



EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO



12.º ANO | ENSINO SECUNDÁRIO

# MATEMÁTICA A

## INTRODUÇÃO

As Aprendizagens Essenciais (AE) constituem a referência nacional comum para aquilo que todos os alunos devem aprender ao longo da escolaridade obrigatória. Representam um núcleo fundamental de conhecimentos, capacidades e atitudes que cada disciplina deve assegurar, funcionando como um denominador curricular comum, sem esgotar o conjunto total de aprendizagens possíveis. Embora

obrigatórias não limitam a possibilidade de aprender mais. As AE deixam espaço para que cada escola e cada aluno possam aprofundar conteúdos e desenvolver competências adicionais.

Enquanto documentos de orientação curricular, as AE servem de base à planificação, realização e avaliação do ensino e da aprendizagem. Contribuem diretamente para o desenvolvimento das áreas de competências definidas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória. Por essa razão, constituem, juntamente com o Perfil, o referencial para a avaliação externa.

Organizam-se em três componentes fundamentais:

1. O que os alunos devem saber — conteúdos estruturados, indispensáveis, articulados concetualmente, relevantes e significativos;
2. Como devem pensar e trabalhar para aprender — processos cognitivos e operações essenciais à aquisição do conhecimento;
3. Como devem mostrar o que aprenderam — o “saber fazer”, aplicado dentro de cada disciplina e em articulação horizontal com as restantes.

Em síntese, as Aprendizagens Essenciais asseguram que o currículo é claro, coerente e acessível, combinando conteúdos sólidos com processos cognitivos que permitem aos alunos compreender, aplicar e aprofundar o que aprendem.

### **MATEMÁTICA ESCOLAR ORIENTADA PARA O FUTURO**

A formação de indivíduos matematicamente competentes é um propósito fundamental do currículo de matemática para o ensino secundário. A sociedade e o mundo contemporâneos, marcados pela globalização, crescente digitalização, conectividade e automatização, e por uma aceleração do desenvolvimento tecnológico, enfrentam desafios nos quais o conhecimento matemático adquire um papel essencial, proporcionando conceitos, métodos, modelos e formas de pensar. Esse poder matemático deve ser parte integrante da educação de todos os cidadãos, incluindo conhecimentos e capacidades que os jovens transportarão para a sua vida pessoal, social e profissional.

Empreender uma formação matemática abrangente e inovadora, neste ciclo de escolaridade, significa desenvolver nos alunos a capacidade de identificar conceitos matemáticos relevantes para resolver problemas reais, aplicar procedimentos matemáticos adequados e interpretar os resultados em contextos diversos. O raciocínio matemático está na base dos processos de compreensão dos

conceitos e objetos matemáticos, que podem e devem ser analisados, representados e relacionados de diferentes formas. São igualmente importantes a formulação de hipóteses, a testagem de conjecturas, a dedução, a generalização e a abstração, na construção de argumentos lógicos e conclusões, cuja comunicação de forma apropriada é cada vez mais importante no mundo atual.

O currículo consagra o propósito de preparar os alunos para formularem juízos e tomarem decisões fundamentadas, contribuindo para que se tornem cidadãos reflexivos, empenhados e participativos. Visa também contribuir para que os jovens valorizem o papel da Matemática no mundo e o seu carácter de ciência em evolução e renovação permanente, apreciando a sua dimensão estética, a par do seu legado histórico.

Assim, o currículo de Matemática para o futuro orienta-se para o desenvolvimento de áreas de competências, à luz do que é preconizado no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*, nomeadamente no que se refere ao pensamento crítico aliado à resolução de problemas, promovendo a criatividade e a comunicação, além de acentuar a pertinência do trabalho colaborativo.

## IDEIAS INOVADORAS DO CURRÍCULO

### Matemática para a Cidadania

O reconhecimento do ensino secundário como um ciclo que é parte integrante da formação geral dos jovens, incluído na escolaridade obrigatória, cria um contexto em que todas as disciplinas, incluindo a Matemática, devem contribuir para o desenvolvimento dos alunos enquanto cidadãos ativos, conscientes, informados e interventivos.

A crescente relevância do papel da Matemática na sociedade atual realça a importância e a necessidade de dotar os alunos de ferramentas matemáticas de análise dos processos sociais, que estão na base do exercício de uma cidadania ativa. Assim, estas Aprendizagens Essenciais exploram modelos matemáticos de processos eleitorais e a análise matemática de modelos financeiros e valorizam o desenvolvimento da literacia estatística.

### Pensamento Computacional

Os aspetos comuns entre o Pensamento Matemático e o Pensamento Computacional, bem como a relevância atual do Pensamento Computacional na ciência e na sociedade, justificam que o currículo de Matemática valorize esta abordagem conceptual na resolução de problemas. As Aprendizagens Essenciais de Matemática A promovem o desenvolvimento de práticas como a abstração, a decomposição, o reconhecimento de padrões, a análise e definição de algoritmos, bem como a aquisição de hábitos de depuração e otimização dos processos envolvidos na atividade matemática. Deste modo, a aposta no Pensamento Computacional revela a aproximação do currículo às recomendações internacionais, designadamente em relatórios da União Europeia, e também o alinhamento com o currículo de Matemática do ensino básico, favorecendo o desenvolvimento desta capacidade de forma integrada, coerente e progressiva.

### Diversificação de temas no currículo

Para além do desenvolvimento de competências dos alunos no âmbito da cidadania, pretende-se continuar a disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com os métodos numéricos, o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia, e a inclusão de temas com pouca tradição no ensino secundário em Portugal. Esta diversificação é intensificada no 12.º ano com a proposta de três temas em opção, possibilitando que turmas diferenciadas trabalhem temas matemáticos diferentes, podendo em algumas turmas, caso o tempo o permita, ser lecionado mais do que um dos temas opcionais propostos.

### Matemática para todos

Assume-se que o currículo na escolaridade obrigatória deve dar resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos. Os formalismos e os níveis de abstração devem ser adequados ao trabalho desenvolvido em cada tema. Pretende-se que a matemática seja um contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias.

### IDEIAS CHAVE DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS

As Aprendizagens Essenciais de Matemática no ensino secundário dão continuidade às aprendizagens do ensino básico e assumem um conjunto de princípios e orientações metodológicas, cuja concretização e especificação é feita para cada ano de escolaridade e tema matemático. A seguir, enunciam-se e apresentam-se as nove ideias chave preconizadas nas Aprendizagens Essenciais, esquematizadas na Figura 1:



Figura 1 - Ideias chave das Aprendizagens Essenciais

## Resolução de problemas, modelação e conexões

### *Dar sentido à Matemática e enfatizar a modelação e as aplicações*

A resolução de problemas, tal como a modelação, devem constituir o contexto para o estabelecimento de conexões entre diferentes conceitos e áreas da Matemática, assim como entre a Matemática e outras áreas do saber, permitindo uma abordagem integrada e significativa para os alunos na sua atividade matemática. É fundamental que os alunos tenham contacto com o processo de modelação matemática e sejam capazes de criticar, validar e aperfeiçoar modelos matemáticos. Preconizando a exploração de ideias e conceitos matemáticos, pretende-se que a aprendizagem não se reduza à memorização de regras, ao treino de procedimentos ou à sua execução sem compreensão. É essencial que as definições, os resultados e os procedimentos matemáticos adquiram sentido e que os alunos os saibam mobilizar e aplicar adequadamente para resolver problemas do mundo real, em situações do dia-a-dia ou de outras disciplinas. Uma das áreas de competências no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, fortemente ligada à Matemática - Raciocínio e resolução de problemas - implica que os alunos sejam capazes de: i) interpretar informação, planear e conduzir pesquisas; ii) gerir informações e tomar decisões; iii) desenvolver processos conducentes à construção de conhecimento, usando recursos diversificados.

## Raciocínio e lógica matemática

### *Incentivar processos de raciocínio dedutivo, integrando a lógica matemática nos diversos temas*

O aluno deve ser sistematicamente incentivado a explorar situações problemáticas, a usar abordagens heurísticas, a formular e validar conjecturas, a justificar processos de resolução e a encadear raciocínios. Os conceitos e métodos relativos à lógica matemática não constituem um tema específico das Aprendizagens Essenciais, mas devem, de forma natural, ser integrados nos vários temas abordados. Noções elementares de Lógica podem e devem ser introduzidas à medida que forem relevantes para a clarificação de processos e de raciocínios. Pretende-se, assim, que o aluno adquira a capacidade de raciocinar dedutivamente e de forma autónoma, usando os princípios e a simbologia inerentes à lógica matemática. A integração do raciocínio dedutivo e da lógica, bem como da linguagem matemática e simbólica, deve estar presente em todos os momentos de aprendizagem, sem se transformar num conteúdo tratado de forma isolada. O grau de formalização a utilizar deve ter sempre em conta o nível de maturidade matemática dos alunos e deve surgir,

se possível, como uma necessidade, garantindo que o processo de formalização acompanha a apropriação dos conceitos. Diversos temas, como, por exemplo, Geometria, Funções e Probabilidade, em contexto de resolução de problemas, podem constituir-se como excelentes oportunidades para desenvolver o raciocínio dedutivo, no qual se inclui a utilização de linguagem e de notações adequadas.

### **Recurso sistemático à tecnologia**

*Incentivar a exploração de ideias e conceitos, integrando a tecnologia como alavanca para a compreensão e resolução de problemas.*

A abordagem exploratória de ideias e conceitos matemáticos apresenta-se como determinante, o que pressupõe levar o aluno a participar ativamente num processo de construção e aprofundamento, motivado por questões desafiadoras, problemas e procura de justificações. A integração da tecnologia é considerada como indispensável nesse processo, pelas possibilidades que oferece de experimentação, visualização, representação, simulação, interatividade, bem como, evidentemente, de cálculo numérico e simbólico. O recurso a ambientes de geometria dinâmica (AGD), à folha de cálculo e a aplicativos digitais, explorados em computadores, smartphones ou calculadora gráfica, deve ser feito de forma sistemática. As atividades de programação devem ser integradas com uma complexidade progressiva, sendo relevantes para o desenvolvimento de processos algorítmicos, de um pensamento estruturado e do raciocínio lógico, proporcionando um vasto campo de aplicação da Matemática e envolvendo genuinamente a formulação e a resolução de problemas, além de promover o desenvolvimento do pensamento computacional.

### **Tarefas e recursos educativos**

*Apoiar a aprendizagem em tarefas, contextos e recursos diversificados*

A construção de tarefas de aprendizagem constitui uma das ações decisivas do professor. Uma tarefa matemática enriquecedora pode assumir a forma de um problema, uma questão exploratória, um exercício de aplicação, um pequeno projeto ou uma pesquisa de aprofundamento, sempre que observe os seguintes critérios: ser interessante e desafiante, envolver matemática relevante, criar oportunidades para aplicar e ampliar conhecimentos, permitir diferentes estratégias, tornar possível monitorizar a compreensão dos alunos e apoiar o seu progresso. As tarefas devem ser, ainda, diversificadas e ajustadas aos objetivos de aprendizagem e a sua

planificação deve prever diferentes tipos de organização do trabalho dos alunos. A utilização de recursos variados, nomeadamente da tecnologia, bem como a diversificação de contextos de aprendizagem, incluindo laboratórios, espaços fora da sala de aula, museus de ciência e outros, deverão merecer especial atenção na construção de tarefas.

## **História da Matemática**

### *Valorizar a importância da Matemática na evolução da sociedade*

O recurso a episódios e problemas marcantes da História da Matemática deve motivar pesquisas, estudos ou debates, não de carácter enciclopédico, mas contribuindo para que o progresso da Matemática seja apreciado e compreendido. Para além do seu valor intrínseco, enquanto património cultural que importa valorizar, existem numerosos factos, aspetos particulares e episódios da História da Matemática que, pelo seu potencial pedagógico, devem ser explorados em tarefas dentro e fora da sala de aula. Os professores devem aproveitar os factos contemporâneos da História da Matemática para levar os alunos a entender o papel determinante da Matemática na sociedade atual. Por exemplo, podem ser referidas as primeiras Medalhas Fields atribuídas a mulheres matemáticas, a importância dos modelos matemáticos para entender a crise climática, a evolução das epidemias ou a exploração espacial.

## **Práticas enriquecedoras e criatividade**

### *Inovar e investir em práticas enriquecedoras, favorecendo o desenvolvimento da criatividade e atitudes positivas face à Matemática*

O currículo integra propostas inovadoras, que incluem a realização de projetos, de profundidade e extensão ajustados às condições existentes e aos alunos. É igualmente recomendado que os alunos se envolvam na resolução de questões e problemas autênticos em contextos de interdisciplinaridade (nomeadamente, numa perspetiva integradora de STEAM – ciências, tecnologia, engenharia, artes e matemática). A programação, tal como a modelação ou o trabalho de projeto, abrem inúmeras vias de trabalho promissoras que não devem ser ignoradas. Também a beleza da Matemática, a sua aplicabilidade e a história fascinante que a envolve são fortes motivos para inovar através de práticas de enriquecimento das aprendizagens. É importante que os alunos experimentem o prazer da descoberta em Matemática e que desenvolvam o gosto pelo desafio, pela procura de soluções e pela sua comunicação. Dar aos alunos oportunidades

de aprenderem matemática significativa contribui para que desenvolvam atitudes positivas em relação à disciplina. Estimular a curiosidade, o interesse, a motivação e a criatividade é essencial para que reconheçam a importância da Matemática na sua formação pessoal e académica e adquiram autoconfiança, sentindo-se capazes de raciocinar e comunicar matematicamente. O contexto socioemocional que permeia a aprendizagem da Matemática tem grande influência sobre a imagem que os jovens constroem da disciplina, sendo determinante na formação de cidadãos críticos, reflexivos, que se sintam capazes de tomar decisões e de formular e resolver problemas de forma criativa e eficiente.

### Organização do trabalho dos alunos

*Valorizar o trabalho colaborativo num ambiente de entreajuda e corresponsabilização, cultivando comunidades de aprendizagem*

A valorização do trabalho colaborativo é assumida enquanto estratégia de aprendizagem e enquanto competência a desenvolver nos jovens na sociedade atual. A colaboração é especialmente indicada em tarefas nas quais os alunos possam discutir e definir abordagens e processos de resolução, confrontar ideias e contribuir para um objetivo comum. É também uma forma de trabalho em que os alunos se devem apoiar mutuamente, envolvendo-se em processos matemáticos, argumentação e comunicação, valorizando as competências individuais de cada um. Assim, o trabalho em pares e em pequenos grupos é adequado em múltiplas situações de aprendizagem, desde a realização de tarefas curtas, passando por situações que envolvem pesquisa, recolha de dados, modelação, até ao desenvolvimento de projetos.

### Comunicação matemática

*Comunicar recorrendo a representações múltiplas, com clareza e rigor e um nível de formalização adequado*

A comunicação matemática, a par do raciocínio e do pensamento crítico, está presente quando os alunos interpretam gráficos, esquemas, diagramas ou dados, justificam afirmações, utilizam diferentes representações, escrevem e criticam explicações e argumentos matemáticos, com simbologia adequada e produzindo encadeamentos lógicos. Importa pôr em prática diversos tipos de comunicação, dando espaço às discussões coletivas e em pequenos grupos, apresentações orais e/ou escritas, elaboração de relatórios e composições,

publicações e exposições, que são essenciais no processo de desenvolvimento de conceitos ou processos matemáticos. A simbologia constitui um sistema de representação matemática robusto que deve ser relacionado com outros modos de representação, tendo em vista a sua utilização oportuna, nomeadamente no âmbito da comunicação matemática. A formalização de conceitos e resultados matemáticos é uma etapa importante da aprendizagem que não se alcança por meio do excesso de manipulação simbólica ou pela prática de artifícios de cálculo demasiadamente técnicos.

### **Avaliação para a aprendizagem**

#### *Privilegiar a avaliação formativa na regulação do processo de aprendizagem*

A abordagem exploratória que se privilegia implica a integração da avaliação no processo de aprendizagem. É necessário que a avaliação seja um processo, e não um fim, e que esteja ao serviço da aprendizagem dos alunos, de modo a favorecê-la. A diversificação de formas e instrumentos de avaliação é uma das práticas de avaliação recomendadas. Constituem boas tarefas de avaliação formativa as resoluções detalhadas de tarefas, os relatórios e os cartazes. A produção de documentos de natureza audiovisual é igualmente válida e apelativa, designadamente sob a forma de pequenos vídeos, criação de páginas e blogs, tirando partido de ferramentas digitais. As partilhas de ideias e conclusões em sala de aula, bem como as apresentações orais, constituem boas oportunidades para monitorizar e acompanhar o desenvolvimento das aprendizagens e identificar dificuldades e obstáculos.

## AVALIAÇÃO

A avaliação é intrínseca ao ensino e à aprendizagem e deve, por isso, assumir-se como um processo contínuo e integrado que regula o progresso das aprendizagens e orienta a prática pedagógica.

A investigação em educação tem vindo a evidenciar que a avaliação se desenvolve numa relação entre o professor, o aluno e os seus pares, em diferentes momentos do processo de aprendizagem. Partindo da identificação de três questões centrais, identificar onde os alunos se encontram no seu percurso de aprendizagem, para onde devem progredir e que estratégias podem apoiar esse progresso, identificam-se cinco estratégias-chave para a implementação, com sucesso, da avaliação para a aprendizagem:

- clarificar, compreender e partilhar os objetivos de aprendizagem e os critérios de sucesso (critérios de avaliação/verificação do sucesso);
- promover o diálogo, bem como realizar atividades e tarefas eficazes que permitam recolher informação sobre a aprendizagem;
- dar *feedback* que promova o desenvolvimento da aprendizagem;
- promover a aprendizagem entre pares;
- implicar os alunos como agentes da sua aprendizagem.

As práticas em sala de aula, decorrentes da implementação destas estratégias-chave, podem ser consideradas formativas, na medida em que a informação sobre o desempenho dos alunos, sustentada em evidências recolhidas no decurso das atividades realizadas, é interpretada e utilizada por professores, alunos ou pelos seus pares com o objetivo de apoiar decisões pedagógicas fundamentadas sobre os próximos passos no processo de ensino e aprendizagem.

Ao fomentar uma avaliação pedagógica contínua e integrada, em que o aluno é encarado como agente da aprendizagem, reforça-se a intencionalidade pedagógica do ensino, promovendo a avaliação não apenas das aprendizagens, mas sobretudo para as aprendizagens.

A avaliação para a aprendizagem decorre da utilização de informação recolhida através de instrumentos diversificados e da observação, muitas vezes informal, dos desempenhos dos alunos nas atividades diárias da sala de aula, não se constituindo como uma tarefa burocrática que implique o registo sistemático de toda a informação relativa a esse desempenho. Tanto a avaliação formativa (sistemática e contínua) como a avaliação sumativa (que permite fazer um ponto de situação sobre o que os alunos aprenderam num dado intervalo de tempo ou unidade didática) devem ser coerentes e intencionais, contribuindo para uma avaliação pedagógica consistente. Neste pressuposto, também os resultados da avaliação externa devem ser utilizados com intenção pedagógica e permitir aos alunos e aos professores melhorar o ensino e a aprendizagem.

Com o objetivo de apoiar os processos de avaliação pedagógica, interna e externa, foram introduzidos, nos documentos das Aprendizagens Essenciais (AE) de cada disciplina, descritores de desempenho organizados por domínio e por nível de desempenho (*Desempenho Proficiente* e *Desempenho Avançado*), que se constituem como o referencial nacional para a avaliação dos alunos. Salienta-se que o que deve ser aprendido por todos os alunos, em cada disciplina, é o constante do quadro “Operacionalização das Aprendizagens Essenciais”. Com a introdução destes dois níveis de desempenho, estabelece-se um referencial comum, salvaguardando-se simultaneamente a autonomia das escolas para a (re)definição de critérios e para o (re)ajustamento de instrumentos de recolha de informação sobre as aprendizagens.

Os descritores de desempenho constituem referenciais que permitem identificar e caracterizar diferentes níveis de desenvolvimento das aprendizagens dos alunos. Estes descritores apoiam a interpretação do desempenho escolar e promovem padrões elevados de qualidade na consolidação do conhecimento e no desenvolvimento de competências.

No exercício da sua autonomia, as escolas e os professores tomam estes descritores como referenciais para apoiar a definição dos critérios de avaliação e a construção de instrumentos de recolha de informação ajustados ao contexto educativo e às especificidades de cada disciplina. A partir destes referenciais, as escolas definem critérios que orientam a apreciação do trabalho realizado pelos alunos, garantindo que a avaliação se centra na qualidade da mobilização dos conhecimentos e das competências desenvolvidas ao longo do processo de ensino e aprendizagem.

Neste enquadramento, os descritores apresentados para cada domínio permitem identificar diferentes níveis de desempenho evidenciados pelos alunos nas tarefas realizadas em contexto de aprendizagem. A sua interpretação pressupõe uma análise global do trabalho dos discentes, considerando a compreensão dos temas em estudo, a capacidade de selecionar, organizar e utilizar informação relevante, de aplicar conceitos e procedimentos adequados e de mobilizar o que foi aprendido nas tarefas propostas, demonstrando domínio das AE. No nível de desempenho **Proficiente**, observa-se uma utilização adequada, consistente e segura dos conhecimentos e das competências em diferentes situações de trabalho escolar, o que possibilita a explicação de fenómenos ou processos, a interpretação de informação e a resolução de tarefas com base no que foi aprendido.

No nível de desempenho **Avançado**, os alunos demonstram uma mobilização mais autónoma, rigorosa e integrada desses conhecimentos e dessas competências. Analisam, interpretam e relacionam informação de forma crítica, utilizam conceitos com rigor e articulam diferentes saberes para explicar fenómenos ou processos de forma fundamentada, revelando maior capacidade de análise, de integração da informação e de aplicação das aprendizagens em diferentes contextos.

Os descritores não substituem os critérios de avaliação definidos pelas escolas, mas constituem um referencial comum que visa apoiar os professores na apreciação do desenvolvimento das aprendizagens, na comunicação do desempenho dos alunos e na tomada de decisões pedagógicas orientadas para aprendizagens de qualidade.

Com o propósito de promover a transparência e o envolvimento no processo de aprendizagem, a explicitação e clarificação dos critérios de avaliação de escola junto dos alunos e dos encarregados de educação assumem particular importância, pois favorecem a compreensão e a apropriação dos princípios de uma avaliação centrada na aprendizagem.

Este documento curricular apresenta uma proposta de descritores de desempenho que têm por base os seguintes domínios (i) Resolução de Problemas, Modelação e Conexões; (ii) Raciocínio e Lógica Matemática; (iii) Comunicação Matemática; (iv) Recurso Sistemático à Tecnologia; e (v) Práticas Enriquecedoras e Criatividade.

| Domínio de avaliação                                | Nível       | Descritor de desempenho                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-----------------------------------------------------|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Resolução de Problemas, Modelação e Conexões</b> | Avançado    | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <b>Critica</b>, de forma fundamentada, soluções de modelos matemáticos.</li> <li>▪ <b>Valida</b> modelos matemáticos a partir do confronto sistemático com a realidade.</li> <li>▪ <b>Aperfeiçoa</b>, de forma autónoma e justificada, modelos matemáticos para resolver problemas do mundo real, em contextos do quotidiano, interdisciplinares ou de outras disciplinas.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|                                                     | Proficiente | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <b>Critica</b>, sem fundamentar, soluções de modelos matemáticos, identificando erros ou limitações mais evidentes.</li> <li>▪ <b>Valida</b> modelos matemáticos a partir do confronto com a realidade tirando conclusões simples.</li> <li>▪ <b>Aperfeiçoa</b>, modelos matemáticos, com orientação, para resolver problemas do mundo real, em contextos do quotidiano.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| <b>Raciocínio Dedutivo e Lógica Matemática</b>      | Avançado    | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <b>Explora</b>, de forma autónoma e sistemática, situações problemáticas, identificando padrões, relações e diferentes estratégias de abordagem.</li> <li>▪ <b>Seleciona e aplica</b>, de forma intencional e flexível, abordagens heurísticas adequadas, ajustando-as em função do problema.</li> <li>▪ <b>Formula, testa e valida</b> conjecturas de forma rigorosa, recorrendo a argumentos matemáticos.</li> <li>▪ <b>Justifica</b>, de forma clara, estruturada e fundamentada, os processos de resolução e procedimentos, avaliando a sua validade.</li> <li>▪ <b>Raciocina</b> dedutivamente e de forma <b>autónoma</b>, usando os princípios e a simbologia da lógica matemática.</li> </ul> |

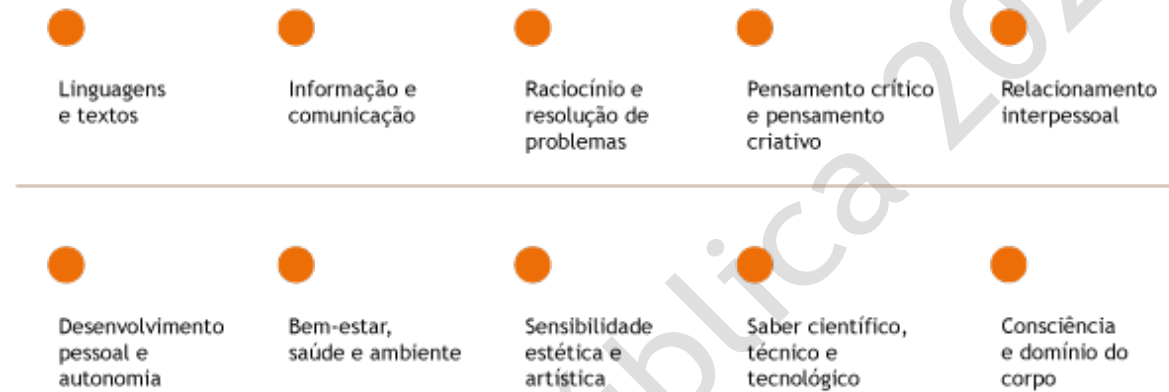
| Domínio de avaliação          | Nível       | Descritor de desempenho                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-------------------------------|-------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                               | Proficiente | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <b>Explora</b> situações problemáticas, identificando padrões, relações e estratégias de resolução, com apoio quando necessário.</li> <li>▪ <b>Usa</b> abordagens heurísticas adequadas, com orientação, aplicando-as na resolução de problemas.</li> <li>▪ <b>Formula</b> e <b>valida</b> conjecturas, com base em exemplos ou situações concretas.</li> <li>▪ <b>Justifica</b> processos de resolução e procedimentos de forma clara, ainda que com fundamentação parcial.</li> <li>▪ <b>Raciocina</b> e <b>encadeia</b> raciocínios, usando os princípios e a simbologia inerentes à lógica matemática.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <b>Comunicação Matemática</b> | Avançado    | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <b>Formaliza</b> conceitos e resultados matemáticos de <b>forma</b> rigorosa e eficaz, recorrendo à simbologia adequada e à notação correta.</li> <li>▪ <b>Escreve</b> explicações e argumentos matemáticos claros e estruturados, apresentando <b>justificações</b> completas com encadeamento lógico consistente, e avalia criticamente a validade das suas ideias.</li> <li>▪ <b>Interpreta e analisa</b> gráficos, esquemas, diagramas e dados, extraindo informação relevante e identificando padrões, relações ou tendências significativas.</li> <li>▪ <b>Justifica</b> afirmações com base em raciocínios matemáticos rigorosos, construindo argumentos completos e consistentes.</li> <li>▪ <b>Utiliza</b> diferentes representações (simbólica, gráfica, numérica e verbal) de forma integrada, estabelecendo relações claras e generalizando conclusões quando apropriado.</li> <li>▪ <b>Escreve</b> explicações e argumentos matemáticos de forma precisa e articulada, avaliando os seus próprios procedimentos e conclusões.</li> </ul> |

| Domínio de avaliação                    | Nível       | Descritor de desempenho                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|-----------------------------------------|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                         | Proficiente | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <b>Formaliza</b> conceitos e resultados matemáticos, recorrendo à simbologia adequada, ainda que com imprecisões.</li> <li>▪ <b>Escreve</b> explicações e argumentos matemáticos simples, apresentando <b>justificações</b> com encadeamento lógico, e identifica aspetos a melhorar.</li> <li>▪ <b>Interpreta</b> gráficos, esquemas, diagramas ou dados, retirando informação adequada.</li> <li>▪ <b>Justifica</b> afirmações com base em raciocínios matemáticos simples, ainda que nem sempre completos ou totalmente rigorosos.</li> <li>▪ <b>Utiliza</b> diferentes representações (simbólica, gráfica, numérica e verbal), estabelecendo algumas relações entre elas.</li> <li>▪ <b>Escreve</b> explicações e argumentos matemáticos de forma compreensível, apresentando justificações com encadeamento lógico e identifica aspetos a melhorar.</li> </ul> |
| <b>Recurso Sistemático à Tecnologia</b> | Avançado    | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <b>Resolve</b> problemas que integram atividades de programação, folhas de cálculo e ambientes de geometria dinâmica, enfrentando desafios de complexidade elevada.</li> <li>▪ <b>Desenvolve</b> processos algorítmicos com <b>pensamento estruturado</b> e raciocínio lógico, aplicando estratégias adequadas de forma consistente e autónoma.</li> <li>▪ <b>Envolve-se</b> de modo proativo na formulação e resolução de problemas, identificando objetivos, decompondo tarefas e avaliando soluções.</li> <li>▪ <b>Desenvolve</b> o pensamento computacional de forma rigorosa, criando, testando e refletindo sobre os procedimentos, os resultados e a eficiência das estratégias utilizadas.</li> </ul>                                                                                                                                                       |

| Domínio de avaliação                          | Nível       | Descritor de desempenho                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-----------------------------------------------|-------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                               | Proficiente | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <b>Resolve</b> problemas que integram atividades de programação, folhas de cálculo e ambientes de geometria dinâmica, enfrentando desafios de complexidade moderada.</li> <li>▪ <b>Desenvolve</b> processos algorítmicos com <b>pensamento estruturado</b> e raciocínio lógico, aplicando estratégias apropriadas, de forma parcial ou com orientação.</li> <li>▪ <b>Envolve-se</b> na formulação e resolução de problemas, identificando objetivos e decompondo tarefas, com orientação na avaliação das soluções.</li> <li>▪ <b>Desenvolve</b> o pensamento computacional através da análise de algoritmos e de pequenos programas propostos, identificando padrões e relações simples.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| <b>Práticas Enriquecedoras e Criatividade</b> | Avançado    | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <b>Participa de modo proativo</b> na resolução de questões e problemas <b>autênticos</b> em <b>contextos de interdisciplinaridade</b>, integrando de forma consciente conceitos de STEAM (Ciências, Tecnologia, Engenharia, Artes e Matemática).</li> <li>▪ <b>Desenvolve</b> atividades em contextos diversificados, utilizando recursos tecnológicos, estratégias de modelação e projetos colaborativos para explorar e aprofundar ideias matemáticas.</li> <li>▪ <b>Propõe soluções e ideias criativas e originais</b>, explorando diferentes abordagens e refletindo criticamente sobre o impacto e a aplicabilidade das suas ideias em diferentes situações.</li> <li>▪ <b>Trabalha</b> de forma autónoma e proativa <b>com tarefas matemáticas enriquecedoras</b>, incluindo problemas complexos, questões exploratórias, projetos interdisciplinares ou pesquisas aprofundadas.</li> <li>▪ <b>Resolve</b> tarefas matemáticas de forma autónoma e proativa, identificando oportunidades para aplicar, aprofundar e integrar conhecimentos em contextos diversos e desafiantes, utilizando diferentes estratégias.</li> <li>▪ <b>Revela atitudes positivas e curiosidade intelectual</b>, refletindo sobre a sua aprendizagem, propondo novas questões e explorando oportunidades de aprofundamento.</li> </ul> |

| Domínio de avaliação | Nível       | Descritor de desempenho                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|----------------------|-------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                      | Proficiente | <ul style="list-style-type: none"><li>▪ <b>Participa</b> na resolução de questões e problemas <b>autênticos</b> em <b>contextos interdisciplinares</b>, com orientação, reconhecendo ligações simples entre conceitos de STEAM (Ciências, Tecnologia, Engenharia, Artes e Matemática).</li><li>▪ Desenvolve atividades em contextos diversificados, utilizando recursos tecnológicos, estratégias de modelação ou trabalho de projeto, com algum apoio na organização e execução.</li><li>▪ <b>Apresenta soluções e ideias criativas de forma guiada</b>, refletindo de modo simples sobre a aplicabilidade ou relevância das suas propostas.</li><li>▪ Trabalha <b>com tarefas matemáticas enriquecedoras</b> sob a forma de um problema, uma questão exploratória, um exercício de aplicação, um pequeno projeto ou uma pesquisa de aprofundamento.</li><li>▪ <b>Resolve</b> tarefas matemáticas, aproveitando oportunidades para aplicar e ampliar conhecimentos, utilizando diferentes estratégias.</li><li>▪ <b>Revela</b> atitudes positivas em relação à disciplina.</li></ul> |

## ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS (ACPA)



Apresenta-se uma listagem exemplificativa das Áreas de competência do perfil dos alunos, em que é estabelecida uma ligação com os temas de aprendizagens matemáticas mais fortemente visados.

### Linguagens e textos

Reconhece e utiliza linguagem simbólica.

Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática.

- Modelos matemáticos para cidadania (10.º ano)
- Geometria (10.º ano, 11.º ano)

- Funções (10.º ano, 11.º ano, 12.º ano)
- Matemática discreta (11.º ano)
- Números complexos (12.º ano)
- Probabilidade (12.º ano)
- Introdução à inferência estatística (12.º ano)
- Primitivas imediatas e integrais definidos (12.º ano)
- Matrizes (12.º ano)

### **Informação e comunicação**

Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avaliando, validando e organizando a informação recolhida. Apresenta e explica conceitos em grupos, ideias e projetos diante de audiências reais, presencialmente ou a distância.

- Modelos matemáticos para cidadania (10.º ano)
- Estatística (10.º ano)
- Geometria (10.º ano)
- Funções (10.º ano, 11.º ano, 12.º ano)
- Números complexos (12.º ano)
- Probabilidade (12.º ano)
- Introdução à inferência estatística (12.º ano)
- Primitivas imediatas e integrais definidos (12.º ano)
- Matrizes (12.º ano)

### **Raciocínio e resolução de problemas**

Coloca e analisa questões a investigar, distinguindo o que se sabe do que se pretende descobrir.

Gere projetos e toma decisões na resolução de problemas e analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas.

Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo.

- Modelos matemáticos para cidadania (10.º ano)
- Estatística (10.º ano)
- Geometria (10.º ano, 11.º ano)
- Funções (10.º ano, 11.º ano, 12.º ano)
- Matemática discreta (11.º ano)
- Números complexos (12.º ano)
- Probabilidade (12.º ano)
- Introdução à inferência estatística (12.º ano)
- Primitivas imediatas e integrais definidos (12.º ano)
- Matrizes (12.º ano)

### **Pensamento crítico e pensamento criativo**

Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões.

Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido, no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade.

- Modelos matemáticos para cidadania (10.º ano)
- Estatística (10.º ano)
- Geometria (10.º ano, 11.º ano)
- Funções (10.º ano, 11.º ano, 12.º ano)
- Matemática discreta (11.º ano)

- Números complexos (12.º ano)
- Probabilidade (12.º ano)
- Introdução à inferência estatística (12.º ano)
- Primitivas imediatas e integrais definidos (12.º ano)
- Matrizes (12.º ano)

### **Relacionamento interpessoal**

Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos.

- Modelos matemáticos para cidadania (10.º ano)
- Estatística (10.º ano)
- Funções (10.º ano, 11.º ano, 12.º ano)
- Números complexos (12.º ano)
- Probabilidade (12.º ano)
- Introdução à inferência estatística (12.º ano)
- Primitivas imediatas e integrais definidos (12.º ano)
- Matrizes (12.º ano)

### **Bem-estar, saúde e ambiente**

Preocupa-se com a construção de um futuro sustentável e envolve-se em projetos de cidadania ativa.

- Modelos matemáticos para cidadania (10.º ano)
- Estatística (10.º ano)

### **Saber científico, técnico e tecnológico**

Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão.

Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos.

- Modelos matemáticos para cidadania (10.º ano)
- Estatística (10.º ano)
- Geometria (10.º ano, 11.º ano)
- Funções (10.º ano, 11.º ano, 12.º ano)
- Matemática discreta (11.º ano)
- Números complexos (12.º ano)
- Probabilidade (12.º ano)
- Introdução à inferência estatística (12.º ano)
- Primitivas imediatas e integrais definidos (12.º ano)
- Matrizes (12.º ano)

Consulta pública 2026

## OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

A disciplina de Matemática assume um papel estruturante nos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. As Aprendizagens Essenciais do 10.º ano integram uma vertente de formação matemática para a cidadania, em consonância com as restantes disciplinas de Matemática do ensino secundário. Esta vertente é concretizada nos temas *Modelos Matemáticos para a Cidadania e Estatística*. Para além destes temas, no 10.º ano, os alunos estudam *Geometria* e *Funções* numa lógica de ampliar e aprofundar as abordagens do ensino básico.

No 11.º ano as Aprendizagens Essenciais integram *Geometria*, *Matemática Discreta* e *Funções*. No tema Geometria inclui-se geometria analítica e vetorial e trigonometria. Na Matemática Discreta estudam-se técnicas de contagem e sucessões. O estudo das funções considera sempre a abordagem dos diferentes pontos de vista: gráfico, numérico e algébrico.

No 12.º ano é abordado o tema *Números Complexos* e são aprofundados os temas *Probabilidade* e *Funções*. A finalizar as Aprendizagens Essenciais do 12.º ano são propostos três temas em alternativa: *Inferência Estatística*, *Primitivas Imediatas e Integrais Definidos* e *Matrizes*. Deve ser escolhido um destes temas para cada turma da escola, podendo essa escolha variar de turma para turma. Se o tempo o permitir, pode ser trabalhado mais do que um tema opcional.

O trabalho de projeto assume uma dimensão relevante, surgindo explicitamente no 10.º ano e no 11.º ano. No 10.º ano são sugeridas propostas de projetos nos temas Estatística, Modelos Matemáticos para a Cidadania, Geometria sintética e Funções. No 11.º ano são sugeridas propostas de projetos nos temas Matemática Discreta (Sucessões), Geometria e Funções. Em cada um destes anos deverá ser desenvolvido pelo menos um dos projetos, podendo em alternativa ser desenvolvida outra proposta de trabalho, em qualquer tema que o professor considere adequado.

As Aprendizagens Essenciais relativas à Matemática A, dos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas, concretizam-se em três documentos distintos. A organização das Aprendizagens Essenciais, que a seguir se detalha, é

apresentada em três áreas:

- *Temas, Tópicos e Subtópicos matemáticos*, em que são identificados os conceitos matemáticos a abordar.
- *Objetivos de aprendizagem: conhecimentos, capacidades e atitudes que o aluno deve revelar*, em que são concretizadas, para cada tópico matemático, as aprendizagens visadas com a indicação do foco e da especificação preconizada.
- *Ações estratégicas de ensino do professor*, onde é clarificado o papel do professor e as indicações metodológicas que são consideradas adequadas para atingir os objetivos de aprendizagem definidos, bem como a sugestão de exemplos para a concretização das atividades a propor aos alunos. São também dadas indicações para clarificar os níveis de dificuldade que se consideram parte integrante destas Aprendizagens Essenciais.

Quando nas Aprendizagens Essenciais se refere recurso a tecnologia gráfica, deve entender-se a utilização de folhas de cálculo ou qualquer versão de calculadora gráfica, física ou sob a forma de emulador, bem como o uso do Geogebra ou outro Ambiente de Geometria Dinâmica, nas suas diversas versões disponíveis em qualquer dispositivo digital. Considera-se também o recurso a aplicativos digitais específicos (*applets*), disponíveis na internet ou em fóruns temáticos.

Para cada tema são incluídas notas clarificadoras, nomeadamente no que se refere à sugestão de: atividades para o desenvolvimento do Pensamento Computacional, com recurso a exemplos; propostas de possíveis aprofundamentos de alguns temas ou de abordagens alternativas; referências bibliográficas que incluem documentos e recursos para apoio ao trabalho do professor.

A ordem dos temas apresentados nestas Aprendizagens Essenciais constitui um exemplo de uma sequência que se considera adequada no âmbito do processo de gestão e desenvolvimento do currículo.

Na tabela abaixo apresenta-se uma possível distribuição dos tempos letivos pelos tópicos das Aprendizagens Essenciais, tomando como referência vinte e oito semanas letivas, num total de trinta e duas ou trinta e três semanas previstas usualmente no calendário escolar. Considerou-se cada semana com seis tempos letivos de quarenta e cinco minutos.

| Temas                    | Tópicos                                     | Aulas (45 min) | Semanas   |
|--------------------------|---------------------------------------------|----------------|-----------|
| <b>Números complexos</b> | Números complexos na forma algébrica        | 12             | 5         |
|                          | Números complexos na forma trigonométrica   | 18             |           |
| <b>Probabilidade</b>     | Fenómeno aleatório                          | 2              | 6         |
|                          | Probabilidade                               | 8              |           |
|                          | Probabilidade condicionada                  | 12             |           |
|                          | Modelos de probabilidade em espaços finitos | 10             |           |
|                          | Modelo Normal                               | 4              |           |
| <b>Funções</b>           | Função exponencial                          | 6              | 14        |
|                          | Função inversa                              | 4              |           |
|                          | Função logarítmica                          | 16             |           |
|                          | Função composta                             | 2              |           |
|                          | Derivadas                                   | 26             |           |
|                          | Funções contínuas e deriváveis              | 18             |           |
|                          | Resolução aproximada de equações            | 12             |           |
| <b>Tema Opcional</b>     | Introdução à inferência estatística         | 18             | 3         |
|                          | Primitivas imediatas e Integrais definidos  |                |           |
|                          | Matrizes                                    |                |           |
|                          |                                             | <b>Total</b>   | <b>28</b> |

## OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

| ORGANIZADOR<br>Domínio   | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES<br>O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS<br>(Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|--------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Números complexos</b> | <b>Números complexos na forma algébrica</b><br><br>Unidade imaginária: <ul style="list-style-type: none"> <li>contextualizar historicamente a origem dos números complexos;</li> <li>identificar a unidade imaginária e o conjunto <math>\mathbb{C}</math> dos números complexos;</li> <li>resolver equações do 2.º grau, de coeficientes reais, quando não existem raízes reais.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Estimular a pesquisa na internet sobre a evolução do conceito de número, desde os números naturais até à formalização dos números complexos.</li> <li>Sugerir a adaptação do programa efetuado em <i>Python</i> para a resolução de equações do 2.º grau, incorporando números complexos.</li> <li>Chamar a atenção de que o conjunto dos números reais é um subconjunto do conjunto dos números complexos.</li> <li>Salientar que este conjunto permite obter soluções para equações do 2.º grau que são impossíveis em <math>\mathbb{R}</math>, sendo que não é possível definir relações de ordem entre dois complexos.</li> </ul> |
|                          | <b>Forma algébrica</b><br><b>Conjugado e módulo de um número complexo</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>representar números complexos na forma algébrica, identificando parte real, parte imaginária, módulo e conjugado, bem como números imaginários puros em <math>\mathbb{C}</math>.</li> </ul>                                                                                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>Conduzir o aluno a verificar que existem equações do 3.º grau (de coeficientes reais) que têm uma, duas ou três soluções em <math>\mathbb{C}</math>, sendo que pelo menos uma delas é sempre real e as outras duas se complexas são conjugadas.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |

| ORGANIZADOR<br>Domínio | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES<br>O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                  | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS<br>(Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                   |
|------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                        | <b>Igualdade de complexos:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>estabelecer a igualdade de números complexos na forma algébrica.</li> </ul>                                                                                                          | <ul style="list-style-type: none"> <li>Salientar que dois complexos são iguais se coincidem, respetivamente, nas suas partes reais e imaginárias.</li> </ul>                                                                                                          |
|                        | <b>Operações elementares com números complexos na forma algébrica:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>efetuar operações elementares com números complexos na forma algébrica (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Realçar que nas operações elementares entre números complexos se mantém a generalidade das propriedades das operações definidas em <math>\mathbb{R}</math>.</li> </ul>                                                         |
|                        | <b>Representação de complexos no plano de Argand-Gauss:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>representar números complexos no plano de Argand-Gauss e identificar números complexos a partir das suas imagens geométricas.</li> </ul>                | <ul style="list-style-type: none"> <li>Sugerir a construção geométrica dos pontos correspondentes à soma e ao produto de dois números complexos, utilizando ferramentas tecnológicas.</li> </ul>                                                                      |
|                        | <b>Números complexos na forma trigonométrica</b><br><b>Forma trigonométrica:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>representar números complexos na forma trigonométrica;</li> </ul>                                                                  | <ul style="list-style-type: none"> <li>Salientar que um número complexo na forma trigonométrica pode ser representado por <math>\rho \cdot e^{i\theta}</math>, em que <math>e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta</math>, <math>\rho</math> é o módulo</li> </ul> |

| ORGANIZADOR<br>Domínio | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES<br>O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                                                                  | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS<br>(Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                        | <ul style="list-style-type: none"> <li>estabelecer a igualdade de dois números complexos na forma trigonométrica, bem como comparar números complexos cujas imagens geométricas estão em posições simétricas em relação ao eixo real, ao eixo imaginário ou à origem.</li> </ul>                           | <p>(<math>\rho &gt; 0</math>) e <math>\theta</math> o argumento do complexo (argumento principal se <math>\theta \in ]-\pi, \pi]</math>, ou argumento não negativo mínimo se <math>\theta \in [0, 2\pi[</math>).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Realçar a equação de Euler, <math>e^{i\pi} + 1 = 0</math>, por envolver os cinco símbolos mais importantes da matemática (<math>1, 0, \pi, e, i</math>).</li> <li>Levar os alunos a verificar que dois números complexos são iguais se tiverem o mesmo módulo e o seu argumento diferir em <math>2k\pi, k \in \mathbb{Z}</math>.</li> </ul> |
|                        | <p><b>Operações com números complexos na forma trigonométrica</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>efetuar operações com números complexos na forma trigonométrica (multiplicação, divisão, potenciação e radiciação);</li> <li>resolver equações simples em <math>\mathbb{C}</math>.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Fomentar a obtenção de números complexos na forma trigonométrica resultantes de operações entre complexos (potenciação e radiciação), evidenciando a sua interpretação geométrica (casos simples).</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|                        | <p><b>Conjuntos definidos por condições na variável complexa</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>caracterizar domínios planos através de condições na variável complexa e vice-versa.</li> </ul>                                                                                                | <ul style="list-style-type: none"> <li>Propor a identificação de condições na variável complexa que representam regiões do plano complexo e vice-versa (circunferências, círculos, semirretas, retas e semiplanos).</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |

### Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo,

e a estabelecer ordem entre eles. O reconhecimento de padrões na tarefa (ou situação) apresentada ou em problemas semelhantes, anteriormente resolvidos, poderá contribuir para facilitar a estruturação do algoritmo a desenvolver. Antes de redigir o programa na linguagem *Python*, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Exemplo de programa em *Python* para determinação das soluções de uma equação quadrática na forma canónica:

```
print('ax^2+bx+c=0')
a=float(input('a?'))
b=float(input('b?'))
c=float(input('c?'))
delta=b**2-4*a*c
if delta==0:
    x1=(-b-(delta)**(1/2))/(2*a)
    print('Solução: ',x1)
else:
    x1=(-b-(delta)**(1/2))/(2*a)
    x2=(-b+(delta)**(1/2))/(2*a)
    print('Duas soluções:',x1,' e ',x2)
```

**Nota:** O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

### Possíveis aprofundamentos:

Aplicações dos números complexos à eletrónica e à engenharia (fractais e frequências de rádio).

Exploração computacional do conjunto de Mandelbrot, fazendo uma referência à Teoria do Caos.

Exploração algébrica do conjunto dos quaterniões, observação de que contém  $\mathbb{C}$ ; referir a história do aparecimento dos quaterniões.

### Bibliografia de referência

- Alves, P., e Vaz, C. (s/d). *Euler e o Número Imaginário*. Seminário Olga Pombo. Universidade de Lisboa. Obtido de <https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/euler/index.htm>
- Cunha, A. I. (2020). *Aplicação dos Números Complexos na Geometria Plana*. Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário. Universidade do Porto.
- Eck, D. (2020). *Explore the Mandelbrot Set*. Obtido de <https://math.hws.edu/eck/js/mandelbrot/MB.html>
- Gouveia, M. C. (2003-2004). *Geometria Fractal e Teoria do Caos*. Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Obtido de <http://www.mat.uc.pt/~mcag/FEA2004/Geometria%20Fractal%20e%20Teoria%20do%20Caos.pdf>
- Guichard, J. P. (1986). *História da Matemática no ensino da Matemática*. Em A. Bouvier (coord), *Didactique des Mathématiques*, Cedic/Nathan, 1986 (Adaptação livre de Arsélio Martins). Obtido de <https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/mhist.html>
- Loureiro, C. et al. (1999). *Trigonometria e Números Complexos*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
- Milies, C. P. (1993). A Emergência dos Números Complexos. *Revista do Professor de Matemática*. nº 24, p. 5-15.
- Veloso, E. (2016). *Conexões da Geometria: O Plano Complexo*. Lisboa: APM.

Consulta pública 2026

| ORGANIZADOR<br>Domínio | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES<br>O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS<br>(Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Probabilidade</b>   | <b>Fenómeno aleatório</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>distinguir entre fenómeno aleatório e não aleatório (determinístico);</li> <li>compreender que as realizações individuais de um fenómeno aleatório são incertas, mas existe um padrão genérico de comportamento, recorrendo-se à Teoria da Probabilidade para construir modelos matemáticos que descrevam a regularidade estatística observada numa longa série de repetições do fenómeno.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Recorrer a situações em contextos variados, para sensibilizar os alunos para a existência destes fenómenos, nomeadamente através de exemplos de fenómenos físicos, com leis determinísticas (movimento de um carro; queda de uma maçã do alto de uma torre) e de exemplos de fenómenos que se podem considerar aleatórios pela dificuldade em arranjar uma lei física para os descrever (número de irmãos de um aluno da escola, escolhido ao acaso; face do dado que fica virada para cima quando se lança; temperatura máxima a observar numa data futura).</li> </ul> |
|                        | <b>Experiência aleatória</b><br><br><b>Espaço de resultados ou espaço amostral</b><br><b>Modelo de probabilidade</b><br><b>Acontecimentos</b><br><b>União e interseção de acontecimentos</b><br><br>Compreender que: <ul style="list-style-type: none"> <li>à realização de um fenómeno aleatório se dá o nome de experiência aleatória;</li> </ul>                                                                                                                    | <ul style="list-style-type: none"> <li>Salientar que os modelos de probabilidade são modelos matemáticos que descrevem os fenómenos aleatórios.</li> <li>Realçar que para construir um modelo de probabilidade tem que se recorrer a um processo que permita atribuir probabilidades aos acontecimentos elementares.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                 |

| ORGANIZADOR<br>Domínio | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES<br>O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS<br>(Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                       |
|------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                        | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ ao conjunto S de resultados possíveis se dá o nome de espaço de resultados ou espaço amostral;</li> <li>▪ um acontecimento é um subconjunto do espaço de resultados e que a estes resultados se dá o nome de “resultados favoráveis” à realização do acontecimento;</li> <li>▪ a descrição do fenómeno aleatório é feita através de um modelo de probabilidade, constituído pelos resultados possíveis e a probabilidade atribuída a cada resultado;</li> <li>▪ relembrar os conceitos: acontecimento certo, impossível, elementar e composto; acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos; acontecimentos contrários ou complementares; união e interseção de acontecimentos.</li> </ul> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|                        | <p><b>Probabilidade</b></p> <p>Probabilidade frequencista:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ compreender que a característica do fenómeno aleatório permite definir, intuitivamente, a probabilidade de um</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Iniciar o estudo deste tema com modelos de probabilidade simples, com espaços de resultados finitos, nomeadamente os que descrevem os chamados “jogos de sorte e azar”. Por exemplo, intuitivamente, espera-se que ao fim de muitas repetições do lançamento do dado,</li> </ul> |

| ORGANIZADOR<br>Domínio | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES<br>O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS<br>(Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                        | <p>acontecimento <math>A</math>, representada por <math>P(A)</math>, como sendo o valor para o qual estabiliza a frequência relativa da realização de <math>A</math>, num grande número de repetições da experiência aleatória, nas mesmas condições, ou seja, <math>P(A)</math> é o valor em que estabiliza <math>\frac{n_A}{n}</math>, onde <math>n_A</math> representa o número de vezes que se realizou <math>A</math> em <math>n</math> repetições da experiência aleatória.</p> | <p>cada uma das faces saia aproximadamente 16,6(6)% das vezes. Alguns acontecimentos, associados com esta experiência, são: “sair uma face com um n.º de pintas par”, “sair uma face com um n.º de pintas maior ou igual a 5”, “sair uma face com um n.º de pintas maior que 6”, etc.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Sugerir a elaboração de um programa em <i>Python</i> para simular o lançamento de um dado numerado com <math>n</math> faces (4, 6, 8, 12, 20).</li> </ul> |
|                        | <p><b>Regras da probabilidade:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ reconhecer que as probabilidades associadas aos acontecimentos elementares têm de ser números entre 0 e 1 e que a soma total deve ser 1;</li> <li>▪ reconhecer que a probabilidade de um acontecimento é igual à soma das probabilidades dos acontecimentos elementares constituídos pelos resultados que o compõem.</li> </ul>                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|                        | <p><b>Probabilidade da união de acontecimentos:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ utilizar a representação dos acontecimentos em diagramas de Venn, para mostrar que, dados dois</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |

| ORGANIZADOR | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Domínio     | O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|             | <p>acontecimentos <math>A</math> e <math>B</math> quaisquer,<br/> <math>P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)</math>.</p> <p><b>Regra de Laplace:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>reconhecer que se admite que os acontecimentos elementares são equiprováveis quando não haja à partida razão para admitir que os resultados do espaço de resultados não tenham igual possibilidade de se verificarem;</li> <li>compreender que quando se puder admitir que os acontecimentos elementares são equiprováveis, se pode utilizar a regra de Laplace para determinar a probabilidade de um acontecimento <math>A</math>, com o seguinte enunciado:</li> </ul> $P(A) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis a } A}{\text{Número de resultados possíveis}}$ | <ul style="list-style-type: none"> <li>Propor a resolução de problemas que envolvam o cálculo de probabilidades recorrendo à regra de Laplace, evitando o uso excessivo de cálculo combinatório.</li> <li>Realçar que uma vez definido o modelo de probabilidade se pode calcular a probabilidade de qualquer acontecimento associado ao fenómeno em estudo.</li> <li>Alertar os alunos para o facto de que na vida real as situações mais frequentes são aquelas em que não é possível recorrer à regra de Laplace para calcular a probabilidade de acontecimentos, por exemplo: o tipo sanguíneo de uma pessoa escolhida ao acaso, de entre a população portuguesa, ou a eficácia de uma vacina.</li> </ul> |

| ORGANIZADOR<br>Domínio | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES<br>O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS<br>(Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                        | <p><b>Probabilidade condicionada</b></p> <p><b>Definição:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>saber que a probabilidade de um acontecimento <math>A</math> se realizar, condicionada ou sabendo que o acontecimento <math>B</math> se realizou, com <math>P(B) &gt; 0</math>, se representa por <math>P(A B)</math> e se calcula de acordo com a seguinte fórmula:<br/> <math display="block">P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}</math></li> </ul> <p><b>Regra do produto:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>reconhecer que a partir da definição de probabilidade condicionada se pode definir a probabilidade simultânea de dois acontecimentos, chamada regra do produto,<br/> <math display="block">P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B A)</math> ou <math display="block">P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A B)</math> conforme seja <math>A</math> ou <math>B</math> o acontecimento que está a condicionar.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Conduzir os alunos a reconhecerem que em muitas situações em que se pretende calcular a probabilidade de um acontecimento, já se dispõe de alguma informação sobre o resultado da experiência, a qual permite atualizar a atribuição de probabilidade a esse acontecimento.</li> <li>Exemplificar com situações intuitivas, como a extração de bolas, de vários tipos, de uma caixa sucessivamente, sem reposição, em que a composição da caixa se altera, implicando que a probabilidade de se retirar uma bola depende dos tipos de bolas que saíram nas extrações anteriores.</li> </ul> |

| ORGANIZADOR<br>Domínio | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES<br>O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS<br>(Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                        | <p>Árvore de probabilidade:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>reconhecer a utilidade de árvores de probabilidade para organizar a informação disponível sobre os acontecimentos em cadeia.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <ul style="list-style-type: none"> <li>Pedir aos alunos que calculem a probabilidade de ocorrência de cadeias simples de acontecimentos, utilizando árvores de probabilidade, como forma de organização da informação disponível.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|                        | <p>Tabelas de contingência:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>reconhecer a utilidade das tabelas de contingência para calcular a probabilidade condicionada.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|                        | <p>Acontecimentos independentes:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>identificar que os acontecimentos <math>A</math> e <math>B</math>, com <math>P(A) &gt; 0</math> e <math>P(B) &gt; 0</math>, são independentes quando a ocorrência de um deles não altera a probabilidade da ocorrência do outro, ou seja, <math>P(A B) = P(A)</math> (<math>A</math> independente de <math>B</math>) ou <math>P(B A) = P(B)</math> (<math>B</math> independente de <math>A</math>);</li> <li>reconhecer que outra definição de independência consiste em dizer que os acontecimentos <math>A</math> e <math>B</math> são independentes</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Salientar que uma das situações mais simples para compreender intuitivamente o conceito de independência de acontecimentos está ligada à situação do lançamento de uma moeda. A moeda “não tem memória” e a probabilidade de sair “face nacional” no próximo lançamento não depende do que saiu nos lançamentos anteriores. Porém, no acontecimento “selecionar o nome de dois alunos do sexo masculino” de uma turma com 14 rapazes e 16 raparigas, a probabilidade de selecionar o segundo rapaz, depende da escolha do primeiro aluno (seleção sem reposição).</li> <li>Promover a resolução de problemas em que se obtenha a probabilidade de um certo acontecimento <math>B</math>, quando são conhecidas</li> </ul> |

| ORGANIZADOR<br>Domínio | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES<br>O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS<br>(Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                        | <p>se e só se <math>P(A \cap B) = P(A) \times P(B)</math>. As duas definições de independência são equivalentes desde que se exija que <math>P(A) &gt; 0</math> e <math>P(B) &gt; 0</math>.</p> <p><b>Modelos de probabilidade em espaços finitos</b></p> <p><b>Variáveis aleatórias (discretas)</b></p> <p><b>Função massa de probabilidade</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>reconhecer que se podem associar números aos resultados de um fenómeno aleatório, através de uma função denominada variável aleatória (v.a.) e que construir um modelo de probabilidade para modelar um fenómeno aleatório, com espaço de resultados finito, é equivalente a construir a função massa de probabilidade (f.m.p.) da variável aleatória associada;</li> <li>identificar a população com a variável aleatória associada e reconhecer que construir a f.m.p. é obter um modelo para a população;</li> </ul> | <p>as probabilidades de <math>B</math> condicionadas aos acontecimentos <math>(A_1, A_2, \dots, A_n)</math>, mutuamente exclusivos em que a sua união é igual ao espaço de resultados e são conhecidas as suas probabilidades, não nulas, utilizando:</p> $P(B) = P(B A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B A_n) \cdot P(A_n)$ <ul style="list-style-type: none"> <li>Exemplificar e orientar os alunos na construção de modelos de probabilidade simples, nomeadamente o que descreve o resultado do lançamento de um dado equilibrado, em que se define a variável aleatória <math>X</math>, que associa a cada face do dado, o seu número de pintas.</li> <li>Destacar a situação do lançamento de dois dados em que se pretende modelar o fenómeno aleatório que consiste em observar a soma das pintas dos dois dados e chamar a atenção para que embora o número de resultados possíveis seja igual a 11, a probabilidade de cada um não é <math>\frac{1}{11}</math>.</li> </ul> |

| ORGANIZADOR<br>Domínio | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES<br>O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS<br>(Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                        | <ul style="list-style-type: none"> <li>reconhecer que a f.m.p. permite calcular a probabilidade de acontecimentos, relacionados com a realização do fenómeno modelado.</li> </ul> <p><b>Valor médio e desvio padrão populacional:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>reconhecer que dois dos parâmetros, características numéricas da população, mais importantes são o valor médio (média populacional) e o desvio padrão populacional, e saber que estes parâmetros se representam pelas letras gregas <math>\mu</math> (miu) e <math>\sigma</math> (sigma), respetivamente;</li> <li>compreender o paralelismo entre valor médio <math>\mu</math> e a média <math>\bar{x}</math> e também, de modo idêntico, para o desvio padrão populacional <math>\sigma</math> e desvio padrão (amostral) <math>s</math>, e outras medidas calculadas para a população e para a amostra;</li> <li>calcular o valor médio e o desvio-padrão populacional de uma variável aleatória de suporte finito, a partir da f.m.p..</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Propor o cálculo do valor médio e do desvio padrão, recorrendo à f.m.p. em exemplos como o do lançamento do dado e de outros modelos, como seja, a extração de bolas de um saco com e sem reposição.</li> <li>Salientar que a fórmula utilizada para calcular o valor médio é semelhante à fórmula utilizada para calcular a média com os dados discretos agrupados em tabelas de frequências relativas, destacando a interpretação frequencista da probabilidade, em que as frequências relativas são interpretadas como probabilidades.</li> <li>Orientar na interpretação do valor médio, utilizando exemplos associados a jogos.</li> </ul> |

| ORGANIZADOR<br>Domínio | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES<br>O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS<br>(Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                        | <p><b>Modelo Normal</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>reconhecer o modelo ou distribuição Normal, de suporte contínuo, como um dos modelos de probabilidade mais importantes para a modelação de fenómenos aleatórios.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                          | <ul style="list-style-type: none"> <li>Salientar que é necessário alargar o conceito de modelo de probabilidade a situações onde o espaço amostral não seja finito, como por exemplo, o “n.º de carros que passam numa determinada portagem das 8h às 9h”, em que se considera como suporte do modelo os números naturais, ou o comprimento do salto de um atleta, em que o suporte da variável comprimento é <math>\mathbb{R}^+</math>.</li> <li>Destacar que o modelo Normal é, dos modelos contínuos, o mais conhecido para estudar variáveis aleatórias de suporte contínuo, como, por exemplo, a “altura” ou o “peso” de um indivíduo adulto.</li> <li>Salientar que vários cientistas, ao trabalharem com dados, obtinham histogramas cuja população poderia ser modelada por um modelo Normal. Este modelo é a base de muitos dos processos de inferência estatística clássica.</li> </ul> |
|                        | <p><b>Propriedades:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>identificar que as curvas que representam esta família de modelos são simétricas, com o aspeto de um sino, e que cada distribuição Normal fica definida através dos parâmetros valor médio <math>\mu</math> e desvio padrão <math>\sigma</math>;</li> <li>saber que o valor médio determina o eixo de simetria da distribuição e que a distância entre o valor médio e as</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Salientar a curva em forma de “sino” como representativa do modelo Normal, bem como o significado nessa curva dos valores da probabilidade associados a intervalos.</li> <li>Utilizar a tecnologia para calcular probabilidades, com base no modelo Normal, associadas a quaisquer intervalos.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |

| ORGANIZADOR | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES                                                                                                                                            | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| Domínio     | O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                         | (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                  |
|             | abcissas dos pontos de mudança de curvatura é igual ao desvio padrão; <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ calcular probabilidades com base nesta família de modelos.</li> </ul> |                                                                  |

### Pensamento Computacional

Exemplo de programa em *Python* para simular lançamentos de 1 dado cúbico, numerado de 1 a 6, e o registo das frequências relativas referentes à saída de cada face:

```
import random
n=int(input("Quantos lançamentos queres simular?"))
f=[0 for k in range(6)]
for i in range(n):
    r=random.randint(1,6)
    f[r-1]=f[r-1]+1

for k in range(6):
    print("Freq. relativa da saída da face",k+1,"=",f[k]/n)
```

**Nota:** O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Como possíveis alterações a este programa sugere-se a variação do número de faces.

### Possíveis aprofundamentos

Estudar alguns modelos de probabilidade discretos, tais como o Uniforme em  $n$  pontos, o Binomial( $n, p$ ) e o Poisson( $\lambda$ ), assim como os modelos contínuos, o Uniforme no intervalo  $[a, b]$  e o Exponencial( $\lambda$ ).

Explorar a utilização da tecnologia para simular determinados acontecimentos e utilizar a aproximação frequencista da probabilidade para estimar a probabilidade desses acontecimentos.

Explorar o problema das três portas (Monty Hall).

### Bibliografia de referência

ALEA - *Noções de Probabilidade*.

Obtido de [https://www.alea.pt/index.php?option=com\\_content&view=article&id=132&Itemid=1204&lang=pt](https://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=132&Itemid=1204&lang=pt)

COMAP (2016). *FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.

Graça Martins, M. E. (2005). *Introdução à Probabilidade e à Estatística, com complementos de Excel*. Sociedade Portuguesa de Estatística.

Graça Martins, M. E., e Cerveira, A. (1998). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Universidade Aberta.

Graça Martins, M. E. et al. (1999). *Probabilidades e Combinatória*. Ministério da Educação/Departamento do Ensino Secundário.

Moore, D. (2019). *STATISTICS Concepts and controversies*. New York: W.H.Freeman and Company.

Moore, D. et al. (2021). *The Basic Practice of Statistics*. New York: W.H.Freeman and Company.

Rossman, A. et al. (2011). *Workshop Statistics: Discovery with Data*. Wiley.

| ORGANIZADOR<br>Domínio | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES<br>O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS<br>(Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Funções</b>         | <p><b>Função exponencial:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>identificar função exponencial, como função do tipo <math>f(x) = a^x</math>, <math>a \in \mathbb{R}^+</math> que verifica as propriedades:<br/> <math>a^0 = 1</math>, <math>1^x = 1</math>, <math>a^x a^y = a^{x+y}</math>, <math>a^x b^x = (ab)^x</math>, <math>a^{-x} = \frac{1}{a^x}</math>, <math>\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}</math>, <math>\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x</math>, <math>(a^x)^y = a^{x \cdot y}</math>, <math>a, b \in \mathbb{R}^+</math>, <math>x, y \in \mathbb{R}</math></li> <li>identificar, em funções do tipo <math>f(x) = b \cdot a^{x-c} + d</math>, <math>a \in \mathbb{R}^+</math>, <math>c, d \in \mathbb{R}</math> e <math>b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}</math>, domínio, contradomínio, coordenadas dos pontos de interseção com os eixos coordenados, monotonia e comportamento quando <math>x</math> tende para mais infinito e menos infinito;</li> <li>resolver, graficamente, equações envolvendo funções exponenciais em contexto de resolução de problemas.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Retomar o estudo das regras operatórias das potências feito no ensino básico;</li> <li>Apresentar a função exponencial num contexto de resolução de problemas de crescimento e decrescimento exponencial, como por exemplo o crescimento de bactérias, o arrefecimento de um café e o decaimento radioativo;</li> <li>Promover a resolução gráfica de equações envolvendo funções exponenciais;</li> <li>Propor a resolução de problemas de modelação que envolvam a função exponencial, como por exemplo o cálculo da taxa de juro anual nominal, ou que envolvam a função logística, por exemplo o crescimento de uma população limitado pela capacidade de carga do meio.</li> </ul> |
|                        | <p><b>Função inversa:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>conhecer as raízes de índice natural, nomeadamente, a radiciação de índice</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <ul style="list-style-type: none"> <li>Retomar o conceito de raízes quadradas e cúbicas desenvolvido no ensino básico;</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |

| ORGANIZADOR<br>Domínio | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES<br>O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS<br>(Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                        | <p>natural como inversa da potenciação de expoente natural;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>identificar funções invertíveis e não invertíveis, nomeadamente recorrendo aos gráficos das funções e ao “teste da reta horizontal” e à sua formulação algébrica, em casos simples;</li> <li>estabelecer as relações entre o domínio e o contradomínio de funções inversas, bem como a simetria das respetivas representações gráficas, relativamente à bisetriz dos quadrantes ímpares.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Mencionar a relação entre as potências de expoente fracionário e as raízes de índice natural: <math>a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, a &gt; 0, q \in \mathbb{N} \text{ e } p \in \mathbb{Z}</math></li> <li>Estudar a função quadrática como exemplo de função não invertível no seu domínio;</li> <li>Propor a formulação algébrica do “teste da reta horizontal” para identificar funções inversas, ou restrições do domínio onde a função é invertível;</li> <li>Promover a utilização da tecnologia para estudar funções invertíveis e comparar gráficos de funções com os das suas inversas. Por exemplo, determinar a imagem pela reflexão em relação à reta <math>y = x</math> de funções diversas (polinomiais, racionais e exponenciais), em casos simples, e encontrar a expressão algébrica das funções obtidas, caso existam.</li> </ul> |
|                        | <p><b>Função logarítmica:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>identificar a função logarítmica como a inversa da função exponencial com a mesma base;</li> <li>estudar intuitivamente, com recurso à tecnologia, o comportamento de funções com logaritmos;</li> <li>conhecer e aplicar as propriedades e regras operatórias dos logaritmos, em casos simples, e em contexto de resolução de problemas e de modelação;</li> </ul>                                                               | <ul style="list-style-type: none"> <li>Propor a exploração de modelos exponenciais e conduzir os alunos na identificação da relação inversa;</li> <li>Promover a utilização das propriedades e regras operatórias dos logaritmos, incluindo a fórmula da mudança de base;</li> <li>Referir as escalas logarítmicas na medição de certas grandezas, como por exemplo o pH de uma solução, a magnitude do som em decibéis, ou a escala logarítmica usada na medição da acuidade visual;</li> <li>Promover a resolução de problemas e a modelação, com tecnologia ou analiticamente, que envolvam a função exponencial e a função logarítmica.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                      |

| ORGANIZADOR<br>Domínio | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES<br>O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS<br>(Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                        | <ul style="list-style-type: none"> <li>resolver equações, envolvendo funções exponenciais e funções logarítmicas, em contexto de resolução de problemas, tanto analiticamente como graficamente.</li> </ul>                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|                        | <p><b>Função composta:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>conhecer e aplicar a função composta, em casos simples, analisando o seu domínio.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                        | <ul style="list-style-type: none"> <li>Recorrer a exemplos simples para estudar casos de funções compostas em que se evidencie eventuais alterações aos seus domínios.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|                        | <p><b>Derivadas</b></p> <p><b>Derivada da função exponencial de base e:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>identificar o número <math>e</math> (número de Euler) como a única base da função exponencial em que o seu gráfico coincide com o gráfico da respetiva função derivada;</li> <li>conhecer a derivada da função <math>f(x) = e^x</math>.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Promover a utilização da tecnologia para representar funções da família <math>f(x) = a^x</math>, <math>a \in [2,3]</math> e respectivas derivadas (calculadas usando funções específicas da tecnologia para derivadas ou tangentes ao gráfico) e verificar que só existe um valor de <math>a</math> para o qual a função e a sua derivada coincidem;</li> <li>Fazer referência ao trabalho pioneiro de Euler, o primeiro a estudar de forma sistemática o número <math>e</math>, que provou ser irracional;</li> </ul> |
|                        | <p><b>Derivada da função Logarítmica de base e:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>identificar <math>g(x) = \ln x</math> como a função inversa de <math>f(x) = e^x</math>;</li> </ul>                                                                                                                                                                         | <ul style="list-style-type: none"> <li>Ilustrar a determinação da derivada de <math>g(x) = \ln x</math>, através da construção seguinte, usando tecnologia gráfica:</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |

| ORGANIZADOR<br>Domínio | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES<br>O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS<br>(Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                        | <ul style="list-style-type: none"> <li>saber relacionar geometricamente a derivada da função logarítmica com a derivada da função exponencial, tendo por base a simetria das retas tangentes aos gráficos em pontos simétricos, relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares;</li> <li>conhecer a derivada da função <math>g(x) = \ln x</math></li> </ul> <p><b>Regras de derivação:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>conhecer o teorema da derivada da função composta (Regra da Cadeia);</li> <li>conhecer as regras de derivação para funções do tipo: <ul style="list-style-type: none"> <li><math>f(x) = x^a</math> (com <math>a</math> real e <math>x &gt; 0</math>);</li> <li><math>f(x) = a^x</math> (com <math>a &gt; 0</math> e <math>a \neq 1</math>);</li> <li><math>f(x) = \log_a x</math> (com <math>a &gt; 0</math>, <math>a \neq 1</math> e <math>x &gt; 0</math>);</li> <li><math>f(x) = \sin(x)</math>, <math>f(x) = \cos(x)</math> e <math>f(x) = \tan(x)</math></li> </ul> </li> <li>determinar derivadas envolvendo operações com as funções estudadas anteriormente, em casos simples.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Construir a representação gráfica de <math>f(x) = e^x</math> e, por meio de uma simetria relativa à bissetriz dos quadrantes ímpares, obter o gráfico da função <math>g(x) = \ln x</math>;</li> <li>Marcar um ponto de coordenadas <math>(x, g(x))</math> e o seu simétrico relativamente à reta <math>y = x</math>;</li> <li>Traçar a reta tangente ao gráfico de <math>g</math> em <math>(x, g(x))</math> e, por simetria, traçar a tangente ao gráfico de <math>f</math> em <math>(g(x), x)</math>;</li> <li>Verificar que o produto dos declives das retas tangentes é igual a 1, qualquer que seja <math>x</math>;</li> <li>Observar que o declive da tangente ao gráfico de <math>f</math> em <math>(g(x), x)</math> é <math>x</math>, porque <math>(e^x)' = e^x</math>;</li> <li>Concluir que o declive da tangente ao gráfico de <math>g</math> em <math>(x, g(x))</math> é <math>\frac{1}{x}</math>, ou seja <math>(\ln x)' = \frac{1}{x}</math></li> </ul><br><ul style="list-style-type: none"> <li>Dar a conhecer e promover a utilização das regras de derivação, sem demonstrar, das funções <math>f(x)=x^a</math>, <math>f(x) = a^x</math>, <math>f(x) = \log_a x</math> e de funções trigonométricas;</li> <li>Promover a aplicação do teorema da derivada da função composta, generalizando as fórmulas de derivação conhecidas.</li> </ul> |

| ORGANIZADOR<br>Domínio | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES<br>O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS<br>(Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                        | <p><b>Problemas de otimização:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>resolver problemas de otimização tendo por base funções deriváveis;</li> <li>determinar a segunda derivada de funções polinomiais, racionais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas;</li> <li>relacionar o sinal e os zeros da segunda derivada com o sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de uma função.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Promover a resolução de problemas de otimização envolvendo funções deriváveis já estudadas, num contexto de modelação matemática;</li> <li>Propor o cálculo da segunda derivada de funções.</li> </ul> <p>Só estão incluídas nestas Aprendizagens Essenciais situações de cálculo algébrico da segunda derivada de funções cujo grau de dificuldade não ultrapasse o dos seguintes exemplos:</p> $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7, g(x) = x^2 \cdot \ln x \text{ e } h(x) = \frac{e^x}{x}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>Promover o estudo de funções, incluindo o sentido das concavidades e os pontos de inflexão em intervalos onde as funções têm segunda derivada.</li> </ul> <p>Nos problemas de otimização e no cálculo de pontos de inflexão do gráfico de uma função é proposto que o trabalho com os alunos se restrinja a funções polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas e operações entre estas.</p> |
|                        | <p><b>Funções contínuas e deriváveis</b></p> <p><b>Continuidade:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>reconhecer uma função contínua num ponto do seu domínio como uma função que admite limite nesse ponto igual à sua imagem;</li> </ul>                                                                                                                                                                          | <ul style="list-style-type: none"> <li>Retomar a utilização da noção intuitiva e informal de limite num ponto, no estudo da continuidade.</li> <li>Dar a conhecer aos alunos a seguinte lista de funções contínuas:             <ul style="list-style-type: none"> <li>funções polinomiais;</li> </ul> </li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |

| ORGANIZADOR<br>Domínio | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES<br>O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                                                                     | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS<br>(Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                        | <ul style="list-style-type: none"> <li>identificar se uma função é contínua num intervalo aberto, em casos simples, tendo como apoio o conhecimento de uma lista de funções contínuas e respetivas operações.</li> </ul>                                                                                      | <ul style="list-style-type: none"> <li>funções exponenciais e logarítmicas;</li> <li>funções trigonométricas.</li> <li>incluir nesta lista as funções obtidas a partir de funções contínuas, através das operações: soma, diferença, produto e quociente de funções contínuas;</li> <li>composição de funções contínuas.</li> <li>Alertar para a existência de outras funções contínuas não contempladas na lista anterior.</li> <li>Alertar para a existência de funções descontínuas num intervalo aberto. Analisar alguns modelos de funções descontínuas como por exemplo: tarifários de estacionamento, escalões do IRS, a força exercida pelo propulsor de um foguete após o seu lançamento.</li> <li>Informar os alunos das propriedades operatórias dos limites (adição, subtração, multiplicação e divisão).</li> </ul>                            |
|                        | <p><b>Regra de L'Hôpital:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>estudar o limite de funções que conduzem a indeterminações do tipo <math>\frac{0}{0}</math> e <math>\frac{\infty}{\infty}</math>, aplicando a Regra de L'Hôpital, usando limites notáveis ou técnicas de cálculo simples.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Promover o estudo de indeterminações para comparar magnitudes de funções quando a variável independente se aproxima de um ponto específico ou do infinito.</li> <li>Alertar os alunos para as condições em que não é possível aplicar a Regra de L'Hôpital e para os casos em que não é aconselhável o seu uso.</li> <li>Propor a construção de uma tabela de limites notáveis, recorrendo à regra de L'Hôpital, nomeadamente:           <math display="block">\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1;</math> <math display="block">\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty \quad (a &gt; 1 \text{ e } p \in \mathbb{N})</math> </li> </ul> |

| ORGANIZADOR<br>Domínio | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES<br>O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS<br>(Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                        | <p><b>Assíntotas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>determinar analiticamente as equações das assíntotas, verticais e não verticais, ao gráfico de uma função.</li> </ul> <hr/> <p><b>Estudo de funções:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>resolver problemas, envolvendo o estudo de funções, complementando o uso da tecnologia com o estudo analítico.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Propor aos alunos a determinação das assíntotas verticais e não verticais ao gráfico de uma função.</li> </ul> <p>Só estão incluídas nestas Aprendizagens Essenciais situações de cálculo algébrico das equações das assíntotas do gráfico de funções cujo grau de dificuldade não ultrapasse o dos seguintes exemplos:</p> $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+1}, g(x) = \frac{e^x}{x+1} \text{ e } h(x) = x + \ln x$ <hr/> <ul style="list-style-type: none"> <li>Incentivar o estudo das funções, combinando as ferramentas analíticas com a tecnologia gráfica, identificando na representação gráfica obtida as características resultantes de processos analíticos.</li> <li>Proporcionar oportunidades para compreender que as representações gráficas apresentadas pela tecnologia podem, por vezes, não corresponder com rigor ao gráfico da função em estudo.</li> </ul> <p>No estudo de funções, nestas Aprendizagens Essenciais, só está incluído o trabalho com funções polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas e operações entre estas.</p> |

| ORGANIZADOR<br>Domínio | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES<br>O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                     | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS<br>(Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                        | <p><b>Resolução aproximada de equações</b></p> <p><b>Teorema dos valores intermédios (Bolzano-Cauchy):</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>conhecer o teorema dos valores intermédios (Bolzano-Cauchy).</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Considerar o teorema dos valores intermédios para funções contínuas em intervalos abertos que contenham o intervalo fechado onde se estudam os valores intermédios.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                       |
|                        | <p><b>Método da Bisseção:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>conhecer e aplicar o método da Bisseção.</li> </ul>                                                                                                  | <ul style="list-style-type: none"> <li>Apresentar como objetivo a resolução por métodos aproximados de qualquer equação, tendo em conta que existem muitas situações em que não é possível obter uma solução expressa em termos das funções já estudadas.</li> <li>Promover o uso sistemático da tecnologia na aplicação dos diferentes métodos considerados para a obtenção aproximada de soluções de equações.</li> </ul> |
|                        | <p><b>Método de Newton-Raphson:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>conhecer e aplicar o método de Newton-Raphson.</li> </ul>                                                                                      | <ul style="list-style-type: none"> <li>Propor a elaboração de programas em <i>Python</i> para implementar os métodos de Newton-Raphson e da Bisseção.</li> <li>Ilustrar a partir de um exemplo concreto a interpretação geométrica do método de Newton-Raphson.</li> </ul>                                                                                                                                                  |

## Pensamento computacional

O método da Bisseção é análogo ao método de pesquisa binária numa list

a ordenada e, entre os métodos de seção do intervalo, é o que, em geral, produz melhores estimativas para igual número de avaliações da função.

Exemplo de programa *Python* para calcular a aproximação de uma raiz num determinado intervalo através do método da Bisseção.

```
def bissecao(f,a,b,erro):
    if f(a)*f(b) > 0:
        print("A função tem imagens com o mesmo sinal nos extremos deste intervalo")
        exit(0)
    while b-a > 2*erro:
        c = (a+b)/2
        if f(a)*f(c) < 0:
            b = c
        elif f(a)*f(c) > 0:
            a = c
        else:
            return c #chamada no caso em que f(c)=0
    return c

def f(x):
    return x**3-5*x**2+2*x-3

print(bissecao(f,0,5,0.000001))
```

**Nota:** O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

No programa anterior, a função  $f$  é várias vezes calculada nos mesmos pontos. Uma alternativa que evita repetir os cálculos pode ser construída usando variáveis para armazenar resultados intermédios, como apresentado no programa seguinte:

```
def bissecao(f,a,b,erro):
    fa = f(a)
    fb = f(b)
    if fa*fb > 0:
        print("A função tem imagens com o mesmo sinal nos extremos deste intervalo")
        exit(0)
    while b-a > 2*erro:
        c = (a+b)/2
        fc = f(c)
        if fa*fc < 0:
            b, fb = c, fc
        elif fa*fc > 0:
            a, fa = c, fc
        else:
            return c
    return c

def f(x):
    return x**3-5*x**2+2*x-3

print(bissecao(f,0,5,0.000001))
```

**Nota:** O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

### Possíveis aprofundamentos

Usar as derivadas das funções exponencial e logarítmica em conjunto com o teorema da derivação da função composta para deduzir a expressão geral da derivada de  $x^\alpha$ , com  $\alpha \in \mathbb{R}$  e de  $f(x)^{g(x)}$ , em que  $f(x) > 0$ .

Referir o método babilónico para calcular raízes quadradas aproximadas (método de Herão) e verificar que se trata do método de Newton-Raphson com a função

$$f(x) = x^2 - a, \quad a > 0.$$

Explorar a sucessão de termo geral  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  relacionando o seu limite com o número  $e$ , a partir de exemplos de juros compostos, de capitalização contínua.

### Bibliografia de referência

Apostol, T. (1999). *Cálculo Volume 1 - Cálculo com funções de uma variável, com uma introdução à Álgebra Linear*. Barcelona: Reverté.

Caraça, B. J. (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*, Ciência Aberta. Lisboa: Gradiva.

Devlin, K. (2002). *Matemática - A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Estrada, M. F. et al. (2000). *História da Matemática*, Universidade Aberta.

Figueira, M., (1997). *Fundamentos de Análise Infinitesimal* (2ª edição). Lisboa: FCUL.

Graça, M. (2000). Efeitos colaterais no uso de máquinas de calcular. *Gazeta de Matemática*, nº 139, p. 15-21.

Guichard, J. P. (1986). História da Matemática no ensino da Matemática. Em A. Bouvier (coord), *Didactique des Mathématiques*, Cedric/Nathan, 1986 (Adaptação livre de Arsélio Martins). Obtido de <https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/mhist.html>

Haese, M. et al. (2012). *Mathematics for the international student Mathematics SL* (for use with IB Diploma Programme). Third Edition. Adelaide: Haese Mathematics.

Haese, M. et al. (2019). *Mathematics - Analysis and Approaches SL 2* (for use with IB Diploma Programme). Marlestone: Haese Mathematics.

Haese, M. et al. (2019). *Mathematics - Applications and Interpretation SL 2* (for use with IB Diploma Programme). Marlestone: Haese Mathematics.

Haese, M. et al. (2019). *Mathematics Core topics SL 1* (for use with IB Diploma Programme). Marlestone: Haese Mathematics.

Hodgson, B. (2008). Uma breve história da quinta operação. *Gazeta de Matemática*, nº 156, p. 7-30.

Icart, J (2021). Fonctions: Une Perspective Historique. *Revue MathémaTICE*, nº 75, maio 2021.

Obtido de <http://revue.sesamath.net/spip.php?article1414>

Pina, H. (2010). *Métodos Numéricos*. Lisboa: Escolar Editora.

Sebastião e Silva, J. (1975-1978). *Compêndio de Matemática* (3 volumes). Lisboa: GEP.

SESAMATH - *Manuel Maths 1re - Programme 2019*.

Obtido de [https://mep-outils.sesamath.net/manuel\\_numerique/?ouvrage=ms1spe\\_2019](https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1spe_2019)

SESAMATH - *Manuel Maths 2de - Programme 2019*. Obtido de [https://mep-outils.sesamath.net/manuel\\_numerique/?ouvrage=ms2\\_2019](https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms2_2019)

SESAMATH - *Manuel Maths Terminale - Spécialité - Édition 2020*.

Obtido de [https://mep-outils.sesamath.net/manuel\\_numerique/?ouvrage=mstsspe\\_2020](https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=mstsspe_2020)

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., e Nápoles, S. (1997). *Funções - 10º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., e Nápoles, S. (1998). *Funções - 11º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., e Nápoles, S. (1999). *Funções - 12º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

As Aprendizagens Essenciais de Matemática A do 12.º ano integram ainda **três temas opcionais**, para que apenas um deles seja trabalhado em cada escola, ou mesmo em cada turma. Para esta seleção os professores terão em conta o perfil e os interesses dos alunos e os recursos a que será possível ter acesso. Os três temas são: Introdução à **Inferência Estatística**; **Primitivas Imediatas e Integrais Definidos**; **Matrizes**. Apresenta-se uma breve justificação do interesse de cada tema em apreço, para auxiliar a escolha dos professores.

A escolha da Introdução à **Inferência Estatística** visa atingir um dos objetivos prioritários da matemática escolar, que é o da educação para a cidadania. Esta educação subentende uma melhor compreensão do mundo que nos rodeia, pelo que é importante dotar os jovens das ferramentas necessárias para mais rapidamente, e em melhores condições, responderem às inúmeras solicitações e tomarem decisões informadas sobre questões relevantes do mundo real em que se integram. Com este tema, pretende-se evidenciar a grande potencialidade da Estatística, pois estudar-se-á como se podem tirar conclusões para uma população, partindo do estudo de alguns elementos dessa população e, ao mesmo tempo, quantificar o erro cometido ao tomar decisões. Aqui, será dado relevo ao papel desempenhado pela Probabilidade, já que será o instrumento apropriado para quantificar o erro cometido ao tomar as decisões quando se faz inferência. O estudo de exemplos simples permitirá mostrar como se pode fechar o ciclo de um procedimento estatístico, que se inicia com o planeamento da experiência e uma consequente recolha de dados, com o objetivo final de uma tomada de decisões.

No tema **Primitivas Imediatas e Integrais Definidos** o trabalho concentra-se na resolução de um problema básico: o cálculo da área da figura definida pelo gráfico de uma função contínua num intervalo e pelo eixo das abcissas. Note-se que a possibilidade do cálculo de áreas é muito aumentada neste tema relativamente ao que os alunos estudaram anteriormente, pois até aqui, foram trabalhadas apenas áreas limitadas por polígonos ou a área de um círculo, podendo agora calcular uma multiplicidade de áreas de figuras, desde que seja possível defini-las a partir de funções contínuas. O cálculo integral é um método poderoso para resolver problemas em contextos tão diversos como o cálculo de áreas e volumes, o cálculo do comprimento de curvas, o cálculo da pressão exercida por líquidos, a determinação de probabilidades em modelos contínuos, o cálculo de centros de gravidade de figuras irregulares e a determinação do valor médio de uma função contínua num dado intervalo, entre outros.

As **Matrizes** são uma das ferramentas mais poderosas inventadas pelo espírito humano, apesar de datarem apenas do século XIX. Uma matriz é algo tão simples como uma tabela de números sobre as quais é possível definir operações simples que se revelam muito eficazes. As matrizes fornecem o enquadramento necessário para a resolução de sistemas de milhares de equações com milhares de incógnitas, essenciais por exemplo no bom desenrolar das viagens espaciais. Também são fundamentais em áreas como o estudo de redes e a ciência dos dados e são uma ferramenta básica das atuais tecnologias do cinema de animação, pois são o modo como são representadas as transformações geométricas que definem o movimento dos objetos e personagens. Conhecer matrizes é entrar num mundo novo que originou ferramentas que todas as tecnologias digitais hoje utilizam profusamente.

| ORGANIZADOR<br>Domínio   | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES<br>O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS<br>(Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|--------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Tema<br/>opcional</b> | <b>Introdução à inferência estatística</b><br><b>Raciocínio indutivo ou inferencial:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>compreender que o raciocínio indutivo ou inferencial se utiliza quando se pretende estudar uma população, analisando só alguns elementos dessa população, ou seja uma amostra, e que a partir das propriedades verificadas na amostra, se inferem propriedades para a população.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Recorrer a contextos variados, que levem os alunos a tomar consciência de situações aleatórias, em que é necessário tomar decisões sobre populações, a partir de alguma informação recolhida dessas populações, na forma de dados.</li> <li>Orientar os alunos na leitura da ficha técnica que acompanha o resultado de uma sondagem, alertando que a tomada de decisões tem um erro associado, que vai ser contabilizado em termos de probabilidade.</li> </ul> |
|                          | <b>Parâmetro e estatística:</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | <ul style="list-style-type: none"> <li>Salientar que o parâmetro é uma característica numérica da população, (normalmente desconhecida) enquanto a estatística é</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |

| ORGANIZADOR | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Domínio     | O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|             | <ul style="list-style-type: none"> <li>conhecer que parâmetro é uma característica numérica da população e que estatística é uma característica numérica da amostra;</li> <li>compreender que um dos objetivos pretendidos ao recolher uma amostra da população, que se pretende estudar, é tirar conclusões sobre os parâmetros dessa população, considerando-se funções adequadas, estatísticas, que só dependem dos elementos da amostra.</li> </ul> | <p>uma característica numérica da amostra (que se pode calcular). Exemplificar situações, como por exemplo, a média das alturas de todos os portugueses adultos, que é um parâmetro, enquanto a média das alturas de uma amostra é uma estatística, ou a proporção de eleitores decididos a votar em determinado candidato presidencial, que é um parâmetro, e a proporção de eleitores, que numa amostra, disseram ir votar nesse candidato, é uma estatística.</p> |
|             | <p><b>Estimador e estimativa:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>saber que à estatística utilizada para estimar um parâmetro também se dá o nome de estimador e que ao valor do estimador para uma determinada amostra também se chama estimativa.</li> </ul>                                                                                                                                                                               | <ul style="list-style-type: none"> <li>Chamar a atenção dos alunos que o termo estatística se utiliza tanto para referir uma <b>função</b> das amostras, o estimador (<math>\bar{X}</math>) como o valor observado dessa função para uma determinada amostra que tenha sido selecionada, a estimativa (<math>\bar{x}</math>).</li> </ul>                                                                                                                             |
|             | <p><b>Amostras aleatórias:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>compreender que é necessário recolher uma amostra aleatória, quando se pretende utilizá-la para retirar conclusões para a população subjacente,</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                    | <ul style="list-style-type: none"> <li>Orientar os alunos na recolha de uma amostra, necessariamente aleatória, quando se pretende utilizá-la para estimar um parâmetro. Realçar que o valor do estimador depende da amostra considerada, podendo-se obter tantas estimativas diferentes,</li> </ul>                                                                                                                                                                 |

| ORGANIZADOR | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |  |
|-------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| Domínio     | O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |  |
|             | <p>pois só assim será possível utilizar a probabilidade para quantificar o erro cometido ao inferir para a população, os resultados aí verificados;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>compreender que os processos de seleção da amostra podem ser sem reposição ou com reposição;</li> <li>compreender que o processo da seleção da amostra é o primeiro passo importante para uma inferência estatística eficiente.</li> </ul>      | <p>quantas as amostras consideradas, da mesma dimensão, sendo esta variabilidade inerente à aleatoriedade da escolha da amostra.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Exemplificar a construção da distribuição de amostragem do estimador da proporção de homens numa população constituída por 3 mulheres e 2 homens, recolhendo amostras de dimensão 2.</li> <li>Conduzir, dada uma certa população, à obtenção da distribuição de amostragem da média, quando se pretende estimar o valor médio dessa população, utilizando a tecnologia gráfica para simular a recolha de amostras de determinada dimensão.</li> </ul> |  |
|             | <p><b>Distribuição de amostragem de uma estatística</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>compreender que para averiguar da eficácia de um estimador para estimar um parâmetro, é necessário conhecer a sua distribuição de amostragem, ou seja, a distribuição dos valores obtidos pelo estimador, quando se consideram todas as amostras possíveis (da mesma dimensão), utilizando um determinado esquema de amostragem.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Chamar a atenção dos alunos para a existência de duas fórmulas para calcular o desvio-padrão amostral, obtido a partir das fórmulas para a variância amostral:</li> </ul> $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad \text{e} \quad S'^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$ <p>e explicar que a razão da utilização da primeira, é ser a que fornece melhores estimativas quando se está a estimar o desvio-padrão populacional <math>\sigma</math>.</p>                                                                                                             |  |

| ORGANIZADOR | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Domínio     | O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|             | <p><b>Distribuição de amostragem da média</b><br/><b>Teorema Limite Central (TLC):</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>compreender que a distribuição de amostragem de um estimador depende da dimensão das amostras consideradas e apresentará tanto menor variabilidade, quanto maior for a dimensão das amostras;</li> <li>compreender a utilização do Teorema Limite Central (TLC) na obtenção da distribuição de amostragem da média, quando se consideram amostras aleatórias de dimensão suficientemente grande, legitimando a utilização do modelo Normal e a utilização da média como estimador do valor médio <math>\mu</math>.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Salientar que obter a distribuição de amostragem da média seria uma tarefa, a maior parte das vezes, impossível, pois teria de se calcular o valor da média para todas as amostras aleatórias de determinada dimensão, de populações de grandes dimensões ou eventualmente infinitas. Esta situação é resolvida pelo TLC, segundo o qual o modelo Normal é uma aproximação para a sua distribuição de amostragem, independentemente da forma da distribuição da população subjacente.</li> <li>Exemplificar a recolha de várias amostras aleatórias, da mesma dimensão, calculando o valor da média para cada uma delas e explorar esta situação, chamando a atenção para a impossibilidade de saber qual das estimativas se deve utilizar, para estimar o parâmetro valor médio, desconhecido, da população subjacente às amostras consideradas.</li> </ul> |
|             | <p><b>Estimativas pontuais e estimativas intervalares:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>reconhecer as limitações das estimativas pontuais, na medida em que, devido à variabilidade amostral, podem apresentar tantos valores diferentes</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |

| ORGANIZADOR | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|-------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Domínio     | O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|             | <p>quantas as amostras utilizadas para as obter.</p> <p><b>Intervalo de confiança, para o valor médio, com uma confiança de 95%:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>utilizar o modelo Normal como aproximação da distribuição de amostragem do estimador média, para estimar o valor médio <math>\mu</math>, desconhecido, de uma população com desvio padrão <math>\sigma</math>, para obter a seguinte probabilidade <math display="block">P\left(\bar{X} - 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0,95</math> e chamar ao intervalo <math display="block">\left[\bar{x} - 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]</math> um intervalo de 95% de confiança para <math>\mu</math>, em que se substitui o parâmetro <math>\sigma</math>, quando desconhecido, pelo desvio-padrão amostral.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Explorar o significado de intervalo aleatório, cuja leitura correta deve ser realçada, tendo em consideração que o aleatório está nos limites do intervalo, pelo que se deve ler “a probabilidade do intervalo conter <math>\mu</math>, é 95%” e não “a probabilidade de <math>\mu</math> estar contido”.</li> <li>Realçar o significado da confiança de 95%. Sugerir que essa confiança pode ser entendida do seguinte modo: se recolêssemos 100 amostras e se calculássemos para cada uma delas o intervalo <math display="block">\left[\bar{x} - 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]</math> esperar-se-ia que aproximadamente 95 dos intervalos contivessem o valor médio; como, na prática, só se recolhe uma amostra, só se calcula um intervalo, não se sabendo se é um dos que contém ou não <math>\mu</math>.</li> <li>Propor a elaboração de um programa em <i>Python</i> que calcule o intervalo de 95% de confiança para o valor médio.</li> </ul> |

| ORGANIZADOR |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS |  |     |   |
|-------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|--|-----|---|
| Domínio     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | O aluno deve ficar capaz de:              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                  |  |     |   |
|             | <p>Intervalo de confiança, para o valor médio, com uma confiança de 95%:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>reconhecer a fórmula geral para o intervalo de confiança, com uma confiança de <math>100(1 - \alpha)\%</math>,<br/><math display="block">\left[ \bar{x} - z_{1-\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]</math>onde <math>z_{1-\alpha/2}</math> é o percentil de probabilidade <math>100(1 - \alpha/2)\%</math>;</li></ul> |                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                  |  |     |   |
|             | <p>Margem de erro:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>saber que a margem de erro é igual a metade da amplitude do intervalo.</li></ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                           | <ul style="list-style-type: none"><li>Explorar a relação entre a margem de erro, a confiança e a dimensão da amostra a recolher, para construir a estimativa intervalar.</li></ul>                                                                                                                             |                                                                  |  |     |   |
|             | <p>Intervalo de confiança para a proporção (populacional) <math>p</math>:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>reconhecer que a proporção (populacional) <math>p</math>, é um caso particular do valor médio de uma população constituída por uns e zeros, conforme a característica que se está a estudar está</li></ul>                                                                                                                                                                                |                                           | <ul style="list-style-type: none"><li>Orientar os alunos na obtenção do intervalo de confiança para a proporção <math>p</math>, admitindo que o modelo de probabilidade para a população <math>X</math> é</li></ul> <table><tr><td><math>X</math></td><td>1</td><td>0</td></tr></table> Valor médio de $X = p$ |                                                                  |  | $X$ | 1 |
| $X$         | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 0                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                  |  |     |   |

| ORGANIZADOR   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES |  | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS                                                                                                                  |               |     |         |                             |
|---------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|-----|---------|-----------------------------|
| Domínio       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | O aluno deve ficar capaz de:              |  | (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                   |               |     |         |                             |
|               | <p>ou não presente na população e que o estimador que se utiliza é a proporção amostral, que se representa por <math>\hat{P}</math>;</p> <ul style="list-style-type: none"><li>saber fazer uma leitura adequada da informação veiculada pela comunicação social quando apresentam resultados de sondagens, na forma de intervalos de confiança.</li></ul>                                                                       |                                           |  | <table><tr><td>Probabilidade</td><td><math>p</math></td><td><math>1 - p</math></td></tr></table>                                                                                  | Probabilidade | $p$ | $1 - p$ | Variância de $X = p(1 - p)$ |
| Probabilidade | $p$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | $1 - p$                                   |  |                                                                                                                                                                                   |               |     |         |                             |
|               | <p><b>Primitivas imediatas e Integrais definidos</b></p> <p>Áreas de figuras definidas por gráficos de funções:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>conhecer o processo de primitivação (antiderivação) como processo inverso da derivação;</li><li>reconhecer o integral definido de uma função positiva como a área de uma região compreendida entre o gráfico da função num intervalo e o eixo das abcissas.</li></ul> |                                           |  | <ul style="list-style-type: none"><li>Promover o cálculo de primitivas (antiderivadas) tendo por base o conhecimento das derivadas de funções elementares já estudadas.</li></ul> |               |     |         |                             |

| ORGANIZADOR | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |        |           |     |          |       |                                      |       |           |
|-------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|-----------|-----|----------|-------|--------------------------------------|-------|-----------|
| Domínio     | O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |        |           |     |          |       |                                      |       |           |
|             | <p><b>Teorema Fundamental do Cálculo Integral:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>conhecer e aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo Integral e a Fórmula de Barrow para calcular integrais definidos;</li><li>calcular áreas de figuras definidas por funções contínuas e positivas usando a Fórmula de Barrow.</li></ul> <hr/> <p><b>Propriedades das primitivas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>provar e aplicar as seguintes propriedades das primitivas (antiderivadas):<br/><math>P(k f) = k P(f)</math> e <math>P(f + g) = P(f) + P(g)</math><br/>generalizadas aos integrais;</li><li>construir uma tabela de primitivas simples, envolvendo funções polinomiais, <math>\frac{1}{x}</math>, <math>e^x</math>, <math>\text{sen}(x)</math> e <math>\text{cos}(x)</math>;</li><li>usar exclusivamente primitivas de combinações lineares das funções da tabela referida anteriormente.</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>Discutir a relação entre o valor da área abaixo do gráfico de uma função contínua e positiva e a sua primitiva, para introduzir o Teorema Fundamental do Cálculo Integral.</li><li>Propor a determinação de áreas limitadas por gráficos de funções contínuas e positivas nos casos em que se conhece a primitiva.</li><li>Propor a elaboração de um programa em <i>Python</i> para aproximar o valor de um integral.</li></ul> <hr/> <ul style="list-style-type: none"><li>Conduzir os alunos à formulação das propriedades das primitivas (antiderivadas) tendo por base o conhecimento das propriedades das derivadas.</li><li>Propor a construção de uma tabela de primitivas a partir da definição de primitiva, como por exemplo a seguinte:</li></ul> <table><tr><th>Função</th><th>Primitiva</th></tr><tr><td><math>k</math></td><td><math>kx + C</math></td></tr><tr><td><math>x^n</math></td><td><math>\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1</math></td></tr><tr><td><math>e^x</math></td><td><math>e^x + C</math></td></tr></table> | Função | Primitiva | $k$ | $kx + C$ | $x^n$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$ | $e^x$ | $e^x + C$ |
| Função      | Primitiva                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |        |           |     |          |       |                                      |       |           |
| $k$         | $kx + C$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |        |           |     |          |       |                                      |       |           |
| $x^n$       | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |        |           |     |          |       |                                      |       |           |
| $e^x$       | $e^x + C$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |        |           |     |          |       |                                      |       |           |

| ORGANIZADOR     | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |               |              |                 |                 |            |                     |
|-----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|--------------|-----------------|-----------------|------------|---------------------|
| Domínio         | O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | (Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |               |              |                 |                 |            |                     |
|                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | <table><tr><td><math>\frac{1}{x}</math></td><td><math>\ln x  + C</math></td></tr><tr><td><math>\text{sen}(x)</math></td><td><math>-\cos (x) + C</math></td></tr><tr><td><math>\cos (x)</math></td><td><math>\text{sen}(x) + C</math></td></tr></table>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | $\frac{1}{x}$ | $\ln x  + C$ | $\text{sen}(x)$ | $-\cos (x) + C$ | $\cos (x)$ | $\text{sen}(x) + C$ |
| $\frac{1}{x}$   | $\ln x  + C$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |               |              |                 |                 |            |                     |
| $\text{sen}(x)$ | $-\cos (x) + C$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |               |              |                 |                 |            |                     |
| $\cos (x)$      | $\text{sen}(x) + C$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |               |              |                 |                 |            |                     |
|                 | <p><b>Matrizes</b></p> <p>Conceito de matriz:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>identificar matrizes e operações com matrizes em situações concretas;</li><li>entender o conceito de matriz e conhecer alguns casos particulares, nomeadamente matriz retangular, matriz quadrada, matriz linha, matriz coluna, matriz diagonal e matriz identidade.</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>Recorrendo a exemplos de situações reais, conduzir à noção de matriz de números reais, a partir da representação em tabela ou esquemas (por exemplo, em problemas económicos, de composição de misturas, de ligações ferroviárias ou rodoviárias entre cidades, etc.).</li><li>Incentivar a atribuição de significado a um elemento específico da matriz, no contexto da situação que esta representa.</li><li>Propor a identificação e construção de diferentes tipos de matrizes, e a identificação de situações que podem ser representadas por cada um dos tipos de matrizes.</li></ul> |               |              |                 |                 |            |                     |
|                 | <p>Operações com matrizes:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>aplicar operações elementares com matrizes: adição, subtração, multiplicação (multiplicação por um</li></ul>                                                                                                                                                                                      | <ul style="list-style-type: none"><li>Retomar os exemplos trabalhados anteriormente para identificar e contextualizar as operações e o resultado que produzem, e antever propriedades das operações.</li></ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |               |              |                 |                 |            |                     |

| ORGANIZADOR<br>Domínio | AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES<br>O aluno deve ficar capaz de:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS<br>(Exemplos de ações a desenvolver na disciplina)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                        | <p>escalar e multiplicação de duas matrizes);</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>analisar as propriedades da adição e da multiplicação de matrizes e os casos de impossibilidade (associados à dimensão das matrizes).</li> </ul> <hr/> <p><b>Aplicações às transformações geométricas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>caraterizar translações através da soma de matrizes coluna;</li> <li>caraterizar variações de tamanho (<i>scaling</i>), cisalhamentos (<i>shearing</i>) e rotações no plano, recorrendo a matrizes adequadas multiplicadas por matrizes coluna.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Promover a determinação da matriz resultante da adição e da subtração de duas matrizes e analisar casos de impossibilidade;</li> <li>Propor o cálculo do produto de duas matrizes e analisar casos de impossibilidade.</li> <li>Fazer notar o caso das matrizes quadradas de uma certa ordem, especialmente a não comutatividade da multiplicação.</li> <li>Incentivar o recurso à tecnologia para analisar vários exemplos e identificar os casos de impossibilidade e a não comutatividade da multiplicação.</li> </ul> <hr/> <ul style="list-style-type: none"> <li>Recorrer a construções do Geogebra para ilustrar as transformações geométricas realizadas sobre uma figura.</li> <li>Promover a identificação da multiplicação de matrizes com a composição de transformações geométricas.</li> <li>Referir a importância destes procedimentos com matrizes no moderno cinema de animação.</li> </ul> |

### Pensamento Computacional (Introdução à inferência estatística)

Exemplo de programa em *Python* para explorar a noção de intervalo de confiança. Extraem-se sucessivas amostras, com a mesma dimensão, de uma população com distribuição Normal  $N(0,1)$  e para cada uma delas apresenta-se o intervalo de 95% de confiança para

o valor médio. Pode verificar-se que este intervalo depende da amostra e que nem sempre contém o valor médio da população. Pode também fazer-se variar a dimensão das amostras e comparar as amplitudes dos intervalos.

```
import random
import statistics
import math

num_amostras=100
dim_amostra=20

for i in range(num_amostras):
    amostra=[random.normalvariate(0,1) for k in range(dim_amostra)]
    vmedio=statistics.mean(amostra)
    desvio_padrao=statistics.stdev(amostra)
    d=1.96*desvio_padrao/math.sqrt(dim_amostra)
    print('O intervalo de 95% de confiança para o valor médio é [' ,vmedio-d, ', ',vmedio+d
    , ']' )
```

**Nota:** O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

### Possíveis aprofundamentos (Introdução à inferência estatística)

Estudar a relação entre a margem de erro e a dimensão da amostra utilizada.

### Bibliografia de referência (Introdução à inferência estatística)

Alea – *Introdução à Inferência Estatística*.

Obtido de [http://www.alea.pt/index.php?option=com\\_content&view=article&id=133&Itemid=1205&lang=pt](http://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=133&Itemid=1205&lang=pt)

COMAP (2016). *FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.

Graça Martins, M. E. (2005). *Introdução à Probabilidade e à Estatística, com complementos de Excel*. Sociedade Portuguesa de Estatística.

Graça Martins, M. E., e Loura, L. (2002). *Estatística, Modelos de Probabilidade e Introdução à Inferência Estatística* (edição da responsabilidade do DES, Lisboa). Obtido de <https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online>

Moore, D. (2019). *STATISTICS Concepts and controversies*. New York: W.H.Freeman and Company.

Moore, D. et al. (2021). *The Basic Practice of Statistics*. New York: W.H.Freeman and Company.

Rossman, A. et al. (2011). *Workshop Statistics: Discovery with Data*. Wiley.

### Pensamento Computacional (Primitivas imediatas e Integrais definidos)

Exemplo de programa em *Python* para aproximar o valor de um integral. Na função `integral_aproximado` o intervalo de integração é dividido em  $N$  intervalos de igual comprimento e para cada intervalo multiplica-se o valor no ponto médio pelo tamanho do intervalo, resultando a aproximação do integral da soma dos contributos de todos os intervalos. O exemplo usado,  $\int_1^5 \frac{e^x}{x} dx$ , é o mesmo do Compêndio de Matemática, vol. 2, de Sebastião e Silva, e também aqui se calculam as aproximações com um número de intervalos que é sucessivamente duplicado, para se poder observar a estabilização progressiva das casas decimais dos valores obtidos.

```
def integral_aproximado(f, a, b, N):  
    dt=(b-a)/N  
    soma=0  
    for k in range(N):  
        soma+=f(a+k*dt+dt/2)  
    return dt*soma  
  
def f(x):  
    import math  
    return math.exp(x)/x
```

```
a=1
b=5
N=20
for d in range(10):
    N=2*N
    I=integral_aproximado(f,a,b,N)
    print('Com N=',N,' o integral aproximado dá: ',I)
```

**Nota:** O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

### Possíveis aprofundamentos (Primitivas imediatas e Integrais definidos)

- Explorar o conceito de integral definido a partir da formulação de Riemann, discutindo como aplicação o cálculo aproximado de integrais a partir das somas de Riemann (Hughes-Hallett 1997, p. 158).
- Explorar o uso do integral definido para determinar o valor médio de uma função contínua num intervalo (Hughes-Hallett 1997, p. 163).
- Alargar as técnicas de integração referindo a primitivação por partes, promovendo a sua utilização crítica.

### Bibliografia de referência (Primitivas imediatas e Integrais definidos)

Apostol, T. (1999). *Cálculo Volume 1 - Cálculo com funções de uma variável, com uma introdução à Álgebra Linear*. Barcelona: Reverté.

Devlin, K. (2002). *Matemática - A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Estrada, M. F. et al. (2000). *História da Matemática*, Universidade Aberta.

Haese, M. et al. (2019). *Mathematics - Analysis and Approaches HL 2* (for use with IB Diploma Programme). Marlestone: Haese Mathematics.

Haese, M. et al. (2019). *Mathematics - Applications and Interpretation HL 2* (for use with IB Diploma Programme). Marlestone: Haese Mathematics.

Haese, M. et al. (2019). *Mathematics - core topics HL* (for use with IB Diploma Programme). Marlestone: Haese Mathematics.

Hughes-Hallett, D., Gleason, A. et al (1997). *Cálculo – volume 1*. Rio de Janeiro: LTC editora.

Icart, J. (2021). Fonctions: Une Perspective Historique. *Revue MathémaTICE*, nº 75.

Obtido de <http://revue.sesamath.net/spip.php?article1414>

Pina, H. (2010). *Métodos Numéricos*, Lisboa: Escolar Editora.

Sebastião e Silva, J. (1975-1978). *Compêndio de Matemática* (3 volumes). Lisboa: GEP.

SESAMATH - *Manuel Maths 1re - Programme 2019*.

Obtido de [https://mep-outils.sesamath.net/manuel\\_numerique/?ouvrage=ms1spe\\_2019](https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1spe_2019)

SESAMATH - *Manuel Maths 2de - Programme 2019*.

Obtido de [https://mep-outils.sesamath.net/manuel\\_numerique/?ouvrage=ms2\\_2019](https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms2_2019)

SESAMATH - *Manuel Maths Terminale - Spécialité - Édition 2020*.

Obtido de [https://mep-outils.sesamath.net/manuel\\_numerique/?ouvrage=mstsspe\\_2020](https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=mstsspe_2020)

### Possíveis aprofundamentos (Matrizes)

- Explorar as ligações entre a indexação do Google e as matrizes (Almeida, 2010).
- Explorar a relação entre as matrizes e suas operações e a resolução de sistemas, referindo o método de Gauss.
- Explorar as relações entre as matrizes e os grafos, discutindo a representação de grafos usando matrizes, através do conceito de matriz de adjacência.
- Explorar várias aplicações das matrizes, como por exemplo a modelos populacionais; a este respeito pode ser referida a gestão de rebanhos (Queiró, 1982) ou o crescimento populacional usando o modelo de Leslie (Crisler et al. 1999, p. 132).

No estudo das matrizes podem ser usadas as capacidades das calculadoras científicas e gráficas. Quase todas têm a possibilidade de escrever matrizes e operar com as matrizes.

Também podem ser usadas páginas interativas online como por exemplo a seguinte:

Calculadora de matrizes: <https://matrixcalc.org/pt/>

O estudo das transformações geométricas a partir da sua representação matricial pode ser feito de forma interativa a partir de recursos disponíveis em várias páginas. Por exemplo:

- 2x2 matrix transformation: <https://www.geogebra.org/m/QxWrMgBV>
- Matrix Representation of a "Stretch": <https://www.geogebra.org/m/AhNWDWPu>

### Bibliografia de referência (Matrizes)

Abrantes, P. (1994). Contagens, Grafos e Matrizes nos nossos programas? *Educação & Matemática*, nº 30, p. 17-20.

Almeida, M., e Celeman, S. (2010) A Matemática escondida no Google, *Revista do Professor de Matemática*, nº 80. Obtida de: <https://rpm.org.br/cdrpm/80/10.html>

Anton, H., e Busby, R. (2003). *Contemporary Linear Algebra*. Hoboken, NJ.: John Wiley & Sons.

COMAP (1999). *Geometry and its applications-Graph Models*. COMAP, Lexington: COMAP.

COMAP (2016). *FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.

Crisler, N., Fisher, P., e Froelich, G. (1999). *Discrete Mathematics through applications*. New York: COMAP & W. H. Freeman and Company.

Febles, C. E. (1994). Matrizes por detrás das redes. *Educação & Matemática*, nº 29, p. 3-5 e 10.

Martins, R. (2012). Como é que o Google googla. *Isto é Matemática T01E02*. Obtido de <https://youtu.be/DZ0hg2sQg28>

Pesco, D. U., e Bortolossi, H. J. (2013). Imagens digitais e matrizes. *Gazeta de Matemática*, nº 169, p. 44-48.

Queiró, J.F. (1982). Ovelhas matrizes e computadores, *Actas do 4.º Encontro da Delegação Regional do Centro da SPM*, Covilhã 1982.

SESAMATH - *Manuel Terminale Expertes*. Obtido de [https://mep-outils.sesamath.net/manuel\\_numerique/?ouvrage=mstsexp\\_2020](https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=mstsexp_2020)

### ARTICULAÇÃO COM AS DIMENSÕES DA EDUCAÇÃO PARA A CIDADANIA

A Matemática contribui para a implementação da componente curricular de Cidadania e Desenvolvimento sempre que os conhecimentos, capacidades e atitudes são mobilizados de forma intencional para a compreensão crítica de realidades e desafios da sociedade. Neste sentido, o trabalho desenvolvido no âmbito das aprendizagens da Matemática pode favorecer uma reflexão informada sobre questões

relacionadas com os Direitos Humanos, a Democracia e as Instituições Políticas, o Desenvolvimento Sustentável, a Literacia Financeira e o Empreendedorismo, a Saúde, o Risco e a Segurança Rodoviária, o Pluralismo e a Diversidade Cultural e os *Media*, promovendo uma participação cívica consciente, responsável e fundamentada.

No entanto, embora alguns temas ou domínios possam constituir oportunidades particularmente evidentes para esta articulação, a relação entre as Aprendizagens Essenciais e as dimensões da Educação para a Cidadania não se limita a conteúdos específicos.

As competências desenvolvidas no âmbito das aprendizagens da Matemática, como a análise crítica e o tratamento da informação, a interpretação de diferentes perspetivas, a argumentação fundamentada, a resolução de problemas, a comunicação de ideias, o pensamento crítico e criativo, a colaboração e a reflexão sobre diferentes realidades, constituem elementos fundamentais para a concretização dos objetivos definidos na Estratégia Nacional de Educação para a Cidadania.

Assim, com o objetivo de apoiar a articulação entre as Aprendizagens Essenciais da Matemática e a componente curricular de Cidadania e Desenvolvimento, apresentam-se algumas propostas de exploração, sem prejuízo de outras que a escola, no âmbito da sua autonomia, considere pertinentes.

|                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Literacia Financeira e Empreendedorismo</b> | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Dinamizar a realização de simulações relacionadas com processamento de salários (em que sejam utilizados os conceitos de vencimento líquido, salário bruto, abonos e descontos).</li> <li>▪ Sugerir em grande grupo uma discussão que inclua a pesquisa o cálculo de juros simples e compostos em diferentes situações.</li> </ul> |
| <b>Pluralismo e Diversidade Cultural</b>       | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Estimular a discussão e a reflexão sobre os seguintes temas:</li> <li>▪ O papel da mulher na sociedade;</li> <li>▪ Somos oito mil milhões. Como estamos distribuídos?</li> </ul>                                                                                                                                                   |
| <b><i>Media</i></b>                            | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Analisar dados apresentados em representações gráficas, verificando como a informação está apresentada pode influenciar a mensagem.</li> </ul>                                                                                                                                                                                     |

**Desenvolvimento Sustentável**

- Estimular a discussão e reflexão sobre os seguintes temas:
- Alterações climáticas. Os negacionistas têm razão ou há estatísticas a provar que não?;
- Como estão os nossos oceanos? (*Plasticus maritimus*, Planeta tangerina,...).

Cabe ao professor de Matemática em articulação com os restantes elementos do conselho de turma, tendo em consideração o projeto educativo da escola, o currículo (incluindo os projetos assumidos pelo conselho de turma) e outros aspetos que caracterizam o contexto local, definir os percursos pedagógicos mais adequados, que contribuam para a concretização da componente curricular de Cidadania e Desenvolvimento.