarefas, contextos e recursos diversificados

A construção de tarefas de aprendizagem constitui uma das ações decisivas do professor. Uma tarefa matemática enriquecedora pode assumir a forma de um problema, uma questão exploratória, um exercício de aplicação, um pequeno projeto ou uma pesquisa de aprofundamento, sempre que observe os seguintes critérios: ser interessante e desafiante, envolver matemática relevante, criar

oportunidades para aplicar e ampliar conhecimentos, permitir diferentes estratégias, tornar possível monitorizar a compreensão dos alunos e apoiar o seu progresso. As tarefas devem ser, ainda, diversificadas e ajustadas aos objetivos de aprendizagem e a sua planificação deve prever diferentes tipos de organização do trabalho dos alunos. A utilização de recursos variados, nomeadamente da tecnologia, bem como a diversificação de contextos de aprendizagem, incluindo laboratórios, espaços fora da sala de aula, museus de ciência e outros, deverão merecer especial atenção na construção de tarefas.

História da Matemática

Valorizar a importância da Matemática na evolução da sociedade

O recurso a episódios e problemas marcantes da História da Matemática deve motivar pesquisas, estudos ou debates, não de caráter enciclopédico, mas contribuindo para que o progresso da Matemática seja apreciado e compreendido. Para além do seu valor intrínseco, enquanto património cultural que importa valorizar, existem numerosos factos, aspetos particulares e episódios da História da Matemática que, pelo seu potencial pedagógico, devem ser explorados em tarefas dentro e fora da sala de aula. Os professores devem aproveitar os factos contemporâneos da História da Matemática para levar os alunos a entender o papel determinante da Matemática na sociedade atual. Por exemplo, podem ser referidas as primeiras Medalhas Fields atribuídas a mulheres matemáticas, a importância dos modelos matemáticos para entender a crise climática, a evolução das epidemias ou a exploração espacial.

Práticas enriquecedoras e criatividade

Inovar e investir em práticas enriquecedoras, favorecendo o desenvolvimento da criatividade e atitudes positivas face à Matemática

O currículo integra propostas inovadoras, que incluem a realização de projetos, de profundidade e extensão ajustados às condições existentes e aos alunos. É igualmente recomendado que os alunos se envolvam na resolução de questões e problemas autênticos em contextos de interdisciplinaridade (nomeadamente, numa perspetiva integradora de STEAM - ciências, tecnologia, engenharia, artes e

matemática). A programação, tal como a modelação ou o trabalho de projeto, abrem inúmeras vias de trabalho promissoras que não devem ser ignoradas. Também a beleza da Matemática, a sua aplicabilidade e a história fascinante que a envolve são fortes motivos para inovar através de práticas de enriquecimento das aprendizagens. É importante que os alunos experimentem o prazer da descoberta em Matemática e que desenvolvam o gosto pelo desafio, pela procura de soluções e pela sua comunicação. Dar aos alunos oportunidades de aprenderem matemática significativa contribui para que desenvolvam atitudes positivas em relação à disciplina. Estimular a curiosidade, o interesse, a motivação e a criatividade é essencial para que reconheçam a importância da Matemática na sua formação pessoal e académica e adquiram autoconfiança, sentindo-se capazes de raciocinar e comunicar matematicamente. O contexto socioemocional que permeia a aprendizagem da Matemática tem grande influência sobre a imagem que os jovens constroem da disciplina, sendo determinante na formação de cidadãos críticos, reflexivos, que se sintam capazes de tomar decisões e de formular e resolver problemas de forma criativa e eficiente.

Organização do trabalho dos alunos

Valorizar o trabalho colaborativo num ambiente de entreajuda e corresponsabilização, cultivando comunidades de aprendizagem

A valorização do trabalho colaborativo é assumida enquanto estratégia de aprendizagem e enquanto competência a desenvolver nos jovens na sociedade atual. A colaboração é especialmente indicada em tarefas nas quais os alunos possam discutir e definir abordagens e processos de resolução, confrontar ideias e contribuir para um objetivo comum. É também uma forma de trabalho em que os alunos se devem apoiar mutuamente, envolvendo-se em processos matemáticos, argumentação e comunicação, valorizando as competências individuais de cada um. Assim, o trabalho em pares e em pequenos grupos é adequado em múltiplas situações de aprendizagem, desde a realização de tarefas curtas, passando por situações que envolvem pesquisa, recolha de dados, modelação, até ao desenvolvimento de projetos.

Comunicação matemática

Comunicar recorrendo a representações múltiplas, com clareza e rigor e um nível de formalização adequado

A comunicação matemática, a par do raciocínio e do pensamento crítico, está presente quando os alunos interpretam gráficos, esquemas, diagramas ou dados, justificam afirmações, utilizam diferentes representações, escrevem e criticam explicações e argumentos matemáticos, com simbologia adequada e produzindo encadeamentos lógicos. Importa pôr em prática diversos tipos de comunicação, dando espaço às discussões coletivas e em pequenos grupos, apresentações orais e/ou escritas, elaboração de relatórios e composições, publicações e exposições, que são essenciais no processo de desenvolvimento de conceitos ou processos matemáticos. A simbologia constitui um sistema de representação matemática robusto que deve ser relacionado com outros modos de representação, tendo em vista a sua utilização oportuna, nomeadamente no âmbito da comunicação matemática. A formalização de conceitos e resultados matemáticos é uma etapa importante da aprendizagem que não se alcança por meio do excesso de manipulação simbólica ou pela prática de artifícios de cálculo demasiadamente técnicos.

Avaliação para a aprendizagem

Privilegiar a avaliação formativa na regulação do processo de aprendizagem

A abordagem exploratória que se privilegia implica a integração da avaliação no processo de aprendizagem. É necessário que a avaliação seja um processo, e não um fim, e que esteja ao serviço da aprendizagem dos alunos, de modo a favorecê-la. A diversificação de formas e instrumentos de avaliação é uma das práticas de avaliação recomendadas. Constituem boas tarefas de avaliação formativa as resoluções detalhadas de tarefas, os relatórios e os cartazes. A produção de documentos de natureza audiovisual é igualmente válida e apelativa, designadamente sob a forma de pequenos vídeos, criação de páginas e blogs, tirando partido de ferramentas digitais. As partilhas de

ideias e conclusões em sala de aula, bem como as apresentações orais, constituem boas oportunidades para monitorizar e acompanhar o desenvolvimento das aprendizagens e identificar dificuldades e obstáculos.

AVALIAÇÃO

A avaliação é intrínseca ao ensino e à aprendizagem e deve, por isso, assumir-se como um processo contínuo e integrado que regula o progresso das aprendizagens e orienta a prática pedagógica.

A investigação em educação tem vindo a evidenciar que a avaliação se desenvolve numa relação entre o professor, o aluno e os seus pares, em diferentes momentos do processo de aprendizagem. Partindo da identificação de três questões centrais, identificar onde os alunos se encontram no seu percurso de aprendizagem, para onde devem progredir e que estratégias podem apoiar esse progresso, identificam-se cinco estratégias-chave para a implementação, com sucesso, da avaliação para a aprendizagem:

- clarificar, compreender e partilhar os objetivos de aprendizagem e os critérios de sucesso (critérios de avaliação/verificação do sucesso);
- promover o diálogo, bem como realizar atividades e tarefas eficazes que permitam recolher informação sobre a aprendizagem;
- dar *feedback* que promova o desenvolvimento da aprendizagem;
- promover a aprendizagem entre pares;
- implicar os alunos como agentes da sua aprendizagem.

As práticas em sala de aula, decorrentes da implementação destas estratégias-chave, podem ser consideradas formativas, na medida em que a informação sobre o desempenho dos alunos, sustentada em evidências recolhidas no decurso das atividades realizadas, é

interpretada e utilizada por professores, alunos ou pelos seus pares com o objetivo de apoiar decisões pedagógicas fundamentadas sobre os próximos passos no processo de ensino e aprendizagem.

Ao fomentar uma avaliação pedagógica contínua e integrada, em que o aluno é encarado como agente da aprendizagem, reforça-se a intencionalidade pedagógica do ensino, promovendo a avaliação não apenas das aprendizagens, mas sobretudo para as aprendizagens.

A avaliação para a aprendizagem decorre da utilização de informação recolhida através de instrumentos diversificados e da observação, muitas vezes informal, dos desempenhos dos alunos nas atividades diárias da sala de aula, não se constituindo como uma tarefa burocrática que implique o registo sistemático de toda a informação relativa a esse desempenho. Tanto a avaliação formativa (sistemática e contínua) como a avaliação sumativa (que permite fazer um ponto de situação sobre o que os alunos aprenderam num dado intervalo de tempo ou unidade didática) devem ser coerentes e intencionais, contribuindo para uma avaliação pedagógica consistente. Neste pressuposto, também os resultados da avaliação externa devem ser utilizados com intenção pedagógica e permitir aos alunos e aos professores melhorar o ensino e a aprendizagem.

Com o objetivo de apoiar os processos de avaliação pedagógica, interna e externa, foram introduzidos, nos documentos das Aprendizagens Essenciais (AE) de cada disciplina, descritores de desempenho organizados por domínio e por nível de desempenho (*Desempenho Proficiente* e *Desempenho Avançado*), que se constituem como o referencial nacional para a avaliação dos alunos. Salienta-se que o que deve ser aprendido por todos os alunos, em cada disciplina, é o constante do quadro “Operacionalização das Aprendizagens Essenciais”. Com a introdução destes dois níveis de desempenho, estabelece-se um referencial comum, salvaguardando-se simultaneamente a autonomia das escolas para a (re)definição de critérios e para o (re)ajustamento de instrumentos de recolha de informação sobre as aprendizagens.

Os descritores de desempenho constituem referenciais que permitem identificar e caracterizar diferentes níveis de desenvolvimento das aprendizagens dos alunos. Estes descritores apoiam a interpretação do desempenho escolar e promovem padrões elevados de qualidade na consolidação do conhecimento e no desenvolvimento de competências.

No exercício da sua autonomia, as escolas e os professores tomam estes descritores como referenciais para apoiar a definição dos critérios de avaliação e a construção de instrumentos de recolha de informação ajustados ao contexto educativo e às especificidades de cada disciplina. A partir destes referenciais, as escolas definem critérios que orientam a apreciação do trabalho realizado pelos alunos, garantindo que a avaliação se centra na qualidade da mobilização dos conhecimentos e das competências desenvolvidas ao longo do processo de ensino e aprendizagem.

Neste enquadramento, os descritores apresentados para cada domínio permitem identificar diferentes níveis de desempenho evidenciados pelos alunos nas tarefas realizadas em contexto de aprendizagem. A sua interpretação pressupõe uma análise global do trabalho dos discentes, considerando a compreensão dos temas em estudo, a capacidade de selecionar, organizar e utilizar informação relevante, de aplicar conceitos e procedimentos adequados e de mobilizar o que foi aprendido nas tarefas propostas, demonstrando domínio das AE. No nível de desempenho **Proficiente**, observa-se uma utilização adequada, consistente e segura dos conhecimentos e das competências em diferentes situações de trabalho escolar, o que possibilita a explicação de fenómenos ou processos, a interpretação de informação e a resolução de tarefas com base no que foi aprendido.

No nível de desempenho **Avançado**, os alunos demonstram uma mobilização mais autónoma, rigorosa e integrada desses conhecimentos e dessas competências. Analisam, interpretam e relacionam informação de forma crítica, utilizam conceitos com rigor e articulam diferentes saberes para explicar fenómenos ou processos de forma fundamentada, revelando maior capacidade de análise, de integração da informação e de aplicação das aprendizagens em diferentes contextos.

Os descritores não substituem os critérios de avaliação definidos pelas escolas, mas constituem um referencial comum que visa apoiar os professores na apreciação do desenvolvimento das aprendizagens, na comunicação do desempenho dos alunos e na tomada de decisões pedagógicas orientadas para aprendizagens de qualidade.

Com o propósito de promover a transparência e o envolvimento no processo de aprendizagem, a explicitação e clarificação dos critérios de avaliação de escola junto dos alunos e dos encarregados de educação assumem particular importância, pois favorecem a compreensão e a apropriação dos princípios de uma avaliação centrada na aprendizagem.

Este documento curricular apresenta uma proposta de descritores de desempenho que têm por base os seguintes domínios (i) Resolução de Problemas, Modelação e Conexões; (ii) Raciocínio e Lógica Matemática; (iii) Comunicação Matemática; (iv) Recurso Sistemático à Tecnologia; e (v) Práticas Enriquecedoras e Criatividade.

Domínio de avaliação	Nível	Descritor de desempenho
Resolução de Problemas, Modelação e Conexões	Avançado	▪ Critica, de forma fundamentada, soluções de modelos matemáticos. ▪ Valida modelos matemáticos a partir do confronto sistemático com a realidade. ▪ Aperfeiçoa, de forma autónoma e justificada, modelos matemáticos para resolver problemas do mundo real, em contextos do quotidiano, interdisciplinares ou de outras disciplinas.
	Proficiente	▪ Critica, sem fundamentar, soluções de modelos matemáticos, identificando erros ou limitações mais evidentes. ▪ Valida modelos matemáticos a partir do confronto com a realidade tirando conclusões simples. ▪ Aperfeiçoa, modelos matemáticos, com orientação, para resolver problemas do mundo real, em contextos do quotidiano.

Raciocínio e Lógica Matemática	Avançado	▪ Explora, de forma autónoma e sistemática, situações problemáticas, identificando padrões, relações e diferentes estratégias de abordagem. ▪ Seleciona e aplica, de forma intencional e flexível, abordagens heurísticas adequadas, ajustando-as em função do problema. ▪ Formula, testa e valida conjecturas de forma rigorosa, recorrendo a argumentos matemáticos. ▪ Justifica, de forma clara, estruturada e fundamentada, os processos de resolução e procedimentos, avaliando a sua validade. ▪ Raciocina dedutivamente e de forma autónoma, usando os princípios e a simbologia da lógica matemática.
	Proficiente	▪ Explora situações problemáticas, identificando padrões, relações e estratégias de resolução, com apoio quando necessário. ▪ Usa abordagens heurísticas adequadas, com orientação, aplicando-as na resolução de problemas. ▪ Formula e valida conjecturas, com base em exemplos ou situações concretas. ▪ Justifica processos de resolução e procedimentos de forma clara, ainda que com fundamentação parcial. ▪ Raciocina e encadeia raciocínios, usando os princípios e a simbologia inerentes à lógica matemática.

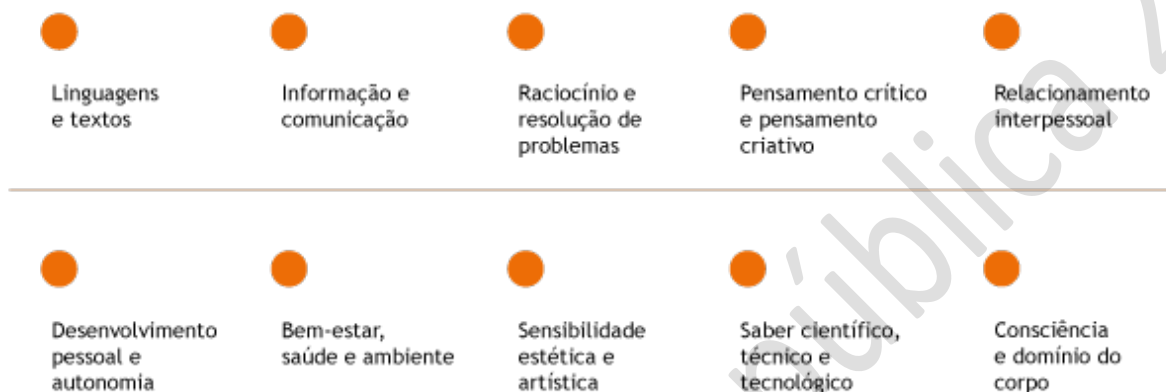
Comunicação Matemática	Avançado	▪ Formaliza conceitos e resultados matemáticos de forma rigorosa e eficaz, recorrendo à simbologia adequada e à notação correta. ▪ Escreve explicações e argumentos matemáticos claros e estruturados, apresentando justificações completas com encadeamento lógico consistente, e avalia criticamente a validade das suas ideias. ▪ Interpreta e analisa gráficos, esquemas, diagramas e dados, extraíndo informação relevante e identificando padrões, relações ou tendências significativas. ▪ Justifica afirmações com base em raciocínios matemáticos rigorosos, construindo argumentos completos e consistentes. ▪ Utiliza diferentes representações (simbólica, gráfica, numérica e verbal) de forma integrada, estabelecendo relações claras e generalizando conclusões quando apropriado. ▪ Escreve explicações e argumentos matemáticos de forma precisa e articulada, avaliando os seus próprios procedimentos e conclusões.
	Proficiente	▪ Formaliza conceitos e resultados matemáticos, recorrendo à simbologia adequada, ainda que com imprecisões. ▪ Escreve explicações e argumentos matemáticos simples, apresentando justificações com encadeamento lógico, e identifica aspetos a melhorar. ▪ Interpreta gráficos, esquemas, diagramas ou dados, retirando informação adequada. ▪ Justifica afirmações com base em raciocínios matemáticos simples, ainda que nem sempre completos ou totalmente rigorosos. ▪ Utiliza diferentes representações (simbólica, gráfica, numérica e verbal), estabelecendo algumas relações entre elas. ▪ Escreve explicações e argumentos matemáticos de forma compreensível, apresentando justificações com encadeamento lógico e identifica aspetos a melhorar.

Recurso Sistemático à Tecnologia	Avançado	▪ Resolve problemas que integram atividades de programação, folhas de cálculo e ambientes de geometria dinâmica, enfrentando desafios de complexidade elevada. ▪ Desenvolve processos algorítmicos com pensamento estruturado e raciocínio lógico, aplicando estratégias adequadas de forma consistente e autónoma. ▪ Envolve-se de modo proativo na formulação e resolução de problemas, identificando objetivos, decompondo tarefas e avaliando soluções. ▪ Desenvolve o pensamento computacional de forma rigorosa, criando, testando e refletindo sobre os procedimentos, os resultados e a eficiência das estratégias utilizadas.
	Proficiente	▪ Resolve problemas que integram atividades de programação, folhas de cálculo e ambientes de geometria dinâmica, enfrentando desafios de complexidade moderada. ▪ Desenvolve processos algorítmicos com pensamento estruturado e raciocínio lógico, aplicando estratégias apropriadas, de forma parcial ou com orientação. ▪ Envolve-se na formulação e resolução de problemas, identificando objetivos e decompondo tarefas, com orientação na avaliação das soluções. ▪ Desenvolve o pensamento computacional através da análise de algoritmos e de pequenos programas propostos, identificando padrões e relações simples.

Práticas Enriquecedoras e Criatividade	Avançado	▪ Participa de modo proativo na resolução de questões e problemas autênticos em contextos de interdisciplinaridade, integrando de forma consciente conceitos de STEAM (Ciências, Tecnologia, Engenharia, Artes e Matemática). ▪ Desenvolve atividades em contextos diversificados, utilizando recursos tecnológicos, estratégias de modelação e projetos colaborativos para explorar e aprofundar ideias matemáticas. ▪ Propõe soluções e ideias criativas e originais, explorando diferentes abordagens e refletindo criticamente sobre o impacto e a aplicabilidade das suas ideias em diferentes situações. ▪ Trabalha de forma autónoma e proativa com tarefas matemáticas enriquecedoras, incluindo problemas complexos, questões exploratórias, projetos interdisciplinares ou pesquisas aprofundadas. ▪ Resolve tarefas matemáticas de forma autónoma e proativa, identificando oportunidades para aplicar, aprofundar e integrar conhecimentos em contextos diversos e desafiantes, utilizando diferentes estratégias. ▪ Revela atitudes positivas e curiosidade intelectual, refletindo sobre a sua aprendizagem, propondo novas questões e explorando oportunidades de aprofundamento.
---	----------	---

	Proficiente	▪ Participa na resolução de questões e problemas autênticos em contextos interdisciplinares, com orientação, reconhecendo ligações simples entre conceitos de STEAM (Ciências, Tecnologia, Engenharia, Artes e Matemática). ▪ Desenvolve atividades em contextos diversificados, utilizando recursos tecnológicos, estratégias de modelação ou trabalho de projeto, com algum apoio na organização e execução. ▪ Apresenta soluções e ideias criativas de forma guiada, refletindo de modo simples sobre a aplicabilidade ou relevância das suas propostas. ▪ Trabalha com tarefas matemáticas enriquecedoras sob a forma de um problema, uma questão exploratória, um exercício de aplicação, um pequeno projeto ou uma pesquisa de aprofundamento. ▪ Resolve tarefas matemáticas, aproveitando oportunidades para aplicar e ampliar conhecimentos, utilizando diferentes estratégias. ▪ Revela atitudes positivas em relação à disciplina.
--	-------------	---

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS (ACPA)



Para trabalhar todos os Temas, Tópicos e Subtópicos matemáticos das AE das disciplinas de Matemática A, Matemática B, Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS) e Cursos Profissionais para o ensino secundário foram selecionadas algumas das Áreas de Competência do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (PA).

As AE para as disciplinas de Matemática A, Matemática B, MACS e Matemática para os Cursos Profissionais para o ensino secundário evidenciam as conexões das competências do PA com cada tema. A construção das próprias AE foi feita tendo em vista essa articulação, fornecendo pistas, que se pretende que sejam óbvias, para que o PA seja concretizado efetivamente na sala de aula.

Apresenta-se uma listagem exemplificativa das Áreas de competência do perfil dos alunos, em que é estabelecida uma ligação com os temas de aprendizagens matemáticas mais fortemente visados.

A. Linguagens e textos

Reconhece e utiliza linguagem simbólica.

Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática.

Modelos matemáticos para cidadania (10.º ano)

Geometria (10.º ano, 11.º ano)

Funções (10.º ano, 11.º ano, 12.º ano)

Matemática discreta (11.º ano)

Números complexos (12.º ano)

Probabilidade (12.º ano)

Introdução à inferência estatística (12.º ano)

Primitivas imediatas e integrais definidos (12.º ano)

Matrizes (12.º ano)

B. Informação e comunicação

Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avaliando, validando e organizando a informação recolhida.

Apresenta e explica conceitos em grupos, ideias e projetos diante de audiências reais, presencialmente ou a distância.

Modelos matemáticos para cidadania (10.º ano)

Estatística (10.º ano)

Geometria (10.º ano)

Funções (10.º ano, 11.º ano, 12.º ano)

Números complexos (12.º ano)

Probabilidade (12.º ano)

Introdução à inferência estatística (12.º ano)

Primitivas imediatas e integrais definidos (12.º ano)

Matrizes (12.º ano)

C. Raciocínio e resolução de problemas

Coloca e analisa questões a investigar, distinguindo o que se sabe do que se pretende descobrir.

Gere projetos e toma decisões na resolução de problemas e analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas.

Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo.

Modelos matemáticos para cidadania (10.º ano)

Estatística (10.º ano)

Geometria (10.º ano, 11.º ano)

Funções (10.º ano, 11.º ano, 12.º ano)

Matemática discreta (11.º ano)

Números complexos (12.º ano)

Probabilidade (12.º ano)

Introdução à inferência estatística (12.º ano)

Primitivas imediatas e integrais definidos (12.º ano)

Matrizes (12.º ano)

D. Pensamento crítico e pensamento criativo

Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões.

Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido, no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade.

Modelos matemáticos para cidadania (10.º ano)

Estatística (10.º ano)

Geometria (10.º ano, 11.º ano)

Funções (10.º ano, 11.º ano, 12.º ano)

Matemática discreta (11.º ano)

Números complexos (12.º ano)

Probabilidade (12.º ano)

Introdução à inferência estatística (12.º ano)

Primitivas imediatas e integrais definidos (12.º ano)

Matrizes (12.º ano)

E. Relacionamento interpessoal

Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos.

Modelos matemáticos para cidadania (10.º ano)

Estatística (10.º ano)

Funções (10.º ano, 11.º ano, 12.º ano)

Números complexos (12.º ano)

Probabilidade (12.º ano)

Introdução à inferência estatística (12.º ano)

Primitivas imediatas e integrais definidos (12.º ano)

Matrizes (12.º ano)

F. Bem-estar, saúde e ambiente

Preocupa-se com a construção de um futuro sustentável e envolve-se em projetos de cidadania ativa.

Modelos matemáticos para cidadania (10.º ano)

Estatística (10.º ano)

G. Saber científico, técnico e tecnológico

Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão.

Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos.

Modelos matemáticos para cidadania (10.º ano)

Estatística (10.º ano)

Geometria (10.º ano, 11.º ano)

Funções (10.º ano, 11.º ano, 12.º ano)

Matemática discreta (11.º ano)

Números complexos (12.º ano)

Probabilidade (12.º ano)

Introdução à inferência estatística (12.º ano)

Primitivas imediatas e integrais definidos (12.º ano)

Matrizes (12.º ano)

Operacionalização das Aprendizagens Essenciais

A disciplina de Matemática assume um papel estruturante nos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. As Aprendizagens Essenciais do 10.º ano integram uma vertente de formação matemática para a cidadania, em consonância com as restantes disciplinas de Matemática do Ensino Secundário. Esta vertente é concretizada nos temas Modelos Matemáticos para a Cidadania e Estatística. Para além destes temas, no 10.º ano, os alunos estudam Geometria e Funções numa lógica de ampliar e aprofundar as abordagens do Ensino Básico.

No 11.º ano as Aprendizagens Essenciais integram Geometria, Matemática Discreta e Funções. No tema Geometria inclui-se geometria analítica e vetorial e trigonometria. Na Matemática Discreta estudam-se técnicas de contagem e sucessões. O estudo das funções considera sempre a abordagem dos diferentes pontos de vista: gráfico, numérico e algébrico.

No 12.º ano é abordado o tema Números Complexos e são aprofundados os temas Probabilidade e Funções. A finalizar as Aprendizagens Essenciais do 12.º ano são propostos três temas em alternativa: Inferência Estatística, Primitivas Imediatas e Integrais Definidos e Matrizes. Deve ser escolhido um destes temas para cada turma da escola, podendo essa escolha variar de turma para turma. Se o tempo o permitir, pode ser trabalhado mais do que um tema opcional.

O trabalho de projeto assume uma dimensão relevante, surgindo explicitamente no 10.º ano e no 11.º ano. No 10.º ano são sugeridas propostas de projetos nos temas Estatística, Modelos Matemáticos para a Cidadania, Geometria sintética e Funções. No 11.º ano são sugeridas propostas de projetos nos temas Matemática Discreta (Sucessões), Geometria e Funções. Em cada um destes anos deverá ser desenvolvido pelo menos um dos projetos, podendo em alternativa ser desenvolvida outra proposta de trabalho, em qualquer tema que o professor considere adequado.

As Aprendizagens Essenciais relativas à Matemática A, dos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas, concretizam-se em três documentos distintos. A organização das Aprendizagens Essenciais, que a seguir se detalha, é apresentada em três áreas:

- Temas, Tópicos e Subtópicos matemáticos, em que são identificados os conceitos matemáticos a abordar.
- Objetivos de aprendizagem: conhecimentos, capacidades e atitudes que o aluno deve revelar, em que são concretizadas, para cada tópico matemático, as aprendizagens visadas com a indicação do foco e da especificação preconizada.
- Ações estratégicas de ensino do professor, onde é clarificado o papel do professor e as indicações metodológicas que são consideradas adequadas para atingir os objetivos de aprendizagem definidos, bem como a sugestão de exemplos para a

concretização das atividades a propor aos alunos. São também dadas indicações para clarificar os níveis de dificuldade que se consideram parte integrante destas Aprendizagens Essenciais.

Quando nas Aprendizagens Essenciais se refere recurso a tecnologia gráfica, deve entender-se a utilização de folhas de cálculo ou qualquer versão de calculadora gráfica, física ou sob a forma de emulador, bem como o uso do Geogebra ou outro Ambiente de Geometria Dinâmica, nas suas diversas versões disponíveis em qualquer dispositivo digital. Considera-se também o recurso a aplicativos digitais específicos (apliquetas), disponíveis na internet ou em fóruns temáticos.

Para cada tema são incluídas notas clarificadoras, nomeadamente no que se refere à sugestão de: atividades para o desenvolvimento do Pensamento Computacional, com recurso a exemplos; propostas de possíveis aprofundamentos de alguns temas ou de abordagens alternativas; referências bibliográficas que incluem documentos e recursos para apoio ao trabalho do professor.

A ordem dos temas apresentados nestas Aprendizagens Essenciais constitui um exemplo de uma sequência que se considera adequada no âmbito do processo de gestão e desenvolvimento do currículo.

Na tabela abaixo apresenta-se uma possível distribuição dos tempos letivos pelos tópicos das Aprendizagens Essenciais, tomando como referência vinte e oito semanas letivas, num total de trinta e duas ou trinta e três semanas previstas usualmente no calendário escolar. Considerou-se cada semana com cinco tempos letivos de cinquenta minutos.

Temas	Tópicos	Aulas (50 min)	Semanas
Geometria	Trigonometria	35	12
	Produto escalar	25	
Matemática discreta	Contagem	15	7
	Sucessões	4	
	Progressões aritméticas e geométricas	11	
	[Trabalho de projeto]	5	
Funções	Funções cúbicas e quárticas	19	9
	Operações com funções	3	
	Funções racionais	6	
	Cálculo diferencial	17	
		Total	28

OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
GEOMETRIA	Trigonometria Resolução de problemas que envolvam triângulos: - resolver problemas variados, ligados a situações concretas, que permitam recordar e aplicar métodos trigonométricos estudados no 3.º ciclo do EB, na resolução de triângulos retângulos e não retângulos. Ângulo e arco generalizados Círculo trigonométrico Expressão geral das amplitudes dos ângulos com os mesmos lados: - relacionar e aplicar, na resolução de problemas, as noções de ângulo e arco orientados e de ângulo e arco generalizados e a respetiva amplitude; - identificar e interpretar o círculo trigonométrico;	- Recorrer a exemplos históricos de trigonometria para motivar os alunos para o tema, podendo ser usados exemplos de livros antigos em que se recorre ao grafómetro. - Propor problemas variados, ligados a situações concretas, que permitam recordar e aplicar métodos trigonométricos (problemas ligados a sólidos, a moldes, à navegação, à topografia, históricos e outros) bem como sensibilizar para a importância da Trigonometria nas várias ciências.

	- reconhecer, analisar e aplicar, na resolução de problemas, razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) de ângulos generalizados no círculo trigonométrico. Radiano Redução ao primeiro quadrante: - conhecer a unidade de medida radiano; - utilizar o círculo trigonométrico, na redução ao primeiro quadrante, na dedução da fórmula fundamental da Trigonometria e na resolução de problemas. Funções trigonométricas seno, cosseno e tangente: - reconhecer, analisar e aplicar as funções trigonométricas $\text{sen}(x)$, $\text{cos}(x)$ e $\text{tg}(x)$ na modelação de fenómenos periódicos. Fenómenos periódicos: - identificar fenómenos periódicos e usar os conceitos de período, máximo, mínimo, amplitude e frequência, no estudo dos fenómenos periódicos; - determinar valores aproximados de zeros, extremos e outros pontos relevantes, num	- Introduzir o conceito de radiano, relacionando-o com o grau, tendo em vista a sua futura utilização na representação gráfica de funções trigonométricas; - Estimular o recurso sistemático ao círculo trigonométrico, em casos simples; - Propor a aplicação da equação reduzida da circunferência no círculo trigonométrico para deduzir a fórmula fundamental da Trigonometria; - Levar os alunos a compreender a diferença na representação gráfica de uma função trigonométrica quando se utilizam unidades diferentes (graus e radianos) e a perceber as vantagens da sua representação em radianos. - Incentivar o uso do círculo trigonométrico e da tecnologia gráfica para explorar as funções trigonométricas $\text{sen}(x)$, $\text{cos}(x)$ e $\text{tg}(x)$. - Promover o estudo da variação do período em funções do tipo $f(x) = \text{sen}(cx)$ e $g(x) = \text{cos}(cx)$, com c não nulo. - Promover, com o auxílio da tecnologia, o estudo de famílias de funções do tipo $f(x) = a + b \text{sen}(c(x - d))$ e $g(x) = a + b \text{cos}(c(x - d))$, com a, b, c e d números reais, b e c não nulos, propondo a exploração de situações como, por exemplo, a variação das marés, a roda gigante ou as ondas sonoras;
--	---	---

	contexto de resolução de problemas, com recurso à tecnologia gráfica.	Propor o estudo de situações problemáticas, utilizando tecnologia, recorrendo a modelos com funções trigonométricas.
	Produto escalar Declive e inclinação de uma reta Produto escalar de dois vetores no plano e no espaço: - definição e propriedades; - expressão do produto escalar nas coordenadas dos vetores em referencial ortonormado Perpendicularidade de vetores e de retas - reconhecer e aplicar na resolução de problemas a relação entre a inclinação e o declive de uma reta no plano; - Conhecer o conceito de produto escalar de dois vetores, no plano e no espaço, definido com base nas coordenadas dos vetores num referencial ortonormado; - Conhecer que o produto escalar de dois vetores é igual ao produto das suas normas pelo cosseno do ângulo formado por eles (sem demonstração); - Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas a noção de produto escalar, nomeadamente: relacionando o ângulo de dois vetores não nulos com o sinal do respetivo produto escalar; estabelecendo uma relação entre os declives de duas retas perpendiculares no plano; determinando o ângulo entre dois vetores; e determinando o ângulo formado por	- Introduzir o conceito de produto escalar a partir da expressão do produto escalar nas coordenadas dos vetores em referencial ortonormado, no plano e no espaço; - Estimular os alunos a utilizar o Geogebra para visualizar, explorar e estabelecer conjecturas, envolvendo por exemplo: - a relação entre a inclinação e o declive de uma reta; - a relação do ângulo de dois vetores e o sinal do produto escalar; - o ângulo de duas retas; - a posição relativa de retas. - Explorar a ligação do cálculo vetorial com a Física (caso os alunos tenham frequentado a disciplina de Física e Química A).

	duas retas; ▪ Resolver problemas envolvendo retas no plano, utilizando equações vetoriais e reduzidas de retas e posição relativa de retas. Equações cartesianas de planos no espaço: ▪ determinar a equação cartesiana de um plano dados um ponto e um vetor normal. ▪ resolver problemas envolvendo: equações vetoriais de retas; equações cartesianas de planos; distância de um ponto a um plano; e posição relativa de retas e planos.	▪ Estimular os alunos a utilizar o Geogebra 3D para visualizar, explorar e estabelecer conjecturas, envolvendo planos e retas no espaço, por exemplo explorar secções determinadas por cortes de planos num cubo ou numa pirâmide. Nestas Aprendizagens Essenciais não são considerados lugares geométricos definidos a partir do produto escalar.
--	---	---

Possíveis aprofundamentos

Estudar e eventualmente demonstrar a lei dos senos e a lei dos cossenos, na resolução de triângulos não retângulos.

Aplicar a lei dos cossenos para demonstrar que o produto escalar de dois vetores é igual ao produto das suas normas pelo cosseno do ângulo formado por eles, verificando-se assim que o produto escalar não depende do referencial escolhido.

Relacionar a música com a trigonometria, como por exemplo o estudo dos batimentos para afinar instrumentos ou o estudo das notas musicais através de funções trigonométricas e da sua representação gráfica.

Usar dados recolhidos com sensores ou consultados na Internet utilizando funções trigonométricas para modelar situações, como por exemplo: altura das marés, percurso dos pistões no motor a combustão, movimento de um pêndulo, frequência cardíaca e pressão sanguínea e construção de pontes suspensas.

Estudar alguns exemplos históricos relacionados com a trigonometria, por exemplo: Tabela de cordas de Ptolomeu, Bhaskara e o cálculo dos senos, Al-Kashi e o cálculo das funções trigonométricas e Trigonometria em Pedro Nunes.

Ampliar o estudo do produto escalar de vetores para definir lugares geométricos no plano e no espaço.

Resolver problemas beneficiando de visualizações interativas em 3 dimensões que se podem efetuar usando o software Geogebra na sua versão 3D. Eis alguns exemplos possíveis:

- Paralelismo: <https://www.geogebra.org/m/eFMvcngj>
- Interseção de uma esfera: <https://www.geogebra.org/m/Mz7eCBFs>
- Janela 3D - Esfera seccionada - vista 2D do plano: <https://www.geogebra.org/m/acmtajta>
- Plano e Equação: <https://www.geogebra.org/m/ajzr6gh2>

- Planos no espaço: <https://www.geogebra.org/m/PfhVP4U8>

Definir o produto vetorial de vetores para ampliar o conceito de produto de dois vetores e explorar a sua utilização na disciplina de Física e na Geometria Analítica (por exemplo, definir um plano por uma equação cartesiana dados um ponto e dois vetores do plano não colineares).

Bibliografia de referência

- Ávila, G. (1988). Geometria e Astronomia. *Revista do Professor de Matemática*, nº 13. Obtido de <https://www.rpm.org.br/cdrpm/13/2.htm>
- Baltazar, A., Delgado, F. (1989). Trigonometria ... com um pouco de sorte! *Educação & Matemática*, nº 11, p. 31.
- Coelho, A. (1980). Uso das calculadoras em trigonometria. *Educação & Matemática*, nº 15, p. 29-30.
- Devlin, K. (2002). *Matemática - A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.
- Carreira, S., e Amado, N. (2018). A tecnologia entre uma tarefa de geometria analítica e a Vesica Piscis. *Educação & Matemática*, nº 148, p. 39-43.
- Estrada, M. F. et al. (2000). *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Haese, M. et al (2019). *Mathematics - Applications and Interpretation HL 2* (for use with IB Diploma Programme). Marlestone: Haese Mathematics.
- Linck, F. (2010). *Música E Matemática: Experiências Didáticas em dois diferentes contextos*. Universidade Federal Do Rio Grande Do Sul. Obtido de <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/31592/000782668.pdf>
- Loureiro, C. et al. (1997). *Geometria 10º ano de escolaridade*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
- Loureiro, C. et al. (1998). *Geometria 11º ano de escolaridade*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
- Loureiro, C. et al. (1999). *Trigonometria e Números Complexos*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
- Mesquita, C., Marques, F., Carreira, S. (1992). A folha de cálculo e a trigonometria em actividades de aplicações e modelação. *Educação & Matemática*, nº 24, p. 7-12.
- Morais, C. (2003). *A Astronomia no ensino da Matemática: Uma Proposta para o Ensino Secundário*. Obtido de <https://repositorio-aberto.up.pt/handle/10216/9666>
- Nogueira, D. (2013). *Tópicos da História da Trigonometria*. Universidade de Aveiro. Disponível em <https://ria.ua.pt/handle/10773/13298>
- Pereira, C., Cegonho, J., e Rocha, M.I. (1992). A trigonometria à volta de uma caneca de cerveja. *Educação & Matemática*, nº 23, p. 20-22.
- Precatado, A., e Guimarães, H. (2001). *Materiais para a aula de Matemática*. Lisboa: APM.
- Sebastião e Silva, J. (1975-1978). *Compêndio de Matemática* (3 volumes). Lisboa: GEP.
- SESAMATH - *Manuel Maths 1re - Programme 2019*. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1spe_2019
- Veloso, E. (1998). *Geometria - Temas atuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
- Wikipedia (2022). *Batimentos*. Obtido de <https://pt.wikipedia.org/wiki/Batimentos>

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
MATEMÁTICA DISCRETA	Contagem Princípios gerais da contagem: - conhecer e aplicar os princípios da adição e da multiplicação em problemas de contagem; - usar diferentes formas de representação, nomeadamente diagramas em árvore e tabelas, em problemas de contagem. Arranjos completos, permutações e arranjos simples: - identificar arranjos completos, permutações e arranjos simples como casos particulares da aplicação do princípio da multiplicação.	- Propor a resolução de problemas de contagem com base em situações reais que ilustrem os princípios gerais de contagem (por exemplo, caminhos entre cidades, número de ementas possíveis escolhidas a partir de um menu, etc.); - Propor a discussão de situações em que o princípio do pombo seja útil na contagem, por exemplo: - quantas pessoas são necessárias para que se possa garantir que há pelo menos duas delas cujo aniversário ocorre no mesmo mês? - quantas luvas será preciso tirar, sem olhar, de uma gaveta com luvas, todas do mesmo padrão, para garantir que tiramos um par (mão esquerda e mão direita)? - Introduzir o conceito de fatorial com o objetivo de simplificar a escrita de produtos sucessivos.; - Promover a análise de situações de contagem em que o princípio da multiplicação não seja suficiente, mas onde se torne necessário adicionar contagens de diferentes alternativas, isto é, se o problema contém diferentes casos (por exemplo, escolher dois livros de diferentes disciplinas retirados de 3 estantes, uma com 5 livros de Matemática, outra com 4 livros de Física e outra com 7 livros de Biologia); - Promover a identificação de vantagens e limitações de cada tipo de representação em problemas de contagem; - Propor a exploração de exemplos ilustrativos que permitam transitar do princípio da multiplicação para: - a definição de arranjos completos (por exemplo, código do cartão multibanco, pin do telemóvel); - a definição de permutações (por exemplo, número de partidas num

	torneio em que todos os participantes se defrontam entre si, número de vetores obtidos por dois pontos dados 8 pontos não colineares entre si); - a definição de arranjos simples (preenchimento dos três lugares de um podium). Combinações: - identificar combinações como forma de saber o número de subconjuntos com p elementos de um dado conjunto com n elementos ($p \leq n$). Sucessões Termo geral Definição por recorrência - Identificar e analisar: - regularidades em exemplos numéricos e pictóricos; - formas de gerar sucessões através de termos gerais e por recorrência.	torneio em que todos os participantes se defrontam entre si, número de vetores obtidos por dois pontos dados 8 pontos não colineares entre si); - a definição de arranjos simples (preenchimento dos três lugares de um podium). Propor a resolução de problemas que envolvam combinações como por exemplo o número de possibilidades de formar uma comissão de cinco alunos de uma turma. - Considerar que as sucessões são definidas no conjunto dos números naturais à exceção de zero; - Incentivar o recurso à tecnologia para gerar sequências que representem sucessões, distinguindo ordem e termo, interpretando graficamente o comportamento de sucessões; - Conduzir à definição de sucessão por recorrência e através do termo geral; - Solicitar a construção ou a adaptação de um programa em <i>Python</i> para obter um número previamente fixado de termos de uma sucessão definida por recorrência (por exemplo, um programa em <i>Python</i> que permita analisar conjecturas relacionadas com sucessões definidas por recorrência, como por exemplo a conjectura de Collatz).
--	--	--

	Progressões aritméticas e geométricas Soma de n termos consecutivos de uma progressão: - reconhecer progressões aritméticas e geométricas; - saber definir progressões aritméticas e geométricas através do 1.º termo e da razão (r); - determinar a soma de n termos consecutivos de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica. Soma infinita de uma progressão geométrica com $r < 1$ - conhecer o comportamento da sucessão do tipo a^n, com $a > 1$ e para $0 < a < 1$, para valores de n suficientemente grandes; - conhecer que a soma de todos os termos de uma progressão geométrica (série geométrica), com $r < 1$ é um valor finito.	- Promover a identificação e caracterização de progressões aritméticas e geométricas através de contextos da vida real (por exemplo, número de cadeiras numa fila de um anfiteatro, capital resultante da aplicação de juros simples e de juros compostos); - Recorrer à história de Gauss com o objetivo de evidenciar uma forma expedita para o cálculo da soma de n termos consecutivos de uma progressão aritmética; - Recorrer à lenda de Sissa e do tabuleiro de xadrez com o objetivo de evidenciar uma forma expedita para o cálculo da soma de n termos consecutivos de uma progressão geométrica. - Promover o estudo das sucessões do tipo a^n. Com $a > 1$, os termos de a^n excedem qualquer valor finito, desde que n seja suficientemente grande. Para o caso $0 < a < 1$ pode observar-se que os termos de a^n são tão próximos de zero quanto se queira, desde que n seja suficientemente grande; - Utilizar exemplos geométricos, em casos simples, para exemplificar que a soma de todos os termos de uma progressão geométrica com $r < 1$ é um valor finito, por exemplo: sucessão de áreas de quadrados em que a área de cada termo é metade da área do anterior (área em progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ logo a soma das áreas é finita); - Utilizar exemplos geométricos, em casos simples, para exemplificar que a soma de todos os termos de uma progressão geométrica com $r > 1$ é infinito, por exemplo: o comprimento da curva de Koch, que é constituída por segmentos de reta em progressão geométrica de razão $\frac{4}{3}$; Recorrer a uma folha de cálculo para explorar aproximações da soma de todos os termos de progressões aritméticas e geométricas, em casos simples, evidenciando os exemplos em que a soma é um valor finito.
--	---	--

	Aprofundamento do estudo de Sucessões com trabalho de projeto (*) ▪ Aplicar e aprofundar conceitos e processos associados à Geometria num problema contextualizado, desenvolvendo competências de generalização, representação e comunicação matemática; ▪ Desenvolver hábitos de pesquisa; ▪ Interpretar de forma crítica, informação, modelos e processos; ▪ Conhecer, aplicar e criar modelos presentes na Geometria, tirando partido da tecnologia; ▪ Desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.	▪ Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões). ▪ Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório. ▪ Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia. ▪ Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta. ▪ Estimular a discussão do tema de cada investigação que pode ser escolhido de entre uma lista de opções, como, por exemplo: - Sucessão de Fibonacci e o número de ouro; - Sucessão de Neper cujo limite é o número e; - Paradoxos de Zenão; - Números polédricos; - Números primos de Mersenne (da forma $2^n - 1$); - Sucessão de termo geral $2^n - 1$ associada às Torres de Hanói. ▪ Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática, ou o recurso à programação, sempre que for considerado relevante.
▪ (*) Este tópico pode ser substituído por tópico idêntico noutros temas do 11.º ano tal como é exemplificado nas propostas apresentadas abaixo.		

Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser

incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles. O reconhecimento de padrões na tarefa (ou situação) apresentada ou em problemas semelhantes, anteriormente resolvidos, poderá contribuir para facilitar a estruturação do algoritmo a desenvolver. Antes de redigir o programa na linguagem *Python*, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Exemplo de programa em *Python* para simular a sequência de Collatz obtida a partir de um número dado (previamente fixado).

```
x=int(input("Indica o 1.º termo da sucessão: "))
seq=[]
def collatz_sequencia(x):
    seq = [x]
    if x < 1:
        return []
    while x > 1:
        if x % 2 == 0:
            x = x / 2
        else:
            x = 3 * x + 1
        seq.append(int(x))
    return seq
print(collatz_sequencia(x))
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Poder-se-á igualmente:

- recorrer à folha de cálculo para gerar sequências que representam sucessões, distinguindo ordem e termo;
- gerar a representação gráfica e interpretar graficamente o comportamento de sucessões.

Possíveis aprofundamentos

Estudar a série harmónica, sobretudo analisando o facto de que, embora a sucessão $\frac{1}{n}$ seja convergente para zero, a série não é convergente.

Estudar algumas aplicações do Princípio do Pombal (Se n pombos voam para $k < n$ pombais, num dos k pombais coabitam pelo menos dois pombos) e mostrar que não se verifica em conjuntos infinitos (exemplo: Hotel de Hilbert).

Bibliografia de referência

Aparício, R. (2017). Materiais para a Aula de Matemática - Como que por magia, *Educação & Matemática*, nº 143, p. 17.

- Caraça, Bento de Jesus (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Ciência Aberta. Lisboa: Gradiva.
- Conway, J., e Guy, R. (1999). *O livro dos números*. Lisboa: Gradiva.
- Devlin, K. (2002). *Matemática - A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.
- Estrada, M. F. et al. (2000). *História da Matemática*, Universidade Aberta.
- Haese, M. et al. (2019). *Mathematics - Analysis and approaches HL 2* (for use with IB Diploma Programme). Marlestone: Haese Mathematics.
- Haese, M. et al. (2019). *Mathematics - Core topics HL 1* (for use with IB Diploma Programme). Marlestone: Haese Mathematics.
- Lima, V.S. et al. (2004). Progressões Aritméticas e Geométricas: História, Conceitos e Aplicações. *Intellectus Revista Acadêmica Digital*. vol. 2, p. 34-68. Obtido de <http://www.revistaintellectus.com.br/artigos/2.12.pdf>
- Mello, H. (2017). *Desmistificando o ensino de Análise Combinatória*. Rio de Janeiro: IMPA. Obtido de https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/TCC_2017_harley_paulino.pdf
- Oliveira, R. (1995). As progressões geométricas no cálculo financeiro. *Educação & Matemática*, nº 36, p. 10-12.
- Paradinha, H., e Leuca, T. (2010). Um olhar sobre a construção de conexões matemáticas no estudo das sucessões, *Educação & Matemática*, nº 110, p. 27-32.
- Pasian, M.E. (2012). *História da Matemática e as Progressões Aritméticas e Geométricas*. Universidade Estadual de Maringá. Obtido de http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2012/2012_uem_mat_pdp_maria_elizabete_pasian.pdf
- Peça, C., e Santos, A., (1988). A travessia do deserto e as sucessões!, *Educação & Matemática*, nº 7, p. 13-14.
- Precatado, A. (2001). Materiais para a Aula de Matemática - Algas no laboratório de Matemática, *Educação & Matemática*, nº 63, p. 9.
- Sebastião e Silva, J. (1975-1978). *Compêndio de Matemática* (3 volumes). Lisboa: GEP.
- SESAMATH - *Manuel Maths 1re - Programme 2019*. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1spe_2019
- SESAMATH - *Manuel Maths 2de - Programme 2019*. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms2_2019
- Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., e Nápoles, S. (1997). *Funções - 10º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., e Nápoles, S. (1998). *Funções - 11º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., e Nápoles, S. (1999). *Funções - 12º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Torres, D. (2004). Números felizes e sucessões associadas. *Educação & Matemática*, nº 77, p. 35-38.
- Yu, B., Inácio, C., Coelho, S., Coelho, N., e Costa, M. (1998). Jogo síntese da unidade Sucessões. *Educação & Matemática*, nº 46, p. 21.

Proposta 1

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	Aprofundamento do estudo de Geometria com trabalho de projeto ▪ Aplicar e aprofundar conceitos e processos associados à Geometria num problema contextualizado, desenvolvendo competências de generalização, representação e comunicação matemática; ▪ Desenvolver hábitos de pesquisa; ▪ Interpretar de forma crítica, informação, modelos e processos; ▪ Conhecer, aplicar e criar modelos presentes na Geometria, tirando partido da tecnologia; ▪ Desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.	▪ Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões). ▪ Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório. ▪ Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia. ▪ Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta. ▪ Estimular a discussão do tema de cada investigação que pode ser escolhido de entre uma lista de opções, como por exemplo: - A Trigonometria e a resolução de triângulos ao longo da história (Túnel de Samos, raio da Terra, distância da Terra à Lua) - Uso da Trigonometria em textos clássicos chineses (“Manual Matemático da Ilha do Mar”); - História da Geometria Analítica com Descartes e Fermat; - O cálculo vetorial aplicado às Ciências da Computação e à Economia; - Estudo do produto vetorial e suas aplicações à Física. ▪ Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática, ou o recurso à programação, sempre que for considerado relevante.

Proposta 2

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
	Aprofundamento do estudo de Funções com trabalho de projeto ▪ Aplicar e aprofundar conceitos e processos associados à Geometria num problema contextualizado, desenvolvendo competências de generalização, representação e comunicação matemática; ▪ Desenvolver hábitos de pesquisa; ▪ Interpretar de forma crítica, informação, modelos e processos; ▪ Conhecer, aplicar e criar modelos presentes na Geometria, tirando partido da tecnologia; ▪ Desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.	▪ Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões). ▪ Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório. ▪ Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia. ▪ Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta. ▪ Estimular a discussão do tema de cada investigação que pode ser escolhido de entre uma lista de opções, como por exemplo: - Conceito de infinitésimo ao longo da História; - Episódios da História do Cálculo Diferencial (Teorema de Rolle para polinómios, o método dos máximos e mínimos de Fermat, a definição da derivada de Anastácio da Cunha); - Polinómios interpoladores; - Splines e curvas de Bézier; - Resolução de equações cúbicas e o aparecimento dos números complexos. - Funções polinomiais que surgem no estudo das ciências do espaço (polinómio do 6.º grau na radiação da cintura de Van Allen em SpaceMath@NASA) ▪ Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática, ou o recurso à programação, sempre que for considerado relevante.

Bibliografia de referência (trabalhos de projeto)

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática: a experiência do projecto mat789*. (Tese de Doutoramento). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Amado, N., e Carreira, S. (2019). *Trabalho de Projeto*. Obtido de <http://hdl.handle.net/10400.1/15482>.

George Lucas Educational Foundation (2021). *Project-Based Learning (PBL)*. Obtido de <https://www.edutopia.org/project-based-learning>.

Mestre, A. P. (2011). *Histórias com matemática: trabalho de projecto no 2º ciclo do ensino básico*. (Dissertação de Mestrado). Obtido de <http://hdl.handle.net/10400.1/6872>.

Ponte, J. P., Brunheira, L., Abrantes, P., e Bastos, R. (1998). *Projetos Educativos: matemática - ensino secundário*. Ministério da Educação.

Consulta pública 2026

ORGANIZADOR Domínio	AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES O aluno deve ficar capaz de:	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)
FUNÇÕES	Funções cúbicas e quárticas - Estudar zeros, monotonia, extremos e comportamento no infinito, tendo como base o gráfico de famílias de funções cúbicas e quárticas, recorrendo à tecnologia gráfica; - Reconhecer que para funções polinomiais de grau ímpar existe sempre pelo menos um zero real. Divisão euclidiana de polinómios e regra de Ruffini/algoritmo de Horner: - Efetuar a divisão inteira entre polinómios; - Utilizar a regra de Ruffini/algoritmo de Horner para determinar o quociente e o resto duma divisão de um polinómio por uma expressão do tipo $x - a$, com a real. Teorema do resto Multiplicidade de uma raiz de um polinómio:	- Promover a exploração gráfica de funções polinomiais dos 3.º e 4.º, visando identificar intuitivamente o número máximo de zeros e o comportamento no infinito, bem como conjecturar possíveis expressões analíticas de funções representadas graficamente; - Propor a investigação gráfica do comportamento no infinito de funções polinomiais de grau ímpar e de grau par, justificando o observado por comparação com o comportamento do termo de maior grau, evidenciando o seu papel dominante. - Solicitar a elaboração de programas em <i>Python</i> para determinação do valor de um polinómio num ponto e para determinar os coeficientes do polinómio quociente em resultado da divisão de um polinómio por uma expressão do tipo $x - a$, com a real. - Guiar os alunos na decomposição de polinómios em fatores lineares e quadráticos e na determinação da multiplicidade de uma raiz; - Referir a existência de fórmulas resolventes para polinómios de graus 3 e 4, e a sua inexistência para graus superiores.

	▪ conhecer o teorema do resto; ▪ conhecer o conceito de multiplicidade de uma raiz de um polinómio. Decomposição de um polinómio em fatores lineares e quadráticos: ▪ decompor polinómios em fatores lineares e quadráticos; ▪ obter a expressão analítica da função polinomial representada graficamente, observando a relevância da multiplicidade dos zeros na sua representação gráfica. Equações e inequações polinomiais de grau superior a 2: ▪ Elaborar tabelas de variação de sinal e de monotonia; ▪ Resolver gráfica e analiticamente equações e inequações polinomiais de grau superior a 2 no contexto de resolução de problemas de modelação. Operações com funções ▪ Caracterizar funções resultantes de operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) com funções	▪ Propor a análise do gráfico de funções polinomiais de grau não superior a 4 com recurso à tecnologia gráfica para estudar a monotonia e estudar analiticamente o sinal deste tipo de funções. ▪ Promover a resolução gráfica e analítica de equações e inequações polinomiais de grau inferior ou igual a 4; ▪ Propor a resolução de problemas em contexto real. ▪ Propor problemas que envolvem operações com funções, incluindo contextos de modelação, recorrendo à tecnologia gráfica, em casos simples; ▪ Apresentar expressões analíticas de funções representadas graficamente, que resultam de operações entre funções.
--	--	---

	polinomiais de grau não superior a 4.; ▪ Calcular zeros e estudar o sinal de funções resultantes de operações elementares entre funções, gráfica e analiticamente, em casos simples. Funções racionais Funções do tipo: $f(x) = a + \frac{b}{x-c},$ $a, c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ▪ reconhecer, interpretar e representar graficamente funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, calculando as coordenadas dos pontos de interseção com os eixos coordenados e estudando o sinal; ▪ conhecer o comportamento das funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ quando x tende para: - mais infinito, - menos infinito, - c por valores inferiores, - c por valores superiores, e identificar as equações das assíntotas horizontais e verticais ao gráfico destas funções e o seu domínio e contradomínio. Assíntotas verticais e horizontais:	▪ Promover o estudo intuitivo de um gráfico de uma situação particular e explorar representações gráficas de funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, com recurso à tecnologia; ▪ Propor a resolução de problemas, envolvendo funções racionais em contextos de modelação; ▪ Promover a utilização da noção intuitiva e informal de assíntota de uma função (reta da qual se aproxima, tanto quanto se quiser, o gráfico de uma função; mostrar esboços de gráficos de funções interseçados pela assíntota); ▪ Propor a identificação das assíntotas verticais e horizontais dos gráficos de funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$; ▪ Promover o estudo de funções do tipo $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, tendo por base as funções do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$; ▪ Resolver gráfica ou analiticamente problemas em contextos de modelação, por exemplo, concentrações em soluções, custo médio, intensidade da luz em função da distância ou problemas geométricos que relacionem áreas de figuras. ▪ Fomentar a utilização da tecnologia gráfica para comparar gráficos, explorar, investigar e identificar a existência de assíntotas verticais e horizontais, evidenciando limitações da tecnologia na determinação das suas equações.
--	---	---

	- identificar algebricamente as assíntotas verticais e horizontais de funções racionais definidas pelo quociente de funções afins. Cálculo diferencial Taxa de variação Derivada: - determinar a taxa média de variação de uma função num intervalo $[a, b]$ e fazer a sua interpretação geométrica; - determinar a razão incremental de uma função num dado ponto e chegar à taxa de variação instantânea através da noção intuitiva de limite. - identificar a derivada de uma dada função num ponto com o declive da reta tangente ao gráfico nesse ponto. Função derivada: - conhecer a definição de função derivada. Regras de derivação: - calcular a derivada de monómios, de grau não superior a 3, utilizando o limite da razão incremental de uma função num	- Introduzir a noção de taxa média de variação, incluindo exemplos como a velocidade média do movimento retilíneo de um corpo entre dois instantes; - Promover a interpretação geométrica da taxa média de variação de uma função no intervalo $[a, b]$ (declive do segmento de reta entre dois pontos); - Apresentar a noção de taxa de variação instantânea utilizando tabelas construídas com recurso à tecnologia; - Promover a utilização da noção intuitiva e informal de limite para obter a taxa de variação instantânea, em casos simples; - Guiar os alunos na escrita e interpretação do conceito de derivada enquanto taxa de variação instantânea, aliado à noção de declive da reta tangente ao gráfico num ponto. ▪ Salientar que a função derivada resulta da determinação da derivada num ponto genérico do domínio. ▪ Promover a derivação de monómios de grau não superior a 3, utilizando a definição de derivada num ponto genérico e num ponto específico; ▪ Apresentar as regras de derivação da adição, subtração, multiplicação, divisão e potências com expoente natural.
--	---	---

	ponto genérico. ▪ aplicar regras de derivação (adição, subtração, multiplicação, divisão, potências com expoente natural) para obter a função derivada. Otimização: ▪ reconhecer, numérica e graficamente, a relação entre o sinal da derivada e a monotonia de uma função; ▪ saber que se uma dada função definida num intervalo aberto tem extremo num ponto e tem derivada nesse ponto então essa derivada é nula (teorema de Fermat); ▪ estudar a monotonia e existência de extremos de uma função com derivada finita em todos os pontos do seu domínio, tendo por base o sinal e os zeros da sua derivada; ▪ resolver problemas de otimização de modelação matemática, em casos simples, no contexto da vida real.	▪ Promover a comparação entre o gráfico da função e o gráfico da sua derivada recorrendo quer à tecnologia gráfica, quer a processos analíticos para a construção de quadros de variação de sinal e zeros da derivada; ▪ Propor a resolução de problemas de otimização em contexto de modelação.
--	--	---

Pensamento Computacional

Exemplo de programa em *Python* que permite determinar os coeficientes do polinómio quociente em resultado da divisão de um polinómio de grau 3 por um binómio do tipo $x-a$, com a real.

```
print('Divisão de um polinómio (P) de grau 3 por x-a')
P=[]
for i in range(4):
```

```
P.append(float(input('Introduza o coeficiente do termo de grau '+str(3-i)+' : ')))
a=float(input('a = '))
```

```
def f(P,a):
    Q=[P[0]]
    m=P[0]
    for i in range(len(P)-1):
        m=m*a+P[i+1]
        Q.append(m)
    return Q
Q=f(P,a)
R=Q[-1]
print('Coeficientes do polinómio:',P)
print('Coeficientes do quociente:',Q[:-1])
print('Resto: P(',a,')= ',R)
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Possíveis aprofundamentos

Fomentar a visualização gráfica e a interpretação da taxa média de variação recorrendo a ferramentas computacionais, como por exemplo, o Geogebra:

- <https://www.geogebra.org/m/RCGp7JjK>
- <https://www.geogebra.org/m/aC9j8ZrE>

Propor a demonstração do Teorema de Fermat.

Propor uma interpretação de Teoremas como o de Weierstrass e o de Rolle (e dos seus corolários).

Bibliografia de referência

Caraça, B. J. (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Ciência Aberta. Lisboa: Gradiva.

Devlin, K. (2002). *Matemática - A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Estrada, M. F. Sá, C., Queiró, J. F., Silva, M. C., e Costa, M. J. (2000). *História da Matemática*. Universidade Aberta.

Fernandes, J. A. (1998). Tecnologia gráfica no estudo de classes de funções. *Educação & Matemática*, nº 46, p. 33-36.

Graça, M. (2000). Efeitos colaterais no uso de máquinas de calcular. *Gazeta de Matemática*, nº 139, p. 15-21.

Gracias, T. S., e Borba, M. (2000). Explorando possibilidades e potenciais limitações de calculadoras gráficas. *Educação & Matemática*, nº 56, p. 35-39.

Guichard, J. P. (1986). História da Matemática no ensino da Matemática. Em A. Bouvier (coord), *Didactique des Mathématiques*. Cedic/Nathan, 1986 (Adaptação livre de Arsélio Martins). Obtido de <https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/mhist.html>

Haese, M. et al. (2012) *Mathematics for the international student Mathematics SL* (for use with IB Diploma Programme). Third Edition. Adelaide: Haese Mathematics.

- Haese, M. et al. (2019) *Mathematics - Analysis and Approaches SL 2* (for use with IB Diploma Programme). Marlestone: Haese Mathematics.
- Haese, M. et al. (2019) *Mathematics - Applications and Interpretation SL 2* (for use with IB Diploma Programme). Marlestone: Haese Mathematics.
- Haese, M. et al. (2019) *Mathematics Core topics SL 1* (for use with IB Diploma Programme). Marlestone: Haese Mathematics.
- Icart, J. (2021). Fonctions: Une Perspective Historique. *Revue MathémaTICE*, nº 75, maio 2021. Obtido de <http://revue.sesamath.net/spip.php?article1414>
- Pina, H. (2010). *Métodos Numéricos*, Escolar Editora, Lisboa.
- Rosa, A. P. (2007). Contrastes entre novos e antigos programas do Ensino Secundário: alguns exemplos. *Gazeta de Matemática*, nº 153, p. 32-41.
- Sebastião e Silva, J. (1975-1978) *Compêndio de Matemática* (3 volumes). Lisboa: GEP.
- SESAMATH - *Manuel Maths 1re - Programme 2019*. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1spe_2019
- SESAMATH - *Manuel Maths 2de - Programme 2019*. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms2_2019
- Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., e Nápoles, S. (1997). *Funções - 10º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., e Nápoles, S. (1998). *Funções - 11º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., e Nápoles, S. (1999). *Funções - 12º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

ARTICULAÇÃO COM AS DIMENSÕES DA EDUCAÇÃO PARA A CIDADANIA

A Matemática contribui para a implementação da componente curricular de Cidadania e Desenvolvimento sempre que os conhecimentos, capacidades e atitudes são mobilizados de forma intencional para a compreensão crítica de realidades e desafios da sociedade. Neste sentido, o trabalho desenvolvido no âmbito das aprendizagens da Matemática pode favorecer uma reflexão informada sobre questões relacionadas com os Direitos Humanos, a Democracia e as Instituições Políticas, o Desenvolvimento Sustentável, a Literacia Financeira e o Empreendedorismo, a Saúde, o Risco e a Segurança Rodoviária, o Pluralismo e a Diversidade Cultural e os *Media*, promovendo uma participação cívica consciente, responsável e fundamentada.

No entanto, embora alguns temas ou domínios possam constituir oportunidades particularmente evidentes para esta articulação, a relação entre as Aprendizagens Essenciais e as dimensões da Educação para a Cidadania não se limita a conteúdos específicos.

As competências desenvolvidas no âmbito das aprendizagens da Matemática, como a análise crítica e o tratamento da informação, a interpretação de diferentes perspetivas, a argumentação fundamentada, a resolução de problemas, a comunicação de ideias, o pensamento crítico e criativo, a

colaboração e a reflexão sobre diferentes realidades, constituem elementos fundamentais para a concretização dos objetivos definidos na Estratégia Nacional de Educação para a Cidadania.

Assim, com o objetivo de apoiar a articulação entre as Aprendizagens Essenciais da Matemática e a componente curricular de Cidadania e Desenvolvimento, apresentam-se algumas propostas de exploração, sem prejuízo de outras que a escola, no âmbito da sua autonomia, considere pertinentes.

Direitos Humanos	Conduzir os alunos na reflexão da importância das condições de acessibilidade a satisfazer no projeto e na construção de espaços públicos, equipamentos coletivos e edifícios públicos e habitacionais, aquando do estudo da trigonometria, por exemplo.
Democracia e Instituições Políticas	Refletir, criticamente, sobre o papel dos cidadãos, do Estado e das organizações da sociedade civil na prevenção e combate à corrupção.
Literacia Financeira e Empreendedorismo	Dinamizar a realização de simulações relacionadas com processamento de salários (em que sejam utilizados os conceitos de vencimento líquido, salário bruto, abonos e descontos).
Pluralismo e Diversidade Cultural	Estimular a discussão e a reflexão sobre os seguintes temas: O papel da mulher na sociedade; Somos oito mil milhões. Como estamos distribuídos?
Media	Analisar dados apresentados em representações gráficas, verificando como a informação está apresentada pode influenciar a mensagem.

Desenvolvimento Sustentável

Estimular a discussão e reflexão sobre os seguintes temas:
Alterações climáticas. Os negacionistas têm razão ou há estatísticas a provar que não?
Como estão os nossos oceanos? (Plasticus maritimus, Planeta tangerina,...).

Cabe ao professor de Matemática em articulação com os restantes elementos do conselho de turma, tendo em consideração o projeto educativo da escola, o currículo (incluindo os projetos assumidos pelo conselho de turma) e outros aspetos que caracterizam o contexto local, definir os percursos pedagógicos mais adequados, que contribuam para a concretização da componente curricular de Cidadania e Desenvolvimento.

Consulta pública 2026